LOS NÚMEROS REALES

Los número 1,2,3… se denominan números naturales. El conjunto de los números naturales se representan con la letra **N**, así

$$\mathbf{N} = \{1,2,3\ldots\}$$

Si se suman dos números naturales el resultado es otro natural, pero si se resta el resultado no necesariamente es un número natural. Los número enteros representados por **Z** y dados por

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$$

son cerrados bajo las operaciones de suma, resta y multiplicación, esto quiere decir que si multiplicamos dos número enteros el resultado es entero. Sin embargo los números enteros no son cerrados bajo la división, es decir que si dividimos dos números enteros el resultado no necesariamente es un número entero.

Los números racionales, **Q**, expresados de la forma $\frac{n}{m}$, donde *n, m* son números enteros con *m* distinto de cero, es cerrado bajo las cuatro operaciones. Sin embargo no contempla todos los números que podemos conseguir. Por ejemplo 2π que es el perímetro de una circunferencia de radio 1, no es un número racional. Tampoco $\sqrt{2} \approx 1.41\ldots$ es un número racional, este número representa la solución de la ecuación $h^2 = 2$ y es un número que está en la naturaleza pues él es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con los dos catetos iguales a 1. Estos números que no son racionales, pues no pueden ser expresados de la forma $\frac{n}{m}$ se llaman números irracionales. Una diferencia entre los números racionales y los irracionales está dada en su representación decimal. Los números racionales pueden ser representados por números decimales que terminan ($\frac{1}{4} = 0.25$) o por números decimales que se repiten indefinidamente ($\frac{1}{6} = 0.16666\ldots$, $\frac{1}{11} = 0.09090\ldots$). En cambio los números irracionales son representados por números decimales que no terminan y que no tienen ninguna periodicidad es decir que no tienen ninguna secuencia que se repita.

Los números reales son la unión de los números racionales e irracionales. $\sqrt{2}$ es un número irracional y por tanto real.

Ejemplo 1.- Diga cuales de los siguientes números son naturales, enteros, irracionales, racionales y reales: **a)** -3; **b)** $-\frac{4}{3}$; **c)** 0.2; **d)** $\pi+1$; **e)** 101.

Solución:

a) -3 es un número entero, también es racional pues puede ser escrito como $\frac{-3}{1}$ y es real.

b) $-\frac{4}{3}$ es un número racional pues puede ser escrito como $\frac{-4}{3}$. También es real

c) 0.2 es un número racional pues puede ser escrito como $\frac{2}{10}$. También es real.

d) $\pi+1$ es irracional. Observe que como π es irracional su expansión decimal es infinita no periódica al sumarles 1 da como resultado un número cuya expansión también es infinita no periódica. Es un número real

e) 101 es natural, entero, racional y es real.

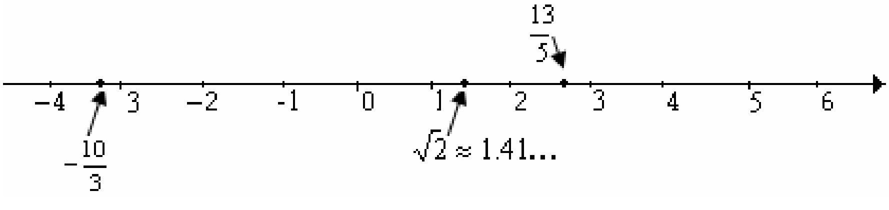
Ejercicio de desarrollo.- Diga cuales de los siguientes números son naturales, enteros, irracionales, racionales y reales:

a) 3π

b) $\sqrt{2}+2$

c) -3.1

Los números reales pueden ser representados en la recta real. Para ello se traza una línea recta y se escoge arbitrariamente un punto en ella, él cual representará el número 0. Se escoge una unidad de medida y a partir del 0 se hacen mediciones de una unidad tanto a la izquierda como a la derecha, los puntos medidos representan los números enteros en el orden dado en la figura. Los puntos a la derecha del 0 representarán los números positivos y a la izquierda están representados los números negativos. Para representar geométricamente a los números racionales podemos valernos de su forma mixta: $a\frac{b}{c}$ con $b<c$, este número representa a $a+\dfrac{b}{c}$, por ejemplo el número $\dfrac{13}{5}$ puede ser escrito como $2\dfrac{3}{5}$. Ahora es claro que el número $\dfrac{13}{5}=2\dfrac{3}{5}$ está a 3/5 unidades de distancia a la derecha del 2. La representación del número $-\dfrac{10}{3}$ es simétrica con respecto al origen del número $\dfrac{10}{3}=3\dfrac{1}{3}$. Hay métodos precisos para representar los números irracionales a través de construcciones geométricas, sin embargo en este texto se harán representaciones no muy exactas de estos números a través de los primeros dígitos de su representación decimal.



Ejercicio de desarrollo: Represente aproximadamente los siguientes números en la recta real.

a) 3π; **b)** $\sqrt{2}+2$; **c)** -3.1; **d)** $\dfrac{-3}{5}$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

A continuación enunciamos las propiedades más importantes de los números reales. Asuma en lo que queda de sección que a,b,c y d son números reales, tenemos entonces:

1.-	**Propiedad conmutativa de la suma**	**Propiedad conmutativa de la multiplicación**
	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Ejemplo	$3+4=4+3$	$2\cdot 6=6\cdot 2$

2.-	**Propiedad asociativa de la suma**	**Propiedad asociativa de la multiplicación**
	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Ejemplo	$(2+13)+7=2+(13+7)$	$13\cdot(2\cdot 5)=(13\cdot 2)\cdot 5$
Comentarios	En ambos casos da 22	En ambos casos da 130, pero es más rápido el cálculo de la primera

El elemento neutro es aquél que con la operación que consideremos deja inalterable el número. Esto es a*__=a

3.-	**Elemento neutro de la suma: 0**	**Elemento neutro de la multiplicación:** el 1
	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$

El inverso de un número es aquél que con la operación que consideremos nos produce el elemento neutro de la operación: a*___=elemento neutro.

4.-	**Propiedad del inverso de la suma:** $-a$	**Inverso de la multiplicación:** $\frac{1}{a}$
	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$

El inverso de la multiplicación es denotado en ocasiones por a^{-1}. Esto es $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

El número 0 no tiene inverso para la multiplicación ya que no existe ningún número que multiplicado por 0 de 1.

5.- Propiedad transitiva: Si $a=b$ y $b=c$ entonces $a=c$
Ejemplo: Si sabemos que $x=y$ y $y=4$ entonces $x=4$

6.-	**Propiedad distributiva**	**Propiedad distributiva**
	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot b$	$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$
Ejemplo	$3\cdot(2+5)=3\cdot 2+3\cdot 5$	$(2+5)\cdot 3=2\cdot 3+5\cdot 3$
Comentarios	En todos los casos da 21	

La resta se define como una suma:

$$a-b=a+(-b)$$

Recuerde que $(-b)$ es el inverso u opuesto de b.

Muchas veces usamos la definición al escribir una resta como una suma: $4-9=4+(-9)$

Para definir el producto $a\cdot b\cdot c$ usamos la propiedad asociativa

$$a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

A continuación listamos una serie de propiedades de los números negativos de mucha utilidad:

Propiedades	**Ejemplos**	**Comentarios**
$-a=(-1)a$	$-4=(-1)4$	Reescritura
$(-a)b=-(a\cdot b)=a(-b)$	$(-2)3=-(2\cdot 3)=2(-3)$	
$(-a)(-b)=a\cdot b$		
$-(a+b)=-a-b$	$-(4+7)=-4-7$	El signo menos se distribuye
$a(b-c)=ab-ac$	$2(4-5)=2\cdot 4-2\cdot 5$	La distributiva se cumple con la diferencia también

Ejemplo 1.- Demostrar que $\sqrt{3}-4=-4+\sqrt{3}$

Solución: Tenemos que $\sqrt{3}-4=\sqrt{3}+(-4)$. Ahora por la propiedad conmutativa $\sqrt{3}+(-4)=(-4)+\sqrt{3}$. Por la propiedad transitiva de la suma resulta que $\sqrt{3}-4=(-4)+\sqrt{3}$, quitando los paréntesis en el lado derecho tenemos la igualdad deseada.

En general tenemos que:

$$x-y=-y+x$$

Ejercicios de desarrollo: Demostrar

a) $(y-x)=-(x-y)$

b) $(x+\sqrt{3})-4=(x-4)+\sqrt{3}$

Propiedades del cero

1.- $a\cdot 0=0$

2.- Si $a\cdot b=0$ entonces $a=0$ ó $b=0$.

La división, $a\div b$ **es definida a través de la multiplicación:**

Si $b\neq 0$, entonces $a\div b=a\cdot b^{-1}$

Donde b^{-1} es el inverso de la multiplicación

Para la división también se emplea la notación $\dfrac{a}{b}=a\div b$

Recordando que $b^{-1}=\dfrac{1}{b}$, la división también puede ser definida con la siguiente notación

$$\frac{a}{b} = a(\frac{1}{b})$$

Con esta notación podemos interpretar por ejemplo que $\frac{5}{7}$ es cinco veces $\frac{1}{7}$

La propiedad **1** del cero permite justificar porque la división entre 0, $a \div 0$, no está definida.
- Si $a \div 0 = c$ y $a \neq 0$ entonces $a = c \cdot 0 = 0$, pero a no es cero.
- $0 \div 0$ tampoco está definida. Si $0 \div 0 = c$ entonces $0 = c \cdot 0$ es decir que 0 entre 0 pudiese dar cualquier valor lo cual no tiene sentido.

Para fracciones presentamos el siguiente recuadro de propiedades:

Propiedades	**Ejemplos**	**Comentarios**
$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$	$-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$	El signo menos se puede transferir a cualquier parte de la fracción
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$	Suma o diferencia con igual denominador
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d}$	$\frac{2}{7} - \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 6 - 5 \cdot 7}{7 \cdot 6} = \frac{12-35}{42} = -\frac{23}{42}$	Suma en cruz, recomendable cuando los denominadores no tienen factores comunes
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 9} = \frac{14}{27}$	Multiplicación de fracciones
$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$	$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$; $\frac{-4}{-7} = \frac{(-1)4}{(-1)7} = \frac{4}{7}$	Fracciones equivalentes Ley de Cancelación: c es un factor en el numerador y el denominador
$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$	$2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3}$	Multiplicación de un número entero por una fracción
$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$	$\frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{3}{2} \cdot 5 = 3 \cdot \frac{5}{2}$	Reescrituras
$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$	$\frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$	Reescrituras
$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	División
$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$	$\frac{1}{3} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 9}$	División a través de una multiplicación
$\frac{a}{\frac{b}{d}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{d}} = \frac{a \cdot d}{b}$	$\frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$	División entre un número y una fracción
$\frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{1}} = \frac{a}{b \cdot c}$	$\frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{1}} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$	División entre una fracción y un número.

Ejemplo 2.- Realice y simplifique las siguientes

a) $3(\frac{x}{3}+1)$; **b)** $-(-2)(-3)$; **c)** $\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot 4$; **d)** $\frac{-x}{-2}\div(-4)$; **e)** $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+3$;

Solución:

a) Se usa primero la propiedad distributiva

$3(\frac{x}{3}+1)=3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot 1=\frac{3}{1}\cdot\frac{x}{3}+3$ Se realiza la multiplicación de fracciones

$=\frac{3\cdot x}{3}+3$ Se simplifica usando la ley de cancelación.

$=x+3$

Observe: en este tipo de situación se distribuye y luego se simplifica

b) Se usa primero la propiedad asociativa

$-(-2)(-3)=(-1)\cdot(-2)(-3)=(-1)\big((-2)(-3)\big)$

$=(-1)(6)=-6$

c) Podemos distribuir primero

$\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 4-3\cdot 4$. Se realiza la multiplicación de fracciones

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}-3\cdot 4=\frac{4}{2}-12=2-12=-10$

d) Para la división reescribimos la expresión como fracción el número entero -4

$\frac{-x}{-2}\div(-4)=\frac{\frac{x(-1)}{2(-1)}}{-4}$. Se usa la ley de cancelación

$=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{-4}{1}}=\frac{x\cdot 1}{2\cdot(-4)}=\frac{x}{-8}=-\frac{x}{8}$

e) Usamos primero la propiedad asociativa de la suma

$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+3=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)+3$ Las fracciones tienen igual denominador

$\frac{2}{5}+\frac{3}{1}=\frac{2\cdot 1+5\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{2+15}{5}=\frac{17}{5}$

Para expresiones numéricas más complicadas se debe tomar en cuenta que lo primero que se resuelve o elimina son los paréntesis más internos, o bien haciendo la operación interna o bien aplicando alguna propiedad de los números reales. Luego se procede a realizar la multiplicaciones o divisiones planteadas de izquierda a derecha y finalmente las sumas y restas.

Ejemplo 3.- Realice y simplifique: **a)** $\frac{2-\frac{4}{5}}{3}-1$; **b)** $2+5(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})$; **c)** $-3+5(\frac{3}{5}-2)$

Solución:

a) Resolvemos primero la diferencia dada en el numerador de $\frac{2-\frac{4}{5}}{3}-1$

$$\frac{2-\frac{4}{5}}{3}-1=\frac{\frac{2}{1}-\frac{4}{5}}{3}-1=\frac{\frac{2\cdot 5-4\cdot 1}{5}}{3}-1=\frac{\frac{10-4}{5}}{3}-1=\frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{1}}-1$$

Aplicamos la doble C para resolver la división planteada**,** luego procedemos a simplificar para finalmente realizar la diferencia planteada.

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{1}}-1=\frac{6}{5\cdot 3}-1=\frac{2}{5}-1=\frac{2\cdot 1-1\cdot 5}{5}=-\frac{3}{5}$$

Posteriormente en este texto se realizaran las sumas de fracciones usando la técnica del mínimo común múltiplo de los denominadores.

b) Resolvemos primero el paréntesis $2+5(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})=2+5(\frac{1\cdot 3-2\cdot 2}{6})=2+5(-\frac{1}{6})$

Pasamos a resolver la multiplicación planteada:

$$2+\frac{5}{1}(-\frac{1}{6})=2-\frac{5}{6}$$

y finalmente resolvemos la diferencia**:**

$$2-\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 6-5}{6}=-\frac{7}{6}$$

c) En esta parte, preferimos eliminar los paréntesis usando la propiedad distributiva, pues observamos que al aplicarla en este ejemplo desaparece el denominador

$$-3+5(\frac{3}{5}-2)=-3+5\cdot\frac{3}{5}-5\cdot 2=-3+3-10=-10$$

Ejercicio de desarrollo.- Realice y simplifique:

a) $\dfrac{2-(\frac{2}{4}-\frac{1}{3})}{1-\frac{1}{2}}$

b) $3-5(1-\frac{2}{3})\cdot\frac{1}{5}$

EJERCICIOS

1) Diga cuales de los siguientes números son naturales, enteros, irracionales, racionales y reales: **1.1)** -12 **1.2)** $\pi-4$; **1.3)** $\sqrt[3]{5}$; **1.4)** 0 **1.5)**– 6.4; **1.6)** 31

2) Represente aproximadamente los siguientes números en la recta real.

2.1) -12; **2.2)** $-\sqrt{2}+2$; **2.3)** -$\sqrt{3}-1$; **2.4)** $\frac{1}{5}$; **2.5)** $\dfrac{\pi}{2}$

3) Realice y simplifique las siguientes:

3.1) $(-3x)\cdot\frac{1}{9}$ **;** **3.2)** $(-5)(-4)(-3)$**;** **3.3)** $\left(\frac{-1}{5}\div 3\right)\cdot(-4)$**;** **3.4)** $3\div\frac{-x}{2}$**; 3.5)** $3-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}$

3.6) $(-3)(-x+\frac{1}{3})$; **3.7)** $0\cdot(12)(-27)$; **3.8)** $(-3)(-3)+2$; **3.9)** $\frac{1}{3x}\div(\frac{1}{9})$; **3.10)** $2\cdot\frac{0}{5}$

3.11) $2\cdot\frac{5}{0}$; **3.12)** $(\frac{1}{5}-\frac{3}{5})\div(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})$; **3.13)** $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}$; **3.14)** $\dfrac{1-\frac{4}{3}}{2-\frac{8}{3}}$; **3.15)** $1-2(\frac{1}{5}-1)$;

3.16) $2-6(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6})$ **3.17)** $(\frac{2}{3}-1+\frac{4}{3})\div 2$; **3.18)** $(\frac{1}{2}-2+\frac{3}{5})10-3$; **3.19)** $3+2\cdot(\frac{1}{5}-3)\cdot\frac{1}{2}$;

3.20) $4-3(\frac{4}{3}-\frac{3}{2})$; **3.21)** $-\frac{-3}{4}+1$; **3.22)** $\frac{3}{-4}+1$; **3.23)** $\frac{-3}{-4}+1$; **3.24)** $1-3\dfrac{(\frac{1}{3}-3)}{2}$

Respuestas:1.1) es un número entero, también es racional y es real. **1.2)** es un número irracional y es real; **1.3)** es un número irracional y es real; **1.4)** es un número entero, también es racional y es real, **1.5**) es un número entero, también es racional y es real **1.6)** es un número natural entero, también es racional y es real

3.1) $-\frac{x}{3}$; **3.2)** $-60)$; **3.3)** $\frac{4}{15}$; **3.4)** $-\frac{6}{x}$; **3.5)** $\frac{1}{6}$; **3.6)** $3x-1$; **3.7)** 0; **3.8)** 11; **3.9)** $\frac{3}{x}$;

3.10) 0 ; **3.11)** No está definido; **3.12**) $-\frac{12}{25}$; **3.13)** $\frac{5}{2}$; **3.14)** $\frac{1}{2}$; **3.15)** $\frac{13}{5}$; **3.16)**-2; **3-17)** $\frac{1}{2}$;

3.18) -12; **3.19)** $\frac{1}{5}$; **3.20)** $\frac{9}{2}$; **3.21)** $\frac{7}{4}$; **3.22)** $\frac{1}{4}$; **3.23)** $\frac{7}{4}$; **3.24) 5**

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Realice y simplifique las siguientes:

1.1) $\frac{1}{3}-\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot 3}{5}$; **1.2)** $\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot 3$; **1.3)** $3-\frac{1}{2}-\frac{(-2)}{3}\frac{5}{2}-2\frac{3}{2}$; **1.4)** $3-\dfrac{1}{2(-\frac{2}{3}+\frac{5}{2})}-2$;

1.5) $\frac{-4}{3}\div 2-3(\frac{1}{-2}-\frac{2}{3})$; **1.6)** $(5\cdot 0\cdot 3\cdot 12)\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+4)-9\frac{1}{3}+\frac{-1}{4}$; **1.7)** $\frac{-3}{4}(\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{-3})$;

1.8) $\frac{-3}{4}(\frac{6}{5}+\frac{4}{-3})$

Respuestas:1.1) $-\frac{1}{6}$; **1.2)** $-\frac{17}{5}$; **1.3)** $\frac{2}{3}$; **1.4)** $\frac{8}{11}$; **1.5)** $\frac{17}{6}$; **1.6)** $-\frac{13}{4}$; **1.7)** $\frac{6}{5}$; **1.8)** $\frac{1}{10}$