REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO DE MATEMÁTICAS

ESTABILIDAD DEL TEOREMA DE WEYL
BAJO PERTURBACIONES

Autor: Jesús Ramón Guillén Ruiz

Mérida - Mayo de 2009

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO DE MATEMÁTICAS

ESTABILIDAD DEL TEOREMA DE WEYL

BAJO PERTURBACIONES

Tesis Doctoral como requisito para optar al Grado de Doctor en Matemáticas

Autor: Jesús Ramón Guillén Ruiz
Tutor: Dr.Pietro Aiena
Co-Tutor: Dr.José Giménez

Mérida - Mayo de 2009

A MIS PADRES Y MI HIJA

a quienes amo profundamente.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento:

A dios todopoderosos, quien me da salud, la energía, la fuerza, la voluntad y la inteligencia necesaria para llevar a felices términos proyectos como éste.

A mi tutor, el Profesor Pietro Aiena, por su gran apoyo y confianza, por ser un gran maestro y orientador, por sus enseñanzas y su hospitalidad, pero sobre todo por la amistad brindada durante la realización de mis estudios de doctorado.

A mi cotutor, el Profesor José Giménez, por su gran disposición, colaboración, orientación y sugerencias aportadas.

A los Profesores, Ennis Rosas y Edward Trousselot, quienes fueron los precursores incondicionales de lo que hoy es un hecho.

A mi esposa Verónica, por su amor, por su gran paciencia para entender mis horas de ausencia, por su apoyo incondicional y por ser parte de mi vida.

A mis hermanas y mi hermano, Tamara, Idania, Luz Neida y Enrique, por su confianza, amor y apoyo fraternal.

A mis amigos y colegas: Pedro peña, René Arguello, Rogrido Dalta, Carlos Carpintero, Rafael Parra, Newman Zambrano, Franklin Camacho, Ramón Pino, Luisa Sánchez y Luis González por su estímulo y apoyo constante.

Al Departamento de Matemáticas y al Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de nuestra Ilustre Universidad de Los Andes, por haberme brindadado la oportunidad de realizar el doctorado.

Al FONACIT, al Postgrado en Matemáticas de la Universidad de Oriente, al Consejo de Estudio de Postgrado(CEP) y al CDCHT proyecto código $C-1657-09-05-ED$, por su apoyo financiero.

A todas las personas que aquí no menciono pero que son parte de este logro. A todos Gracias.

Índice general

Resumen

Un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, se dice que satisface el **Teorema de Weyl** si el complemento del espectro de Weyl en el espectro del operador es el conjunto de todos los puntos aislados del espectro que son autovalores de multiplicidad finita. Por otro lado, diremos que $K \in L(X)$, es **algebraico** si existe un polinomio no constante h tal que $h(K) = 0$. Curto y Han en un trabajo publicado en el 2004, ver [10], demostraron que la clase de los operadores **algebraicamente paranormales**, sobre espacios de Hilbert, satisfacen el Teorema de Weyl. El objetivo principal de este trabajo es demostrar que el **Teorema de Weyl**, para la clase de los operadores **algebraicamente paranormales** es estable bajo perturbaciones algebraicas que conmutan, es decir, si $T \in L(X)$, es **algebraicamente paranormales** y $K \in L(X)$, es un operador **algebraico** que conmuta con T entonces, $T + K$ satisface el **Teorema de Weyl.**

Introducción

En 1909, en un trabajo publicado en la revista del Círculo de Matemáticas de Palermo, el matemático alemán Hermann Weyl demostró que la clase de los operadores autoadjuntos satifacen que $\lambda \in \cap\{\sigma(T+K) : K$ es un operador compacto$\}$, precisamente cuando λ no es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro $\sigma(T)$, ver [28]. Posteriormente, en 1970 el matemático L.A. Coburn, en un tabajo titulado: El Teorema de Weyl para Operadores que no son Normales, ver [8] , llamó esta propiedad el Teorema de Weyl en honor a Hermann Weyl. En este trabajo, Coburn extiende el Teorema de Weyl e introduce una notación más sencilla. Más recientemente, muchos matemáticos, entre los que destacan P. Aiena, B.P. Duggal, C. Lin, M. Oudghiri, se han interesado en el estudio del Teorema de Weyl, dándole un tratamiento sistemático y obteniendo una gran cantidad de resultado importantes sobre dicha propiedad. Vale la pena resaltar que los grandes avances obtenidos sobre el Teorema de Weyl se debe básicamente al desarrollo teórico de la teoría espectral local, particularmente, con el estudio de la Propiedad de Extensión Uni-valuada (SVEP). En lo que se refiere a este trabajo, los resultados importantes de la SVEP serán referidos a [1], texto en el que se hace un estudio detallado de la misma. A lo largo del desarrollo de la tesis doctoral trabajaremos con endomorfismos continuos definidos sobre espacios de Banach y sobre estos, nos hemos propuesto demostrar una amplia cantidad de resultados acerca del Teorema de Weyl, entre los que destacan caracterizaciones y teoremas de estabilidad bajo perturbaciones. Por el título de la tesis, es claro, que estamos muy interesado en desarrollar con la mayor presición posible la teoría de la estabilidad bajo perturbaciones del Teorema de Weyl. Cabe destacar, que el Teorema de Weyl, en general, no es estable bajo perturbaciones. Pero, en casos particulares, puede transmitirse a sus perturbaciones.

En [23], Oberai prueba que el Teorema de Weyl se transmite de un operador $T \in L(X)$ a $T + N$ cuando N es un operador nilpotente que conmuta con T, y se preguntan si este resultado sigue siendo cierto cuando perturbamos con operadores de rango-finito. Luego, en [18], dan respuesta a esta pregunta y establecen que en general no es cierto, pero demuestran que el resutado es cierto para operadores isoloides. Después, en [14] sobre espacios de Hilbert(H), se demuestra que el Teorema de Weyl es estable perturbaciones compactas que conmutan. Además, prueban que si $T \in L(H)$ es un operador finito-isoloide que satisface el Teorema de Weyl y $K \in L(H)$ es un operador compacto que conmuta con T entonces, en Teorema de Weyl es cierto para $T+K$. Más recientemente, Oudghiri en [25], introduce la clase de los operadores $H(p)$ y demuestra que si $T \in H(p)$ entonces, T satisface el Teorema de Weyl. Además, $f(T), f(T^*) \in H(p)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Luego, Oudghiri en [26], generaliza algunos de los resultados antes mencionados al contexto de los espacios de Banach. En este artículo, Oudghiri demuestra que si $T \in L(X)$ es un operador isoloide que satisface el Teorema de Weyl y $K \in L(X)$ un operador que conmuta con T y para el cual existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que K^n es de rango finito entonces, el Teorema de Weyl es cierto para $T+K$. Además, también establece que si T es finito-isoloide entonces, el Teorema de Weyl vale para $T+R$, cuando R es cualquier operador de Riesz que conmuta con T. En este mismo artículo , Oudghiri demuestra que si $T \in H(p)$ y K es un operador algebraico que conmuta con T entonces, $f(T)+K \in H(p)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

En este trabajo presentaremos algunas generalizaciones de los resultados dados en [23], [14],[18] y [10]. Además, daremos una extensión de los resultados dados por Oudghiri, pero en el contexto de los espacio de Hilbert.

Ahora, daremos un resumen por capítulos del presente trabajo.

En el **Capítulo 1**, que hemos llamado **Preliminares**, presentamos los resultados básicos necesarios para el buen desarrollo de este trabajo de tesis doctoral. Cabe destacar que las demostraciones de algunos resultados serán remitidos a los textos donde consideramos se presentan de forma más clara.

En el **Capítulo 2**, introducimos el Teorema de Weyl, damos algunas caracterizaciones del mismo y además demostramos que existe una gran cantidad de operadores que lo satisfacen. Los principales objetivos de este capítulo es demostrar que la clase de los operadores Polaroides que tienen la SVEP satisfacen el Teorema de Weyl y que la clase de los operadores Algebraicamente Paranormales tienen la SVEP y son Polaroides.

Luego, el **Capítulo 3** lo dedicamos a las perturbaciones del Teorema de Weyl, presentamos con detalle los resultados dados por Oudghiri en [26], y damos una extensión de éstos en el contexto de los espacios de Hilbert, particularmente demostrando que la clase de los operadores Algebraicamente Paranormales al ser perturbados por operadores Algebraicos que conmutan entonces, la perturbación es Polaroide y tiene la SVEP. Por tanto, la perturbación satisface el Teorema de Weyl.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo damos los conceptos y resultados necesarios que nos permitan introducir y desarrollar el trabajo de investigación que se presentará en los capítulos siguientes. Cabe destacar, que como en este capítulo no se dan resultados novedosos, gran parte de las demostraciones están remitidas a las bibliografías respectivas.

1.1. Ascenso y Descenso de un Operador

Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{L}(X) := \{T/\ T : X \to X \ \textit{es lineal}\}$. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ se define el *ascenso* de T como:

$$p(T) = \begin{cases} \min\{n : \ker T^n = \ker T^{n+1}\} & \text{si } \{n : \ker T^n = \ker T^{n+1}\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De forma análoga, se define el *descenso* de T como

$$q(T) = \begin{cases} \min\{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} & \text{si } \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\alpha(T) = \dim\ker T \quad \text{y} \quad \beta(T) = co\dim T(X),$$

denotan la dimensión del núcleo y la codimensión del rango de T respectivamente. Además, $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ representan las deficiencias (o defectos) de T. Denotemos por $\Delta(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales que tiene algún defecto finito. Luego, si $T \in \Delta(X)$ entonces, podemos definir el índice de T como:

$$ind(T) = \begin{cases} \alpha(T) - \beta(T) & \text{si} \quad \alpha(T), \beta(T) < \infty \\ \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha(T) = +\infty \\ \\ -\infty & \text{si} \quad \beta(T) = +\infty \end{cases}$$

Teorema 1.1.1. *Sea X un espacio vectorial. Si $T, S \in \Delta(X)$ entonces, $T.S \in \Delta(X)$. Más aún, $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$.*

Demostración:
Ver [16, pág. 108]

■

Ahora, enunciaremos algunos resultados muy importante sobre el ascenso, el descenso y los defectos de un operador; para luego dar un teorema que destaca la relación que existe entre estas cantidades.

Teorema 1.1.2. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Para un número entero no negativo m, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *$p(T) \leq m < \infty$ si y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T^m(X) \cap \ker T^n = \{0\}$;*
2. *$q(T) \leq m < \infty$ si y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subespacio $Y_n \subset \ker T^m$ tal que $X = Y_n \oplus T^n(X)$.*

Demostración:
Ver [16, Cap. VI] ■

Teorema 1.1.3. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Si $p(T)$ y $q(T)$ son finitos entonces, $p(T) = q(T)$.*

Demostración:
Ver [16, Cap. VI]

■

Teorema 1.1.4. *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial X entonces, las siguientes propiedades son ciertas:*

1. *Si $p(T) < \infty$ entonces, $\alpha(T) \leq \beta(T)$;*
2. *Si $q(T) < \infty$ entonces, $\beta(T) \leq \alpha(T)$;*
3. *Si $p(T) = q(T) < \infty$ entonces, $\alpha(T) = \beta(T)$; (posiblemente infinito);*
4. *Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y se cumple que $p(T) < \infty$ o $q(T) < \infty$ entonces, $p(T) = q(T)$.*

Demostración:
Ver [16, Cap. VI]

■

Teorema 1.1.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $p = p(T) = q(T) < \infty$ entonces,*

$$X = T^p(X) \oplus \ker(T^p).$$

Recíprocamente, si para algún número natural m tenemos que $X = T^m(X) \oplus \ker(T^m)$ entonces, $p(T) = q(T) \leq m$. En este caso, $T|T^p(X)$ es biyectiva.

Demostración:
Ver [16, Cap. VI]

■

1.2. Puntos Aislados del Espectro

En lo que sigue $L(X)$ denotará el álgebra de Banach de todos los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach complejo X de dimensión infinita. Iniciamos esta sección dando algunos resultados y nociones básicas sobre el espectro de un operador.

Definición 1.2.1. *Sea $T \in L(X)$. El espectro de T se define como*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es biyectiva}\}.$$

Lema 1.2.1. *Si $T \in L(X)$ es biyectivo entonces, $T^{-1} \in L(X)$.*

Demostración:
Ver [16, Pág. 181]

■

Lema 1.2.2. *Sea $T \in L(X)$. Si X_1 y X_2 son subespacios $T-$invariantes de X, tal que $X = X_1 \oplus X_2$ entonces, $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ donde $T_1 = T|X_1$ y $T_2 = T|X_2$.*

Demostración:
Si $\lambda \notin \sigma(T)$, es claro que $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ y $T(X) = X$. Así, $\ker(\lambda I - T)|_{X_i} = \{0\}$, para $i = 1, 2$. Como $X = (\lambda I - T)(X) = (\lambda I - T)(X_1 \oplus X_2) = (\lambda I - T)(X_1) + (\lambda I - T)(X_2)$, X_1 y X_2 son subespacios $T-$invariantes de X y $(\lambda I - T)|X_i$, para $i = 1, 2$ son iyectivos, se tiene que $(\lambda I - T)(X_i) = X_i$, para $i = 1, 2$. Esto implica que $\lambda \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_1)$. En consecuencia, $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_1) \subset \sigma(T)$.
Por otro lado, si $\lambda \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_1)$ tenemos que $\lambda I - T_i$, para $i = 1, 2$ son biyectivos. Por tanto, $(\lambda I - T_1) \oplus (\lambda I - T_2) = \lambda I - T$ es biyectivo, lo cual implica que $\lambda \notin \sigma(T)$. En consecuencia, $\sigma(T) \subset \sigma(T_1) \cup \sigma(T_1)$.

■

Definición 1.2.2. *Sea $T \in L(X)$. El radio espectral de T se define como*

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 1.2.1. *Si $T \in L(X)$ tenemos:*

1. $\sigma(T) \neq \emptyset$.
2. $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.
3. $\sigma(T)$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$.

Demostración:
Ver [16, Cap. 7] ■

Teorema 1.2.2. *Sean $T, S \in L(X)$. Si $ST = TS$ entonces, $r(TS) \leq r(T)r(S)$ y $r(T+S) \leq r(T) + r(S)$.*

Demostración:
Ver [16, Pág. 184]

$\blacksquare$

Definición 1.2.3. *Sea $T \in L(X)$.*

1. *Diremos que T es acotado inferiormente si T es inyectivo y existe una constante K tal que $K\|X\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in X$. Mientras que el espectro aproximado puntual de T se define como:*

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ } no \text{ } es \text{ } acotada \text{ } inferiormente\}.$$

2. *El espectro sobreyectivo de T se define como:*

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Teorema 1.2.3. *Si $T \in L(X)$ entonces,*

1. *$\sigma_a(T)$ y $\sigma_s(T)$ son subconjuntos compactos no vacios de $\mathbb{C}$.*
2. *$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T) \cap \sigma_s(T)$.*
3. *$\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*)$ y $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$.*

Demostración:
ver [1, Teorema 2.42, Pág. 79]

$\blacksquare$

A continuación introducimos algunas nociones básicas del cálculo funcional de Riesz para operadores acotados sobre espacios de Banach.

Definición 1.2.4. *Sea $T \in L(X)$. El conjunto $\rho(T) := \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$ se llama el resolvente de T. Mientras que la función resolvente o resolvente de T está definida por*

$$R(.,T) : \rho(T) \to L(X)$$

tal que

$$R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}.$$

De acuerdo a la teoría clásica del análisis complejo, una función a valores vectoriales $f : \Delta \to X$, X un espacio de Banach complejo y Δ un subconjunto abierto no vacio de $\mathbb{C}$, es llamada localmente analítica si es diferenciable en todo punto de Δ; es decir, si $\lambda_0 \in \Delta$ entonces, existe un $f'(\lambda_0) \in X$ tal que

$$\|\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f'(\lambda_0)\| \to 0 \textit{ cuando } \lambda \to \lambda_0.$$

Si Δ es conexo y f es localmente analítica entonces, f es analítica. Por [16, Teorema 44.1, Pág. 182], se tiene que si $\lambda, \lambda_0 \in \rho(T)$ entonces,

$$\|\frac{R(\lambda, T) - R(\lambda_0, T)}{\lambda - \lambda_0}\| \leq \frac{\|R(\lambda_0, T)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0|\|R(\lambda_0, T)\|},$$

así, la función $R(\lambda, T)$ depende continuamente de λ, y por tanto la función resolvente es analítica sobre $\rho(T)$. Muchos de los teoremas de la teoría de funciones complejas pueden ser transferidos, junto con las pruebas en una vía puramente formal, a la teoría de las funciones localmente analíticas a valores vectoriales; Como los Teoremas de Cauchy y la formula integral, las expansiones de Taylor y Laurent, el Teorema de Liouville, etc. Además, si Γ es un camino de integración; es decir, una curva rectificable en $\mathbb{C}$, orientada y cerrada podemos definir la integral de las funciones continuas a valores vectoriales $f : \Gamma \to X$, como en el caso clásico; es decir,

$$\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda := \lim \sum f(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

El ascenso y descenso de $\lambda I - T$ están íntimamente relacionados a los polos de la función resolvente $R(\lambda, T)$.
Si $f : \mathbb{D}(\lambda_0, \delta) \setminus \{\lambda_0\} \to X$, X un espacio de Banach, es una función analítica definida en un disco abierto centrado en λ_0 con valores en X entonces, por la expansión de Laurent, f puede ser representado en la forma

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda - \lambda_0)^k},$$

con $a_k, b_k \in X$, y $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \delta) \setminus \{\lambda_0\}$. Los coeficientes son dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^k} d\lambda, \; b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{k-1} d\lambda,$$

donde $\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = r, 0 < r < \delta\}$, está orientado positivamente.

Definición 1.2.5. *Diremos que λ_0 es un polo de orden p de la función resolvente si $b_p \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > p$.*

Si λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$ y consideramos la expansión de Laurent para el caso particular de la función resolvente en una vecindad de λ_0, de acuerdo a las consideraciones previas, tenemos:

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{(\lambda - \lambda_0)^k} \textit{ con } Q_k, P_k \in L(X),$$

para todo $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$, los coeficientes son calculados de acuerdo a las fórmulas

$$Q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\lambda, T)}{(\lambda - \lambda_0)^k} d\lambda,$$

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, T)(\lambda - \lambda_0)^{k-1} d\lambda,$$

y Γ es un círculo, suficientemente pequeño, orientado positivamente alrededor de λ_0 .
Sea $\mathcal{H}(\sigma(T))$ el conjunto de todas las funciones a valores complejos que son localmente analíticas sobre un conjunto abierto que contiene a $\sigma(T)$. Si $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, $\Delta(f)$ denota el dominio de f , Γ un contorno en $\Delta(f)$ que rodea a $\sigma(T)$ que está formado por un sistema finito de curvas rectificable cerradas, orientadas positivamente tal que $\Gamma = \{\gamma_1, ...\gamma_m\}$, $\sigma(T)$ está contenido en el lado interior de Γ y $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ está en el lado externo de Γ.
Por lo antes expuesto, $f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda$,
está bien definida y no depende de la elección de Γ, ver [Pág. 200-201]Heuser.

Definición 1.2.6. *Diremos que $\sigma \subset \sigma(T)$ es un conjunto espectral de T si σ y $\sigma(T) \setminus \sigma$ son cerrados. Además, si σ_1 y σ_2 son conjuntos espectrales de T tal que $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(T)$, diremos que son complementarios.*

Teorema 1.2.4. *Si σ_1 y σ_2 son conjuntos espectrales complementarios de T y Δ_1, Δ_2 son conjuntos abiertos los cuales contiene a σ_1 y σ_2, respectivamente, y no se intersectan entonces, definiendo sobre $\Delta : \Delta_1 \cup \Delta_2$ las funciones f_1, f_2 por*

$$f_1(\lambda) := \begin{cases} 1, & \lambda \in \Delta_1 \\ 0, & \lambda \in \Delta_2 \end{cases}$$

$$f_2(\lambda) := \begin{cases} 0, & \lambda \in \Delta_1 \\ 1, & \lambda \in \Delta_2, \end{cases}$$

tenemos que:

1. *$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\sigma(T))$*
2. *Si $P_1 := f_1(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R(\lambda, T) d\lambda$ y $P_2 := f_2(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} R(\lambda, T) d\lambda$ entonces, $P_1, P_2 \in L(X)$.*

3. ${P_k}^2 = P_k, \; k = 1, 2.$
4. $P_1 P_2 = 0$
5. $P_1 + P_2 = I$,

donde el lado interior de Γ_1 y Γ_2 no comparten elementos de $\sigma(T)$.

Demostración:
Ver [16, Proposición 48.2, Pág. 204]

■

Definición 1.2.7. *Sea $T \in L(X)$ y σ un subcojunto espectral de T. El operador $P_\sigma(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, T)d\lambda$ es llamado el proyector espectral de T asociado con σ, donde Γ es una curva que encierra a σ y que lo separa de la parte restante del espectro.*

1.2.1. La parte casi-nilpotente y el núcleo analítico de un operador

En esta sección introducimos dos subespacio muy importante, que juegan un papel relevante en el desarrollo de los resultados principales de este trabajo.

Definición 1.2.8. *Sea $T \in L(X)$. El conjunto*

$$H_0(T) := \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0 \right\}$$

se llama la parte casi-nilpotente de T. Además, diremos que $T \in L(X)$ es casi-nilpotente si $\sigma(T) = \{0\}$.

Lema 1.2.3. *Si $T \in L(X)$ entonces:*

1. *T es casi-nilpotente si, y sólo si, $H_0(T) = X$.*
2. *$\ker(T^n) \subset H_0(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\ker(T^n) = H_0(T)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\ker(T^k) = H_0(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq n$. En particular, $p(T) \leq k$.*

Demostración:
Ver [1, Pág. 43-44]

■

Lema 1.2.4. *Si $T \in L(X)$ es casi-nilpotente y M es un subespacio $T-$invariante de X entonces:*

1. *$T|M \in L(M)$ es casi-nilpotente.*

2. *$T|M$ es nilpotente, si M es de dimensión finita.*

Demostración:
1.) Sea $x \in M$. Por **Lema 1.2.3**, tenemos que $H_0(T) = X$. Así, $x \in H_0(T|M)$. En consecuencia, $H_0(T|M) = M$, ya que M es $T-$invariante.

2.) Como $T|M$ es casi-nilpotente, por 1., $\sigma(T|M) = \{0\}$. Por tanto, 0 es el único autovalor de $T|M$. En consecuencia, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que el polinomio minimal de $T|M$, $m(\lambda) = \lambda^p$, ver [9, Teorema 24.10, Pág. 208]. Por [9, Teorema 23.9, Pág. 197], $M = \ker(m(T)) = \ker(T^p)$. Esto prueba que $T^p = 0$.

■

Lema 1.2.5. *Sea $T \in L(X)$ casi-nilpotente. Si $F \in L(X)$ es un operador de rango finito que conmuta con T entonces, $T|F(X)$ es nilpotente.*

Demostración:
Como T y F conmutan $F(X)$ es $T-$invariante. Por tanto, por **Lema 1.2.4**, $T|F(X)$ es nilpotente.

■

Lema 1.2.6. *Sea $T \in L(X)$. Si $N \in L(X)$ es un operador nilpotente que conmuta con T entonces, $H_0(T + N) = H_0(T)$.*

Demostración:
Sea $x \in H_0(T)$ y $v \in \mathbb{N}$ tal que $N^v = 0$. Si $U := \sum_{k=0}^{v-1} C_{v,k} T^{v-1-k} N^k$, tomando adecuadamente los coeficientes binomiales $C_{v,k}$, entonces,

$$TU = T(\sum_{k=0}^{v-1} C_{v,k} T^{v-1-k} N^k) = \sum_{k=0}^{v-1} C_{v,k} T^{v-k} N^k = \sum_{k=0}^{v} C_{v,k} T^{v-k} N^k = (T + N)^v,$$

ya que $N^v = 0$. De esto se sigue:

$$\|(T + N)^{vn} x\|^{\frac{1}{n}} = \|(TU)^n x\|^{\frac{1}{n}} = \|T^n U^n x\|^{\frac{1}{n}} = \|U^n T^n x\|^{\frac{1}{n}},$$

ya que $TN = NT$ implica que $UT = TU$. Por tanto, $\|U^n T^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \|U^n\|^{\frac{1}{n}}$. Como $x \in H_0(T)$ y $\lim_{n\to\infty} \|U^n\|^{\frac{1}{n}} < \infty$ entonces, $\lim_{n\to\infty} \|(T + N)^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$, así $x \in H_0(T + N)$. Por tanto, $H_0(T) \subset H_0(T + N)$. Por otro lado, $-N$ es nilpotente y conmuta con $T + N$. Así, por lo anterior, $H_0(T + N) \subset H_0(T + N - N) = H_0(T)$. Esto demuestra que $H_0(T + N) = H_0(T)$.

■

Ahora, introducimos y definimos el núcleo analítico de un operador.

Definición 1.2.9. *Sea $T \in L(X)$. Diremos que x está en el núcleo analítico del operador T, el cual denotaremos por $K(T)$, si existe una constante $c > 0$ y una sucesión de elementos $x_n \in X$ tal que $x_0 = x$, $Tx_n = x_{n-1}$, y $\|x_n\| \leq c^n \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.2.7. *Sean $T, S \in L(X)$ tal que $TS = ST$. Entonces $H_0(T)$ y $K(T)$ son $S-$invariantes.*

Demostración:

Veamos que $H_0(T)$ es $S-$invariante. Si $x \in H_0(T)$ entonces, $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Como S y T conmutan tenemos que: $\|T^n Sx\|^{\frac{1}{n}} = \|ST^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq \|S\|^{\frac{1}{n}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}$, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \|T^n Sx\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Esto prueba que $Sx \in H_0(T)$. Así, $S(H_0(T)) \subset H_0(T)$.

Ahora mostremos que $K(T)$ es $S-$invariante; es decir, si $x \in K(T)$ veamos que $Sx \in K(T)$. Note que si $x = 0$, es claro que, $Sx \in K(T)$. Ahora, si $Sx \neq 0$ entonces $x \neq 0$ y por tanto, $\frac{\|Sx\|}{\|x\|} > 0$. Sea $t = \min\{1, \frac{\|Sx\|}{\|x\|}\}$. Como $x \in K(T)$, existe $\delta > 0$ y una sucesión $x_n \in X$ tal que $x_0 = x$, $Tx_n = x_{n-1}$, y $\|x_n\| \leq \delta^n \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Principio de Arquímedes, existe $p > 0$ tal que $\delta < pt$, así,

$$\frac{\delta}{p} < t < 1 \Rightarrow (\frac{\delta}{p})^n < \frac{\delta}{p} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

y

$$\frac{\delta}{p} < \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \Rightarrow (\frac{\delta}{p})^n < \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

entonces, $\delta^n \|x\| < p^n \|Sx\|$. Como, $\|Sx_n\| \leq \|S\| \|x_n\| \leq \|S\| \|x\| \delta^n < \|S\| p^n \|Sx\|$, tomando $y_n = Sx_n$, $y_0 = Sx$ y $c^n = \|S\| p^n$, claramente se tiene que $\|y_n\| \leq c^n \|y_0\|$ y $Ty_n = TSx_n = STx_n = Sx_{n-1} = y_{n-1}$. Así, $Sx = y_0 \in K(T)$. Esto prueba que $S(K(T)) \subset K(T)$.

■

Teorema 1.2.5. *Si σ un subconjunto espectral (posiblemente vacio) de $T \in L(X)$ entonces, la proyección P_σ genera la descomposición*

$$X = P_\sigma(X) \oplus \ker P_\sigma.$$

Los subespacios $P_\sigma(X)$ y $\ker P_\sigma$ son invariantes para cualquier $f(T)$ con $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Además, el espectro de $T|P_\sigma(X)$ es σ y el espectro de $T|\ker P_\sigma$ es $\sigma(T) \setminus \sigma$.

Demostración:

Ver [16, Teorema 49.1, Pág. 205] ■

Teorema 1.2.6. *Sea $T \in L(X)$ y supongamos que λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$. Si P_0 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$ entonces:*

1. $P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T)$;
2. $\ker P_0 = K(\lambda_0 I - T)$;
3. $X = H_0(\lambda_0 I - T) \oplus K(\lambda_0 I - T)$.

En particular, si $\{\lambda_0\}$ es un polo del resolvente, o equivalentemente

$$0 < p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty,$$

entonces,

$$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^p,$$

$$\ker P_0 = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X).$$

Demostración:
Ver [1, Teorema 3.74, Pág. 157]

■

1.3. Operadores de Fredholm

En esta sección introducimos la clase de los operadores de Fredholm, la cual nos permitirá definir la clase de los operadores de Weyl. Además, definimos la propiedad de extensión uni-valuada en punto y damos algúnas caracterizaciones de esta propiedad sobre los operadores semi-Fredholm que la satisfacen.

Definición 1.3.1. *Diremos que $T \in L(X)$ es:*

1. *superiormente semi-Fredholm si*

$$T \in \Phi_+(X) := \{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ es cerrado}\}.$$

   El conjunto $\Phi_+(X)$ es llamado la clase de los operadores superiormente semi-Fredholm.

2. *inferiormente semi-Fredholm si*

$$T \in \Phi_-(X) := \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\}.$$

   El conjunto $\Phi_-(X)$ es llamado la clase de los operadores inferiormente semi-Fredholm.

3. *semi-Fredholm si* $T \in \Phi_{\pm}(X) := \Phi_{+}(X) \cup \Phi_{-}(X))$. *El conjunto* $\Phi_{\pm}(X)$ *es llamado la clase de los operadores semi-Fredholm.*
4. *Fredholm si* $T \in \Phi(X) := \Phi_{+}(X) \cap \Phi_{-}(X)$. *El conjunto* $\Phi(X)$ *es llamado la clase de los operadores de Fredholm.*

En lo que sigue $\mathcal{K}(X)$ denotará el conjunto de los operadores compactos sobre el espacio de Banach X.

Teorema 1.3.1. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Si* $T, S \in \Phi_{-}(X) \Rightarrow ST \in \Phi_{-}(X)$,
2. *Si* $T, S \in \Phi_{+}(X) \Rightarrow ST \in \Phi_{+}(X)$,
3. *Si* $T, S \in \Phi(X) \Rightarrow ST \in \Phi(X)$,
4. $\Phi_{+}(X) + \mathcal{K}(X) \subseteq \Phi_{+}(X)$,
5. $\Phi_{-}(X) + \mathcal{K}(X) \subseteq \Phi_{-}(X)$,
6. *Si* $T \in \Phi_{\pm}(X)$ *y* $K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow ind(T + K) = ind(T)$.

Demostración:
Ver [22].

■

Observe que a partir de las clases de operadores dadas en la **Definición 1.3.1** podemos definir y estudiar otras partes muy importantes del espectro.

Definición 1.3.2. *Sea* $T \in L(X)$. *El conjunto definido por:*

1. $\sigma_{sf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{no es Semi-Fredholm}\}$ *es llamado el espectro Semi-Fredholm de* T.
2. $\sigma_{f}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{no es Fredholm}\}$ *es llamado el espectro de Fredholm de* T.

Teorema 1.3.2. *Sea* $T \in L(X)$. *Si* $\lambda_0 \in \sigma(T)$ *entonces,* $\lambda_0 I - T$ *es un operador de Fredholm que tiene ascendente y descendente finito, si y sólo si,* λ_0 *es un punto espectral aislado de* T *y su correspondiente proyección espectral* P_0 *es de rango finito.*

Demostración:
Ver [16, Proposición 50.3, Pág. 211]

■

1.3.1. Operadores de Weyl

En lo que sigue *isoA* representa el conjunto de los puntos aislados del onjunto A, mientras que *accA* representa el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A . Estamos interesados en algunas partes distinguidas del espectro, en particular en el espectro de Weyl. Para esto debemos definir la clase de los operadoresde Weyl.

Definición 1.3.3. *Sea $T \in L(X)$.*

1. *Si $T \in W(X) := \{T \in \Phi(X) : ind(T) = 0\}$ diremos que T es un operador de Weyl. El conjunto $W(X)$ es llamado la clase de los operadores de Weyl. Además, el conjunto $\sigma_w(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\}$ es llamado el espectro de Weyl de T.*
2. *Si $T \in B(X) := \{T \in \Phi(X) : p(T), q(T) < \infty\}$ diremos que T es un operador de Browder. El conjunto $B(X)$ es llamado la clase de los operadores de Browder. Además, el conjunto $\sigma_b(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\}$ es llamado el espectro de Browder de T.*

Note que si $T \in B(X)$ entonces, por el **Teorema 1.1.4**, $ind(T) = 0$. Por tanto, $T \in W(X)$. En consecuencia, $B(X) \subset W(X)$ y $\sigma_w(T) \subset \sigma_b(T)$.

Definición 1.3.4. *Diremos que $T \in L(X)$ es un operador de Riesz, si $\lambda I - T \in \Phi(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

Lema 1.3.1. *Sea $T \in L(X)$.*

1. *$\sigma(T) = \sigma(T + Q)$, si $Q \in L(X)$ es casi-nilpotente y $TQ = QT$.*
2. *$ind(T) = ind(T + R)$, si $R \in L(X)$ es un operador de Riesz y $TR = RT$.*
3. *$\sigma_w(T) = \sigma_w(T + R)$, si $R \in L(X)$ es un operador de Riesz y $TR = RT$.*
4. *$\sigma_b(T) = \sigma_b(T + R)$, si $R \in L(X)$ es un operador de Riesz y $TR = RT$.*

Demostración:

1.) Observe que para obtener este resultado es suficiente probar que T es invertible si, y sólo si, $T+Q$ es invertible. Si T es invertible entonces, $T+Q = T(I+T^{-1}Q)$. Luego, por el **Teorema 1.2.2**, tenemos que $r(T^{-1}Q) \leq r(T^{-1})r(Q) = 0$, ya que Q es casi-nilpotente. Así, $T^{-1}Q$ es casi-nilpotente, lo cual implica que $I + T^{-1}Q$ es invertible. En consecuencia, $T + Q$ es invertible. Recíprocamente, si $T + Q$ es invertible, por la implicación anterior, tenemos que $T + Q - Q = T$ es invertible, ya que $-Q$ es casi-nilpotente y conmuta con $T + Q$.

2.) Ver [16, Proposición 53.2, Pág. 222].

3.) Es consecuencia inmediata de 2.

4.) Note que para probar este resultado es suficiente demostrar que $T \in B(X)$ si, y sólo si, $T+R \in B(X)$. Si $T \in B(X)$ entonces, $T \in \Phi(X)$, $p(T) = q(T) < \infty$. Por 2., es claro que $T+R \in \Phi(X)$, mientras que por [2, Teorema 2.80, Pág. 92], se tiene que $p(T+R) = q(T+R) < \infty$. Esto prueba $T+R \in B(X)$. Ahora, mostremos la otra contención. Si $T+R \in B(X)$ por la implicación anterior es claro que $T \in B(X)$, ya que $T = (T+R) - R$ y $-R$ es un operador de Riesz que conmuta con $T+R$.

■

Teorema 1.3.3. *Si T es un operador lineal tal que $\alpha(T) < \infty$ entonces, $\alpha(T^n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
Procedamos por inducción. Supongamos que $\dim \ker T^n < \infty$. Observando que $T(\ker T^{n+1}) \subset \ker T^n$ entonces, la restricción $T_0 := T|\ker T^{n+1} : \ker T^{n+1} \to \ker T^n$ satisface que $\ker T_0 = \ker T$; en efecto: si $x \in \ker T_0$ entonces, $0 = T_0 x = Tx$. Así, $x \in \ker T$. Ahora, si $x \in \ker T$ entonces, $x \in \ker T^{n+1}$. Por tanto, $T_0 x = Tx = 0$. Así, $x \in \ker T_0$. Esto prueba que $\ker T_0 = \ker T$. En consecuencia, la aplicación canónica

$$\widehat{T} : \ker T^{n+1} \diagup \ker T \to \ker T^n$$

$$\widehat{x} \mapsto Tx$$

es inyectiva. Por tanto, $\dim(\ker T^{n+1} \diagup \ker T) \leq \dim \ker T^n$. Dado que $\dim \ker T < \infty$ entonces, $\dim \ker T^{n+1} < \infty$.

■

Teorema 1.3.4. *Si T es un operador lineal y N es un operador nilpotente que conmuta con T entonces, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:*

1. $\ker T \subset \ker(T+N)^p$
2. $\ker(T+N) \subset \ker T^p$

Demostración:
Como N es nilpotente existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $N^p = 0$.
1.) Si $x \in \ker T$ entonces,

$$(T+N)^p x = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} T^n N^{p-n} x = N^p x + \sum_{n=1}^{p-1} \binom{p}{n} T^{n-1} N^{p-n} Tx = N^p = 0.$$

Esto prueba la primera inclusión.
2.) Si $x \in \ker(T+N)$ entonces, $Tx = -Nx$; asi, $T^p x = (-1)^p N^p x = 0$. Esto prueba la segunda inclusión.

■

Para cada $T \in L(X)$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\pi_{00}(T) := \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

$$p_{00}(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in B(X)\} = \sigma(T) \mid \sigma_b(T).$$

Lema 1.3.2. *Si $T \in L(X)$ entonces:*

1. $p_{00}(T) = iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$.
2. $p_{00}(T) \subset \pi_{00}(T)$.
3. $p_{00}(T) = p_{00}(T+Q)$ *para todo* $Q \in L(X)$ *casi-nilpotente que conmuta con* T.

Demostración:
1.) Si $\lambda \in p_{00}(T)$ tenemos que, $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda I - T \in B(X)$. Por tanto, $p(\lambda I - T) > 0$ o $q(\lambda I - T) > 0$, $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, por el **Teorema 1.2.6**, se tiene que $\lambda \in iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$. Esto prueba que $p_{00}(T) \subset iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$. Recíprocamene, si $\lambda \in iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$, es claro que $\lambda I - T \in \Phi(X)$. Esto implica, por el [**Teorema 1.3.6, Pág.16**], y el [**Teorema 1.3.7, Pág.17**], que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, $\lambda \in p_{00}(T)$. Esto demuestra que $p_{00}(T) = iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$.

2.) Es consecuencia de 1.

3.) Es consecuencia del **Teorema 1.3.1**.

■

Teorema 1.3.5. *Si $T \in L(X)$ y N es un operador nilpotente que conmuta con T entonces, $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+N)$.*

Demostración:
Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como $\sigma(T) = \sigma(T+N)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T+N)$. Ahora, por el **Teorema 1.3.3**, $\alpha(\lambda I - T)^p < \infty$, ya que, $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por **Teorema 1.3.4** , $\ker((\lambda I - T) - N) \subset \ker((\lambda I - T))^p$, en consecuencia,

$$\alpha(\lambda I - (T+N)) \leq \alpha((\lambda I - T))^p < \infty.$$

Note que sólo resta demostrar que $0 < \alpha(\lambda I - (T+N))$. Por (2) del **Teorema 1.3.4** , tenemos que, $\ker(\lambda I - T) \subset \ker((\lambda I - T) - N)^p$. Como $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ entonces, $0 < \alpha(\lambda I - (T+N))^p < \infty$, de donde se tiene que $0 < \alpha(\lambda I - (T+N)) < \infty$. Esto prueba que $\lambda \in \pi_{00}(T+N)$. Así, $\pi_{00}(T) \subset \pi_{00}(T+N)$. Para obtener la inclusión opuesta, observe que $-N$ es nilpotente y conmuta con $T+N$, así, por la parte anterior

$$\pi_{00}(T+N) \subset \pi_{00}(T+N-N) = \pi_{00}(T).$$

Esto prueba que

$$\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+N).$$

■

1.3.2. La Propiedad de Extensión Uni-valuada

Otra propiedad importante en el estudio de la teoría de operadores es la propiedad de extensión uni-valuada, la cual tiene su origen en la teoría espectral local y aparece por primera vez en los trabajos publicados por Dunford en los años 1952 y 1954. En la actualidad muchos matemáticos se han interesado en estudiarla y en dar un tratamiento sistemático de la misma. Entre estos matemáticos destacan Laursen, Newmman, Pietro Aiena, etc. Ahora, consideremos una versión local de esta propiedad, la cual fue introducida por Finch en [11].

Definición 1.3.5. *Diremos que $T \in L(X)$ tiene la propiedad de extensión uni-valuada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (esto lo abreviaremos por la SVEP en λ_0), si para todo disco U abierto, $\lambda_0 \in U$, la única función analítica $f : U \to X$ que satisface*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0, \;\; \textit{para} \;\; \textit{todo}\; \lambda \in U$$

es la función $f = 0$. Un operador $T \in L(X)$ es llamado a tener la SVEP si T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

De esto es claro que si $T \in L(X)$ entonces, T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \rho(T)$. Más aún, por el Teorema de la Identidad para funciones analíticas se tiene que si $T \in L(X)$ entonces, T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \overline{\rho(T)}$.

Lema 1.3.3. *Sea $T \in L(X)$. Si $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado entonces, T tiene la SVEP en λ.*

Demostración:
Ver [1, Teorema 2.31, Pág. 74]

■

Teorema 1.3.6. *Si $\lambda I - T \in \Phi_\pm(X)$ entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T tiene la SVEP en λ;*
2. *$H_0(\lambda I - T)$ es cerrado;*
3. *$H_0(\lambda I - T) \bigcap K(\lambda I - T) = \{0\}$;*
4. *$H_0(\lambda I - T) \bigcap K(\lambda I - T)$ es cerrado;*
5. *$p(\lambda I - T) < \infty$;*
6. *$\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T) \bigcap (\lambda I - T)^\infty(X) = \{0\}$ es cerrado;*
7. *$H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita;*

8. *λ no es punto de acumulación de $\sigma_a(T)$.*

Demostración:
Ver [1, Cap. 3]

■

Teorema 1.3.7. *Si $\lambda I - T \in \Phi_{\pm}(X)$ entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T^* tiene la SVEP en λ;*
2. *$K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita;*
3. *$X = H_0(\lambda I - T) + K(\lambda I - T)$;*
4. *$H_0(\lambda I - T) + K(\lambda I - T)$ es denso en X;*
5. *$q(\lambda I - T) < \infty$;*
6. *$X = \mathcal{N}^{\infty}(\lambda I - T) + (\lambda I - T)^{\infty}(X)$;*
7. *$\mathcal{N}^{\infty}(\lambda I - T) + (\lambda I - T)^{\infty}(X)$ es denso en X;*

Demostración:
Ver [1, Cap. 3]

■

Lema 1.3.4. *Sea $T \in L(X)$. Si $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y $\lambda_0 I - T \in \Phi_{\pm}(X)$ entonces, son equivalentes:*

1. *T y T^* tienen la SVEP en λ_0*
2. *λ_0 es un polo del resolvente de T En particular, cualquiera de estas condiciones equivalentes implican que:*

$$H_0(\lambda_0 I - T) = ker(\lambda_0 I - T)^p$$

donde $p := p(T) < \infty$

Demostración:
Ver [1, Cap. 3]

■

El siguiente resultado establece la estabilidad de la SVEP bajo perturbaciones casi-nilpotentes.

Teorema 1.3.8. *Supongamos que $T \in L(X)$ tiene la SVEP. Si $Q \in L(X)$ es casi-nilpotente y $TQ = QT$ entonces, T tiene la SVEP si y sólo si $T + Q$ tiene la SVEP.*

Demostración:
Ver [1, Corolario 2.12, Pág. 64]

■

1.4. Operadores algebraicamente paranormales

Definición 1.4.1. *Diremos que $T \in L(X)$ es:*

1. *paranormal si $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ para todo $x \in X$.*
2. *algebraicamente paranormal si existe un polinomio no constante h tal que $h(T)$ es paranormal.*

Teorema 1.4.1. *Si $T \in L(X)$ es paranormal entonces, $H_0(T) = \ker(T)$.*

Demostración:
Por hióptesis $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$, para todo $x \in X$. Esto implica, mediante un proceso inductivo que $\|Tx\|^2 \leq \|T^{2^n}x\|^{\frac{1}{2^n}}\|x\|^{(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n})}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty$ tenemos que si $x \in H_0(T)$ entonces,

$$\|Tx\|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\|T^{2^n}x\|^{\frac{1}{2^n}}\|x\|^{(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n})} = 0.$$

Así, $\|Tx\| = 0$. En consecuencia, $Tx = 0$. Esto implica que $H_0(T) \subset \ker(T)$, de donde concluimos que $H_0(T) = \ker(T)$, ya que la otra contención siempre es cierta.

■

Definición 1.4.2. *Sea $T \in L(H)$. El conjunto $W(T) := \{< Tx, x >: \|x\| = 1\}$ es llamado el Rango numérico de T.*

Lema 1.4.1. *Si $T \in L(H)$ entonces, $W(T)$ es convexo y $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

Demostración:
Ver [12, Teorema 21.12,Pág. 387]

■

Definición 1.4.3. *Sea H un espacio de Hilbert. $T \in L(H)$, es llamado convexoide si $conv\sigma(T) = \overline{W(T)}$, donde $conv\sigma(T)$ es la cápsula convexa de $\sigma(T)$.*

Definición 1.4.4. *$T \in L(X)$ es llamado normaloide si $r(T) = \|T\|$, donde $r(T)$ es el radio espectral de T.*

Lema 1.4.2. *Si $T \in L(X)$ es paranormal entonces, T es normaloide.*

Demostración:
Ver [16, Pág. 229,]

■

Corolario 1.4.1. *Si $T \in L(X)$ es paranormal y casi-nilpotente entonces, $T = 0$.*

Demostración:
Como T es paranormal entonces, $r(T) = \|T\|$. Pero $r(T) = 0$, por ser T casi-nilpotente, así $\|T\| = 0$. Esto prueba que $T = 0$.

■

Lema 1.4.3. *Sea $T \in L(H)$, H un espacio de Hilbert, paranormal. Si $\lambda \neq 0$, $\mu \neq \lambda$, $x \in \ker(\mu I - T)$ y $y \in \ker(\lambda I - T)$ entonces $\|x + y\| \geq \|y\|$.*

Demostración:
Ver [7, teorema 2.6].

■

Teorema 1.4.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in L(H)$ es paranormal entonces, T tiene la SVEP.*

Demostración:
Sea $\mathbb{D}$ un disco abierto y $f : \mathbb{D} \to H$ una función analítica tal que $0 = (zI - T)f(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $f(z) \in \ker(zI - T)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora, mostraremos que $f \equiv 0$. Si existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $0 \neq f(z) \in \ker(zI - T)$ tenemos, por el **Lema 1.4.3**, que $\|f(\lambda) - f(z)\| \geq \|f(z)\| > 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{D}$ tal que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq z$, ya que $f(\lambda) \in \ker(\lambda I - T)$. Esto dice que f no es continua en z lo cual es una contradicción. Así, $f = 0$.

■

Teorema 1.4.3. *Si $T \in L(X)$ es algebraicamente paranormal entonces:*

1. *$\lambda I - T$ es algebraicamente paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. *$T|M$ es algebraicamente paranormal si M es cerrado y $T-$invariante.*

Demostración:
Como T es algebraicamente paranormal existe un polinomio h tal que $h(T)$ es paranormal.

1.) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $h_\lambda(z) := h(\lambda - z)$. Claramente h_λ es un polinomio. Note que $h_\lambda(\lambda I - T) = h(\lambda I - (\lambda I - T)) = h(T)$. Así,

$$\|p_\lambda(\lambda I - T)x\|^2 = \|h(T)x\|^2 \leq \|[h(T)]^2 x\|\|x\| = \|[h_\lambda(\lambda I - T)]^2 x\|\|x\|.$$

Esto demuestra que h_λ es paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.) Si $\|h(T)x\|^2 \leq \|[h(T)]^2 x\|\|x\|$ para todo $x \in X$, en particular, es claro que $\|h(T)x\|^2 \leq \|[h(T)]^2 x\|\|x\|$ para todo $x \in M$. Así, $T|M$ es algebraicamente paranormal, ya que $h(T)|M = h(T|M)$. ■

Teorema 1.4.4. *Si $T \in L(H)$, H un espacio de Hilbert, es paranormal e invertible entonces, T^{-1} es paranormal.*

Demostración:
Sea $x \in X$. Tomando $y := T^{-1}x$ y $z := T^{-1}y$, tenemos que

$$\|T^{-1}x\|^2 = \|y\|^2 = \|Tz\|^2 \leq \|T^2z\| = \|x\|\|(T^{-1})^2x\|,$$

es decir,

$$\|T^{-1}x\|^2 \leq \|(T^{-1})^2x\|\|x\|.$$

Esto demuestra que T^{-1} es paranormal.

■

Teorema 1.4.5. *Si $T \in L(H)$, H un espacio de Hilbert, es paranormal y $\sigma(T) = \{\lambda\}$ entonces, $T = \lambda I$.*

Demostración:
Consideremos los siguientes casos:
i.) Si $\lambda = 0$, por **Corolario 1.4.1** , es claro el resultado.

ii.) Si $\lambda \neq 0$ entonces, T es invertible. Así, por **Teorema 1.4.4** y **Lema 1.4.2** respectivamente, T^{-1} es paranormal y por tanto normaloide. Ahora, veamos que $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}\}$. Sea $f(z) := \frac{1}{z}$, claramente f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dado que T es invertible. Luego, por el Teorema de la Aplicación Espectral y el Cálculo Funcional de Riesz , tenemos que $f(\{\lambda\}) = f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)) = \sigma(T^{-1})$, es decir, $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}\}$. En consecuencia, $\|T\|\|T^{-1}\| = r(T)r(T^{-1}) = |\lambda||\frac{1}{\lambda}| = 1$. Por [21, Lema 3] se tiene que T es convexoide; es decir, $conv\sigma(T) = \overline{W(T)}$. Como $\sigma(T) = \{\lambda\}$, es claro que $conv\sigma(T) = \{\lambda\}$. Así, $W(T) = \{\lambda\}$. En consecuencia, $< Tx, x >= \lambda =< \lambda x, x >$ para todo $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$. Así, $< Tx - \lambda x, x >= 0$ para todo $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, o equivalentemente, $< Tx - \lambda x, x >= 0$ para todo $x \in H$, de donde se concluye que $T = \lambda I$.

■

Teorema 1.4.6. *Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal y casi-nilpotente entonces, T es nilpotente.*

Demostración:
Sea h un polinomio no constante tal que $h(T)$ es paranormal. Por el Teorema de la Aplicación Espectral tenemos que $\sigma(h(T)) = h(\sigma(T)) = h(\{0\}) = \{h(0)\}$. En consecuencia, por el **Teorema 1.4.5** , $h(T) = h(0)I$. Como h es un polinomio no constante entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $h(z) = a_0 + a_1z + ... + a_mz^m$. Note que $h(0) = a_0$, por tanto, existen $n, k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,k}$ y $c \neq 0$ tal que $h(z) - a_0 = cz^n(z - \lambda_1)....(z - \lambda_k)$. Luego, por el Cálculo Funcional de Riesz, $h(T) - a_0I = cT^n(T - \lambda_1I)....(T - \lambda_kI)$, donde los $T - \lambda_iI$, $i = \overline{1,k}$ son invertibles, ya que $\lambda_i \notin \sigma(T) = \{0\}$. Así, $T^n = 0$.

■

CAPÍTULO 2

El Teorema de Weyl

Un resultado clásico demostrado por H. Weyl en 1909, ver [28], dice que si T es un operador autoadjunto entonces:

$$\lambda \in \bigcap \left\{ \sigma(T+K) \,:\, K \text{ es un operador compacto} \right\},$$

precisamente cuando λ no es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro $\sigma(T)$. Luego, este resultado, fue extendido a otra clase de operadores por Coburn [8] en 1970 e introduce una notación más sencilla. En este capítulo, nos interesamos en dar algunas caracterizaciones del Teorema de Weyl y en establecer que clases de operadores lo satisfacen.

2.1. Caracterizaciones del Teorema de Weyl

Iniciamos esta sección estableciendo el Teorema de Weyl, según la notación introducida por Coburn.

Definición 2.1.1. *Diremos que $T \in L(X)$ satisface el Teorema de Weyl si*

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

De la definición es claro que un operador $T \in L(X)$ satisface el Teorema de Weyl si el complemento del espectro de Weyl en el espectro del operador es el conjunto de todos los puntos aislados del espectro que son autovalores de multiplicidad finita.

Una forma equivalente de expresar el Teorema de Weyl en término de los conjuntos anteriores es la siguiente:

Teorema 2.1.1. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T satisface el Teorema de Weyl*
2. *$\sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$.*

Demostración:
1.) $\Rightarrow$ 2.) Si $\lambda \notin \sigma_w(T)$, tenemos que $\lambda \notin \sigma(T)$ ó $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$ es claro que $\lambda \notin \sigma(T)|\pi_{00}(T)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$. Así, $\lambda \notin \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$. Esto implica que $\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T) \subset \sigma_w(T)$. Para verificar la otra contensión, supongamos que $\lambda \notin \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$. En este caso, tenemos que $\lambda \in \rho(T) \cup \pi_{00}(T)$, ya que $\pi_{00}(T) \subset \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, o equivalentemente si $\lambda \in \rho(T)$ es obvio que $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Ahora, si $\lambda \in \pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, es claro que $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Esto prueba que $\sigma_w(T) \subset \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$. Por tanto, $\sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$.

2.) $\Rightarrow$ 1.) Si $\lambda \notin \pi_{00}(T)$, tenemos que $\lambda \notin \sigma(T)$ ó $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$ es claro que $\lambda \notin \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T) = \sigma_w(T)$. Así, $\lambda \notin \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Esto implica que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subset \pi_{00}(T)$. Para verificar la otra contensión, supongamos que $\lambda \notin \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. En este caso, tenemos que $\lambda \in \rho(T) \cup \sigma_w(T)$, ya que $\sigma_w(T) \subset \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, o equivalentemente si $\lambda \in \rho(T)$ es obvio que $\lambda \notin \pi_{00}(T)$, dado que $\pi_{00}(T) \subset \sigma(T)$.
Por otro lado, si $\lambda \in \sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$, es claro que $\lambda \notin \pi_{00}(T)$. Esto prueba que $\pi_{00}(T) \subset \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Por tanto, $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$.

■

Considerando la siguiente notación $\Delta(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, tenemos que T satisface el Teorema de Weyl si $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$.

Teorema 2.1.2. *Sea $T \in L(X)$. Si T satisface el Teorema de Weyl entonces, $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.*

Demostración:
Supongamos que $T \in L(X)$ satisface el Teorema de Weyl. Para probar la igualdad $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$, es suficiente demostrar la inclusión $\pi_{00}(T) \subset p_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Como λ es un punto aislado en $\sigma(T)$ entonces, T tiene la SVEP en λ y dado que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$ se tiene que $\lambda I - T \in W(X)$. Por tanto, $\lambda I - T \in \Phi(X)$. Así, por el **Teorema 1.2**, se tiene que $p(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por el **Teorema 1.1.4**, se tiene que $p(\lambda I - T)$,$q(\lambda I - T) < \infty$ y en consecuencia $\lambda \in p_{00}(T)$. ■

La condición $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$, puede formularse de distintas formas equivalentes, como se hace ver en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.
2. $\sigma_w(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$
3. $\sigma_{sf}(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$
4. $(\lambda I - T)(X)$ *es cerrado para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.
5. $H_0(\lambda I - T)$ *es finito dimensional para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.
6. $K(\lambda I - T)$ *es finito codimensional para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.
7. $(\lambda I - T)^\infty(X)$ *es finito codimensional para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.
8. $\beta(\lambda I - T) < \infty$ *para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.
9. $q(\lambda I - T) < \infty$ *para todo* $\lambda \in \pi_{00}(T)$.

Demostración:
1.) $\Rightarrow$ 2.) Como $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$ entonces, $p_{00}(T) \cap \sigma_b(T) = \emptyset$. Por tanto, $\pi_{00}(T) \cap \sigma_w(T) = \emptyset$, ya que $\sigma_w(T) \subset \sigma_b(T)$.

2.) $\Rightarrow$ 3.) Es obvia, ya que $\sigma_{sf}(T) \subset \sigma_w(T)$.

3.) $\Rightarrow$ 4.) Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$ entonces, $\lambda I - T$ es semi-Fredholm, por tanto $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado.

4.) $\Rightarrow$ 5.) Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. En consecuencia, $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Por Hipótesis $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado; por tanto, $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$. Como T tiene la SVEP en cualquier punto aislado de $\sigma(T)$, por el **Teorema 1.2**, $H_0(\lambda I - T)$ es finito dimensional.

5.) $\Rightarrow$ 6.) Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Como $\lambda \in iso\sigma(T)$ entonces, por el **Teorema 1.2.6**, se tiene que $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$. Luego, por hipótesis, $K(\lambda I - T)$ es finito codimensional.

6.) $\Rightarrow$ 7.) Es inmediata, ya que $K(\lambda I - T) \subset (\lambda I - T)^\infty(X)$.

7.) $\Rightarrow$ 8.) Note que $(\lambda I - T)^\infty(X) \subset (\lambda I - T)(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. De esto es claro el resultado.

8.) $\Rightarrow$ 1.) Para cualquier $\lambda \in \pi_{00}(T)$ tenemos que $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por hipótesis, $\beta(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda I - T \in \Phi(X)$. Como $\lambda \in iso\sigma(T)$ tenemos que T y T^* tienen la SVEP en λ entonces, por el **Teorema 1.3.6** y el **Teorema 1.3.7**, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\pi_{00}(T) \subset p_{00}(T)$, y como la otra inclusión siempre es cierta para cualquier operador se sigue que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

1.) $\Rightarrow$ 9.) Es claro.

9.) $\Rightarrow$ 8.) Si $q(\lambda I - T) < \infty$, por el **Teorema 1.1.4**, $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T) < \infty$. ■

Denotemos por $\Delta_{00}(T) = \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$.

Teorema 2.1.4. *Sea $T \in L(X)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El Teorema de Weyl es cierto para T;*
2. *T satisface que $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$;*
3. *$H_0(\lambda I - T)$ es finito dimensional para todo $\lambda \in \Delta_{00}(T)$;*
4. *$K(\lambda I - T)$ es finito codimensional para todo $\lambda \in \Delta_{00}(T)$.*

Demostración:
1.) $\Rightarrow$ 2.) Por el **Teorema 2.1.3** , sólo tenemos que probar que $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_w(T)$ entonces, $\lambda \notin \sigma(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, es claro que $\lambda \notin \sigma_b(T)$, ya que $\lambda \in \rho(T)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, lo cual implica que $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Por tanto, $\sigma_b(T) \subset \sigma_w(T)$, en consecuencia se tiene que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$, ya que la otra contensión siempre es cierta.

2.) $\Rightarrow$ 1.) Es claro, ya que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$.

1.) $\Rightarrow$ 3.) Si T satisface el Teorema Weyl tenemos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \Delta(T)$ así, $\Delta_{00}(T) = \Delta(T) = \pi_{00}(T)$. Luego, por el **Teorema 2.1.3** se tiene que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \Delta_{00}(T)$.

3.) $\Rightarrow$ 2.) Como $\pi_{00}(T) \subset \Delta_{00}(T)$, es claro que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Luego, por el **Teorema 2.1.3** , $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Por otro lado, si $\lambda \notin \sigma_w(T)$ entonces, $\lambda \notin \sigma(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, es claro que $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $\lambda \in \Delta(T) \subset \Delta_{00}(T)$, por tanto $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita. Como $\lambda \in \Delta(T)$ se tiene que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que T tiene la SVEP en λ, por tanto $p(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por el **Teorema 1.1.4**, $q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Por tanto, $\sigma_b(T) \subset \sigma_w(T)$, en consecuencia se tiene que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$, ya que la otra contensión siempre es cierta.

3.) $\Rightarrow$ 4.) Sea $\lambda \in \Delta_{00}(T)$. Como $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita entonces, $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado. Por tanto, T tiene la SVEP en λ. Dado que $\lambda \in \Delta_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in \pi_{00}(T)$ o $\lambda \in \Delta(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, es claro que $\lambda \in iso\sigma(T)$. Ahora, si $\lambda \in \Delta(T)$ tenemos que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $p(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, por el **Teorema 1.1.4** , $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, de donde tenemos que $\lambda \in iso\sigma(T)$. Esto demuestra que Si $\lambda \in \Delta_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T)$. Asi, por el **Teorema 1.2.6** , es claro que $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$. De donde concluimos que $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita para todo $\lambda \in \Delta_{00}(T)$.

4.) $\Rightarrow$ 3.) Si $\lambda \in \Delta_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in \pi_{00}(T)$ o $\lambda \in \Delta(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, es claro que $\lambda \in iso\sigma(T)$. Ahora, si $\lambda \in \Delta(T)$, tenemos que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Como $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita y $\lambda I - T \in \Phi(X)$ entonces, por **Teorema 1.3.7** , $q(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, por el **Teorema 1.1.4,** $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in iso\sigma(T)$.

Esto demuestra que si $\lambda \in \Delta_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T)$. Asi, por el **Teorema 1.2.6**, es claro que $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$. De donde concluimos que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \Delta_{00}(T)$.

■

Teorema 2.1.5. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T satisface el Teorema de Weyl;*
2. *T tiene la SVEP en todo $\lambda \notin \sigma_w(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_w(T)$ entonces, $\lambda \in \sigma(T)$ o $\lambda \in \rho(T)$. Si $\lambda \in \rho(T)$ entonces, T tiene la SVEP en λ. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T) \subset iso\sigma(T)$. Asi, T tiene la SVEP en λ. Sólo resta ver que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Por **Lema 1.3.2**, es suficiente probar que $p_{00}(T) \subset \pi_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. De esto tenemos que $\lambda I - T \in \Phi(X)$, $ind(\lambda I - T) = 0$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Así, $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$ ya que $ind(\lambda I - T) = 0$. Como $\lambda \notin \sigma_w(T)$ entonces, T tiene la SVEP λ; por tanto, $p(\lambda I - T) < \infty$, ya que $\lambda I - T \in \Phi(X)$. En consecuencia, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \notin \sigma_b(T)$, es decir, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T)$.

$\Leftarrow$) Veamos que $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Como $\lambda \notin \sigma_w(T)$, por hipótesis, T tiene la SVEP en λ y $\lambda I - T \in W(X)$; esto implica que $p(\lambda I - T) < \infty$ ya que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ (y en consecuencia de tipo Kato). Dado que, $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $ind(\lambda I - T) = 0$, tenemos que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$ y $p(\lambda I - T) < \infty$, en consecuencia $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T) \subset \pi_{00}(T)$. Ahora, si $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$ entonces, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Esto prueba que $\lambda \notin \sigma_w(T)$. En consecuencia, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$.

■

Ejemplo 2.1.1. *La SVEP no implica el Teorema de Weyl.*

Sea T_1 definido sobre el espacio de Hilbert $l^2(H)$ por $T_1(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$. Entonces, T_1 es casi-nilpotente, por tanto tiene la SVEP, y $\pi_{00}(T_1) = \{0\}$. En consecuecia, T_1 no satisface el Teorema de Weyl, ya que $\sigma(T_1) \setminus \pi_{00}(T_1) = \emptyset$ y $\sigma_w(T_1) = \{0\}$.

■

Ejemplo 2.1.2. *El Teorema de Weyl no se transmite a su adjunto.*

Sea T_2 definido sobre el espacio de Hilbert $l^2(H)$ por $T_2(x_1, x_2, ...) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, ...)$, entonces, T_2 es el operador adjunto del operador T_1 considerado en el **Ejemplo 2.1.1**. Por tanto, T_2 es casi-nilpotente y en consecuencia tiene la SVEP. Como $\pi_{00}(T_2) = \emptyset$ se tiene que T_2 satisface el Teorema de Weyl, mientras que $T_2' = T_1$ no satisface el Teorema de Weyl.

■

2.2. Operadores que satisfacen el Teorema de Weyl

Sea X un espacio de Banach. Denotemos por $\mathcal{P}_0(X)$ el conjunto de los $T \in L(X)$ que satisfacen que para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$ existe $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_0(\lambda I - T) = ker(\lambda I - T)^p.$$

Teorema 2.2.1. *$T \in \mathcal{P}_0(X)$ si, y sólo si, $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. En particular, si T tiene la SVEP entonces, T satisface el Teorema de Weyl si, y sólo si, $T \in \mathcal{P}_0(T)$.*

Demostración:
$\Rightarrow$ Sea $T \in \mathcal{P}_0(T)$. Entonces, para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$ existe $p(\lambda) := p$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Veamos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como $\lambda \in iso\sigma(T)$, por el **Teorema 1.2.6** , tenemos que $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$. Así, $X = \ker(\lambda I - T)^p \oplus K(\lambda I - T)$. Luego, $(\lambda I - T)^p(X) = K(\lambda I - T)$. Por tanto, $X = \ker(\lambda I - T)^p \oplus (\lambda I - T)^p(X)$. Esto implica, por **Teorema 1.1.5**, que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$. Como $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, por **Teorema 1.1.4**, tenemos que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Por tanto, $\lambda \in \sigma(T) | \sigma_w(T) = p_{00}(T)$. Esto demuestra que $\pi_{00}(T) \subset p_{00}(T)$. Luego, por el **lema 1.3.2**, se tiene que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

$\Leftarrow$ Si $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$ y $\lambda \in \pi_{00}(T)$ entonces, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por **teorema 1.2.6** , tenemos que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Esto demuestra que $T \in \mathcal{P}_0(T)$.
La última parte es clara por el **Teorema 2.1.5** . ■

Oudghiri en [25] estudió una clase de operadores, denotada por $H(p)(X)$ o simplemente $H(p)$ si es claro el espacio donde actúan los operadores, la cual está formada por los $T \in L(X)$ que satisfacen que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ existe $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p.$$

De esto es claro que $H(p) \subset \mathcal{P}_0(X)$. Por tanto, del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado dado por Oudghiri en [25].

Corolario 2.2.1. *Si $T \in H(p)$ entonces, T tiene la SVEP y satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Si $T \in H(p)$ entonces, $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, por el **Lema 1.3.3**, T tiene la SVEP. Como $H(p) \subset \mathcal{P}_0(X)$ se tiene que T satisface el Teorema de Weyl.

■

Definición 2.2.1. *Diremos que $T \in L(X)$ es isoloide si todos los puntos aislados de $\sigma(T)$ son autovalores de T.*

Teorema 2.2.2. *Sea $T \in L(X)$ para el cual existe $d \in \mathbb{N}$ y una constante $c > 0$ tal que*

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{c}{dist(\lambda, \sigma(T))^d} \quad para \ \ todo \ \ \lambda \notin \sigma(T). \tag{2.1}$$

Si T o T^* tiene la SVEP entonces $f(T)$ satisface el Teorema de Weyl para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración:
Afirmación 2.1. Si $\mu \in iso\sigma(T)$ entonces, $H_0(\mu I - T) = \ker(\mu I - T)^d$.
En efecto, si $\mu \in iso\sigma(T)$, por **Teorema 1.2.6** , $H_0(\mu I - T)$ es cerrado. Sea T_0 la restricción de T a $H_0(\mu I - T)$. De (2.1), tenemos que

$$| \lambda - \mu |^d \|(\lambda I - T_0)^{-1}\| < c, \tag{2.2}$$

para λ en una vecindad suficientemente pequeña de μ. Consideremos un círculo suficientemente pequeño C de radio ϵ y centro en μ. Como $\mu I - T_0$ es casi-nilpotente entonces, por el Cálculo Funcional de Riesz, tenemos que $(\mu I - T_0)^d = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda - \mu)^d (\lambda I - T_0)^{-1} d\lambda$ y por (2.2), $\|(\mu I - T_0)^d\| < c\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Esto implica que

$$H_0(\mu I - T) = \ker(\mu I - T_0)^d \subset \ker(\mu I - T)^d \subset H_0(\mu I - T),$$

así, $H_0(\mu I - T) = \ker(\mu I - T)^d$. Luego, por **Teorema 1.2.6**, podemos concluir que $\mu \in iso\sigma(T)$ es un polo del resolvente de T, y por tanto un autovalor, es decir, T es isoloide. Por tanto, si $\lambda \in \pi_{00}(T) \subset iso\sigma(T)$ es claro que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por el **Teorema 1.1.4**, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Esto prueba que $\lambda \in p_{00}(T)$. Así, por el **Lema 1.3.2**, concluimos que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. En consecuencia, por el **Teorema 2.2.1** , tenemos que T satisface el Teorema de Weyl. Ahora, por [1, Lema 3.89], tenemos que:

$$\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)),$$

de donde concluimos, por el **Teorema 2.1.1** , que $f(T)$ satisface el Teorema de Weyl para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

■

Lema 2.2.1. *Si $T \in H(p)$ y Y es un subespacio cerrado T-invariante de X entonces, $T|_Y \in H(p)(Y)$.*

Demostración:
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $T \in H(p)$ existe $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Dado que $H_0(\lambda I - T|_Y) \subset H_0(\lambda I - T) \cap Y = ker(\lambda I - T)^p \cap Y = \ker(\lambda I - T|_Y)^p$, es claro que $H_0(\lambda I - T|_Y) = \ker(\lambda I - T|_Y)^p$, ya que $\ker(\lambda I - T|_Y)^p \subset H_0(\lambda I - T|_Y)$. Esto prueba el resultado. ■

Teorema 2.2.3. *Para $T \in H(p)$, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl.*
2. *Si Y es un subespacio cerrado y $T-$invariante de X entonces, $T|Y$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
1.) Por el **Corolario 2.2.1** es claro que T satisface el Teorema de Weyl. Ahora, veamos que T^* satisface el Teorema de Weyl. Por el **Teorema 2.2.1** es suficiente probar que $\pi_{00}(T^*) = p_{00}(T^*)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T^*)$ y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Como $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $X = \ker(\lambda I - T)^p \oplus K(\lambda I - T)$, tenemos que $(\lambda I - T)^p(X) = (\lambda I - T)^p(K(\lambda I - T)) = K(\lambda I - T)$ es cerrado, por tanto $(\lambda I^* - T^*)^p(X)$ es cerrado. Por otro lado, tenemos que $\alpha(\lambda I^* - T^*) < \infty$, ya que $\lambda \in \pi_{00}(T^*)$, y por el **Teorema 1.3.3**, $\alpha(\lambda I^* - T^*)^p < \infty$. Así, $(\lambda I^* - T^*)^p \in \Phi_{\pm}(X)$ y por tanto $(\lambda I^* - T^*) \in \Phi_{\pm}(X)$. Como $\lambda \in iso\sigma(T^*)$, es claro que T^* tiene la SVEP en λ, asi, por el **Teorema 1.3.6**, $H_0(\lambda I^* - T^*)$ es de dimensión finita. Luego, por [16, Teorema 50.3, pág 211], podemos concluir que $\lambda \in p_{00}(T^*)$. Esto implica que $\pi_{00}(T^*) \subset p_{00}(T^*)$. En consecencia , por el **Lema 1.3.2**, $\pi_{00}(T^*) = p_{00}(T^*)$.

2.) Por el **Lema 2.2.1** y la afirmación anterior se sigue el resultado.

■

Ejemplo 2.2.1. *La afirmación* 2. *del* ***teorema 2.2.3****, puede fallar para un operador arbitrario con la SVEP.*

Sea T_1 como en el **Ejemplo 2.1.1**, y sea S el left shift sobre $l^2(\mathbb{N})$ dado por $S(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$. Definamos T sobre X:=$l^2(\mathbb{N}) \bigoplus l^2(\mathbb{N})$ por $T = T_1 \oplus S$. Como T_1 es casi-nilpotente , S tiene la SVEP y $\sigma(S)$ es el disco cerrado unitario,ver [17], se tiene que T tiene la SVEP y $\sigma(T)$ es el disco cerrado. Por tanto, $\sigma(T)$ no tiene puntos aislados, así, $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$ y por el **Teorema 2.2.1** se tiene que T satisface el Teorema de Weyl. Pero, la restricción a T_1 de T no satisface el Teorema de Weyl.

■

En el próximo resultado establecemos una propiedad de cerradura de la clase $H(p)$.

Teorema 2.2.4. *Sea $T \in L(X)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$T \in H(p)$*
2. *$f(T) \in H(p)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

3. *Existe una función $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ que no es constante en cualquiera de sus componentes conexas de su dominio tal que $f(T) \in H(p)$.*

Demostración:
1.) $\Rightarrow$ 2.) Supongamos que $T \in H(p)$, y consideremos una función analítica f sobre Ω, donde $\sigma(T) \subset \Omega$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario. Si $\alpha \notin f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, entonces $\alpha I - f(T)$ es invertible y por tanto $H_0(\alpha I - f(T)) = \ker(\alpha I - f(T)) = \{0\}$. Ahora, si $\alpha \in f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, tomemos $g : \alpha - f$ sobre Ω. Supongamos primero que g tiene solamente una cantidad finita de ceros en $\sigma(T)$. En este caso podemos escribir $g(\lambda) = s(\lambda)h(\lambda)$, donde h es analítica sobre Ω y sin ceros en $\sigma(T)$, mientras que s es un polinimio de la forma $s(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ con raices distintas $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \sigma(T)$. De esto se sigue que $g(T) = s(T)h(T)$ y $h(T)$ es invertible, así por el [1, Lema 3.101], tenemos que

$$H_0(g(T)) = H_0(s(T)) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_0(\lambda_i I - T).$$

Por otro lado, como $T \in H(p)$, para cada λ_i, $i = \overline{1,n}$ existe $d_i \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda_i I - T) = \ker(\lambda_i I - T)^{d_i}$. Luego, por **Lema 1.2.3**, tomando $d = \max\{\lambda_i, i = \overline{1,n}\}$ tenemos que $H_0(\lambda_i I - T) = \ker(\lambda_i I - T)^{d\alpha_i}$. En consecuencia,

$$H_0(g(T)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(\lambda_i I - T)^{d\alpha_i} = \ker(\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i I - T)^{d\alpha_i}) =$$

$$\ker(\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i I - T)^{\alpha_i})^{d} = \ker(s(T)^d) = \ker(g(T)^d).$$

Así, $f(T) \in H(p)$. Ahora, si g tiene infinitos ceros en $\sigma(T)$, entonces existen dos dos subconjuntos abiertos y disjuntos de $\mathbb{C}$, Ω_1 y Ω_2 tal que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $g = 0$ sobre Ω_1, y g tiene solo una cantidad finita de ceros sobre Ω_2. De esto se sigue que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_1 y σ_2 son dos subconjuntos espectrales de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma_i \subset \Omega_i$, para $i = 1, 2$. Por tanto, la descomposición espectral provee dos subespacios cerrados $T-$invariantes X_1, X_2 para los cuales $X = X_1 \cup X_2$, $\sigma(T|X_1) = \sigma_1$ y$\sigma(T|X_2) = \sigma_2$; en particular, $g(T)|X_1 = g(T|X_1) = 0$. Como $T|X_2 \in H(p)(X_2)$, por **Lema 2.2.1**, y $g(T)|X_2$ tiene una cantiad finita de ceros en $\sigma(T|X_2)$, por la parte anterior tenemos que $g(T)|X_2 \in H(p)(X_2)$, y en consecuencia, $H_0(g(T)|X_2) = \ker(g(T)|X_2)^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Finalmente,

$$H_0(\alpha I - f(T)I) = H_0(g(T)) = X_1 \oplus \ker((g(T)|X_2)^k) =$$

$$\ker(g(T)^k) = \ker(\alpha I - f(T))^k,$$

lo cual completa la prueba de 1.) $\Rightarrow$ 2.).

2.) $\Rightarrow$ 3.) Es obvio.

3.) $\Rightarrow$ 1.) Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y sea $\alpha := f(\lambda_0)$. Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ es claro, por el Teorema de la

Aplicación espectral, que $\alpha \notin \sigma(f(T))$. Así, $H_0(\alpha I - f(T)) = \ker(\alpha I - f(T)) = \{0\}$. Supongamos que $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Como f es no constante sobre cada componente conexa de su dominio, se sigue que $f(\lambda) - \alpha = (\lambda - \lambda_0)^r s(\lambda) g(\lambda)$, donde s es un polinomio complejo tal que $s(\lambda_0) \neq 0$ y g es una función analítica que no se anula en $\sigma(T)$.
Por tanto,

$$f(T) - \alpha = (T - \lambda_0 I)^r s(T) g(T)$$

y $g(T)$ es invertible. Por otro lado, por hipótesis, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_0(f(T) - \alpha I) = \ker(\alpha I - f(T))^d.$$

Por tanto,

$$H_0(\lambda_0 I - T) \subset H_0(\alpha I - f(T)) = \ker(\lambda_0 I - T)^{dr} \bigoplus \ker(s(T)^d),$$

como $\ker(\lambda_0 I - T)^{dr} \subset H_0(\lambda_0 I - T)$ y $H_0(\lambda_0 I - T) \cap \ker(s(T)^d) = \{0\}$, por [1, Lema 3.101], tenemos que $H_0(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^{dr}$. Esto termina la prueba.

■

Teorema 2.2.5. *Sea $T \in L(X)$. Si existe una función $h \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ que no es constante en cualquiera de sus componentes conexas de su dominio tal que $h(T) \in H(p)$ entonces, $f(T)$ y $f(T)^*$ satisfacen el Teorema de Weyl para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración:
Por el **Teorema 2.2.4**, se tiene que $f(T) \in H(p)$, para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, y por el **Teorema 2.2.3**, $f(T)$ y $f(T)^*$ satisfacen el Teorema de Weyl para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

■

Corolario 2.2.2. *Si $T \in H(p)$ entonces, $f(T)$ y $f(T)^*$ satisfacen el Teorema de Weyl para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración:
Sea $h \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ definida por $h(\lambda) := \lambda$ para todo $\lambda \in C$. Claramente, por el Cálculo Funcional de Riesz tenemos que $h(T) = T \in H(p)$. Luego, el resultado es inmediato por el **Teorema 2.2.5**.

■

Corolario 2.2.3. *Sea $T \in H(p)$. Si Y es un subespacio $T-$invariante de X entonces, $f(T|_Y)$ satisface el Teorema de Weyl para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración:
Es inmediata por el **Teorema 2.2.3** y por el **Corolario 2.2.3**.

Ahora, definiremos una amplia cantidad de clases de operadores y estableceremos mediante un gráfico la relación que existe entre ellos, para luego clasificar las clases que satisfacen el Teorema de Weyl.

Definición 2.2.2. *Sea $T \in L(X)$. Diremos que:*

1. *T es Paranormal si $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ para todo $x \in H$*
2. *T es Totalmente Paranormal (T. P) si $\lambda I - T$ es paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$*
3. *T es Totalmente Algebraicamente Paranormal (T. A. P) si existe un polinimio h no nulo tal que $h(T)$ es Totalmente Paranormal.*
4. *T es Escalar Generalizado si existe un homomorfismo continuo de álgebras $\Theta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \to L(X)$ tal que $\Theta(1) = I$ y $\Theta(Z) = T$, donde Z denota la función identidad sobre $\mathbb{C}$.*
5. *T es Subescalar si el es similar a la restricción de un operador Escalar Generalizado a uno de sus subespacios cerrados invariantes.*
6. *T es espectral de tipo finito cuando admite una representación de la forma $T = S + N$, donde S es un operador escalar y N es un operador nilpotente que conmuta con T.*
7. *T satisface la condición G1 si $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq 1/dist(\lambda, \sigma(T))$.*
8. *T es Transaloide si $\|\lambda I - T\| = r(\lambda I - T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Definición 2.2.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Diremos que:*

1. *T es Auto-adjunto si $T = T'$.*
2. *T es Normal si $TT' = T'T$.*
3. *T es Quasi-normal si $T'T^2 = TT'T$.*
4. *T es Hyponormal si $\|T'x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in H$*
5. *T es *- Paranormal (*- P) si $\|T'x\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ para todo $x \in H$*
6. *T es M-Hyponormal si existe M> 0 tal que $(TT') \leq M(T'T)$.*
7. *T es p-Hyponormal, con $0 < p \leq 1$, si $(TT')^p \leq (T'T)^p$.*
8. *T es Algebraicamente p-Hyponormal si existe un polinimio h no nulo tal que $h(T)$ es p-Hyponormal.*
9. *T es log-Hyponormal si T es invertible y $log(TT') \leq log(T'T)$.*

10. T es Convexoide si $conv\sigma(T) = \overline{W(T)}$.

11. T es Espectraloide si $\lambda I - T$ es convexoide para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ahora, enunciaremos una serie de resultados sobre ciertas clases de operadores que satisfacen El Teorema de Weyl. Cabe destacar que la mayoria de estos resultados que aquí presentamos los obtendremos como consecuencias de los resultados en este trabajo.

1. Si $T \in L(H)$ es hyponormal entonces, el Teorema de Weyl es cierto para T. Este resultado fue dado por Coburn en 1966, ver [8].

2. Los operadores de Toeplitz satisfacen el Teorema de Weyl . Este resultado fue dado por Coburn en 1966, ver [8].

3. Si $T \in L(X)$ es isoloid, satisface el Teorema de Weyl y si $h(T)$ es un polinomio entonces, el Teorema de Weyl es cierto para $h(T)$ si, y sólo si,$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$. Este resultado fue dado por Oberai en 1977, ver [23].

4. Si $T \in L(H)$ es algebraicamente hyponormal entonces, el Teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Este resultado fue dado por Young Min Han y W. Young Lee en el 2001,ver [14].

5. Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal entonces, el Teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Este resultado fue dado por Raúl Curto y Youn Min Han en el 2003, ver [10].

6. Si $T \in L(H)$ o $T^* \in L(H)$ es *- paranormal entonces, el Teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Este resultado fue dado por Youn Min Han y An-Hyun Kim en el 2004, ver [13].

Teorema 2.2.6. *Si $T \in L(X)$ es un operador Escalar Generalizado entonces, $T \in H(p)$.*

Demostración:
Consideremos un homomorfismo continuo de álgebras $\Theta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \to L(X)$ tal que $\Theta(1) = I$ y $\Theta(Z) = T$, y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Como T satisface la condición (C) de Dunford, se tiene que T tiene la SVEP y $H_0(\lambda I - T) = X_T(\{\lambda\})$ es cerrado , Ver [17] . Por otro lado, para $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, $\Theta(f)(H_0(\lambda I - T)) \subset H_0(\lambda I - T)$, ya que $\Theta(Z) = T$ conmuta con $\Theta(f)$. Ahora, si consideramos el homomorfismo continuo de álgebras $\widetilde{\Theta} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \to L(H_0(\lambda I - T))$ definido por $\widetilde{\Theta}(f) = \Theta(f)|H_0(\lambda I - T)$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, tenemos que $T|H_0(\lambda I - T)$ es Escalar Generalizado. Por tanto, por [17, proposición 1.5.10], $\lambda I - T|H_0(\lambda I - T)$ es nilpotente. Así, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^d$.

■

Corolario 2.2.4. *Si $T \in L(X)$ es un operador subescalar entonces, $T \in H(p)$.*

Demostración:
Por **Lema 2.2.1** y **Teorema 2.2.6** se tiene el resultado.

■

Corolario 2.2.5. *Si $T \in L(H)$ es un operador M-hiponormal, p-hiponormal, log-hiponormal, algebraicamente hiponormal o algebraicamente p-hiponormal entonces, $T \in H(p)$.*

Demostración:
Si $T \in L(H)$ es M-hiponormal, p-hiponormal o log-hiponormal entonces, T es un operador subescalar, ver [17, proposición 2.4.9] y [19, Corolario 2] respectivamente. Así, por el **Corolario 2.2.4**, $T \in H(p)$. Por otro lado, si T es algebraicamente hiponormal (resp. algebraicamente p-hiponormal), existe un polinomio no constante h sobre $\mathbb{C}$ tal que $h(T)$ es hiponormal (resp. p-hiponormal). Como $h \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ por el **teorema 2.2.4**, tenemos que $T \in H(p)$.

■

Corolario 2.2.6. *Si $T \in L(X)$ es un operador totalmente paranormal entonces, $T \in H(p)$.*

Demostración:
Por hipótesis $\lambda I - T$ es paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, por el **Teorema 1.4.1**, es claro que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto demuestra que $T \in H(p)$.

■

Corolario 2.2.7. *Si $T \in L(X)$ es un operador algebraicamente totalmente paranormal entonces, $T \in H(p)$.*

Demostración:
Por definición existe un polinomio no constante h sobre $\mathbb{C}$ tal que $h(T)$ es totalmente paranormal. Así, por **Corolario 2.2.6**, $h(T) \in H(p)$. Esto implica, por el **teorema 2.2.4**, que $T \in H(p)$.

■

Ejemplo 2.2.2. *La Clase de los operadores paranormales no está contenida en $H(p)$.*

Sea $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ definido por:

$$T(x_1, x_2, ...) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, ..., x_n + x_{n+1} + x_{n+2}, ...).$$

Fácilmente se verifica que T es paranormal. Por otro lado,

$$(T - I)(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_1 + x_3, ..., x_n + x_{n+2}, ...),$$

satisface que $p(T - I) = \infty$. Así, por **Lema 1.2.3**, $H_0(T - I) \neq \ker(T - I)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $T \notin H(p)$.

$\blacksquare$

En los diagramas siguientes presentamos un resumen, según los resultado dados, de la clase de operadores satisfacen el Teorema de Weyl.

$$\begin{tikzcd}
Espec.\quad finito \arrow[r] & G-Escala \arrow[d] & & \\
M-Hypo \arrow[r] & Subescalar \arrow[r] & H(p) \arrow[r] & Teo.Weyl \\
Log-Hypo \arrow[ur] & p-Hypo \arrow[u] \arrow[r] & A.\quad p-hypo \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Gráfico 2.1

Por otro lado, tenemos el siguiente grafico:

$$
\begin{tikzcd}
 & & Spectraloide \\
Teo.Weyl & Normaloide \arrow[ur] & convexoide \arrow[u] \\
H(p) \arrow[u] & Paranormal \arrow[ul] \arrow[u] & transaloide \arrow[ul] \arrow[u] \\
A.\ T.\ P \arrow[u] & T.\ P \arrow[l] \arrow[u] & Hyponormal \arrow[l] \arrow[u] \\
Auto-Adjunto \arrow[r] & normal \arrow[r] & quasi-normal \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Gráfico 2.2

Lema 2.2.2. *Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal entonces, T tiene SVEP.*

Demostración:
Como T es algebraicamente paranormal existe un polinomio h no constante tal que $h(T)$ es paranormal. En consecuencia, por **Teorema 1.4.2**, $h(T)$ tiene la SVEP. Luego, por el [1, Teorema 2.40], se tiene que T tiene la SVEP.

$\blacksquare$

Definición 2.2.4. *Diremos que $T \in L(X)$ es polaroide si $iso\sigma(T) = \emptyset$ o todo punto aislado del espectro de T es un polo del resolvente de T.*

Teorema 2.2.7. *$T \in L(X)$ es polaroide si, y sólo si, para cada $\lambda \in iso\sigma(T)$ existe $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que T es polaroide. Si $\lambda \in iso\sigma(T)$ entonces, λ es un polo del resolvente de T. En consecuencia, por el **Teorema 1.2.6**, se tiene que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$.

($\Leftarrow$) Sea $\lambda \in iso\sigma(T)$. Por el **Teorema 1.2.6**, $X = H_0(\lambda_0 I - T) \oplus K(\lambda_0 I - T)$. Mientras que, por hipótesis, existe $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Por tanto,

$$(\lambda I - T)^p(X) = (\lambda I - T)^p(H_0(\lambda_0 I - T)) \oplus (\lambda I - T)^p(K(\lambda_0 I - T)) =$$

$$(\lambda I - T)^p(\ker(\lambda I - T)^p) \oplus (\lambda I - T)^p(K(\lambda_0 I - T)) = (\lambda I - T)^p(K(\lambda_0 I - T)) = K(\lambda_0 I - T).$$

Esto implica que $X = \ker(\lambda I - T)^p \oplus (\lambda I - T)^p(X)$. Luego, por el **Teorema 1.1.5**, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$, de donde concluimos, por el **Teorema 1.2.6**, que λ es un polo del resolvente de T.

■

Corolario 2.2.8. *Sea $T \in L(X)$.*

1. *Si $T \in H(p)$ entonces, T es polaroide.*
2. *Si T es polaroide entonces, $T \in \mathcal{P}_0(X)$*
3. *Si T es polaroide y tiene la SVEP entonces, T satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
1.) Como $iso\sigma(T) \subset \mathbb{C}$, tenemos que si $T \in H(p)$ y $\lambda \in iso\sigma(T)$ entonces, de la definición de los operadores $H(p)$ y el **Teorema 2.2.7**, se tiene que T es polaroide.

2.) Note que $\pi_{00}(T) \subset iso\sigma(T)$. Ahora, si T es polaroide y $\lambda \in \pi_{00}(T)$, por el **Teorema 2.2.7**, es claro que $T \in \mathcal{P}_0(X)$ ya que $\lambda \in iso\sigma(T)$.

3.) Es claro por 2.) y el **Teorema 2.2.1**.

■

El siguiente resultado muestra que la clase de operadores paranormales está contenida en la clase $\mathcal{P}_0(H)$ cuando H es un espacio de Hilbert.

Teorema 2.2.8. *Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal entonces, T es polaroide.*

Demostración:
Sea $\lambda \in iso\sigma(T)$. Denotemos por P el proyector espectral de T asociado con $\{\lambda\}$. Por el **Teorema 1.2.6**, tenemos que:

(1) $M := \ker P = K(\lambda I - T)$

(2) $N := P(H) = H_0(\lambda I - T)$

(3) $H = M \bigoplus N$

Note que $(\lambda I - T)|M$ es inyectivo, ya que $\ker(\lambda I - T) \subset H_0(\lambda I - T)$. Como M es cerrado entonces, $(\lambda I - T)|M$ es semi-regular, ya que $(\lambda I - T)(M) = M$. Por otro lado, $N := H_0(\lambda I - T)$ es un espacio de Banach, ya que N es cerrado. Así, por el **Lema 1.2.4**, $T|N$ es casi-nilpotente. Como T es algebraicamente paranormal entonces, por el **Teorema 1.4.3** , $(\lambda I - T)|N$ es algebraicamente paranormal. Luego, por **Teorema 1.4.6** , $(\lambda I - T)|N$ es nilpotente. Esto demuestra que $(\lambda I - T)$ es de Tipo Kato. Como, $\lambda \in iso\sigma(T)$ entonces, T y T^* tienen la SVEP en λ. Luego, por [1, Teorema 3.16, Teorema 3.17], se tiene que $p(\lambda I - T)$ y $q(\lambda I - T)$ son finitos y positivos. Por tanto, λ es un polo del resolvente de T. Esto prueba que T es polaroide.

■

Corolario 2.2.9. *Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal entonces, T satisface el teorema de Weyl.*

Demostración:
Por el **Lema 2.2.2** y el **Teorema 2.2.8** respectivamente, se tiene que T satisface el Teorema de Weyl.

■

Los resultados precedentes los podemos esquematizar a través del gráfico siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & Teo.\ Weyl & \mathcal{P}_0(H)+SVEP \arrow[l] & \\
\mathcal{P}_0(H) & Polaroide \arrow[l] & Polaroide+SVEP \arrow[l] \arrow[u] & \\
 & H(p) \arrow[ur] & & A.P \arrow[ul] \\
 & A.\ \ T.\ \ P \arrow[u] & & Paranormal \arrow[u] \\
quasi-normal \arrow[r] & Hyponormal \arrow[r] & T.\ \ P \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
normal \arrow[u] & Auto-Adjunto \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Gráfico 2.3

En conclusión, por el diagrama precedente observamos que hemos ampliado la clases de operadores que satisfacen el Teorema de Weyl, en relación al **Gráfico 2.2**.

CAPÍTULO 3

El Teorema de Weyl y perturbaciones

3.1. Motivación

Iniciamos este capítulo presentando dos ejemplos que nos permiten observar condiciones importanes para el estudio de la estabilidad del Teorema de Weyl bajo perturbaciones. El primer ejemplo dado muestra que, en general, el Teorema de Weyl no es estable bajo perturbaciones y que la conmutatividad tampoco es una condición suficiente, mientras que el segundo ejemplo nos indica que la conmutatividad es una condición necesaria para la estabilidad del mismo. Estos ejemplos nos han servido de motivación para estudiar las condiciones que deben tener ciertas clases de operadores para que al perturbar con éstos operadores que satisfacen el Teorema de Weyl esta propiedad se mantenga.

Ejemplo 3.1.1. *El Teorema de Weyl no es estable bajo perturbaciones.*

Sea T_1 definido, sobre el espacio de Hilbert $l^2(H)$, por $T_1(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$. Por el **Ejemplo 2.1.1** sabemos que T no satisface el Teorema de Weyl. Sea T sobre $l^2(H)$ el operador nulo, es decir, $T = 0$. Note que T satisface el Teorema de weyl, mientras que $T + T_1$ no lo satisface. Además, observe que T y T_1 conmutan.

■

Ejemplo 3.1.2. *La conmutatividad es una condición importante para estudiar la estabilidad del Teorema de Weyl.*

Sea T_2 definido, sobre el espacio de Hilbert $l^2(H)$, por $T_2(x_1, x_2, ...) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, ...)$. Por el **ejemplo 2.1.2** sabemos que T satisface el Teorema de Weyl. Ahora, consideremos el operador N sobre $l^2(H)$ definido por $N(x_1, x_2, ...) = (0, \frac{-x_1}{2}, 0, 0, ...)$. Note que N es un operador nilpotente que tambien es de rango finito. Observe que $(T + N)(x_1, x_2, ...) = (0, 0, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, ...)$. De esto es claro que $\ker(T + N) = \{(x_1, 0, 0, ...) : x_1 \in \mathbb{C}\}$. Así, $0 \in \sigma(T + N)$ y $0 < \alpha(T + N) = 1 < \infty$. Por otro lado, tenemos que

$$(\lambda I - (T + N))(x_1, x_2, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, (\lambda - \frac{1}{4})x_3, (\lambda - \frac{1}{5})x_4, ..., (\lambda - \frac{1}{n+1})x_n, ...),$$

de donde se tiene que $\sigma(T+N) = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 4\} \cup \{0\}$. De esto es claro que $0 \in iso\sigma(T+N)$. En consecuencia, $0 \in \pi_{00}(T+N)$. Por tanto, $0 \notin \sigma(T+N) \setminus \pi_{00}(T+N)$. Como $0 \in \sigma_w(T + N)$, por el **Teorema 2.1.1,** se tiene que $T + N$ no satisface el teorema de Weyl, ya que $\sigma(T+N) \setminus \pi_{00}(T+N) \neq \sigma_w(T+N)$. . Por otro lado, observe que $TN = 0$ mientras que $NT \neq 0$. Esto prueba que T y N no conmutan.

$\blacksquare$

3.2. Operadores isoloides y el Teorema de Weyl

En esta sección estudiamos la estabilidad del Teorema de Weyl en los operadores isoloides que satisfacen esta propiedad.

Lema 3.2.1. *Sean $T, N \in L(X)$. Si N es nilpotente y $NT = TN$ entonces, $T \in \mathcal{P}_0(X)$ si, y sólo si, $T + N \in \mathcal{P}_0(X)$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Si $T \in \mathcal{P}_0(X)$, por el **Lema 1.3.2** y el **Teorema 1.3.5** respectivamente, tenemos que, $p_{00}(T + N) = p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}(T + N)$. Así, por el **Teorema 2.2.1**, $T + N \in \mathcal{P}_0(X)$.

$\Leftarrow$) Si N es nilpotente y conmuta con T entonces, $-N$ es nilpotente y conmuta con $T+N$, así, por la parte anterior es claro que $T = (T+N)-N \in \mathcal{P}_0(X)$. Esto termina la prueba.

$\blacksquare$

Teorema 3.2.1. *Sean $T, N \in L(X)$. Si N es nilpotente y $NT = TN$ entonces, T satisface el Teorema de Weyl si, y sólo si, $T + N$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Si T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teorema 2.1.4** $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Luego, por el **Lema 1.3.1**, **Lema 1.3.2** y **Teorema 1.3.5**, $\sigma_w(T+N) = \sigma_b(T+N)$ y $p_{00}(T+N) = \pi_{00}(T+N)$. Así, por el **Teorema 2.1.4**, $T+N$ satisface el Teorema de Weyl.

$\Leftarrow$) Si $T+N$ satisface el Teorema de Weyl entonces, por el **Teorema 2.1.4**, $\sigma_w(T+N) = \sigma_b(T+N)$ y $p_{00}(T+N) = \pi_{00}(T+N)$. Luego, por el **Lema 1.3.1**, **Lema 1.3.2** y **Teorema 1.3.5**, $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Así, por el **Teorema 2.1.4**, T satisface el Teorema de Weyl.

■

Lema 3.2.2. *Sean $T, R \in L(X)$. Si R es un operador de Riesz que conmuta con T entonces,*

$$\pi_{0f}(T+R) \cap \sigma(T) \subset iso\sigma(T)$$

donde,

$$\pi_{0f}(T) := \{\lambda \in iso\sigma(T) : \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Demostración:

Sea $\lambda \in \pi_{of}(T+R) \cap \sigma(T)$. Como $\lambda \in \pi_{of}(T+R)$ entonces, $\lambda \in \sigma(T+R)$. Sea P el proyector espectral continuo asociado con el operador $T+R$ y el conjunto espectral $\{\lambda\}$. Así, por el **Teorema 1.2.5**, tenemos que:

$$X = H_0(\lambda I - (T+R)) \bigoplus K(\lambda I - (T+R)),$$

donde,

$$P(X) = H_0(\lambda I - (T+R))$$

y

$$\ker P = K(\lambda I - (T+R)).$$

Como $\lambda I - (T+R)$ conmuta con T y R, por el **Lema 1.2.7** , $H_0(\lambda I - (T+R))$ y $K(\lambda I - (T+R))$ son $T, R-$invariantes; por tanto, son espacios de Banach ya que son cerrados. Sean

$$T_1 := T|H_0(\lambda I - (T+R)) \quad y \quad T2 := T|K_0(\lambda I - (T+R))$$

$$R_1 := R|H_0(\lambda I - (T+R)) \quad y \quad R2 := R|K_0(\lambda I - (T+R)).$$

Así, $T_1, R_1 \in L(H_0(\lambda I - (T+R)))$ y $T_2, R_2 \in L(K_0(\lambda I - (T+R)))$. Además, $T = T_1 \oplus T_2$ y $R = R_1 \oplus R_2$.

Afirmación 3.1. $\sigma(T_1)$ es finito.

Para verificar la afirmación razonemos por el absurdo; es decir, supongamos $\sigma(T_1)$ es infinito. En este caso podemos tomar una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\sigma(T_1)\setminus\{\lambda\}$ tal que $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $m \neq n$. Sea $Q := \lambda I - (T_1 + R_1)$. Note que $Q \in L(H_0(\lambda I - (T+R)))$ y $Q = (\lambda I - (T+R))|_{H_0(\lambda I-(T+R))}$. De esto es claro que:

1.) Q es casi-nilpotente, en consecuencia $\sigma(Q) = \{0\}$.

2.) Si $x \in \ker Q$ entonces, $x \in \ker(\lambda I - (T+R))$. Como $\lambda \in \pi_{of}(T+R)$ se tiene que $\alpha(\lambda I - (T+R)) < \infty$. Esto implica que $\alpha(Q) < \infty$.

Por 1.) es claro que $(\lambda_n-\lambda)I+Q$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que $\lambda_n \neq \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, $Q+(\lambda_n-\lambda)I = \lambda I-(T_1+R_1)+(\lambda_n-\lambda)I = (\lambda_n I-T_1)-R_1$. Así, $(\lambda_n I - T_1) - R_1$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(\lambda_n I - T_1) - R_1$ es de Weyl para todo $n \in \mathbb{N}$. Como R_1 es de Riesz y conmuta con T_1 entonces, R_1 conmuta con $\lambda_n I - T_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en consecuencia, $\lambda_n I - T_1$ es de Weyl para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $\sigma_w(\lambda_n I - T_1) = \sigma_w((\lambda_n I - T_1) - R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\lambda_n I - T_1 \in \Phi(H_0(\lambda I - (T+R)))$ y $\alpha(\lambda_n I - T_1) = \beta(\lambda_n I - T_1) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_n \in \sigma(T_1)$ entonces, $0 < \alpha(\lambda_n I - T_1) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $Q_n := Q|\ker(\lambda_n I - T_1)$. Claramente Q_n es casi-nilpotente y $0 < \alpha(\lambda_n I - T_1) < \infty$; así, Q_n es nilpotente para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, Q_n no es inyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $\ker(Q_n) \neq \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\{0\} \neq \ker(Q_n) \subset \ker(\lambda_n I - T_1).$$

Ahora, por la definición de Q_n se sigue:

$$\ker(Q_n) \subset \ker(Q) \subset H_0(\lambda I - (T+R)).$$

En consecuencia,

$$\ker(Q) \cap \ker(\lambda_n I - T_1) \neq \{0\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ya que

$$\{0\} \neq \ker(Q_n) \subset \ker(Q) \cap \ker(\lambda_n I - T_1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ker(\lambda_n I - T_1) \cap \ker(Q)$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ver que $x_n \neq x_m$ para todo $n \neq m$, supongamos que existen $m, n \in N$ tal que $n \neq m$ y $x_n = x_m$. Entonces,

$$\lambda_n x_n = T_1 x_n = T_1 x_m = \lambda_m x_m$$

ya que,

$$x_n \in \ker(\lambda_n I - T_1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por tanto, $\lambda_n = \lambda_m$ ya que $x_n = x_m \neq 0$, lo cual contradice que $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Ahora, mostremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente.

Note que cualquier subconjunto de un elemento de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente.

Supongamos que cualquier subconjunto de p elementos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente. Sea $A \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $p+1$ elementos; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A = \{x_1, ...x_p, x_{p+1}\}$, ya que de no ser así, podriamos hacer una reenumeración de la sucesión.

Si

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p + a_{p+1}x_{p+1} = 0$$

entonces,

$$\lambda_1a_1x_1 + \cdots + \lambda_1a_px_p + \lambda_1a_{p+1}x_{p+1} = 0$$

y además,

$$0 = T(a_1x_1 + \cdots + a_px_p + a_{p+1}x_{p+1}) = \lambda_1a_1x_1 + \cdots + \lambda_pa_px_p + \lambda_{p+1}a_{p+1}x_{p+1}$$

en consecuencia,

$$\lambda_1a_1x_1 + \cdots + \lambda_1a_px_p + \lambda_1a_{p+1}x_{p+1} = \lambda_1a_1x_1 + \cdots + \lambda_pa_px_p + \lambda_{p+1}a_{p+1}x_{p+1},$$

de esto es claro que,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)a_2x_1 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_p)a_px_p + (\lambda_1 - \lambda_{p+1})a_{p+1}x_{p+1} = 0,$$

como $\{x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}\}$ es un subconjunto de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene p elementos entonces, por hipótesis de inducción, es linealmente independiente; por tanto,

$$(\lambda_1 - \lambda_i)a_i = 0 \text{ para todo } i = \overline{2, p+1},$$

pero dado que $\lambda_1 \neq \lambda_i$ para todo $i = \overline{2, p+1}$, se tiene que $a_1 = \cdots = a_{p+1} = 0$. En consecuencia, $a_1x = 0$, y como $x_1 \neq 0$ entonces, $a_1 = 0$. Esto demuestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente.

Por construcción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ker Q$, lo cual implica que $\alpha(Q) = \infty$, lo cual contradice que $\alpha(Q) < \infty$. Esto demuestra la **afirmación** 3.1.

Por la **Afirmación 3.1** , existe una vecindad V_1 de λ tal que $\lambda \notin V_1$ y $V_1 \cap \sigma(T_1) = \emptyset$. Por otro lado,

$$\lambda I - (T_2 + R_2) = (\lambda I - (T + R))|K((\lambda I - (T + R)))$$

es invertible, ya que

$$\ker(\lambda I - (T + R)) \subset H_0(\lambda I - (T + R))$$

y

$$H_0(\lambda I - (T + R)) \cap K((\lambda I - (T + R))) = \{0\}.$$

Esto implica que: $\lambda \notin \sigma(T_2 + R_2)$ y $\lambda I - (T_2 + R_2) \in B(K((\lambda I - (T + R))))$. Como $\lambda I - (T_2 + R_2) = (\lambda I - T_2) - R_2)$, R_2 es de Riesz y conmuta $\lambda I - T_2$, ya que R_2

conmuta con T_2 entonces, por el **Lema 1.2.7**, $\lambda I - T_2 \in B(K((\lambda I - (T + R))))$. Esto implica que $\lambda \notin \sigma_b(T_2)$. Por el [2, Teorema 4.5, Pág. 133] tenemos que

$$\sigma_b(T_2) = \sigma_w(T_2) \cup acc\sigma(T_2).$$

De esto es claro que $\lambda \notin acc\sigma(T_2)$. En consecuencia, existe una vecindad V_2 de λ tal que $\lambda \notin V_2$ y $V_2 \cap \sigma(T_2) = \emptyset$. Observe que $V \cap \sigma(T) = \emptyset$, donde $V = V_1 \cap V_2$, ya que,

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$

Esto demuestra que $\lambda \in iso\sigma(T)$.

$\blacksquare$

Teorema 3.2.2. *Sea $T \in L(X)$ un operador isoloide que satisface el Teorema de Weyl. Si K es un operador de que conmuta con T y para el cual existe $n \in \mathbb{N}$ tal que K^n es de rango finito, entonces $T + K$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Observe que K es un operador de Riesz. Como T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teorema 2.1.4**, tenemos que $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Luego, por el **Lema 1.3.1**, tenemos $\sigma_w(T + K) = \sigma_b(T + K)$. Para concluir el resultado, por el **Teorema 2.1.4**, es suficiente demostrar que:

$$\pi_{00}(T + K) = p_{00}(T + K).$$

Por el **Lema 1.3.2**, es suficiente demostrar $\pi_{00}(T + K) \subset p_{00}(T + K)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T + K)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, tenemos que $\lambda I - T$ es invertible, por tanto, $ind(\lambda I - T) = 0$. Luego, por **Lema 1.3.1**, se tiene que $ind(\lambda I - T - F) = 0$. En consecuencia, $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Esto implica que $\lambda \in p_{00}(T + K)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $\lambda \in \pi_{00}(T+K) \cap \sigma(T) \subset \pi_{0f}(T+K) \cap \sigma(T)$. Luego, por el **Lema 3.2.2,** $\lambda \in iso\sigma(T)$. Por otro lado, el operador

$$(\lambda I - (T + K))^n|\ker(\lambda I - T) = K^n|\ker(\lambda I - T)$$

tiene rango finito. Como $\lambda \in \pi_{00}(T + K)$ entonces, $\alpha(\lambda I - (T + K)) < \infty$. Por tanto,

$$\alpha((\lambda I - (T + K))^n|\ker(\lambda I - T)) = \alpha(K^n|\ker(\lambda I - T)) < \infty,$$

ya que

$$\ker(K^n|\ker(\lambda I - T)) = \ker((\lambda I - (T + K))^n|\ker(\lambda I - T)) \subset \ker(\lambda I - (T + K)).$$

En consecuncia, $K^n|\ker(\lambda I - T)$ tiene núcleo y rango finitos. Tomando, $F = K^n|\ker(\lambda I - T)$, tenemos que existe un subespacio Y de $\ker(\lambda I - T)$ tal que $\ker(\lambda I - T) = \ker(F) \oplus Y$. Como $F|Y$ es inyectiva entonces, Y es isomorfo al rango de F. Por tanto, $\dim(Y) < \infty$. Esto prueba que $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Dado que T es isoloide y $\lambda \in iso\sigma(T)$ tenemos que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Ahora, como T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teoremas 2.1.3**, **Teorema 2.1.4** y **Lema 1.3.1**, $\pi_{00}(T) \cap \sigma_w(T) = \emptyset$ y $\sigma_w(T + K) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_b(T + K)$. Como $\lambda \in \pi_{00}(T)$, es claro que $\lambda \notin \sigma_w(T) = \sigma_b(T + K)$. Esto implica que

$$\lambda \in \sigma(T + K) \setminus \sigma_b(T + K) = p_{00}(T + K).$$

Así, $T + K$ satisface el Teorema de Weyl.

$\blacksquare$

Corolario 3.2.1. *Sea $T \in L(X)$ un operador isoloide. Si T satisface el Teorema de Weyl entonces, $T+K$ satisface el Teorema de Weyl si K es un operador de rango finito que conmuta con T.*

Demostración:
Es consecuencia inmediata del **Teorema 3.2.2**.

■

En el resultado precedente es esencial que T sea isoloide. Esto lo demostraremos en el siguiente resultado. Antes denotemos por $\mathcal{F}(X)$ el conjunto de los operadores con rango finito, $\mathcal{N}(X)$ el conjunto de los operadores nilpotentes y por $\{T\}'$ el conjunto de los operadores que conmutan con T.

Teorema 3.2.3. *Sea $T \in L(X)$ tal que $\mathcal{F}(X) \bigcap \{T\}' \nsubseteq \mathcal{N}(X)$. Si $T+F$ satisface el Teorema de Weyl para cualquier operador F de rango finito que conmuta con T entonces, T es isoloide.*

Demostración:
Asumamos que T no es isoloide y sea $\lambda \in iso\sigma(T)$ tal que $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. Por hipótesis, existe un operador de rango finito que no es nilpotente y conmuta con T. Observe que F no puede ser casi-nilpotente, ya que de lo contrario , por el **Lema 1.2.4,** la restricción de T a $T(X)$ es nilpotente, y por tanto, por el **Lema 1.2.5,** F sería nilpotente. Como el espectro de un operador de rango finito sobre X es finito y contiene a 0, por el **Teorema 1.2.6** tenemos que $X = X_1 \oplus X_2$, donde $X_1 = H_0(F)$ y $X_2 = K(F)$. Además, X_1 y X_2, por el **Lema 1.3.1,** son T-invariantes y por el hecho que F no es casi-nilpotente y $F|X_2$ es un operador invertible de rango finito, obtenemos que X_2 es un subespacio no nulo de dimensión finita. Sea $T = T_1 \oplus T_2$ la descomposición de T con respecto a $X = X_1 \oplus X_2$, y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - \alpha \in \sigma(T_2) = \sigma_p(T_2)$. Esto implica que

$$\lambda \in \sigma(\alpha I_2 + T_2) = \sigma_p(\alpha I_2 + T_2) = iso\sigma(\alpha I_2 + T_2).$$

Ahora, tomando el operador $\tilde{F} = 0 \oplus \alpha I_2$ claramente $\tilde{F} \in L(X)$ es un operador de rango finito que conmuta con T y

$$\sigma(T+\tilde{F}) = \sigma((T_1 \oplus T_2) + 0 \oplus \alpha I_2) = \sigma(T_1 \oplus (T_2 + \alpha I_2)) = \sigma(T_1) \cup \sigma(\alpha I_2 + T_2),$$

por **Lema 1.2.2 .** Como $\lambda I - T$ es inyectivo, tenemos que $(\lambda I - T)|_{X_2}$ es inyectivo y como X_2 tiene dimensión finita es claro que $(\lambda I - T)|_{X_2}$ es invertible, así $\lambda \notin \sigma(T_2)$. De esto se sigue que $(\lambda I - T)|X_1$ no puede ser invertible, ya que de ser así T sería invertble. Por tanto, $\lambda \in iso\sigma(T_1)$, ya que $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $iso\sigma(T_1) \subset iso\sigma(T)$. En consecuencia, $\lambda \in iso\sigma(T+\tilde{F})$. Más aún, $\ker(\lambda I - (T+\tilde{F})) = \ker((\lambda-\alpha)I_2 - T_2)$, ya que $\lambda I - (T+\tilde{F}) = (\alpha I_1 - T_1) \oplus (\lambda - \alpha)I_2 - T_2)$. En consecuencia, $\ker(\lambda I - (T+\tilde{F})$ es un subespacio no nulo de dimensión finita, así $\lambda \in \pi_{00}(T+\tilde{F})$. Por otro lado, es claro $\lambda \notin p_{00}(T)$, ya que $p(\lambda I - T) = 0$ y $\lambda \in iso\sigma(T)$. Como, por **Lema 1.3.2,** $p_{00}(T) = iso\sigma(T) \cap \rho_f(T)$, tenemos que $\lambda I - T \notin \Phi(X)$ y por **Teorema 1.3.1,** se tiene que $\lambda I - (T+\tilde{F}) \notin \Phi(X)$, de donde se tiene que $\lambda \notin p_{00}(T+\tilde{F})$. Por tanto, $T+\tilde{F}$ no satisface el Teorema de Weyl, lo cual es una contradicción.

■.

Definición 3.2.1. *Diremos que $T \in L(X)$ es finito-isoloide si todo punto aislado del espectro de T son autovalores de multiplicidad finita.*

Teorema 3.2.4. *Sea $T \in L(X)$ un operador finito isoloide que satisface el Teorema de Weyl. Si R es un operador de Riesz que conmuta con T, entonces $T + R$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Como T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teorema 2.1.4,** tenemos que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$. Luego, por **Lema 1.3.1,** $\sigma_b(T+R) = \sigma_w(T+R)$. Ahora, por el **Teorema 2.1.4,** es suficiente probar que $\pi_{00}(T + R) = p_{00}(T + R)$. Sea $\lambda \in p_{00}(T + R)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, $\lambda I - T$ es invertible. Entonces, por el **Lema 1.3.1,** tenemos que $ind(\lambda I - (T + R)) = ind(\lambda I - T) = 0$. Esto implica que $\lambda \notin \sigma_w(T + R)$, así $\lambda \in \pi_{00}(T + R)$. Supongamos que $\lambda \in \sigma(T)$, como $\pi_{00}(T + R) \subset \pi_{0f}(T + R)$ entonces, por **Lema 3.2.2,** $\lambda \in iso\sigma(T)$, por tanto, $\lambda \in \pi_{00}(T)$, ya que por hipótesis T es finito-isoloide. Ahora, como T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teorema 2.1.3**, el **Teorema 2.1.4** y el **Lema 1.3.1** , tenemos que $\pi_{00}(T) \cap \sigma_w(T) = \emptyset$ y

$$\sigma_w(T + R) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_b(T + R).$$

Como $\lambda \in \pi_{00}(T)$, es claro que $\lambda \notin \sigma_w(T) = \sigma_b(T + R)$. Esto implica que $\lambda \in \sigma(T + R) \setminus \sigma_b(T + R) = p_{00}(T + R)$. Así, $T + R$ satisface el Teorema de Weyl.

■

Corolario 3.2.2. *Sea $T \in L(X)$ un operador finito isoloide que satisface el Teorema de Weyl. Si K es un operador compacto que conmuta con T, entonces $T+K$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Como todo operador compacto es un operador de Riesz, por el **Teorema 3.2.4**, es claro el resultado.

■

Corolario 3.2.3. *Sea $T \in L(X)$ un operador finito isoloide que satisface el Teorema de Weyl. Si Q es un operador casi-nilpotente que conmuta con T entonces, $T + Q$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Como todo operador casi-nilpotente es un operador de Riesz, por el **Teorema 3.2.4**, es claro el resultado.

■

Definición 3.2.2. *Sea $T \in L(X)$. El conjunto $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(\lambda I - T) > 0\}$ es llamado es espectro puntual de T.*

Note que $\sigma_p(T)$ es el conjunto formado por los autovalores de T.

Teorema 3.2.5. *Sea $T \in L(X)$ un operador que satisface el Teorema de Weyl tal que $\sigma_p(T) \cap iso\sigma(T) \subset \pi_{00}(T)$. Si Q es un operador casi-nilpotente que conmuta con T entonces, $T+Q$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
Como T satisface el Teorema de Weyl, por el **Teorema 2.1.4,** $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$ y $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$. Ahora, por **Lema 1.3.1** y el **Lema 1.3.2,** se sigue que

$$\sigma_b(T+Q) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \sigma_w(T+Q)$$

y

$$\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = p_{00}(T+Q) \subset \pi_{00}(T+Q),$$

respectivamente. Luego, por el **Teorema 2.1.4,** es suficiente probar que $\pi_{00}(T+Q) \subset \pi_{00}(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T+Q)$ entonces, $\lambda \in iso\sigma(T+Q)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T - Q) < \infty$. Como $\lambda \in iso\sigma(T+Q) = iso\sigma(T)$, sólo debemos probar que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Sea $Y := \ker(\lambda I - T - Q)$ y $L := (\lambda I - T)|_Y$. Note que $Lx = Qx$ para todo $x \in Y$. Así, $L = Q|Y$. Como Q es casi-nilpotente y Y es un subespacio de X cerrado y $Q-$invariante entonces, $L \in L(Y)$. Esto nos dice que L está bien definida y además es casi-nilpotente. En consecuncia, L no es inyectivo, ya que de serlo tendriamos que L es biyectivo, dado que $\dim Y < \infty$, y por tanto $\sigma(L) = \emptyset$, lo cual no puede ocurrir. En consecuencia, $\{0\} \neq \ker(L) \subset \ker(\lambda I - T)$. Esto prueba que $0 < \alpha(\lambda I - T)$. Así, $\lambda \in \sigma_p(T) \cap iso\sigma(T)$, de donde concluimos, por hipotésis, que $\lambda \in p_{00}(T)$. Esto demuestra que $\pi_{00}(T+Q) \subset \pi_{00}(T)$, y en consecuencia, $\pi_{00}(T+Q) = \pi_{00}(T)$.

■

Observe que el **Corolario 3.2.3,** es tambien una consecuencia inmediata del **Teorema 3.2.5,** ya que si T es un operador finito isoloide entonces, $\sigma_p(T) \cap iso\sigma(T) \subset \pi_{00}(T)$.

3.3. Perturbaciones de operadores $H(p)$.

Iniciamos la sección introduciendo la clase de los operadores algebraicos. En lo que sigue nos enfocaremos en encontrar clases de operadores que satisfacen el Teorema de Weyl y que al ser perturbados por operadores algebraicos el Teorema de Weyl se transmita a la perturbación. Particularmente, en esta sección, demostraremos que la clase $H(p)$ es estable bajo perturbaciones algebraicas.

Definición 3.3.1. *Diremos que $T \in L(X)$ es algebraico, si existe un polinomio h no constante tal que $h(T) = 0$.*

Lema 3.3.1. *Sea $T \in L(X)$. Si T es algebraico entonces, $\sigma(T)$ es finito.*

Demostración:
Sea h un polinomio no nulo tal que $h(T) = 0$. De esto tenemos que $\sigma(h(T)) = \{0\}$. Luego, por el Teorema de la Aplicación Espectral, se tiene que:
$$h(\sigma(T)) = \sigma(h(T)) = \{0\} \tag{3.1}$$
Dado que h es un polinomio no nulo entonces, h tiene una cantidad finita de raices. Así, por 3.1, tenemos que todo punto del espectro de T es una raiz de h. En consecuencia, $\sigma(T)$ es finito.

■

Lema 3.3.2. *Sea $T, N \in L(X)$. Si $T \in H(p)$ y N es un operador nilpotente que conmuta con T entonces, $T + N \in H(p)$.*

Demostración:
Si $T \in H(p)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p$. Sean $T_0 := T|H_0(\lambda I - T)$ y $N_0 := N|H_0(\lambda I - T)$. De esto es claro que $\lambda I_0 - T_0$ y N_0 conmutan y son nilpotentes, por tanto $\lambda I_0 - T_0 - N_0$ es nilpotente, es decir, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I_0 - T_0 - N_0)^q$. Finalmente, por **Lema 1.3.2**, tenemos que
$$H_0(\lambda I - T - N) = H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I_0 - T_0 - N_0)^q \subset \ker(\lambda I - T - N)^q,$$
como
$$\ker(\lambda I - T - N)^q \subset H_0(\lambda I - T - N),$$
obtenemos que
$$\ker(\lambda I - T - N)^q = H_0(\lambda I - T - N).$$
Esto prueba que $T + N \in H(p)$.

■

Lema 3.3.3. *Sea $T \in L(X)$ y $X_1, X_2, \cdots, X_n$ subespacios cerrados $T-$invariantes de X tal que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$. Entonces, $T \in H(p)$ si, y sólo si, $T|X_i \in H(p)$ para todo $i = \overline{1, n}$.*

Demostración:
Denotemos por T_i la restricción de T a X_i, para $i = \overline{1, n}$. Si $T|X_i \in H(p)$ para $i = \overline{1, n}$, por **Lema 2.2.1**, tenemos que $T \in H(p)$. Recíprocamente, supongamos que $T_i \in H(p)$, para $i = \overline{1, n}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces, existe $p_i \in \mathbb{N}$ tal que
$$H_0(\lambda I - T_i) = \ker(\lambda I - T_i)^{p_i}.$$
Como,
$$H_0(\lambda I - T) = H_0(\lambda I - T_1) \oplus H_0(\lambda I - T_2) \oplus \cdots \oplus H_0(\lambda I - T_n),$$
tomando $p = \max\{p_i : \ i = \overline{1, n}\}$, tenemos que
$$H_0(\lambda I - T) \subset \ker(\lambda I - T)^p.$$
Así,
$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p.$$

■

El siguiente resultado fue dado por Oudghiri en [26].

Teorema 3.3.1. *Sea $T \in L(X)$. Si $T \in H(p)$ y K un operador algebraico que conmuta con T entonces, $f(T) + K \in H(p)$ para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T)$. En particular, el Teorema de Weyl es cierto para $f(T) + K$ para toda $f \in \mathcal{H}(\sigma(T)$.*

Demostración:

Mostremos que $T + K \in H(p)$. Como K es algebraico, por **Lema 3.4.2,** su espectro es finito. Sea

$$\sigma(K) = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}.$$

Si denotemos por P_i los proyectores espectrales asociados con K y los conjuntos espectrales $\{\mu_i\}$, $i = \overline{1, n}$, entonces, $X_i := P_i(H) = H_0(\mu_i I - K)$, $i = \overline{1, n}$. Por el **Teorema 1.2.6,** y por [16, Ejercicio 5, Pág. 207] tenemos que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ y $\sigma(K|X_i) = \{\mu_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Note que $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n$ y $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$, donde K_i y T_i son las respectivas restriciones a X_i de K y T. Ahora, fijemos $i \in \mathbb{N}$ con $i = \overline{1, n}$. Como K es algebraico existe un polinomio h no constante tal que $h(K) = 0$; en consecuencia, $h(K_i) = 0$. Así,

$$\{0\} = \sigma(h(K_i)) = h(\sigma(K_i)) = h(\{\mu_i\}) = \{h(\mu_i)\},$$

por tanto, $h(\mu_i) = 0$. De esto se sigue que h puede ser expresado de la siguiente forma:

$$h(\mu) = (\mu_i - \mu)^v s(\mu), \quad s(\mu_i) \neq 0,$$

para algún $v \in \mathbb{N}$ y algún polinomio $s \neq 0$. En consecuencia,

$$h(K_i) = (\mu_i I - K_i)^v s(K_i) = 0.$$

Como $s(\mu_i) \neq 0$, por [16, Teorema 48.1, pág 201], $s(K_i)$ es invertible. Por tanto, $(\mu_i I - K_i)^v = 0$, esto implica que

$$N_i := \mu_i I - K_i \tag{3.2}$$

es nilpotente. Por otro lado, por el **Lema 3.3.2,** tenemos que $H(p)$ es estable bajo perturbaciones nilpotentes, así $T_i + K_i \in H(p)(X_i)$, $i = \overline{1, n}$. Luego, por el **Lema 3.3.3,** $T + K \in H(p)$. Ahora, si $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ entonces, por el **Teorema 2.2.4,** $f(T) \in H(p)$. Así, $f(T) + K \in H(p)$.

■

Corolario 3.3.1. *Sean $T, K \in L(X)$. Si $T \in H(p)$ y K es un operador algebraico que conmuta con T entonces, $T + K$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:

El resultado se sigue por el **Teorema 3.3.1**

■

Corolario 3.3.2. *Sean $T, K \in L(X)$. Si T es un operador algebraicamente $p-$hiponormal, log-hiponormal, M-hiponormal o totalmente paranormal y K es un operador algebraico que conmuta con T entonces, $T + K$ satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración:
El resultado se sigue por el **Corolario 2.2.5, Corolario 2.2.6,** y el **Teorema 3.3.1**.

■

Ejemplo 3.3.1. *El **Teorema 3.3.1** no es cierto para operadores isoloides que satisfacen el Teorema de Weyl.*

Sean T_1 y T_2 operadores definidos, sobre el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$, por $T_1(x_1, x_2, \cdots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$ y $T_2(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. Se puede verificar que $\sigma_f(T_1) = \sigma(T_1) = \{0\}$, $\sigma(T_2)$ es el disco unitario cerrado, $\sigma_p(T_2) = \emptyset$ y $\sigma_w(T_2) = \sigma(T_2)$. Si definimos T sobre $l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N})$ por $T = T_1 \oplus T_2$ entonces, $\sigma(T)$ es el disco unitario cerrado. En particular, T no tiene puntos aislados, así, $\pi_{00}(T) = \emptyset$. Por tanto, para ver que T satisface el Teorema de Weyl es suficiente probar que $\sigma_w(T) = \sigma(T)$. Supongamos que $\lambda \notin \sigma_w(T)$. De esto se sigue que $\lambda I - T \in \Phi(X)$, y por tanto $\lambda \notin \sigma_f(T_1) = \sigma(T_1) = \{0\}$, lo cual implica que $\lambda I - T_1$ es invertible. Como $\lambda I - T \in W(X)$ y $\sigma_w(T_2) = \sigma(T_2)$, se tiene que $\lambda I - T_2$ es invertible. En consecuencia, $\sigma_w(T) = \sigma(T)$. Sea F un operador definido sobre X por $F := 2I_1 \oplus 0$. Note que si consideramos el polinimio complejo $h(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, se tiene que $h(F) = 0$ y F conmuta con T. Por otro lado, $T + F$ no satisface el Teorema de Weyl, dado que $\pi_{00}(T + F) = \{2\}$ y $T + F - 2I = T_1 \oplus T_2 \notin \Phi(X)$.

■

3.4. Perturbación de operadores algebraicamente paranormales

Sabemos que la clase de operadores algebraicamente paranormales tienen la SVEP y satisface el Teorema de Weyl, por tanto, demostraremos que ésta clase operadores al ser perturbados por operadores algebraicos con los cuales que conmute, dicha perturbación cae en la clase de los operadores polaroides. Además, mostreremos que la SVEP es estable bajo perturbaciones algebraicas con los cuales que conmute, lo cual trae como consecuencia que la perturbación de operadores algebraicamente paranormales por operadores algebraicos con los cuales conmute satisfacen el Teorema de Weyl.

Lema 3.4.1. *Sean $T \in L(H)$ paranormal. Si N es un operador nilpotente que conmuta con T, entonces*
$$\pi_{0f}(T + N) \cap \sigma(T) \subset p_{00}(T).$$

Demostración:
Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $N^p = 0$. Si $\lambda \in \pi_{of}(T+N) \cap \sigma(T)$ entonces, $\alpha(\lambda I - (T+N)) < \infty$. Por tanto, por el **Teorema 1.3.3** , $\alpha(\lambda I - (T+N))^p < \infty$. Ahora, por el **Teorema 1.3.4**, $\ker(\lambda I - T) \subset \ker(\lambda I - (T+N))^p$. Así, $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como,

$$\lambda \in iso\sigma(T) = iso\sigma(T+N)$$

y T es paranormal, por el **Teorema 2.2.8**, λ es un polo del resolvente, o equivalentemente,

$$0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty.$$

Luego, por el **Teorema 1.1.4**, $\beta(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Esto implica que $\lambda I - T \in \Phi(H)$ y por tanto, $\lambda I - T \in B(H)$, es decir; $\lambda \notin \sigma_b(T)$. De donde se tiene claramente que $\lambda \in p_{00}(T)$.

■

Lema 3.4.2. *Sean $T, N \in L(X)$. Si T es polaroide y N es un operador nilpotente que conmuta con T entonces, $T+N$ polaroide.*

Demostración:
Si $\lambda \in iso\sigma(T+N)$, por el **Lema 1.3.1** , es claro que $\lambda \in iso\sigma(T)$. Como T es polaroide λ es un polo del resolvente de T o equivalentemente

$$0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty.$$

Sea $p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T)$. Por el **Teorema 1.2.5** y **Lema 1.3.2** tenemos:

$$H_0(\lambda I - T - N) = H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p.$$

Sea $v \in \mathbb{N}$ tal que $N^v = 0$ y tomemos $m := pv$. Claramente $m \geq p$. Probemos que $H_0(\lambda I - T - N) = \ker(\lambda I - T - N)^m$. Sabemos que $\ker(\lambda I - T - N)^n \subset H_0(\lambda I - T - N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in H_0(\lambda I - T - N) = \ker(\lambda I - T)^p$. Note que

$$(\lambda I - T - N)^m x = \sum_{i=1}^{m} C_{i,m}(\lambda I - T)^{m-i} N^i x,$$

donde los $C_{i,m}$ son tomados adecuadamente. Como $(\lambda I - T)^{m-i} N^i x = N^i (\lambda I - T)^{m-i} x$, $i \geq m$ entonces, $(\lambda I - T)^{m-i} x = 0$ si $m - i \geq p$. Por tanto, $(\lambda I - T)^{m-i} N^i x = 0$, para todo $i = \overline{0, m-p}$. Esto implica que:

$$(\lambda I - T - N)^m x = \sum_{i=m-p+1}^{m} C_{i,m}(\lambda I - T)^{m-i} N^i x = \sum_{i=m-p+1}^{m} C_{i,m}[(\lambda I - T)^{m-i} N^{i-v}] N^v x$$

dado que si $i \geq m - p + 1$ entonces, $i \geq v$. En consecuencia, $(\lambda I - T - N)^m x = 0$, ya que $N^v = 0$. Así $x \in \ker(\lambda I - T - N)^m$. Por tanto,

$$H_0(\lambda I - T - N) = \ker(\lambda I - T - N)^m.$$

Ahora probaremos que $T+N$ es polaroide. Por hipótesis $\lambda \in iso\sigma(T+N)$, por el **Teorema 1.2.5** tenemos que :

$$X = H_0(\lambda I - T - N) \oplus K(\lambda I - T - N) = \ker(\lambda I - T - N)^m \oplus K(\lambda I - T - N),$$

así,

$$(\lambda I - T - N)^m(X) = (\lambda I - T - N)^m(K(\lambda I - T - N)) = K(\lambda I - T - N),$$

implica que

$$X = \ker(\lambda I - T - N)^m \oplus (\lambda I - T - N)^m(X).$$

Luego, por el **Teorema 1.1.5**, $\lambda I - T - N$ tiene ascenso y descenso finitos y positivos, lo cual es equivalente a decir que λ es un polo del resolvente de $T+N$. Esto prueba que $T+N$ es polaroide.

■

Teorema 3.4.1. *Sea $T \in L(H)$ y K un operador algebraico que conmuta con T.*

1. *Si T tiene la SVEP entonces, $T+K$ tiene la SVEP.*
2. *Si T es algebraicamente paranormal entonces, $T+K$ es polaroide.*

Demostración:
Como K es algebraico su espectro es finito. Sea

$$\sigma(K) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n\}.$$

Denotemos por P_i los proyectores espectrales asociados con K y los conjuntos espectrales $\{\mu_i\}$, $i = \overline{1,n}$. Sean

$$Y_i := P_i(H) = H_0(\mu_i I - K)$$

$$Z_i := \ker P_i = K(\mu_i I - K).$$

Entonces, $X = Y_i \bigoplus Z_i, \quad i = \overline{1,n}$. Además, Y_i y Z_i son $T, K-$invariantes y $\sigma(K|Y_i) = \{\mu_i\}$. Definamos, $K_i =: K|Y_i$ y $T_i =: T|Y_i$. Claramente, K_i y T_i conmutan para todo $i = \overline{1,n}$. Como K es algebraico existe un polinomio h no constante tal que $h(K) = 0$; en consecuencia, $h(K_i) = 0$. Así,

$$\{0\} = \sigma(h(K_i)) = h(\sigma(K_i)) = h(\{\mu_i\}) = \{h(\mu_i)\},$$

por tanto, $h(\mu_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Luego, h puede ser expresado de la siguiente forma $h(\mu) = (\mu_i - \mu)^v s(\mu), \quad s(\mu_i) \neq 0$, para algún $v \in \mathbb{N}$ y algún polinomio $s \neq 0$. De esto se sigue que

$$h(K_i) = (\mu_i I - K_i)^v q(K_i) = 0.$$

Como $s(\mu_i) \neq 0$, por [16, Teorema 48.1, Pág. 201], $s(K_i)$ es invertible, por tanto $(\mu_i I - K_i)^v = 0$, esto implica que

$$N_i := \mu_i I - K_i \tag{3.3}$$

es nilpotente para todo $i = \overline{1,n}$.

Afirmación 3.2. $T+K$ tiene la SVEP.

En efecto, por (3.3)

$$T_i + K_i = \mu_i I + T_i - N_i. \tag{3.4}$$

Como la SVEP se preserva bajo restricciones a subespacios cerrados e invariantes y bajo traslaciones $\mu_i I + T_i$ tiene la SVEP; por tanto, por **Teorema 1.3.8** y por (3.4), $T_i + K_i$ tiene la SVEP para todo $i = \overline{1, n}$. Luego, por el [1, Teorema 2.9], se sigue que

$$T + K = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i + K_i$$

tiene la SVEP.

Afirmación 3.3. Si T es algebraicamente paranormal entonces, $T+K$ es polaroid.

Sea $\lambda \in iso\sigma(T+K)$. Como $T+K = \bigoplus_{i=1}^{n}(T_i + K_i)$ entonces, por el **Lema 1.2.2**, $\sigma(T+K) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i + K_i)$, lo implica que $\lambda \in iso\sigma(T_j + K_j)$ para algún $1 \leq j \leq n$, por tanto, $\lambda - \mu_j \in iso\sigma(T_j + K_j - \mu_j I)$. Así, por el **Teorema 1.4.3** y el **Teorema 2.2.8**, T_j es es polaroide, pero por (3.3) y el **Teorema 3.4.2**, $T_j + \mu_i I - K_j$ es polaroide. Por tanto, $\lambda - \mu_j$ es un polo del resolvente de $T_j + \mu_i I - K_j$. Luego, por el **Teorema 1.2.5**, existe $p_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_0((\lambda - \mu_j)I - (T_j + K_j - \mu_j I)) = H_0(\lambda I - (T_j + K_j)) = \ker(\lambda I - (T_j + K_j))^{p_j}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} H_0(\lambda I - (T+K)) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_0(\lambda I - (T_i + K_i)) &= \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(\lambda I - (T_i + K_i))^{p_i} \\ &= \ker(\lambda I - (T+K))^{p}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $p := \max\{p_1, \cdots, p_n\}$. Por el **Teorema 1.2.5**

$$H = H_0(\lambda I - (T+K)) \oplus K(\lambda I - (T+K)),$$

así,

$$H = \ker(\lambda I - (T+K))^{p} \oplus K(\lambda I - (T+K)),$$

por (3.5),

$$(\lambda I - (T+K))^{p}(H) = K(\lambda I - (T+K)),$$

lo implica que

$$H = \ker(\lambda I - (T+K))^{p} \oplus (\lambda I - (T+K))^{p}(H).$$

Esto prueba que λ es un polo del resolvente de $T+K$. Esto demuestra que $T+K$ es polaroide. ■

Corolario 3.4.1. *Sean $T, K \in L(H)$. Si T es algebraicamente paranormal y K un operador algebraico que conmuta con T entonces, $T+K$ satisface el teorema de Weyl. En particular, si T es paranormal entonces, $T+K$ satisface el teorema de Weyl.*

Demostración:
El resultado se sigue por el **Teorema 3.4.1** y el **Corolario 2.2.8**.

■

Lema 3.4.3. *Sea $F \in L(X)$. Si F^n es de rango finito para algun $n \in \mathbb{N}$ entonces, F es algebraico.*

Demostración:
Si F^n es de rango finito entonces, F^n tiene espectro finito. Sea $\sigma(F^n) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$. Si P_i son los proyectores espectrales de F^n asociados a los conjuntos espectrales $\{\mu_i\}$ entonces, por **Teorema 1.2.5**

$$X = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i(X) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(\mu_i I - F^n)^{v_i},$$

donde v_i es el orden del polo μ_i, para $i = \overline{1,r}$. Tomando $h(\lambda) = (\mu_1 - \lambda^n)^{v_1} \cdots (\mu_r - \lambda^n)^{v_r}$, tenemos que $h(F) = (\mu_1 I - F^n)^{v_1} \cdots (\mu_r I - F^n)^{v_r}$. Como los operadores $(\mu_i I - F^n)$ para $i = \overline{1,r}$, son conmutativos y cualquier $x \in X$ tiene la siguiente representación

$$x = x_1 + \cdots + x_r \quad con \quad x_i \in \ker(\mu_i I - F^n)^{v_i}$$

es claro que $h(F)x = 0$ para todo $x \in X$. Así, F es algebraico.

■

Corolario 3.4.2. *Sean $T \in L(H)$ y F es un operador que conmuta con T tal que F^n es de rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si T tiene la SVEP entonces, $T+F$ tiene la SVEP.*
2. *Si T es algebraicamente paranormal entonces, $T+F$ satisface el teorema de Weyl. En particular, si T es paranormal $T+F$ satisface el teorema de Weyl.*

Demostración:
El resultado se sigue a partir del **Lema 3.4.3** y el **Teorema 3.4.1** respectivamente.

■

Ahora, mediante dos diagramas mostraremos un resumen de los resultados y los aportes dados en este trabajo de investigación. Para esto denotemos por:

1. $RF(X) := \{T \in L(X) : T^n \text{es de rango finito para algún } n \in \mathbb{N}\}$
2. $Po(X)$ la clase de los operadores polaroides.
3. $PoS(X)$ la clase de los operadores polaroides con la SVEP.
4. $TW(X)$ la clase de los operadores que satisfacen el Teorema de Weyl.
4. $ITW(X)$ la clase de los operadores isoloides que satisfacen el Teorema de Weyl.
6. $A(X)$ la clase de los operadores algebraicos.

Según los resultados de perturbación dados por Oudghiri en [26], tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & TW(X) & \\
PoS(H) + RF(X) \arrow[ur] & & H(p) + A(X) \arrow[ul] \\
 & H(p) + RF(X) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Gráfico 3.1

Los aportes dados en este trabajo los hacemos notar en el siguiente gráfico, el cual extiende el **Gráfico 3.1**.

$$
\begin{tikzcd}
 & TW(X) & \\
H(p) + A(X) \arrow[ur] & & A.P + A(X) \arrow[ul] \\
H(p) + RF(X) \arrow[u] & & Paranormal + A(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Gráfico 3.2

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo, es el estudio de la estabilidad del Teorema de Weyl bajo perturbaciones; es decir, si $T \in L(X)$ es un operador que satisfaces el Teorema de Weyl estamos interesados en encontrar operadores $K \in L(X)$ que conmuten con T tal que $T + K$ satisfaces el Teorema de Weyl. Para cumplir con este objetivo nos planteamos inicialmente dar caracteriaciones del Teorema de Weyl y clasificar clases de operadores que lo satisfacen. Al comienzo de la investigación y como punto de partida nos enfocamos en los trabajos publicados por Oudghiri, ver [25] y [26], los cuales hemos desarrollados con todo detalle. Producto de la investigación realizada se publicarón tres artículos, ver [3], [4] y [5], trabajos sobre los cuales se ha fundamentado el desarrollo de esta tesis. Por tanto, quiero resaltar que se han cumplido cada uno de los objetivos específicos planteados en nuestro proyecto inicial. Más aún, en los capítulos 2 y 3, se presentaron algunas mejoras de los resultados conseguidos en [3] y [4]. Ahora, destacaré los aportes hechos durante el desarrollo de este trabajo de investigación:

a) La caracterización del Teorema de Weyl que establece: $T \in L(X)$ satisface el Teorema de Weyl si, y sólo si, T tiene la SVEP en todo $\lambda \notin \sigma_w(T)$ y $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

b) Se introduce la clase de los operadores $\mathcal{P}_0(X)$ y se demuetra:

1. $T \in \mathcal{P}_0(X)$ si, y sólo si, $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Además, si T tiene la SVEP entonces, $T \in \mathcal{P}_0(X)$ si, y sólo si, T satisface el Teorema de Weyl.
2. Si T es polaride entonces, $T \in \mathcal{P}_0(X)$. Ademas, si T tiene la SVEP entonces, T satisface el Teorema de Weyl. Es decir, la clase de los operadores polaroides que tienen la SVEP satisfacen el Teorema de Weyl.

c) Si $T \in L(H)$ es algebraicamente paranormal entonces, T es polaroide. En particular, T satisface el Teorema Weyl.

d) Sea $T \in L(H)$ y K un operador algebraico que conmuta con T.

1. Si T tiene la SVEP entonces, $T + K$ tiene la SVEP.

2. Si T es algebraicamente paranormal entonces, $T+K$ es polaroide. En particular, $T + K$ satisface el Teorema de Weyl.

Tabla de Símbolos

Índice Alfabético

Bibliografía

[1] P. Aiena. *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers*. Kluwer Acad. Publishers, 2004.

[2] P. Aiena. *Semi-Fredholm operators, perturbations theory and localized SVEP*. Ediciones IVIC, 2007.

[3] P. Aiena, J. Guillén. *Weyl's Theorem for Perturbations of Paranormal Operators*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 35: 2433–2442, 2007.

[4] P. Aiena, J. Guillén, P. Peña. *Property (w) for Perturbations of Polaroid Operators*. *Linear. Algebra. Appl.*, 428: 1791–1802, 2008.

[5] P. Aiena, J. Guillén, P. Peña. *Weyl's Type Theorem and Perturbations*. *Divulgaciones Matemáticas*, 16, N 1: 55–72, 2008.

[6] B. A. Barnes. *Points and Weyl's Theorem*. *Integral Equations and Oper*, 34: 187–196, 1999.

[7] N. N. Chourasia, P. B. Ramanujan. *Paranormal Operators on Banach Space*. *Bull. Austral. Math.Soc*, 21: 161–168, 1980.

[8] L. A. Coburn. *Weyl's Theorem for Nonormal Operators*. *Michigan. Math. J*, 20: 529–544, 1970.

[9] C. W. Curtis. *Linear Algebra*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] R. E. Curto, Y. M. Han. *Weyl's Theorem for Agebracally Paranormal Operators*. *Integ.Equa.Oper. Th.*, 50, N 2: 169–196.

[11] J. K. Finch. *The Single Valued Extension Property on Banach Space*. *Pacific. J. Math.*, 58: 61–69.

[12] L. Narici G. Bachman. *Functional Analysis.* Academic Press, New York and London.

[13] Y. M. Han, An-Huyn Kim. *A note on *-paranormal Operators*. *Integr. Equat. Oper. Theory*, 49: 435–444.

[14] Y. M. Han, Y.Lee. *Weyl Spectral and Weyl's Theorem*. *Stud. Math.*, 148: 193–206.

[15] R. Harte, Woo Young Lee. *Another note on Weyl's Theorem*. *Trans. Amer. Math. Soc*, 349: 2115–2124.

[16] H. Heuser. *Functional Analysis.* Wiley-Interscience-Publication, 1982.

[17] K. Laursen, M. Neumann. *An Introduction to local spectral theory.* Clarendon Press, Oxford, 2000.

[18] W. Y. Lee, S. H. Lee. *On Weyl's Theorem (II)*. *Math. Japo.*, 43: 549–553.

[19] C. Lin, Y.Ruan, Z. Yan. *p-hyponormal Operators are Subscalar*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, N 9: 2753–2759.

[20] C. Lin, Y.Ruan, Z. Yan. *w-hyponormal Operators are Subscalar*. *Integr. Equat. Oper. Theory.*, 50: 165–168.

[21] W. Mlak. *Hyponormal contractions*. *Colloq. Math.*, 18: 137–141.

[22] V. Müller. *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral System in Banach Algebras*. 2003.

[23] K. K. Oberai. *On the Weyl Theorem Spectrum (II)*. *Ilinois. J. Math. Pure. et Appl.*, 21: 84–90.

[24] K. K. Oberai. *Spectral Mapping Theorem for Essencial Spectral*. *Rev. Roumaine. Math. Pure. et Appl.*, 25, N 3.

[25] M. Oudghiri. *Weyl's Theorem and Browder's Theorem for Operators Satisfying the SVEP*. *Studia. Math. Pure. et Appl.*, 163, N 1.

[26] M. Oudghiri. *Weyl's Theorem and Perturbations*. *Integr. Equat. Oper. Theory.*, 53: 535–545.

[27] M. Schechter, R. Whitley. *Best Fredholm Perturbations Theorems*. *Studia. Math.*, 90: 175–190.

[28] H. Weyl. *Uber Beschreankte Quadratiche Formen, deren Differenz Vollsteig ist*. *Rend. Circ. Math. Palermo*, 27: 373–392.