Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Postgrado en Matemáticas

Controlabilidad de Sistemas de Dimensión Infinita: Continuos y Discretos.

MSc. Jahnett Uzcátegui

Trabajo de Tesis
para optar al título de
Doctora en Matemáticas

Tutor: Dr. Hugo Leiva.

Mérida - Venezuela
- 2009 -

A mi ejemplar esposo Cosme
A mi Pequeña Damita Andrea Natatly

Agradecimiento

A Dios y a la Virgen María, guías espirituales en cada uno de mis actos.

Al Profesor Dr. Hugo Leiva, maestro y amigo, ejemplo de trabajo y constancia, por permitirme ser su alumna en esta etapa de mi vida profesional, por su orientación y enseñanzas, con las cuales se hizo posible la realización de este trabajo.

A Cosme por compartir conmigo cada momento, dándome su comprensión y estimulandome a seguir adelante con su ejemplar actuación, no solo como esposo, sino también como profesional de la matemática.

A mi hija Andreita Nataly, la alegría que emanas y me contagias y la luz que le das a mi vida cada día te hace, al igual que a tu padre, participe de este logro tan importante para los tres.

A mis padres, por estar siempre presentes brindándome, con amor y compresión, su apoyo incondicional.

A la Ilustre Universidad de Los Andes en cuyo seno me he formado profesionalmente desde el inicio de mis estudios universitarios, abriéndome además las puertas para poner en practica como docente los conocimientos que en ella he recibido.

A todas aquellas personas que de una u otra forma me apoyaron durante esta etapa de mi formación académica y colaboraron para que se culminara con éxito este trabajo.

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la controlabilidad de una amplia clase de ecuaciones de evolución, tanto en el caso continuo como en el caso discreto, las cuales aparecen con frecuencia en aplicaciones a la física e ingeniería.

En primer lugar se presentan condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad exacta y para la controlabilidad aproximada de sistemas lineales continuos sobre espacios de Hilbert. Luego, se estudia la controlabilidad exacta de ecuaciones diferenciales semilineales que resultan de perturbar una ecuación diferencial lineal mediante un término no lineal. Particularmente, se encuentran condiciones sobre el término semilineal para que la controlabilidad exacta de la ecuación diferencial lineal se preserve bajo la perturbación no lineal.

En segundo lugar se dan caracterizaciones que permiten estudiar tanto la controlabilidad exacta como la controlabilidad aproximada de ecuaciones en diferencias lineales sobre espacios de dimensión infinita. Como caso particular se considera la discretización en el flujo de sistemas de control gobernados por ecuaciones diferenciales lineales. A continuación, se estudia la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada de ecuaciones en diferencias semilineales, resultantes de perturbar una ecuación en diferencias lineal por un término no lineal y se muestra que, bajo ciertas condiciones sobre el término no lineal, se preserva la controlabilidad de la ecuación en diferencias lineal.

Cabe destacar que las caracterizaciones de controlabilidad que se presentan en este trabajo se pueden aplicar a una amplia clase de sistemas de reacción difusión. En particular, aquí se aplican a la ecuación del calor, la ecuación de la onda y la ecuación de termoelasticidad.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la teoría de control ha ganado gran importancia como disciplina para ingenieros, matemáticos y otros científicos. Ejemplos de problemas de control van desde casos sencillos, como la conducción del calor a través de una barra, hasta casos más complejos como el aterrizaje de un vehículo sobre la Luna, el control de la economía de una nación, el control de epidemias, entre otros. Existe una extensa literatura sobre la teoría de control para sistemas continuos, por mencionar algunos autores se tienen los trabajos de Barnett [2], Curtain & Pritchard [6], Curtain & Zwart [7] y Zuazua [28]. En cambio que, sobre la teoría de control de sistemas discretos la literatura es menos extensa; de hecho en muchos trabajos la presentan de manera introductoria como por ejemplo Agarwal [1], Elaydi [8] (ambos sobre espacios de dimensión finita) y Sasu [24]. Parte de los resultados presentados en este trabajo pueden encontrarse con menos detalle en los artículos Larez, Leiva & Uzcátegui [14], Leiva & Uzcátegui [19] y Leiva & Uzcátegui [20], en los cuales se caracteriza la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada tanto para sistemas continuos como para sistemas discretos, lineales y semilineales, sobre espacios de dimensión infinita.

Esta tesis está estructurada en cuatro capítulos, y de cada uno de ellos se da a continuación un resumen. En el **capítulo 1**, se exponen definiciones y resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos; particularmente se muestran resultados sobre la teoría de semigrupos y sobre existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de evolución.

En el **capítulo 2** se consideran sistemas de control continuos sobre espacios de dimensión infinita y se dan condiciones para caracterizar la controlabilidad de dichos sistemas. En primer lugar, se estudia la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada para sistemas lineales de la forma

$$z' = Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \tag{1}$$

donde $z(t) \in Z$, $u(t) \in U$, Z, U son espacios de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en $Z, B \in L(U,Z)$, $u \in L^2(0,\tau;U)$. Además, se supone que el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, generado por A, está dado por

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \ \ z \in Z, \ \ t \geq 0,$$

de acuerdo al Lema 1.1.6. Particularmente, bajo la hipótesis

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \ \ j = 1, 2, ...,$$

se dan condiciones necesarias y suficientes que permiten reducir el estudio de la controlabilidad de la ecuación lineal (1), al estudio de la controlabilidad de una familia de sistemas la cual, en algunos ejemplos específicos, resulta ser una familia de sistemas de dimensión finita. Además, con respecto a la controlabilidad exacta del sistema (1), se prueba que un control $u \in L^2(0,\tau;U)$ que transfiere el estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo τ está dado por la fórmula:

$$u(t) = B^* T^*(\tau - t) L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0),$$

donde $L_{\mathcal{B}^\tau} : Z \longrightarrow Z$ es el operador lineal

$$L_{\mathcal{B}^\tau} z = \int_0^\tau T(\tau - s) BB^* T^*(\tau - s) z ds,$$

de acuerdo a la Definición 2.1.3.
En segundo lugar, se estudia la controlabilidad de la ecuación no lineal de la forma

$$z' = Az(t) + Bu(t) + f(z(t), u(t)), \tag{2}$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, $B \in L(U,Z)$, $u \in L^2(0,\tau;U)$ y el término no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función continua Lipschitziana. En particular, bajo ciertas condiciones para f se demuestra que la controlabilidad del sistema (1) es preservada por el sistema semilineal (2) y, en este caso, un control $u \in L^2(0,\tau;U)$ que transfiere un estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo τ está dado por la fórmula:

$$u = \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}(I + K)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0),$$

donde $\mathcal{B}^\tau : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$ es el operador

$$\mathcal{B}^\tau u = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds,$$

$K : Z \longrightarrow Z$ es el operador

$$K\xi = \int_0^\tau T(\tau - s)f(z(s), S(\xi)(s))ds,$$

y $z = z_\xi$ es la solución de (2) correspondiente al control $u = S(\xi)$, con $S = \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$. La controlabilidad de este tipo de sistemas semilineales ha sido estudiada por varios autores, entre los que podemos mencionar a Blachandran & Dauer [3], Balachandran & Park [4], Klamka [12] y Zuazua [27], quienes han usado Teoremas de Punto Fijo para mostrar sus resultados principales. En cambio que, la técnica utilizada en este trabajo se basa en el Teorema 2.2.4, el cual es un resultado utilizado en la teoría de sistemas dinámicos para caracterizar variedades invariantes (central, estable e inestable).
En el **capítulo 3** se dan condiciones para caracterizar la controlabilidad de ecuaciones en diferencias sobre espacios de dimensión infinita. En primer lugar, se dan caracterizaciones que permiten estudiar la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0, \tag{3}$$

donde $z(n) \in Z$, $u(n) \in U$, Z y U son espacios de Hilbert, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U,Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$, $L(U,Z)$ denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de U a Z y $L(Z,Z) = L(Z)$. Este tipo de sistema fue estudiado por Sasu [24], donde la autora da la siguiente condición de controlabilidad exacta para la ecuación (3): *"Si el sistema* (3) *es completamente estabilizable y A es sobreyectivo, entonces* (3) *es exactamente controlable"*. Debido a que esta condición es solo suficiente para garantizar la controlabilidad exacta de (3) y, a la escasa existencia de literatura con respecto a la controlabilidad exacta de este tipo de ecuaciones, en este trabajo se da un aporte, en este sentido, al mostrar condiciones necesarias y suficientes para estudiar la controlabilidad de ecuaciones en diferencias de la forma (3). Además, con respecto a la controlabilidad exacta de la ecuación (3), se exhibe un control $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ que lleva el estado inicial z_0 a un estado final z_1, el cual está dado por:

$$u = \mathcal{B}^{n_0 *} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0),$$

donde $\mathcal{B}^{n_0}$ y $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ son como en la Definición 3.1.3. Y, con respecto a la controlabilidad aproximada de la ecuación (3), se muestra que la sucesión de controles

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0 *}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0),$$

transfiere el estado inicial z_0 a una ε-vecindad del estado final z_1.
En segundo lugar, se dan caracterizaciones para la controlabilidad de la siguiente ecuación en diferencias lineal particular

$$z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \ \ n \in \mathbb{N}^*, \ \ z(n) \in Z, \ \ u(n) \in U, \tag{4}$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \ \ z \in Z, \ \ t \geq 0,$$

de acuerdo al Lema 1.1.6. Esta ecuación (4) es la discretización en flujo de la ecuación de evolución dada por (1).
A pesar de que para el caso continuo existen trabajos que tratan la controlabilidad de sistemas semilineales como se mencionó antes, no existen trabajos que den condiciones para estudiar la controlabilidad de sistemas semilineales discretos. Por esta razón, en este capitulo también se estudia la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación en diferencias no lineal de la forma

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)), \ \ \ n \in \mathbb{N}^*, \ \ \ z(0) = z_0, \tag{5}$$

donde $z(n) \in Z$, $u(n) \in U$, Z y U son espacios de Hilbert, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$, $L(U, Z)$ denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de U a Z y $L(Z, Z) = L(Z)$. Para el caso de la controlabilidad e-xacta, el término no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función continua Lipschitziana. Particularmente, suponiendo que el sistema lineal (3) es exactamente controlable y que la constante de lipschitz para f es suficientemente pequeña, se mostrará que el sistema (5) es exactamente controlable, es decir, la controlabilidad de la ecuación lineal se preserva bajo la perturbación no lineal f. Más aún, con respecto a la controlabilidad exacta de la ecuación no lineal (5), se exhibe un control $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ que lleva el estado inicial z_0 a un estado final z_1, el cual está dado por:

$$u = \mathcal{B}^{n_0 *} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}(I + K)^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0),$$

donde $K : Z \longrightarrow Z$ es el operador

$$K\xi = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\xi)(k-1)),$$

y $z = z_\xi$ es la solución de (5) correspondiente a el control $u = S(\xi)$, con $S = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}_{n_0}}^{-1}$. Y, para el caso de la controlabilidad aproximada, se imponen ciertas condiciones sobre el término no lineal f que permitirán mostrar que, si la ecuación lineal (3) es aproximadamente controlable, entonces la ecuación no lineal (5) también lo es.

Finalmente, en el **capítulo 4**, se aplican los resultados de los capítulos 2 y 3 para estudiar la controlabilidad de la ecuación de la onda, la ecuación del calor y la ecuación de termoelasticidad. Primero se considera la siguiente ecuación de la onda n-dimensional (nD)

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + f(t, u) = u(t, x), \quad x \in \Omega, \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, el control $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ y $f(t, u)$ es una función Lipschitz. Y se estudia su controlabilidad tanto en su versión continua como su discretización en flujo. La controlabilidad exacta de la ecuación de onda lineal fue estudiada en Curtain & Pritchard [6] y Curtain & Zwart [7] en una dimensón (1D). En este trabajo, se aplicaran los resultados obtenidos y presentados en los capítulos anteriores para mostrar que la ecuación de la onda lineal (nD) es exactamente controlable, así como también, probar la controlabilidad aproximada de la versión discreta de la ecuación de la onda no lineal, con f una función adecuada. En segundo lugar, se considera la siguiente ecuación del calor n-dimensional (nD)

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + u(t, x) + f(t, u), \\ y(0, x) = y_0(x), \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, el control $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ y $f(t, u)$ es una función Lipschitz. En este caso, la controlabilidad exacta al cero para la versión continua de la ecuación del calor lineal (1D) ha sido estudiada en Zhang [26] y la controlabilidad aproximada para la ecuación del calor lineal (1D) aparece muy bien en Curtain & Pritchard [6] y Curtain & Zwart [7]. Aquí, se aplican los resultados presentados en los capítulos 2 y 3 para mostrar que la ecuación del calor lineal es aproximadamente controlable y probar que la versión discreta en el flujo de la ecuación del calor lineal es exactamente controlable. Por último, se estudia la controlabilidad de la versión continua de la siguiente ecuación de termoelásticidad en una placa con control

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha \Delta \theta = u_1(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta \Delta \theta - \alpha \Delta w_t = u_2(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$, Ω es un dominio acotado suficientemente regular en $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ y $u_i \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega)), i = 1, 2.$

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Como se anunció en la introducción del trabajo, en este capitulo se dan algunas definiciones y se presentan resultados fundamentales sobre semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales y acotados, así como también, sobre existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de evolución que serán utilizados en los capítulos siguientes. La mayor parte de la teoría que se muestra en este capítulo se puede encontrar en los textos de Curtain & Zwart [7], Goldstein [9] y Pazy [23], salvo el Lema 1.1.6 el cual se encuentra en Leiva [16].

1.1. Semigrupos de Operadores Fuertemente Continuos.

Definición 1.1.1. *Sea Z un espacio de Hilbert. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales y continuos $T(t) : Z \longrightarrow Z$ se denomina **Semigrupo Fuertemente Continuo** (o C_0-semigrupo) si ésta verifica las tres condiciones siguientes:*

i) $T(0) = I$.

ii) $T(t+s) = T(t)T(s), (t, s \geq 0)$.

iii) *Para todo z_0 en Z, $T(t)z_0$ es fuertemente continuo en $t = 0$, es decir,*

$$\lim_{t\to 0^+} \| T(t)z_0 - z_0 \|_Z = 0.$$

Definición 1.1.2. *El **generador infinitesimal** A de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Hilbert Z es definido por:*

$$Az = \text{lím}_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)z,$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, D(A) es el conjunto de elementos en Z para el cual el límite existe.

Algunas propiedades importantes de los C_0-semigrupos están dadas en el siguiente Teorema:

Teorema 1.1.3. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert Z, entonces $T(t)$ posee las siguientes propiedades:*

(a) $\|T(t)\|$ *está acotada sobre todo intervalo finito de* $[0, +\infty)$.

(b) $T(t)$ *es fuertemente continuo en todo* $t \in [0, +\infty)$.

(c) Para todo $z \in Z$, *se tiene que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)zds \longrightarrow z, \quad t \to 0^+.$$

(d) Si $w_0 = \text{ínf}_{t>0}\left(\frac{1}{t}log\|T(t)\|\right)$, *entonces* $w_0 = \text{lím}_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}log\|T(t)\|\right) < \infty$.

(e) Para todo $w > w_0$, *existe una constante* M_w *tal que*

$$\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}, \forall \quad t \geq 0.$$

Demostración. Para la demostración de este Teorema se puede consultar Curtain & Zwart [7]. ♠

Ahora bien, el siguiente Teorema, el cual se encuentra en Curtain & Zwart [7], nos muestra ciertas propiedades importantes que satisface el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo.

Teorema 1.1.4. *Sea Z un espacio de Hilbert y sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo sobre Z, con generador infinitesimal A. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si* $z \in D(A)$*, entonces* $T(t)z \in D(A)$*,* $\forall t \geq 0$*.*

(b) $\dfrac{d}{dt}(T(t)z) = AT(t)z = T(t)Az$*, para* $z \in D(A)$*,* $t > 0$*.*

(c) $\dfrac{d^n}{dt^n}(T(t)z) = A^n T(t)z = T(t)A^n z$*, para* $z \in D(A^n)$*,* $t > 0$*.*

(d) $T(t)z - z = \displaystyle\int_0^t T(s)Azds$*, para* $z \in D(A)$*.*

(e) $\displaystyle\int_0^t T(s)zds \in D(A)$*,* $A\displaystyle\int_0^t T(s)zds = T(t)z - z$*, para todo* $z \in Z$ *y* $D(A)$ *es denso en* Z*.*

(f) A *es un operador lineal cerrado.*

(g) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ *es denso en* Z*.*

Definición 1.1.5. *Sea* A *un operador sobre un espacio de Hilbert* Z*. El* ***conjunto resolvente*** *de* A *es*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to Z \text{ es biyectivo y } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(Z)\}.$$

donde $\mathcal{B}(Z)$ *es el espacio de todos los operadores lineales y acotados de* Z *en* Z*.*

Observación: *Si* $\rho(A) \neq \varnothing$*, entonces* A *es cerrado, es decir, su gráfico*

$$\mathcal{G}(A) = \{(z, Az) : z \in D(A)\}$$

es un subespacio cerrado de $Z \times Z$*. Si* A *es cerrado, entonces, por el Teorema del Gráfico Cerrado, se tiene que el conjunto resolvente de* A *es*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to Z \text{ es biyectivo}\}.$$

$(\lambda I - A)^{-1}$ *es llamado el* ***operador resolvente*** *de* A *y* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ *es el* ***espectro*** *de* A*.* ♠

El siguiente Lema juega un papel fundamental para obtener los principales resultados que presentamos en los siguientes capítulos.

Lema 1.1.6. *(Leiva [16]) Sean Z un espacio de Hilbert separable y $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $\{P_n\}_{n\geq 1}$ dos familias de operadores lineales y acotados en Z, con $\{P_n\}_{n\geq 1}$ una familia completa de proyectores ortogonales, tales que:*

$$A_n P_n = P_n A_n, n \geq 1$$

Defina la siguiente familia de operadores lineales

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \;\; z \in Z, \;\; t \geq 0.$$

Entonces:

(a) $T(t)$ es un operador lineal y acotado si $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$, $n = 1, 2, ..$, para alguna función continua a valores reales $g(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

(b) Bajo la condición anterior $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert Z, cuyo generador infinitesimal A está dado por

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A)$$

con

$$D(A) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

(c) El espectro $\sigma(A)$ de A está dado por

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})},$$

donde $\overline{A_n} = A_n P_n : \mathcal{R}(P_n) \to \mathcal{R}(P_n)$, $\mathcal{R}(P_n) = \mathrm{Rango}(P_n)$.

Demostración.

(a) Supongamos que existe $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$, $n = 1, 2, ...$ Luego,

$$\begin{aligned} \|T(t)z\|^2 &= \|\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} P_n z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t}\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} g(t)^2 \|P_n z\|^2 = g(t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 = g(t)^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Así, $\|T(t)z\| \leq g(t)\|z\|$. Entonces, $\|T(t)\| = \sup\limits_{\|z\|=1} \|T(t)z\| \leq g(t)$. Por lo tanto, $T \in L(Z)$, es decir $T(t)$ es un operador lineal y acotado.

(b) Veamos primero que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo.

i) $T(0)z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n z = z$. Así, $T(0) = I$.

ii)

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n T(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{A_m s} P_m z \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} e^{A_n s} P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n (t+s)} P_n z \\ &= T(t+s)z. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{A_n t} - I \right) P_n z \right\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \sup_{1\leq n\leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \sum_{n=1}^{N} \|P_n z\|^2 + K \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2, \end{aligned}$$

donde $K = \sup\limits_{n\geq 1, 0\leq t\leq 1} \|e^{A_n t} - I\|^2$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2 < \frac{\varepsilon}{2K}$$

y podemos escoger $t \leq 1$ tal que

$$\sup_{1\leq n\leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|T(t)z-z\|^2 &\leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}\sum_{n=1}^{N}\|P_nz\|^2+K\frac{\varepsilon}{2K}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\|P_nz\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}\|z\|^2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, $\text{lím}_{t\to 0^+}\|T(t)z-z\|=0$, $\forall z\in Z$. De i), ii) y iii) se sigue que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Sea A el generador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $D(A)$ su dominio, entonces para $z\in D(A)$ se tiene, por definición, que

$$Az=\text{lím}_{t\to 0^+}\frac{T(t)z-z}{t}=\text{lím}_{t\to 0^+}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(e^{A_nt}-I)P_nz}{t}.$$

Ahora, puesto que e^{A_mt} es un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal es A_m, entonces

$$P_mAz=P_m\left[\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{A_m}t-I}{t}\right)P_mz\right]=\text{lím}_{t\to 0^+}\frac{e^{A_mt}-I}{t}P_mz=A_mP_mz.$$

Así, $Az=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_nAz=\sum_{n=1}^{\infty}A_nP_nz.$

Ahora, sea

$$D=\left\{z\in Z:\sum_{n=1}^{\infty}\|A_nP_nz\|^2<\infty\right\}$$

y veamos que $D(A)=D$. Es claro que $D(A)\subset D$. Supongamos ahora que $z\in D$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nP_nz=y\in Z$$

Sea $z_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}P_nz$, entonces

$$\text{lím}_{t\to 0^+}\frac{T(t)z_k-z_k}{t}=\sum_{n=1}^{k}A_nP_nz.$$

por lo tanto, $z_k \in D(A)$ y $Az_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} A_n P_n z$.

Finalmente, si $z_k \to z$ cuando $k \to \infty$ y $\lim_{t\to 0^+} Az_k = y$, entonces, puesto que A es cerrado, obtenemos que $z \in D(A)$ y $Az = y$. Con esto hemos probado que $D \subset D(A)$. Así, $D(A) = D$.

(c) es equivalente a probar lo siguiente:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A) \ \text{ y } \ \sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)}.$$

Para probar la primera parte, mostraremos que $\rho(A) \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\bar{A}_n)$. En efecto, sea λ en $\rho(A)$. Entonces $(\lambda I - A)^{-1} : Z \to D(A)$ es un operador lineal acotado. Necesitamos probar que

$$(\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \to \mathcal{R}(P_m)$$

existe y es acotado para $m \geq 1$. Supongamos que $(\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} P_m z = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) P_m z &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n) P_n P_m z \\ &= (\lambda - A_m) P_m z = (\lambda I - \bar{A}_m) P_m z = 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que, $P_m z = 0$. Así, $(\lambda I - \bar{A}_m)$ es inyectiva.

Ahora, dado y en $\mathcal{R}(P_m)$ queremos resolver la ecuación $(\lambda I - \bar{A}_m) w = y$. De hecho, puesto que $\lambda \in \rho(A)$, existe $z \in Z$ tal que

$$(\lambda I - A) z = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n) P_n z = y.$$

Entonces, aplicando P_m a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$P_m(\lambda I - A) z = (\lambda I - A_m) P_m z = (\lambda I - \bar{A}_m) P_m z = P_m y = y.$$

Por lo tanto, $(\lambda I - \bar{A}_m) : \mathcal{R}(P_m) \to \mathcal{R}(P_m)$ es una biyección. Puesto que $\bar{A}_m$ es cerrado, entonces, por el teorema del gráfico cerrado obtenemos que

$\lambda \in \rho(\bar{A}_m) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \bar{A}_m) \text{ es biyectiva}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} \text{ es acotada}\}$

para todo $m \geq 1$, con lo cual hemos probado que

$$\rho(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\bar{A}_n) \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A).$$

Ahora, para probar que:

$$\sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}.$$

recordemos que si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones
(1) $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ no es inyectiva}\}$.
(2) $\lambda \in \sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ es inyectiva, pero } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z\}$.
(3) $\lambda \in \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ es inyectiva, } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z, \text{pero } \mathcal{R}(A - \lambda I) \neq Z\}$.
Ahora bien,
(1) Si $(A - \lambda I)$ no es inyectiva, entonces existe $z \in Z$ no nulo tal que: $(A - \lambda I)z = 0$. Esto implica que para algún n_0 tenemos:

$$(\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0} z = 0, \quad P_{n_0} z \neq 0.$$

Así, $\lambda \in \sigma(\overline{A_{n_0}})$, y por lo tanto $\lambda \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$.
(2) Si $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z$, entonces existe $z_0 \in Z$ no nulo tal que:

$$\langle z_0, (A - \lambda I)z \rangle = 0, \quad \forall z \in D(A).$$

Pero, $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z$, así:

$$\left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I)P_n z \right\rangle = 0.$$

Ahora, si $z_0 \neq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_{n_0} z_0 \neq 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I)P_n z \right\rangle \\ &= \langle z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0} z \rangle \\ &= \langle P_{n_0} z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0} z \rangle. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{R}(\overline{A}_{n_0}-\lambda I)\neq P_{n_0}Z$. Por lo tanto, $\lambda\in\sigma(\overline{A}_{n_0})\subset\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\overline{A}_n)}$.

(3) Supongamos que $(A-\lambda I)$ es inyectiva, $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)}=Z$ y $\mathcal{R}(A-\lambda I)\subsetneq Z$.

Supongamos por reducción al absurdo que $\lambda\in\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\overline{A_n})}\right)^C$.

Pero,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\overline{A_n})}\right)^C &\subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\overline{A_n})\right)^C\\ &= \bigcap_{n\geq 1}\left(\sigma(\overline{A_n})\right)^C\\ &= \bigcap_{n\geq 1}\rho(\overline{A_n}),\end{aligned}$$

Lo cual implica que, $\lambda\in\rho(\overline{A_n})$, para todo $n\geq 1$. Entonces

$$(\overline{A_n}-\lambda I):\mathcal{R}(P_n)\longrightarrow\mathcal{R}(P_n)$$

es invertible, con $(\overline{A_n}-\lambda I)^{-1}$ acotada.

En consecuencia, para todo $z\in D(A)$ obtenemos que

$$P_j(A-\lambda I)z=(\overline{A_j}-\lambda I)P_jz,\quad j=1,2,\ldots$$

es decir,

$$(\overline{A_j}-\lambda I)^{-1}P_j(A-\lambda I)z=P_jz,\quad j=1,2,\ldots$$

Ahora, puesto que $D(A)$ es denso en Z, podemos extender el operador

$$(\overline{A_j}-\lambda I)^{-1}P_j(A-\lambda I)$$

a un operador acotado T_j definido sobre Z. De esto se sigue que

$$T_jz=P_jz,\quad\forall z\in Z,\quad j=1,2,\ldots,$$

y

$$\|T_j\|=\|P_j\|\leq 1,\quad j=1,2,\ldots.$$

Puesto que $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)}=Z$, se tiene que

$$\|(\overline{A_j}-\lambda I)^{-1}\|\leq 1,\quad j=1,2,\ldots. \tag{1.1}$$

Ahora veremos que $\mathcal{R}(A-\lambda I) = Z$. En efecto, dado $z \in Z$ definamos y como sigue

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z.$$

De (1.1) obtenemos que y está bien definido. Veamos ahora que $y \in D(A)$ y $(A-\lambda I)y = z$. Para ello, sabemos que

$$y \in D(A) \iff \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j P_j y\|^2 < \infty.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{A}_j P_j y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\{I + \lambda(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}\} P_j z\|^2.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j P_j y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|(1+|\lambda|)^2 \|P_j z\|^2 = (1+|\lambda|)^2 \|z\|^2 < \infty.$$

Entonces, $y \in D(A)$ y $(A-\lambda I)y = z$.

Por lo tanto, $\mathcal{R}(A-\lambda I) = Z$, lo cual es una contradicción que viene de haber asumido que: $\lambda \in \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \right)}^{C}$. ♠

Además, presentaremos una prueba del recíproco del Lema 1.1.6.

Lema 1.1.7. *Sean Z un espacio de Hilbert separable y $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $\{P_n\}_{n\geq 1}$ dos familias de operadores lineales y acotados en Z, con $\{P_n\}_{n\geq 1}$ una familia completa de proyectores ortogonales, tales que:*

$$A_m P_n = P_n A_m, \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Si el operador

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A),$$

con

$$D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty\},$$

genera un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z.$$

Demostración. Si $z_0 \in Z$, entonces $P_n z_0 \in D(A)$ y la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(t) & = & Az(t), \\ z(0) & = & P_n z_0, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

está dada por $z_n(t) = T(t)P_n z_0$.

Del Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1.12 de Curtain & Zwart [7]) se puede deducir que, si un operador conmuta con el generador de un semigrupo fuertemente continuo, entonces éste conmuta con el semigrupo. Por tanto, de (1.2) obtenemos que

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n T(t) z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} T(t) P_n z_0. \tag{1.4}$$

Por otro lado, puesto que $z_n(t)$ es una solución de (1.3), obtenemos

$$\begin{array}{rcl} z_n'(t) & = & Az_n(t) \\ \\ & = & AT(t)P_n z_0 \\ \\ & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m T(t) P_n z_0 \\ \\ & = & A_n P_n T(t) P_n z_0 \\ \\ & = & A_n T(t) P_n z_0 = A_n z_n(t). \end{array}$$

Así, $z_n(t) = e^{A_n t} P_n z_0 = T(t) P_n z_0$ y de (1.4) concluimos que

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z_0.$$

♠

1.2. El Problema de Valor Inicial.

Consideremos el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.) en el espacio de Hilbert Z

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & Az(t) + f(t), \quad t > 0, \\ z(0) & = & z_0, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

donde $f : [0, T) \longrightarrow Z$, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador infinitesimal del C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en Z.

Definición 1.2.1. *La función $z : [0,T) \longrightarrow Z$ es una **solución clásica** del problema (1.5) si es continua en $[0,T)$; continuamente diferenciable y $z(t) \in D(A)$ en $(0,T)$, satisfaciendo además, la ecuación (1.5) en $[0,T)$.*

Teorema 1.2.2. *Sea $f \in L^1(0,T;Z)$ y $z_0 \in Z$. Si el problema de valor inicial (1.5) tiene una solución, esta viene dada por:*

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{1.6}$$

Demostración. Sea $T(t)$ el C_0-semigrupo generado por A y sea z una solución de (1.5). Entonces, la función $g(s) = T(t-s)z(s)$ es diferenciable para $0 < s < t$ y

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)z'(s) \\ &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)Az(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Si $f \in L^1(0,T;Z)$, entonces $T(t-s)f(s)$ es integrable y

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

♠

Definición 1.2.3. *Sea A el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$; $z_0 \in Z$ y $f \in L^1(0,T;Z)$. Entonces, la función $z \in C([0,T],Z)$ dada por*

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.7}$$

*es llamada **solución moderada** del problema (1.5) en $[0,T]$.*

Observación: *Aunque toda solución de* (1.5) *es una solución de* (1.7), *el recíproco no es necesariamente cierto dado que las soluciones de* (1.7) *pueden no ser diferenciables.*

Teorema 1.2.4. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in L^1(0,T;Z)$ continua en $(0,T]$ y la función*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

Entonces el P.V.I. (1.5) tiene una única solución z en $[0,T)$ para cualquier $z_0 \in D(A)$ si, y sólo si, se satisface una de las siguientes condiciones:

i) $v(t)$ *es continuamente diferenciable en* $(0, T)$.

ii) $v(t) \in D(A)$, $\forall t \in (0, T)$ *y* $Av(t)$ *es continua en* $(0, T)$.

Además, si (1.5) tiene una solución en $[0, T)$ *para* $z_0 \in D(A)$, *entonces* $v(t)$ *satisface* *i) y ii).*

Demostración. Si el P.V.I. (1.5) tiene una solución z para algún z_0 en $D(A)$, entonces esta solución está dada por (1.6). En consecuencia, $v(t) = z(t) - T(t)z_0$ es diferenciable para $t > 0$ y $v'(t) = z'(t) - T(t)Az_0$ es obviamente continua sobre $(0, T)$. Por lo tanto, *i)* se satisface. Ahora, si $z_0 \in D(A)$, $T(t)z_0 \in D(A)$ para $t \geq 0$ y por lo tanto $v(t) = z(t) - T(t)z_0 \in D(A)$ para $t > 0$ y $Av(t) = Az(t) - aT(t)z_0 = z'(t) - f(t) - T(t)Az_0$ es continua sobre $(0, T)$; así *ii)* se satisface.
Por otro lado, es fácil verificar, para $h > 0$, la identidad

$$\frac{T(h) - I}{h}v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \tag{1.9}$$

De la continuidad de f, el segundo termino del lado derecho de (1.9) tiene el limite $f(t)$ cuando $h \to 0$. Si $v(t)$ es continuamente diferenciable sobre $(0, T)$, entonces se sigue de (1.9) que $v(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ y $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Puesto que $v(0) = 0$ se sigue que $z(t) = T(t)z_0 + v(t)$ es la solución del P.V.I. (1.5) para $z_0 \in D(A)$. Si $v(t) \in D(A)$ se sigue de (1.9) que $v(t)$ es diferenciable a la derecha de t y la derivada por la derecha $D^+v(t)$ de v satisface $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$. Puesto que $D^+v(t)$ es continua, $v(t)$ es continuamente diferenciable y $v' = Av(t) + f(t)$. Como $v(0) = 0$, $z(t) = T(t)z_0 + v(t)$ es la solución de (1.5) para $z_0 \in D(A)$, y esto completa la demostración. ♠

Corolario 1.2.5. *Sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* $f \in C^1([0, T]; Z)$, *entonces el P.V.I (1.5) posee una única solución* $z : [0, T) \to Z$, $\forall z_0 \in D(A)$.

Demostración. Tenemos que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds. \tag{1.10}$$

Es claro de (1.10) que $v(t)$ es diferenciable para $t > 0$ y que su derivada

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds = T(t)f(0) - \int_0^t T(t-s)f'(s)ds$$

es continua sobre $(0,T)$. El resultado se sigue ahora del Teorema 1.2.4 (i). ♠

Corolario 1.2.6. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $f \in L^1(0,T;Z)$ continua en $(0,T)$. Si $f(s) \in D(A)$ para todo $0 < s < T$ y $Af(s) \in L^1([0,T];Z)$, entonces para cualquier $z \in D(A)$ el P.V.I (1.5) tiene una única solución sobre $[0,T)$.*

Demostración. De las hipótesis se sigue que para $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in D(A)$ y que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ es integrable. Por lo tanto, $v(t)$ definida por (1.8) satisface que $v(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

es continua. El resultado se sigue ahora del Teorema 1.2.4 (ii). ♠

1.3. Ecuación no Lineal.

Consideremos el siguiente P.V.I, en el espacio de Hilbert Z:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} & = & Az(t) + f(t,z(t)), \quad t > t_0, \\ \\ z(t_0) & = & z_0, \quad z_0 \in Z. \end{cases} \tag{1.11}$$

Donde A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, el operador $f : U \subset \mathbb{R}^+ \times Z \to Z$ satisface una condición de Lipschitz en Z; U abierto, f continua en t y $(t_0, x_0) \in U$.

Definición 1.3.1. *a) Una **solución clásica** del problema (1.11) en $[t_0,t_1)$ es una función continua $z : [t_0,t_1) \longrightarrow Z$ tal que $z(t_0) = z_0$; $(t,z(t)) \in U$, $z'(t) \in Z$, $z(t) \in D(A)$ y satisface la ecuación diferencial $\forall t \in (t_0,t_1)$.*

*b) Una **solución moderada** en $[t_0,t_1)$ es una función continua $z(t)$ tal que $(t,z(t)) \in U$; $t \to f(\cdot,z(\cdot)) \in L^1((t_0,t_1),Z)$ y*

$$z(t) = T(t-t_0)z_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,z(s))ds. \tag{1.12}$$

Teorema 1.3.2 (Existencia Local). *Sea $\Omega \subset Z$ un abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow Z$ continua satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada $\tau \in \mathbb{R}^+$, existe $k = k(\tau)$ tal que*

$$\|f(t,z) - f(t,y)\|_X \leq k\|z-y\|_Z, \quad \forall t \in [0,\tau]; \quad z, y \in \Omega.$$

Entonces, para $\tau > 0$ suficientemente pequeño, existe una única solución moderada de (1.11) en $[0,\tau)$.

Demostración. Sea $\tau > 0$, $\mathcal{C} = C([0,\tau]; Z)$ y considere B una vecindad cerrada de z_0 en Ω. Definamos S como sigue

$$(Sz)(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds,$$

para $0 \leq t \leq \tau$ y $z \in \mathcal{M} = \{v \in \mathcal{C} : v(0) = z_0, v([0,\tau]) \subset B\}$. Notese que $\mathcal{M}$ es un espacio métrico completo y $Sz \in \mathcal{C}$. Considerese M, w tales que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Sz - Sv\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{0\leq t\leq\tau} \|Sz(t) - Sv(t)\| \\
&= \sup_{0\leq t\leq\tau} \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s,z(s)) - f(s,v(s))]ds \right\| \\
&\leq Me^{w\tau} \int_0^\tau \|f(s,z(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq Me^{w\tau}k(\tau) \int_0^\tau \|z(s) - v(s)\|ds \\
&\leq Me^{w\tau}k(\tau)\tau\|z-v\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Además, $Me^{wt}k(\tau)\tau \to 0$ cuando $\tau \to 0^+$ (puesto que $k(\tau)$ se puede asumir acotada por $k(1)$ para $\tau < 1$). Veamos ahora que $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sin perder generalidad supongamos que B es acotado.

$$\|Sz - z_0\|_{\mathcal{C}} \leq \sup_{0\leq t\leq\tau} \|T(t)z_0 - z_0\| + \sup_{0\leq t\leq\tau} \left\| \int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds \right\| = J_1(\tau) + J_2(\tau).$$

$J_1(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to 0$, y

$$\begin{aligned} J_2(\tau) &\leq \tau M e^{w\tau} \sup_{0\leq t\leq\tau} \|f(t,z(t))\| \\ &\leq \tau M e^{w\tau} \left\{ \sup_{0\leq t\leq\tau} \|f(t,z_0)\| + k(\tau) \sup_{0\leq t\leq\tau} \|z(t)-z_0\| \right\}. \end{aligned}$$

Así, $J_2(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to 0^+$. Por lo tanto, $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ para τ suficientemente pequeño. La conclusión del teorema se sigue de aquí, haciendo uso del Teorema de punto Fijo de Picard-Banach, pues z es una solución moderada de (1.11) si, y sólo si, z es un punto fijo de S. ♠

Teorema 1.3.3 (Existencia Global). *Sea $z_0 \in Z$ y $f : \mathbb{R}^+ \times Z \longrightarrow Z$ continua y satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada $\tau > 0$, existe $k = k(\tau)$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_Z \leq k\|x-y\|_Z, \quad \forall t \in [0,\tau]; \quad x, y \in Z.$$

Entonces, (1.11) tiene una única solución moderada definida para todo τ en $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Sean S, M, w, como en la demostración del Teorema 1.3.2. Afirmamos que:

$$\|S^n z(t) - S^n v(t)\| \leq [Mk(t)e^{wt}t]^n \sup_{0\leq s\leq t} \|z(s)-v(s)\|/n! \tag{1.13}$$

para todo $t > 0$, $z, v \in C([0,t], Z)$. Podemos asumir que $t \to k(t)$ es monótona no decreciente. Para $n = 1$ (1.13) vale por un calculo simple dado en la demostración del Teorema 1.3.2. Supongamos que (1.13) es cierto para $n = m$. Entonces

$$\begin{aligned} \|S^{m+1}z(t) - S^{m+1}v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s,S^m z(s)) - f(s,s^m v(s))]ds \right\| \\ &\leq Me^{w\tau} \int_0^t k(s)[Me^{ws}k(s)s]^m \sup_{0\leq r\leq s} \|z(r)-v(r)\| ds/m! \\ &\leq [me^{wt}k(t)]^{m+1} \sup_{0\leq r\leq s} \|z(r)-v(r)\| \int_0^t s^m ds/m! \end{aligned}$$

y (1.13) se sigue con $n = m+1$. Por inducción, (1.13) se cumple para todos los enteros positivos n. Ahora sea $\tau > 0$ arbitrario pero fijo. Escojamos n lo suficientemente grande tal que

$$\alpha = [Me^{wt}k(\tau)\tau]^n/n! < 1.$$

Entonces por (1.13),

$$\|S^n z - S^n v\|_{\mathcal{C}} \leq \alpha \|z - v\|_{\mathcal{C}},$$

para todo $z, v \in \mathcal{C} = C([0,\tau], Z)$. Por lo tanto S tiene un único punto fijo en $\mathcal{C}$, y así el problema (1.11) tiene una única solución moderada continua sobre $[0,\tau]$. El teorema se sigue pues $\tau > 0$ es arbitrario. ♠

Teorema 1.3.4. *Supongase que $f : \mathbb{R}^+ \times Z \longrightarrow Z$ es continua y satisface la siguiente condición de Lipschitz: para cada $c > 0$, existe $k(c)$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(c)\|x - y\|, \quad \forall\, t \in [0,c]; \quad x, y \in \overline{B_Z(0,c)}.$$

Sea $z \in C([0,\tau), X)$ la solución moderada de (1.11) donde $\tau < \infty$. Entonces se satisface una de las siguientes posibilidades:

a) Existe una única solución moderada de (1.11) en $\mathbb{R}^+$.

b) $[0,\tau)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución moderada de (1.11) y se tiene

$$\lim_{t \to \tau^-} \|x(t)\| = +\infty.$$

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE CONTROL CONTINUOS

En este capítulo estudiamos la controlabilidad de ecuaciones de evolución de la forma

$$z' = Az(t) + Bu(t) + f(z(t), u(t)), \tag{2.1}$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, $B \in L(U, Z)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$ y el término no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función continua Lipschitziana.

En primer lugar, presentamos caracterizaciones que permiten estudiar la controlabilidad de la ecuación lineal, es decir, de ecuaciones de la forma (2.1) sin el termino no lineal $f(z, u)$. Particularmente, damos caracterizaciones que permiten reducir el estudio de la controlabilidad de la ecuación lineal, al estudio de la controlabilidad de una familia de sistemas, la cual en algunos ejemplos específicos resulta ser una familia de sistemas de dimensión finita. En segundo lugar, estudiamos la controlabilidad de la ecuación no lineal de la forma (2.1). Para ser más específicos, suponiendo que el sistema lineal es controlable y que la constante de lipschitz para f es suficientemente pequeña, mostramos que el sistema (2.1) es controlable, es decir, la controlabilidad de la ecuación lineal se preserva bajo la perturbación no lineal f. Cabe destacar que para mostrar el resultado principal de esta última parte no usaremos Teoremas de Punto Fijo más generales, como lo han hecho la mayoría de los autores que han tratado este tipo de problema semilineal, entre otros, Balachandran-Park [4], Blachandran-Dauer [3], Klamka [12], Zuazua [27]; por el contrario, nuestra técnica está basada en el Teorema 2.2.4 usado para caracterizar variedades centrales en teoría de sistemas dinámicos.

2.1. Controlabilidad para Sistemas Lineales Continuos.

2.1.1. Preliminares.

En esta sección presentamos algunos resultados sobre la controlabilidad del sistema de control lineal

$$z' = Az(t) + Bu(t), \quad t > 0,$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, $B \in L(U, Z)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$.
De acuerdo al Teorema 1.2.2 y la Definición 1.2.3, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' &= Az(t) + Bu(t), \quad t > 0, \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \;\; t \in [0, \tau]. \tag{2.3}$$

Ahora, daremos las definiciones de controlabilidad exacta y aproximada para el sistema (2.2).

Definición 2.1.1. (**Controlabilidad Exacta**) *El sistema (2.2) se dice que es* ***exactamente controlable*** *sobre* $[0, \tau]$ *si para cada* z_0, $z_1 \in Z$ *existe* $u \in L^2(0, \tau; U)$ *tal que la solución moderada* $z(t)$ *de (2.2) correspondiente a* u *verifica:* $z(\tau) = z_1$.

Definición 2.1.2. (**Controlabilidad Aproximada**) *El sistema (2.2) se dice que es* ***aproximadamente controlable*** *sobre* $[0, \tau]$ *si para cada* z_0, $z_1 \in Z$, $\varepsilon > 0$ *existe* $u \in L^2(0, \tau; U)$ *tal que la solución moderada* $z(t)$ *de (2.2) correspondiente a* u *verifica:*

$$\|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

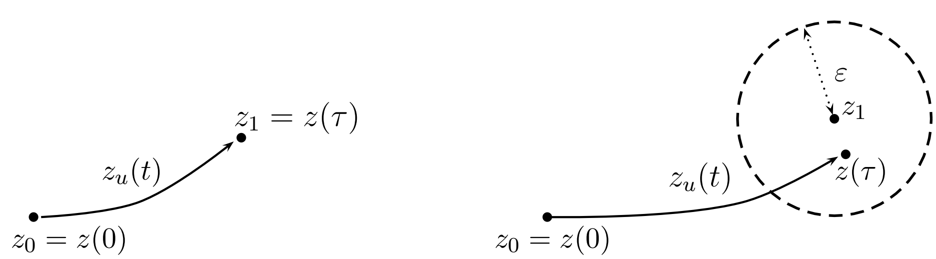

Figura 1: Controlabilidad exacta (izq.) Controlabilidad aproximada (der.)

Definición 2.1.3. *Para el sistema (2.2) definimos los siguientes conceptos:*

a) ***La aplicación de controlabilidad*** *(para $\tau > 0$) es definida como sigue $\mathcal{B}^\tau : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$ por*

$$\mathcal{B}^\tau u = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds. \tag{2.4}$$

b) ***La aplicación grammian*** *$L_{\mathcal{B}^\tau} : Z \to Z$ es definida por $L_{\mathcal{B}^\tau} = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau *}$, es decir,*

$$L_{\mathcal{B}^\tau} z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau *} z = \int_0^\tau T(\tau - s)BB^* T^*(\tau - s)zds.$$

El siguiente teorema se puede encontrar en forma general para ecuaciones de evolución en Curtain & Zwart [7].

Teorema 2.1.4. *(a) La ecuación (2.2) es exactamente controlable sobre $[0,\tau]$ si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

(i) $\text{Rango}(\mathcal{B}^\tau) = Z$.

(ii) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

(iii) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}^{\tau *} z\|_{L^2(0,\tau;U)} \geq \gamma \|z\|_Z, \quad z \in Z.$$

(b) La ecuación (2.2) es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$ si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:

(i) $Ker(\mathcal{B}^{\tau *}) = \{0\}$.

(ii) $\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0$, $z \neq 0$ *en* Z.

(iii) $B^* T^* z = 0 \Rightarrow z = 0$.

(iv) $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$.

2.1.2. Resultados Principales.

A continuación presentamos los resultados principales de esta sección, para este fin supondremos que el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ generado por el operador A está dado por

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

de acuerdo al Lema 1.1.6.
A lo largo de esta sección asumiremos la siguiente hipótesis:

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Proposición 2.1.5. *Bajo la hipótesis (2.6) el operador*

$$L_{\mathcal{B}^\tau} z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau *} z = \int_0^\tau T(s) BB^* T^*(s) z ds,$$

puede escribirse de la siguiente manera

$$L_{\mathcal{B}^\tau} = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j,$$

donde

$$L_{\mathcal{B}_j^\tau} y = \mathcal{B}_j^\tau \mathcal{B}_j^{\tau *} y = \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} y ds, \quad y \in \text{Rango}(P_j).$$

Demostración. De la definición del operador $L_{\mathcal{B}^\tau}$ y la representación (2.5) de $T(t)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}^\tau} z &= \int_0^\tau \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} P_j \right) BB^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{A_k^* s} P_k z \right) ds \\
&= \int_0^\tau \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z. \qquad \spadesuit
\end{aligned}$$

Lema 2.1.6. *El sistema (2.2) es exactamente controlable sobre* $[0,\tau]$ *si, y sólo si, el operador* $L_{\mathcal{B}^\tau}$ *es invertible. Además, en este caso,* $S = \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$ *es una inversa por la derecha de* $\mathcal{B}^\tau$ *y un control* $u \in L^2(0,\tau;U)$ *que transfiere el estado inicial* z_0 *a un estado final* z_1 *en tiempo* $\tau > 0$ *está dado por:*

$$u(t) = B^* T^*(\tau - t) L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0). \tag{2.7}$$

Demostración. Supongamos que el sistema (2.2) es exactamente controlable. Entonces, del Teorema 2.1.4 parte $(a)-(iii)$ existe $\gamma > 0$ tal que $\|\mathcal{B}^{\tau *} z\|_{L^2(0,\tau;U)} \geq \gamma \|z\|_Z$, para todo $z \in Z$, es decir,

$$\|\mathcal{B}^{\tau *} z\|^2 \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau *} z, z\rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z,$$

y,

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z\rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, z \in Z. \tag{2.8}$$

Esto implica que $L_{\mathcal{B}^\tau}$ es inyectiva. Ahora probaremos que $L_{\mathcal{B}^\tau}$ es sobreyectiva. Es decir,

$$\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^\tau}) = \text{Rango}(L_{\mathcal{B}^\tau}) = Z.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^\tau})$ está estrictamente contenido en Z. Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy Schwarz y (2.8) obtenemos

$$\|L_{\mathcal{B}^\tau} z\|_{l^2} \geq \gamma^2 \|z\|, \quad z \in Z,$$

lo cual implica que $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^\tau})$ es cerrado. Entonces, del Teorema de Hahn Banach existe $z_0 \neq 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z_0\rangle = 0, \forall z \in Z.$$

En particular, poniendo $z = z_0$ se obtiene de (2.8) que

$$0 = \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z_0, z_0\rangle \geq \gamma^2 \|z_0\|^2.$$

Entonces $z_0 = 0$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $L_{\mathcal{B}^\tau}$ es una biyección y por el Teorema de la Aplicación Abierta, $L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$ es un operador lineal acotado.
Ahora, supongamos que $L_{\mathcal{B}^\tau}$ es invertible. Entonces, por el Teorema 2.1.4 es suficiente probar que $\mathcal{R}(\mathcal{B}^\tau) = Z$. Para $z \in Z$ definamos el control $u_z \in L^2(0,\tau;U)$ como sigue

$$u_z = Sz = \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z.$$

Entonces $\mathcal{B}^\tau u_z = z$. El resto de la prueba se sigue de aquí. ♠

Corolario 2.1.7. *El control dado por* (2.7) *en el Lema 2.1.6 es el de norma mínima. Es decir,* $\|u\| = \operatorname{ínf}\{\|v\| : v \in S_z\}$*, donde* $S_z = \{v \in L^2(0,\tau;U) : \mathcal{B}^\tau v = z\}$*.*

Demostración. Consideremos las siguientes igualdades

$$\|v\|^2 = \|u + (v-u)\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, v-u\rangle + \|v-u\|^2, v \in S_z.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle u, v-u\rangle &= \int_0^\tau \left\langle \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, v(s) - u(s)\right\rangle ds \\
&= \int_0^\tau \left\langle B^* T^*(\tau - s) L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, v(s) - u(s)\right\rangle ds \\
&= \int_0^\tau \left\langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, T(\tau - s)Bv(s) - T(\tau - s)Bu(s)\right\rangle ds \\
&= \langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, \mathcal{B}^\tau v - \mathcal{B}^\tau u\rangle \\
&= \langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, z - z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|v\|^2 - \|u\|^2 = \|v-u\|^2 \geq 0, v \in S_z.$$

Por lo tanto, $\|u\| \leq \|v\|$ para todo $v \in S_z$ y $\|u\| = \|v\|$ si, y sólo si, $u = v$. ♠

Lema 2.1.8. *(a) El sistema (2.2) es exactamente controlable sobre* $[0,\tau]$ *si, y sólo si, existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z, \quad \forall j = 1, 2, 3 \ldots.$$

(b) El sistema (2.2) es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$ *si, y sólo si, cada uno de los siguientes sistemas*

$$z' = A_j z + B_j u(t), \quad z(t) \in \mathrm{Rango}(P_j), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \ldots, \tag{2.9}$$

es aproximadamente controlable.

(c) El sistema (2.2) es aproximadamente controlable si, y sólo si,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} y, y\rangle > 0, \forall y \neq 0 \text{ en } \mathrm{Rango}(P_j), \; j = 1, 2, 3 \ldots.$$

Demostración.

(a) Supongamos que el sistema (2.2) es exactamente controlable. Entonces, por el Teorema 2.1.4 parte $(a)-(ii)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z\rangle \geq \gamma \|z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Por otro lado, de la Proposición 2.1.5 sabemos que

$$L_{\mathcal{B}^\tau} w = \sum_{l=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_l^\tau} P_l w, \quad \forall w \in Z.$$

En particular, haciendo $w = P_j z$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$, obtenemos $L_{\mathcal{B}^\tau} P_j z = L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z$. Entonces, de la desigualdad de arriba obtenemos

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ahora, supongamos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Entonces, para todo z en Z tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma \|P_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2.
\end{aligned}$$

(b) Por reducción al absurdo, supongamos que el sistema (2.2) es aproximadamente controlable sobre $[0, \tau]$ y que existe j tal que el sistema

$$z' = A_j z + B_j u(t); \quad z \in \text{Rango}(P_j)$$

no es aproximadamente controlable sobre $[0, \tau]$. Entonces, existe $z_j \in \text{Rango}(P_j)$ tal que:

$$B_j^* e^{A_j^* t} z_j = 0, \quad t \in [0, \tau] \quad \text{y} \quad z_j \neq 0. \tag{2.10}$$

Por otro lado, de la parte $(b)-(iii)$ del Teorema 2.1.4 tenemos que:

$$B^*T^*(t)z = 0, \;\; \forall\, t \in [0,\tau] \Longrightarrow z = 0.$$

Ahora, tomando $z = P_j z_j = z_j$, obtenemos:

$$\begin{aligned} B^*T^*(t)z &= B^*\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n^* t} P_n z \\ &= B^* e^{A_j^* t} P_j z_j \\ &= (B_j)^* e^{A_j^* t} z_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $z_j = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (2.9) es aproximadamente controlable para todo j.

Recíprocamente, supongamos que para todo j el sistema (2.9) es aproximadamente controlable. Notese que $L_{\mathcal{B}_j^\tau}$ es la aplicación gammian asociada a (2.9). Entonces por el Teorema 2.1.4 parte $(b)-(ii)$, tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} y, y\rangle > 0, \forall\, y \neq 0 \;\text{ en }\; \text{Rango}(P_j), \;\; j = 1,2,3...$$

Claramente que, para todo $z \in Z$ $(z \neq 0)$ existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $P_J z \neq 0$. Entonces, usando la Proposición 2.1.5, obtenemos, para todo z en Z, que

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, (2.2) es aproximadamente controlable y se prueba (b).

(c) se sigue inmediatamente de (b) y el Teorema 2.1.4 parte (b). ♠

2.2. Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Continuos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación no lineal:

$$z' = Az(t) + Bu(t) + f(z(t), u(t)), \;\; t > 0,$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, $B \in L(U,Z)$, $u \in L^2(0,\tau;U)$ y el término no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función continua Lipschitziana. Es decir, para $z_1, z_2 \in Z$ y $u_1, u_2 \in U$ tenemos que

$$\|f(z_2,u_2) - f(z_1,u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}. \tag{2.11}$$

Supondremos que L es suficientemente pequeño y que el sistema (2.2) es exactamente controlable, es decir, $\mathcal{R}(\mathcal{B}^\tau) = Z$.
Por otra parte, del Teorema 1.3.2, sabemos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' &= Az(t) + Bu(t) + f(z(t),u(t)), \quad t > 0, \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t T(t-s)f(z(s),u(s))ds \;\; t \in [0,\tau]. \tag{2.13}$$

Definición 2.2.1. *El sistema (2.12) se dice que es* ***exactamente controlable*** *sobre* $[0,\tau]$, *si para todo* $z_0, z_1 \in Z$, *existe un control* $u \in L^2(0,\tau;U)$ *tal que la solución moderada correspondiente,* z, *de (2.12) satisface* $z(\tau) = z_1$.

Definamos el siguiente operador: $\mathcal{B}_f^\tau : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$, por

$$\mathcal{B}_f^\tau u = \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z(s),u(s))ds, \tag{2.14}$$

donde $z(t)$ es la solución de (2.12) correspondiente al control u.
Entonces, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema no lineal (2.12)

Proposición 2.2.2. *El sistema (2.12) es exactamente controlable sobre* $[0,\tau]$ *si, y sólo si,* $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$.

Demostración. Supongamos que (2.12) es exactamente controlable sobre $[0,\tau]$. Dado $z \in Z$, podemos encontrar $z_0, z_1 \in Z$ tales que

$$z_1 = T(\tau)z_0 + z. \tag{2.15}$$

Luego, existe un control $u \in L^2(0,\tau;U)$ tal que $z_u(0) = z_0$ y $z_u(\tau) = z_1$. Así,

$$z_1 = z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s),u(s))ds. \tag{2.16}$$

Sustituyendo (2.15) en (2.16), obtenemos

$$T(\tau)z_0 + z = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Entonces,

$$z = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z_u(s), u(s))ds = \mathcal{B}_f^\tau u.$$

Así, Rango$(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$.
Supongamos ahora que Rango$(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$. Consideremos $z \in Z$ tal que

$$z = z_1 - T(\tau)z_0 \tag{2.17}$$

con $z_0, z_1 \in Z$. Entonces existe un control $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que

$$\mathcal{B}_f^\tau u = z. \tag{2.18}$$

Entonces, sustituyendo (2.17) en (2.18), obtenemos

$$z = z_1 - T(\tau)z_0 = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

De donde,

$$z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Así, hemos obtenido una solución $z_u(\cdot)$ de (2.12) tal que $z_u(\tau) = z_1$ y $z_u(0) = z_0$, es decir, (2.12) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$. ♠

Lema 2.2.3. *Sean u_1, $u_2 \in L^2(0, \tau; U)$ y z_1, z_2 las soluciones correspondientes de (2.12). Entonces vale la siguiente estimación:*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}e^{ML\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,\tau;\, U)} \tag{2.19}$$

donde $0 \leq t \leq \tau$ *y* $M = \sup_{1 \leq s \leq t \leq \tau}\{\|T(t - s)\|\}$.

Demostración. Sean z_1, z_2 soluciones de (2.12) correspondientes a u_1, u_2 respectivamente. Entonces

$$z_1(t) - z_2(t) = \int_0^t T(t - s)[Bu_1(s) + f(z_1(s), u_1(s)) - Bu_2(s) - f(z_2(s), u_2(s))]ds.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|z_1(t) - z_2(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|B\|\|u_1(s) - u_2(s)\|ds \\
&+ \int_0^t \|T(t-s)\|\|f(z_1(s), u_1(s)) - f(z_2(s), u_2(s))\|ds \\
&\leq M[\|B\| + L] \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds + ML \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|ds \\
&\leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2} + ML \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Así, usando la desigualdad de Gronwall se obtiene

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}e^{ML\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

♠

Consideremos ahora el siguiente Teorema el cual es de suma importancia en nuestro trabajo.

Teorema 2.2.4. *Sean Z un espacio Banach y $K : Z \to Z$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $L_K < 1$ y considere $G(z) = z + Kz$. Entonces G es un homeomorfismo cuya inversa es una función Lipschitz con constante de Lipschitz* $(1 - L_K)^{-1}$.

Demostración. Veamos primero que G es inyectiva. Sean $z_1, z_2 \in Z$ tales que $Gz_1 = Gz_2$. Entonces $z_1 + Kz_1 = z_2 + Kz_2$. Luego, $z_1 - z_2 = Kz_2 - Kz_1$. Así,

$$\|z_1 - z_2\| = \|Kz_1 - Kz_2\| \leq L_K\|z_1 - z_2\|.$$

De donde, $(1 - L_K)\|z_1 - z_2\| \leq 0$, y como $(1 - L_K) > 0$, entonces $z_1 = z_2$.
Veamos ahora que G es sobreyectiva. Sea $y \in Z$ y definamos $H : Z \longrightarrow Z$ por $Hz = y - Kz$. Luego, para $z_1, z_2 \in Z$, se tiene

$$\|Hz_1 - Hz_2\| = \|Kz_1 - Kz_2\| \leq L_K\|z_1 - z_2\|, \quad (L_K < 1).$$

Es decir, H es una contracción. Así, para cada $y \in Z$, H tiene un punto fijo z. Por lo tanto, para $y \in Z$, existe $z \in Z$ tal que $Hz = z$. Así, $z = y - Kz$. Entonces $Gz = z + Kz = y$.
Ahora, sean $z_1, z_2 \in Z$.

$$\|Gz_1 - Gz_2\| \geq \|z_1 - z_2\| - \|Kz_1 - Kz_2\| \geq \|z_1 - z_2\| - L_K\|z_1 - z_2\| = (1 - L_K)\|z_1 - z_2\|.$$

Sean $y_1 = Gz_1$, $y_2 = Gz_2$. Entonces,

$$\|G^{-1}y_1 - G^{-1}y_2\| = \|z_1 - z_2\| \leq (1 - L_K)^{-1}\|Gz_1 - Gz_2\| = (1 - L_K)^{-1}\|y_1 - y_2\|.$$

Por lo tanto, G^{-1} es Lipschitziana con constante de Lipschitz $(1 - L_K)^{-1}$. ♠

Ahora estamos listos para formular y probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.5. *Si el siguiente estimado se cumple*

$$L_K = M^2 L(\Gamma + 1)\|B^*\|\|L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}\|\tau < 1, \tag{2.20}$$

donde $\Gamma = M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}e^{ML\tau}$*, y el sistema lineal (2.2) es exactamente controlable, entonces el sistema no lineal (2.12) es exactamente controlable.*

Demostración. Queremos probar que

$$\mathcal{B}_f^\tau(L^2(0,\tau;U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z.$$

Pero, de la controlabilidad exacta del sistema lineal (2.2) sabemos, por el Lema 2.1.6, que el operador $S = \mathcal{B}^{\tau *}L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$ es una inversa por la derecha de $\mathcal{B}^\tau$. Entonces, es suficiente probar que el operador $\widetilde{\mathcal{B}}_f^\tau = \mathcal{B}_f^\tau \circ S$ es sobreyectivo. De la ecuación (2.14) obtenemos la siguiente expresión para este operador

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f^\tau \xi = \xi + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z(s), S(\xi)(s))ds. \tag{2.21}$$

Ahora, si definimos el operador $K : Z \longrightarrow Z$ por

$$K\xi = \int_0^\tau T(\tau - s)f(z(s), S(\xi)(s))ds, \tag{2.22}$$

donde $z = z_\xi$ es la solución de (2.12) correspondiente al control $u = S(\xi)$.
Entonces la ecuación (2.21) toma la forma

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f^\tau = I + K. \tag{2.23}$$

La función K es globalmente Lipschitz. En efecto, sean z_1, z_2 soluciones de (2.12) correspondientes a los controles $S\xi_1$, $S\xi_2$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\|K\xi_1 - K\xi_2\| &\leq \int_0^\tau \|T(\tau-s)\|\|f(z_1(s), S(\xi_1)(s)) - f(z_2(s), S(\xi_2)(s))\|ds \\
&\leq \int_0^\tau ML\{\|z_1(s) - z_2(s)\| + \|(S\xi_1)(s) - (S\xi_2)(s)\|\}ds \\
&\leq \int_0^\tau ML(\Gamma+1)\|(S\xi_1)(s) - (S\xi_2)(s)\|ds \\
&\leq ML(\Gamma+1)\int_0^\tau \|B^*T^*(\tau-s)L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\|\xi_1 - \xi_2\|ds \\
&\leq ML(\Gamma+1)\int_0^\tau \|B^*\|M\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\|\xi_1 - \xi_2\|ds \\
&= M^2L(\Gamma+1)\|B^*\|\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\tau\|\xi_1 - \xi_2\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Lipschitziana con constante de Lipschitz $L_K{=}M^2L(\Gamma{+}1)\|B^*\|\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\tau$, y la hipótesis (2.20) implica que $L_K < 1$. Así, del Teorema 2.2.4 obtenemos que $\widetilde{\mathcal{B}}_f^\tau = I + K$ es un homeomorfismo y en consecuencia el operador $\mathcal{B}_f^\tau$ es sobreyectivo; es decir,

$$\mathcal{B}_f^\tau(L^2(0,\tau;U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z.$$

♠

Corolario 2.2.6. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.2.5 un control que transfiere el estado inicial z_0 a un estado final z_1 está dado por*

$$u = \mathcal{B}^{\tau *}L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}(I+K)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0).$$

Demostración. De la definición 2.2.1 se sigue que para $z_0, z_1 \in Z$ existe $u \in L^2(0,\tau;U)$ tal que $z(\tau) = z_1$. Entonces

$$z_1 = z(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Así,

$$z_1 - T(\tau)z_0 = \mathcal{B}_f^\tau u.$$

Luego,

$$u = (\mathcal{B}_f^\tau)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) = (\widetilde{\mathcal{B}}_f^\tau \circ S^{-1})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) = S \circ (I+K)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0).$$

De donde, $u = \mathcal{B}^{\tau *} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} (I + K)^{-1} (z_1 - T(\tau) z_0)$. ♠

Ahora, el siguiente corolario es inmediato de lo anterior.

Corolario 2.2.7. *El operador* $\Gamma : Z \to Z$ *definido por* $\Gamma = S \circ (I + K)^{-1}$ *es una inversa por la derecha de el operador no lineal* $\mathcal{B}_f^\tau$*. Es decir,* $\mathcal{B}_f^\tau \circ \Gamma = I$*.*

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE CONTROL DISCRETOS

Una de las principales áreas de aplicación para los métodos de control discretos es el control de sistemas continuos, es decir, aquellos sistemas modelados por ecuaciones diferenciales y no por ecuaciones en diferencias. La razón para esto es que mientras la mayoría de los sistemas físicos están modelados por ecuaciones diferenciales, las leyes de control son a menudo implementadas en un computador digital, cuyas entradas y salidas son sucesiones. Una aproximación común para diseños de control en este caso es obtener un modelo de ecuación en diferencias que aproxima al sistema continuo a ser controlado.

En el presente capítulo estudiamos la controlabilidad de ecuaciones en diferencias, sobre espacios de dimensión infinita, de la forma

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0, \tag{3.1}$$

donde $z(n) \in Z$, $u(n) \in U$, Z y U son espacios de Hilbert, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$, $L(U, Z)$ denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de U a Z y $L(Z, Z) = L(Z)$. El termino no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función adecuada.

En primer lugar, damos caracterizaciones que permiten estudiar la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación lineal, es decir, de ecuaciones de la forma (3.1) sin el termino no lineal $f(z, u)$. En especial, mostramos un teorema análogo al Teorema 2.1.4 del capítulo 2, para la ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0. \tag{3.2}$$

Como un segundo paso consideraremos la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \;\; n \in \mathbb{N}^*, \;\; z(n) \in Z, \;\; u(n) \in U, \tag{3.3}$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U,Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \;\; z \in Z, \;\; t \geq 0,$$

de acuerdo al Lema 1.1.6. Particularmente, damos caracterizaciones que permiten reducir el estudio de la controlabilidad de la ecuación lineal (3.3), al estudio de la controlabilidad de una familia de sistemas, usando para ello las técnicas que se conocen del capítulo 2 para la ecuación de evolución continua (2.2), adaptándolas al caso discreto, junto con herramientas propias de las ecuaciones en diferencias de la forma (3.3).
En tercer lugar, estudiamos la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación no lineal de la forma (3.1). Para ser más específicos, suponiendo que el sistema lineal (3.2) es exactamente controlable y que f es una función Lipschitziana con constante de lipschitz suficientemente pequeña, mostraremos que el sistema (3.1) es exactamente controlable, es decir, la controlabilidad exacta de la ecuación lineal se preserva bajo la perturbación no lineal f. Y, si el sistema lineal (3.2) es aproximadamente controlable, dando ciertas condiciones para f, mostraremos que el sistema no lineal (3.1) es aproximadamente controlable.
La motivación para estudiar, en este trabajo, la controlabilidad para ecuaciones en diferencias, nos la da el trabajo de Sasu [24].
Allí, la autora se concentra en el estudio de la estabilizabilidad de la ecuación (3.2), más que en la controlabilidad, particularmente su resultado principal es el siguiente: *"Si el sistema* (3.2) *es completamente estabilizable y A es sobreyectivo, entonces* (3.2) *es exactamente controlable".*
Notese que ese resultado no caracteriza completamente la controlabilidad exacta de la ecuación (3.2), es decir, no es una condición necesaria y suficiente; pues no es cierto que un sistema en diferencias que sea exactamente controlable, sea estabilizable y el operador A sea sobreyectivo. Por otra parte, en este trabajo de Sasu, no se estudia la controlabilidad de la ecuación semilineal (3.1), algo común que observamos al revisar la poca bibliografía existente sobre controlabilidad de ecuaciones en diferencias. Es por ello que nos motivamos a estudiar la controlabilidad de las ecuaciones en diferencias (3.2) y (3.1).

3.1. Controlabilidad para Sistemas Lineales Discretos.

En esta sección presentamos condiciones necesarias y suficientes para estudiar la controlabilidad exacta y aproximada de la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n), \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; z(0) = z_0, \tag{3.4}$$

donde $z(n) \in Z$, $u(n) \in U$, Z, U son espacios de Hilbert, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$.
Para este fin, daremos primero las definiciones de controlabilidad exacta y aproximada para el sistema (3.4).
Considere el conjunto $\Delta = \{(m,n) \in \; \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq n\}$ y sea $\Phi = \{\Phi(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ el operador de evolución asociado a A, i.e.,

$$\Phi(m,n) = \begin{cases} A(m-1)\cdots A(n), & m > n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

donde I es el operador identidad en el espacio de Hilbert Z.
Entonces, la solución de (3.4) está dada por la formula de variación de constantes discreta:

$$z(n) = \Phi(n,0)z(0) + \sum_{k=1}^{n} \Phi(n,k)B(k-1)u(k-1), \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Definición 3.1.1. (**Controlabilidad Exacta**) *El sistema (3.4) se dice que es **exactamente controlable** si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada z_0, $z_1 \in Z$ existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ para el cual $z(0) = z_0$ y $z(n_0) = z_1$.*

Definición 3.1.2. (**Controlabilidad Aproximada**) *El sistema (3.4) se dice que es **aproximadamente controlable** si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada z_0, $z_1 \in Z$, $\varepsilon > 0$ existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ para el cual $z(0) = z_0$ y $\|z(n_0) - z_1\| < \varepsilon$.*

En estos casos decimos que (3.4) es exactamente (resp. aproximadamente) controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.
A continuación presentaremos una versión discreta del Teorema 2.1.4 del capítulo 2 para la ecuación controlada en diferencias (3.4) en espacios de Hilbert. Para ello daremos las siguientes definiciones

Definición 3.1.3. *Para el sistema (3.4) definimos los siguientes conceptos:*

a) ***La aplicación de controlabilidad****, $\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z$ (para $n_0 \in \mathbb{N}$), es definida como sigue*

$$\mathcal{B}^{n_0} u = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n,k) B(k-1) u(k-1). \tag{3.6}$$

b) ***La aplicación grammian*** *(para $n_0 \in \mathbb{N}$) es definida por $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *}$.*

Proposición 3.1.4. *El adjunto $\mathcal{B}^{n_0 *}$ del operador $\mathcal{B}^{n_0}$ está dado por*
$\mathcal{B}^{n_0 *} : Z \longrightarrow l^2(\mathbb{N}, U)$

$$(\mathcal{B}^{n_0 *} z)(k-1) = \begin{cases} B^*(k-1)\Phi^*(n_0,k)z, & k \leq n_0, \\ 0, & k > n_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0,k) z, \quad z \in Z. \tag{3.8}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^{n_0} u, z \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k) B(k-1) u(k-1), z \right\rangle_{Z,Z} \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \langle \Phi(n_0,k) B(k-1) u(k-1), z \rangle_{Z,Z} \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \langle u(k-1), B^*(k-1)\Phi^*(n_0,k) z \rangle_{U,U} \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \langle u(k-1), B^*(k-1)\Phi^*(n_0,k) z \rangle_{U,U} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \langle u(k-1), 0 \rangle_{U,U} \\ &= \langle u, \mathcal{B}^{n_0 *} z \rangle_{l^2(\mathbb{N},U), l^2(\mathbb{N},U)} \end{aligned}$$

lo cual prueba (3.7). Más aún, (3.8) se sigue inmediatamente de la definición 3.1.3 y de (3.7). ♠

Teorema 3.1.5. *(a) La ecuación (3.4) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

(i) Rango$(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$.

(ii) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in Z.$$

(iii) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}^{n_0*}z\|_{l^2(\mathbb{N},U)} \geq \gamma\|z\|_Z, \ \ \forall z \in Z.$$

(b) La ecuación (3.4) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:

(i) $Ker(\mathcal{B}^{n_0*}) = \{0\}$.

(ii) $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}}z, z\rangle > 0$, $z \neq 0$ en Z.

(iii) $B^*(k-1)\Phi^*(n_0, k)z = 0 \Rightarrow z = 0$, $k \geq n_0$.

(iv) $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$.

Demostración.

(a) Puesto que $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*}$, tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}}z, z\rangle = \langle \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*}z, z\rangle = \langle \mathcal{B}^{n_0*}z, \mathcal{B}^{n_0*}z\rangle = \|\mathcal{B}^{n_0*}z\|^2, \forall z \in Z, \tag{3.9}$$

lo cual muestra la equivalencia entre (ii) y (iii).

Si (ii) vale, entonces $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es invertible y acotada. Así,
$\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \text{Dom}((L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}) = Z$. Del hecho de que $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*}$ se obtiene $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) \subset \text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})$. Así $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$, con lo cual se prueba (i).

Supongamos que $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$. Entonces, probaremos que (iii) se cumple. Primero, supongamos que $\mathcal{B}^{n_0}$ es inyectiva; entonces $(\mathcal{B}^{n_0})^{-1} \in L(Z, l^2(\mathbb{N}, U))$ y $(\mathcal{B}^{n_0*})^{-1} \in L(l^2(\mathbb{N}, U), Z)$. Por tanto, existe $\beta > 0$ tal que

$$\|(\mathcal{B}^{n_0*})^{-1}u\|_Z \leq \beta\|u\|_Z, \ \ \forall u \in l^2(\mathbb{N}, U),$$

y con $z = (\mathcal{B}^{n_0*})^{-1}u$ obtenemos

$$\|z\|_Z \leq \beta\|\mathcal{B}^{n_0*}z\|_Z,$$

lo cual es equivalente a (iii) considerando $\gamma = 1/\beta$.

Para el caso general, definamos el espacio de Hilbert $X = [\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0})]^\perp$ dotado con la norma definida por $\|u\|_X = \|u\|_{l^2}$.

Luego, definimos $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0}u = \mathcal{B}^{n_0}u$, $u \in X$, lo cual hace que $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0}$ sea una aplicación biyectiva sobre X, y aplicando nuestro argumento de arriba a $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0}$ se muestra que existe $\beta > 0$ tal que para todo $z \in Z$

$$\beta\|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*}z\|_X \geq \|z\|_Z.$$

Del Lema A.3.30 de Curtain & Zwart [7], el Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Hahn Banach deducimos que

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*}z\| &= \sup_{\{u\in X:\|u\|\leq 1\}} \langle u, \widehat{\mathcal{B}}^{n_0*}z\rangle = \sup_{\{u\in X:\|u\|\leq 1\}} \langle \widehat{\mathcal{B}}^{n_0}u, z\rangle \\
&= \sup_{\{u\in X:\|u\|\leq 1\}} \langle \mathcal{B}^{n_0}u, z\rangle = \sup_{\{u\in l^2(\mathbb{N},U):\|u\|\leq 1\}} \langle \mathcal{B}^{n_0}u, z\rangle \\
&= \|\mathcal{B}^{n_0*}z\|_{l^2}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, tenemos que

$$\|\mathcal{B}^{n_0*}z\|_{l^2} = \|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*}z\|_X \geq \frac{1}{\beta}\|z\|_Z.$$

Una vez más, con $\gamma = 1/\beta$, tenemos (iii).

Ahora, probaremos que la controlabilidad exacta de (3.4) implica (i). Supongamos que (3.4) es exactamente controlable para algún n_0. Dado $z \in Z$ podemos encontrar z_0 y z_1 en Z tales que

$$z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z. \tag{3.10}$$

Entonces existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ tal que $z_0(0) = z_0$ and $z_u(n_0) = z_1$. Así,

$$z_1 = z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1). \tag{3.11}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.11), obtenemos

$$\Phi(n_0, 0)z_0 + z = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Entonces,

$$z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) = \mathcal{B}^{n_0}u.$$

Así, Rango$(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$.

A continuación, mostraremos que (i) implica la controlabilidad exacta de (3.4). Supongamos que Rango$(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$. Consideremos z en Z tal que

$$z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0, \tag{3.12}$$

con z_0, z_1 in Z. Entonces existe un control u tal que

$$\mathcal{B}^{n_0}u = z. \tag{3.13}$$

Luego, sustituyendo (3.12) en (3.13), obtenemos

$$z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0 = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Por tanto,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Así, obtenemos una solución $z_u(\cdot)$ de (3.4) tal que $z_u(n_0) = z_1$ y $z_u(0) = z_0$, es decir, (3.4) es exactamente controlable. Esto concluye la prueba de la parte (a).

(b) De la proposición 3.1.4 se sigue que (i) y (iii) son equivalentes, y (3.9) muestra que (i) y (ii) son equivalentes. Sabemos que

$$(\mathrm{Ker}(\mathcal{B}^{n_0 *}))^{\perp} = \overline{\mathrm{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})}.$$

De esto se sigue que: $\overline{\mathrm{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$ sii $(\mathrm{Ker}(\mathcal{B}^{n_0 *}))^{\perp} = Z$ sii $\mathrm{Ker}(\mathcal{B}^{n_0 *}) = \{0\}$, lo cual muestra que (i) y (iv) son equivalentes.

Ahora, supongamos que (3.4) es aproximadamente controlable; entonces para $\varepsilon > 0$, z, z_0, z_1 en Z, tales que $z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z$, existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ con $z_u(0) = z_0$ y $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$. Así,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}^{n_0}u - z\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) - z \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \Phi(n_0, 0)z_0 - z_1 \right\| \\
&= \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual implica (iv).

Supongamos que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$. Sea $z \in Z$ tal que $z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0$ con z_0, z_1 en Z. Entonces, existe un control u tal que $\|\mathcal{B}^{n_0}u - z\| < \varepsilon$. Así,

$$\|\mathcal{B}^{n_0}u + \Phi(n_0, 0)z_0 - z_1\| = \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon.$$

Luego, hemos obtenido una solución $z_u(\cdot)$ de (3.4) tal que $z_u(0) = z_0$ y $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$; esto nos permite concluir que (3.4) es aproximadamente controlable y termina la prueba de la parte (b). ♠

Lema 3.1.6. *La ecuación (3.4) es exactamente controlable para algún* $n_0 \in \mathbb{N}$ *si, y sólo si,* $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ *es invertible. Más aún, en este caso* $S = \mathcal{B}^{n_0 *}L^{-1}_{\mathcal{B}^{n_0}}$ *es una inversa por la derecha de* $\mathcal{B}^{n_0}$ *y un control* $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ *que lleva el estado inicial* z_0 *a un estado final* z_1 *está dado por:*

$$u = \mathcal{B}^{n_0 *}L^{-1}_{\mathcal{B}^{n_0}}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0). \tag{3.14}$$

Demostración. Supongamos que el sistema (3.4) es exactamente controlable. Entonces, del Teorema 3.1.5 parte $(a) - (iii)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\|\mathcal{B}^{n_0 *}z\| \geq \gamma\|z\|$, para todo $z \in Z$, es decir,

$$\|\mathcal{B}^{n_0 *}z\|^2 \geq \gamma^2\|z\|^2, \;\; z \in Z,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *}z, z\rangle \geq \gamma^2\|z\|^2, \;\; z \in Z,$$

y,

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}}z, z\rangle \geq \gamma^2\|z\|^2, \;\; z \in Z. \tag{3.15}$$

Esto implica que $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es inyectiva. Ahora, probaremos que $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es sobreyectiva. Es decir,

$$\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = Z.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})$ está estrictamente contenido en Z. Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.15) obtenemos

$$\|L_{\mathcal{B}^{n_0}}z\|_{l^2} \geq \gamma^2\|z\|, z \in Z,$$

lo cual implica que $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})$ es cerrado. De aqui, aplicando el Teorema de Hahn Banach, podemos probar que $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = Z$. En consecuencia, $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es una biyección y del Teorema de la Aplicación Abierta, $L^{-1}_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es un operador lineal acotado.

Ahora supongamos que $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ es invertible. Entonces, del Teorema 3.1.5 es suficiente probar que $\mathcal{R}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$. Para $z \in Z$ definimos el control $u_z \in l^2(\mathbb{N}, U)$ como sigue

$$u_z = Sz = \mathcal{B}^{n_0 *} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1} z.$$

Entonces $\mathcal{B}^{n_0} u_z = z$. El resto de la prueba se sigue de aquí. ♠

Un par caracterizaciones más para la controlabilidad exacta del sistema (3.4) están dadas en los siguientes Lemas.

Lema 3.1.7. *El sistema* (3.4) *es exactamente controlable para algún* $n_0 \in \mathbb{N}$ *si, y sólo si,*

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < \infty. \tag{3.16}$$

Demostración. Supongamos que (3.4) es exactamente controlable. Entonces por el Teorema 3.1.5 parte $(a) - (ii)$, se tiene que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \ \ \forall z \in Z.$$

Luego, para todo $z \in Z$ y $\alpha \geq 0$, tenemos

$$\langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z \rangle = \langle z, \alpha z \rangle + \langle z, L_{\mathcal{B}^{n_0}} z \rangle = \alpha \|z\|^2 + \langle z, L_{\mathcal{B}^{n_0}} z \rangle \geq (\alpha + \gamma) \|z\|^2,$$

es decir,

$$\langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z \rangle \geq (\alpha + \gamma) \|z\|^2.$$

Usando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z\| \geq (\alpha + \gamma) \|z\|.$$

Así,

$$(\alpha + \gamma) \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} y\| \leq \|y\|,$$

de donde se sigue que, para todo $\alpha \geq 0$,

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha + \gamma} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Por tanto, $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\|$ es acotada como función de $\alpha \geq 0$ y así se tiene la validez de (3.16).

Recíprocamente, supongamos que vale (3.16). Esto implica que $\lim_{\alpha\to 0^+}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}$ existe y es finito. En efecto, sabemos que $(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}})$ y, la identidad del resolvente,

$$R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) - R(\beta I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = (\beta - \alpha) R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) R(\beta I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}),$$

junto con (3.16), muestran que $\{R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}})\}$ es una sucesión de Cauchy de operadores lineales acotados. Consideremos

$$S = \lim_{\alpha\to 0^+} R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \lim_{\alpha\to 0^+}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}.$$

Luego,

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}}(\lim_{\alpha\to 0^+}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}) = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S.$$

Entonces,

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}} - \alpha I)(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S,$$

es decir,

$$I - \lim_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S.$$

Pero la condición (3.16) implica que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = 0.$$

Así, para todo $z \in Z$, se tiene que

$$z = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S z = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0 *} S z.$$

Por tanto $\mathcal{B}^{n_0}$ es sobreyectivo, y en consecuencia (3.4) es exactamente controlable por el Teorema 3.1.5 parte $(a) - (i)$. ♠

Proposición 3.1.8. *El sistema* (3.4) *es exactamente controlable para algún* $n_0 \in \mathbb{N}$ *si, y sólo si,*

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < 1. \tag{3.17}$$

Demostración. Supongamos que (3.4) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 3.1.5 parte $(a) - (ii)$ existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Luego, para $z \in Z$ se tiene que

$$\langle (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z, z \rangle > (\alpha + \gamma)\|z\|^2,$$

y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z\| > (\alpha + \gamma)\|z\|,$$

así

$$(\alpha + \gamma)\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z\| < \|z\|.$$

Por tanto

$$0 < \sup_{\alpha > 0} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < \sup_{\alpha > 0} (\alpha + \gamma)\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq 1.$$

Recíprocamente, supongamos que (3.17) es cierto, entonces

$$\mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *} = (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) - \alpha I,$$

así

$$\mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = I - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1},$$

de aquí, haciendo uso del Teorema 2.2.4, tenemos que Rango$(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$, es decir, (3.4) es exactamente controlable. ♠

Con respecto a la controlabilidad aproximada de la ecuación en diferencias lineal (3.4), tenemos las siguientes caracterizaciones.

Lema 3.1.9. *La ecuación (3.4) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, $\overline{\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})} = Z$.*

Demostración. Supongamos que el sistema (3.4) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Entonces, del Teorema 3.1.5 parte $(b) - (ii)$ tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0, \ \ \forall z \in Z, \ \ z \neq 0. \tag{3.18}$$

Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\overline{\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})} \subsetneq Z.$$

Entonces, del Teorema de Hanh-Banach existe $z_0 \neq 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z_0 \rangle = 0, \ \ \forall z \in Z.$$

En particular, si ponemos $z = z_0$, entonces $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z_0, z_0\rangle = 0$, lo cual contradice (3.18). Recíprocamente, supongamos que $\overline{\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})} = Z$, es decir, $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*})} = Z$, así $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$. Entonces, del Teorema 3.1.5 tenemos que (3.4) es aproximadamente controlable. ♠

Lema 3.1.10. *El sistema (3.4) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, para cada $z \in Z$,*

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0. \tag{3.19}$$

Más aún, en este caso, una sucesión de controles que transfiere el estado inicial z_0 a una ε-vecindad de un estado final z_1 está dada por

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0).$$

Demostración. Supongamos que el sistema (3.4) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Teorema 3.1.5 parte $(b) - (ii)$, se tiene que, para $z \neq 0$ en Z

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z\rangle > 0. \tag{3.20}$$

Supongamos que existe $z_0 \in Z$ tal que

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0 = y_0 \neq 0.$$

Entonces,

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha L_{\mathcal{B}^{n_0}}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0 = L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0,$$

y

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha z_0 - \alpha[\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0] = L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0.$$

Es decir, $L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0 = 0$, lo cual contradice (3.20). Por tanto, vale (3.19).
Recíprocamente, supongamos que

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0, \forall z \in Z.$$

Queremos probar que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$. Equivalentemente debemos ver que, para todo $z \in Z$ existe una sucesión de controles $\{u_\alpha\} \subset l^2$, tales que

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha = z.$$

Para todo $z \in Z$, definimos la familia de controles

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z,$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{n_0}u_\alpha &= \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z\\ &= (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}} - \alpha I)(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z\\ &= z - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z.\end{aligned}$$

De esto y (3.19) se sigue que

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{B}^{n_0}u_\alpha = z.$$

En consecuencia, el sistema (3.4) es aproximadamente controlable. Esto completa la prueba del Lema. ♠

Corolario 3.1.11. *La familia de operadores $\Gamma_\alpha : Z \longrightarrow l^2(\mathbb{N}, U)$ definida por*

$$\Gamma_\alpha z = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z, \quad \alpha \in (0,1],$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador $\mathcal{B}^{n_0}$, es decir,

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{B}^{n_0}\Gamma_\alpha = I.$$

3.2. Una Ecuación en Diferencias Lineal Particular.

Ahora bien, una forma de obtener Ecuaciones en Diferencias en espacios de Banach es haciendo una discretización en el flujo de una ecuación de evolución; este método fue usado por Chow & Leiva [5], Henry [11] y Megan, Sasu & Sasu [22], para caracterizar dicotomía exponencial para operadores de evolución y productos cruzados de semiflujos (skew product semiflows). Así que, en la presente sección estudiamos la controlabilidad del sistema

$$z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \;\; n \in \mathbb{N}^*, \;\; z(n) \in Z, \;\; u(n) \in U, \tag{3.21}$$

donde Z, U son espacios de Hilbert, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U,Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t}P_j z, \;\; z \in Z, \;\; t \geq 0, \tag{3.22}$$

de acuerdo al Lema 1.1.6. Notese que la ecuación (3.21) anterior es la discretización en el flujo del sistema de control gobernado por la ecuación de evolución (2.2).

Proposición 3.2.1. *El operador de evolución* $\Phi = \{\Phi(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *asociado a la ecuación (3.21), está dado por la fórmula* $\Phi(m,n) = T(\Theta(m,n))$*, donde*

$$\Theta(m,n) = \frac{m^2 - n^2 - m + n}{2} \in \mathbb{N}, m \geq n.$$

Demostración. Sabemos que

$$\Phi(m,n) = T(m-1)T(m-2)\cdots T(n) = T(m-1)T(m-2)\cdots T(m-k),$$

donde $m = n + k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Phi(m,n) &= T(m-1+m-2+\cdots+m-k) = T\left(km - \sum_{i=1}^{k} i\right) \\
&= T\left(km - \frac{k(k+1)}{2}\right) = T\left(\frac{2km - kk - k}{2}\right) = T\left(\frac{k(2m-k)-k}{2}\right) \\
&= T\left(\frac{k(m+n)-k}{2}\right) = T\left(\frac{k(m+n-1)}{2}\right) = T\left(\frac{(m-n)(m+n-1)}{2}\right) \\
&= T\left(\frac{m^2-n^2-m+n}{2}\right) = T(\Theta(m,n)). \qquad \spadesuit
\end{aligned}$$

Ahora consideramos de nuevo la hipótesis

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \ \ j = 1, 2, \ldots. \tag{3.23}$$

Proposición 3.2.2. *Bajo la hipótesis (3.23) el operador*

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *} z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k)B(k-1)B^*(k-1)\Phi^*(n_0,k)z,$$

puede ser escrito como sigue

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z,$$

donde

$$L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} z = \mathcal{B}_j^{n_0}\mathcal{B}_j^{n_0 *} z = \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0,k)} z, \quad z \in \mathcal{R}(P_j),$$

y $\Theta(n_0,k) = \dfrac{n_0^2 - k^2 - n_0 + k}{2} \in \mathbb{N}.$

Demostración. De la definición del operador $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$, la representación (3.22) de $T(t)$ y la Proposición 3.2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}^{n_0}} z &= \sum_{k=0}^{n_0}\left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j\Theta(n_0,k)}P_j\right) BB^*\left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{A_l^*\Theta(n_0,k)}P_k z\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n_0}\sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j\Theta(n_0,k)}B_jB_j^* e^{A_j^*\Theta(n_0,k)}P_j z\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n_0} e^{A_j\Theta(n_0,k)}B_jB_j^* e^{A_j^*\Theta(n_0,k)}P_j z\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}P_j z. \qquad\qquad \spadesuit
\end{aligned}$$

El siguiente Lema es el resultado principal de esta sección.

Lema 3.2.3. *(a) El sistema (3.21) es exactamente controlable (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$) si, y sólo si, existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}P_jz, P_jz\rangle \geq \gamma\|P_jz\|^2, \;\; \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) El sistema (3.21) es aproximadamente controlable (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$) si, y sólo si, cada uno de los siguientes sistemas

$$z(n+1) = e^{A_jn}z(n) + B_ju(n), \;\; z(n) \in \mathcal{R}(P_j), \;\; n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.24}$$

es aproximadamente controlable.

(c) El sistema (3.21) es aproximadamente controlable (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$) si, y sólo si,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}P_jz, P_jz\rangle > 0, \;\; \forall z \neq 0 \;\; en \;\; Z, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Demostración.

(a) Supongamos que existe $\gamma>0$ tal que $\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0,k)} \right) P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0,k)} P_j z, P_m z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0,k)} P_j z, P_j z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Así, (3.21) es exactamente controlable por el Teorema 3.1.5 parte $(a)-(ii)$. Recíprocamente, supongamos que (3.21) es exactamente controlable, entonces por el Teorema 3.1.5 parte $(a)-(ii)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{B^{n_0}} z, z\rangle \geq \gamma \|z\|^2.$$

En particular,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_i^{n_0}} P_i P_j z, P_j z \right\rangle = \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2,$$

lo cual concluye la prueba de (a).

(b) Supongamos que (3.21) is aproximadamente controlable y que existe j tal que

$$z(n+1) = e^{A_j n} z(n) + B_j u(n), \quad z(n) \in \mathcal{R}(P_j), \quad n \in \mathbb{N}$$

no es aproximadamente controlable. Entonces por el Teorema 3.1.5 parte $(b)-(iii)$, existe $z_j \in \mathcal{R}(P_j)$, $z_j \neq 0$ tal que

$$B_j^* e^{A_j^* \Theta(n,k)} z_j = 0, \; k = 1, 2, \ldots \; .$$

Más aún, puesto que (3.21) es aproximadamente controlable, tenemos

$$B^* T^*(\Theta(n,k)) z = 0 \Rightarrow z = 0, \; k = 1, 2 \ldots \; .$$

Ahora, si ponemos $z = P_j z_j = z_j$, entonces

$$\begin{aligned} B^*T^*(\Theta(n,k))z &= B^*\sum_{l=1}^{\infty} e^{A_l^*\Theta(n,k)}P_l z \\ &= B^* e^{A_j^*\Theta(n,k)}P_j z_j = (B_j)^* e^{A_j^*\Theta(n,k)} z_j = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $z_j = 0$, y esto es una contradicción. Por tanto, (3.24) es aproximadamente controlable para todo j.

Recíprocamente, supongamos que (3.24) es aproximadamente controlable para todo j. Notese que $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}$ es la aplicación grammian asociada a (3.24). Entonces, por el Teorema 3.1.5 parte $(b)-(ii)$, tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle > 0, \quad z \neq 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j\Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^*\Theta(n_0,k)} \right) P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j\Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^*\Theta(n_0,k)} P_j z, P_m z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j\Theta(n_0,k)} B_j B_j^* e^{A_j^*\Theta(n_0,k)} P_j z, P_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z\rangle > 0, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, (3.21) es aproximadamente controlable y se prueba (b).

(c) se sigue inmediatamente de (b) y el Teorema 3.1.5 parte (b). ♠

3.3. Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Discretos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación en diferencias no lineal:

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0, \tag{3.25}$$

donde $z(n) \in Z$, $u(n) \in U$, Z y U son espacios de Hilbert, $A \in l^{\infty}(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^{\infty}(\mathbb{N}, L(U, Z))$, $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$, $L(U, Z)$ denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de U a Z y $L(Z, Z) = L(Z)$. El termino no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ es una función continua Lipschitziana. Es decir: para todo $z_2, z_1 \in Z$ y $u_1, u_2 \in U$ tenemos que

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}. \tag{3.26}$$

Supondremos que L es suficientemente pequeño y que el sistema en diferencias lineal (3.4) es exactamente controlable (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$), es decir, $\mathcal{R}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$.
Para $z_0 \in Z$, la ecuación (3.25) tiene una única solución dada por

$$z(n) = \Phi(n, 0)z(0) + \sum_{k=1}^{n} \Phi(n, k)[B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1), u(k-1))], n \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Definición 3.3.1. (**Controlabilidad Exacta**) *El sistema (3.25) se dice que es **exactamente controlable** si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada z_0, $z_1 \in Z$ existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ para el cual $z(0) = z_0$ y $z(n_0) = z_1$.*

En este caso decimos que (3.25) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.
Consideremos el siguiente operador no lineal $\mathcal{B}_f^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f^{n_0} u &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z(k-1), u(k-1)) \\ &= \mathcal{B}^{n_0} u + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Entonces, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema no lineal (3.25).

Proposición 3.3.2. *El sistema (3.25) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, $\mathcal{R}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = \mathrm{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z$.*

Demostración. Supongamos que (3.25) es exactamente controlable sobre para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Dado $z \in Z$, podemos encontrar $z_0, z_1 \in Z$ tales que

$$z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z. \tag{3.29}$$

Luego, existe un control $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ tal que $z_u(0) = z_0$ y $z_u(n_0) = z_1$. Así,

$$z_1 = z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)). \tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.29) en (3.30), obtenemos

$$\Phi(n_0,0)z_0+z=\Phi(n_0,0)z_0+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)B(k-1)u(k-1)+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)f(z_u(k-1),u(k-1)).$$

Entonces,

$$z=\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)B(k-1)u(k-1)+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)f(z_u(k-1),u(k-1))=\mathcal{B}_f{}^{n_0}u.$$

Así, Rango$(\mathcal{B}_f^{n_0})=Z$.
Supongamos ahora que Rango$(\mathcal{B}_f^{n_0})=Z$.. Consideremos $z\in Z$ tal que

$$z=z_1-\Phi(n_0,0)z_0, \tag{3.31}$$

con $z_0,z_1\in Z$. Entonces existe un control $u\in l^2(\mathbb{N},U)$ tal que

$$\mathcal{B}_f^{n_0}u=z. \tag{3.32}$$

Entonces, sustituyendo (3.31) en (3.32), obtenemos

$$z=z_1-\Phi(n_0,0)z_0=\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)B(k-1)u(k-1)+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)f(z_u(k-1),u(k-1)).$$

De donde,

$$z_u(n_0)=\Phi(n_0,0)z_0+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)B(k-1)u(k-1)+\sum_{k=0}^{n_0}\Phi(n_0,k)f(z_u(k-1),u(k-1)).$$

Así, hemos obtenido una solución $z_u(\cdot)$ de (3.25) tal que $z_u(n_0)=z_1$ y $z_u(0)=z_0$, es decir, (3.25) es exactamente controlable para algún $n_0\in\mathbb{N}$. ♠

Lema 3.3.3. *Sean u_1, $u_2\in l^2(\mathbb{N},U)$ y z_1, z_2 las soluciones correspondientes de (3.25). Entonces, vale el siguiente estimado:*

$$\|z_1(j)-z_2(j)\|_Z\leq M[\|B\|+L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}\|u_1-u_2\|_{l^2(\mathbb{N},U)} \tag{3.33}$$

donde $j\leq n_0$ y $M=\sup\limits_{1\leq j,k\leq n_0}\{\|\Phi(j,k)\|\}$.

Demostración. Sean z_1, z_2 soluciones de (3.25) correspondientes a u_1, u_2 respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\|z_1(j)-z_2(j)\| &= \sum_{k=1}^{j}\|\Phi(j,k)\|\|B\|\|u_1(k-1)-u_2(k-1)\| \\
&+ \sum_{k=1}^{j}\|\Phi(j,k)\|\|f(z_1(k-1),u_1(k-1))-f(z_2(k-1),u_2(k-1))\| \\
&\leq M[\|B\|+L]\sum_{k=1}^{j-1}\|u_1(k)-u_2(k)\| + ML\sum_{k=1}^{j-1}\|z_1(k)-z_2(k)\| \\
&\leq M[\|B\|+L]\sqrt{n_0}\|u_1-u_2\| + ML\sum_{k=1}^{j-1}\|z_1(k)-z_2(k)\|.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Usando la desigualdad de Gronwall Discreta (Laksmikantham & Trigiante [13] Corolario 1.6.2) obtenemos

$$\|z_1(j)-z_2(j)\|_Z \leq M[\|B\|+L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}\|u_1-u_2\|_{l^2(\mathbb{N},U)}, j \leq n_0.$$

♠

Ahora, formularemos y probaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.4. *Si el siguiente estimado vale*

$$L_K = ML(\Gamma+1)\|\mathcal{B}^{n_0*}\|\|L^{-1}_{\mathcal{B}^{n_0}}\|\sqrt{n_0} < 1, \tag{3.35}$$

donde $\Gamma = M[\|B\|+L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}$, *y el sistema lineal (3.4) es exactamente controlable, entonces el sistema no lineal (3.25) es exactamente controlable para* n_0.

Demostración. Queremos probar que

$$\mathcal{B}_f^{n_0}(l^2(\mathbb{N};U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z.$$

Pero, de la controlabilidad exacta del sistema lineal (3.4) sabemos, debido al Lema 3.1.6, que el operador $S = \mathcal{B}^{n_0*}L^{-1}_{B_{n_0}}$ es una inversa por la derecha de $\mathcal{B}^{n_0}$. Entonces, es suficiente probar que el operador $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = \mathcal{B}_f^{n_0} \circ S$ es sobreyectivo. De la ecuación (3.28) obtenemos la siguiente expresión para este operador

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f^{n_0}\xi = \xi + \sum_{k=1}^{n_0}\Phi(n_0,k)f(z(k-1),S(\xi)(k-1)). \tag{3.36}$$

Ahora, definamos el operador $K : Z \longrightarrow Z$ por

$$K\xi = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\xi)(k-1)), \tag{3.37}$$

donde $z = z_\xi$ es la solución de (3.25) correspondiente a el control $u = S(\xi)$.
Entonces la ecuación (3.36) toma la forma

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = I + K. \tag{3.38}$$

La función K es globalmente Lipschitz. En efecto, sean z_1, z_2 soluciones de (3.25) correspondientes a los controles $S\xi_1$, $S\xi_2$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\|K\xi_1 - K\xi_2\| &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \|\Phi(n_0,k)\| \|f(z_1(k-1), S(\xi_1)(k-1)) - f(z_2(k-1), S(\xi_2)(k-1))\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} ML\{\|z_1(k-1) - z_2(k-1)\| + \|(S\xi_1)(k-1) - (S\xi_2)(k-1)\|\} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} ML(\Gamma+1)\|(S\xi_1)(k-1) - (S\xi_2)(k-1)\| \\
&\leq ML(\Gamma+1)\sqrt{n_0}\|S\xi_1 - S\xi_2\|_{l^2(\mathbb{N},U)} \\
&\leq ML(\Gamma+1)\|\mathcal{B}^{n_0 *}\|\|L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}\|\sqrt{n_0}\|\xi_1 - \xi_2\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Lipschitziana con constante de lipschitz

$$L_K = ML(\Gamma+1)\|\mathcal{B}^{n_0 *}\|\|L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}\|\sqrt{n_0},$$

y la suposición (3.35) implica que $L_K < 1$. En consecuencia, del Teorema 2.2.4 obtenemos que $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = I + K$ es un homeomorfismo y así el operador $\mathcal{B}_f^{n_0}$ es sobreyectivo; es decir,

$$\mathcal{B}_f^{n_0}(l^2(\mathbb{N}; U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z.$$

♠

Corolario 3.3.5. *Bajo la hipótesis del Teorema 3.3.4 un control que envía el estado inicial z_0 a un estado final z_1 está dado por*

$$u = \mathcal{B}^{n_0 *} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}(I+K)^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0).$$

Corolario 3.3.6. *El operador $\Gamma : Z \to Z$ definido por $\Gamma = S \circ (I+K)^{-1}$ es una inversa por la derecha de el operador no lineal $\mathcal{B}_f^{n_0}$. Es decir, $\mathcal{B}_f^{n_0} \circ \Gamma = I$.*

3.4. Controlabilidad Aproximada para Sistemas Semilineales Discretos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad aproximada de la ecuación en diferencias no lineal (3.25) bajo ciertas condiciones sobre f y suponiendo la controlabilidad aproximada de la ecuación (3.4) para algún n_0.

Como mencionamos en la sección anterior, para $z_0 \in Z$, la ecuación (3.25) tiene una única solución dada por (3.27).

Definición 3.4.1. (**Controlabilidad Aproximada**) *El sistema (3.25) se dice que es* ***aproximadamente controlable*** *si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo z_0, $z_1 \in Z$ y $\varepsilon > 0$ existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ tal que $z(0) = z_0$ y $\|z(n_0) - z_1\| < \varepsilon$.*

En este caso decimos que (3.25) es aproximadamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

Consideremos el siguiente operador no lineal $\mathcal{B}_f^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f^{n_0} u &= \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1) + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), u(k-1)) \\ &= \mathcal{B}^{n_0} u + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Luego, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (3.25).

Proposición 3.4.2. *El sistema (3.25) es aproximadamente controlable para algún n_0 si, y sólo si, $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$.*

Demostración. Supongamos que (3.25) es aproximadamente controlable, entonces para $\varepsilon > 0$, z, z_0, z_1 en Z, tales que $z_1 = \Phi(n_0, 0) z_0 + z$, existe $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ con $z_u(0) = z_0$ y $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$. Así,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0) z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)[B(k-1) u(k-1) + f(z(k-1), u(k-1))].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_f^{n_0}u - z\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k)[B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1),u(k-1))] - z \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k)[B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1),u(k-1))] + \Phi(n_0,0)z_0 - z_1 \right\| \\
&= \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$.
Supongamos ahora que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$. Sea $z \in Z$ tal que $z = z_1 - \Phi(n_0,0)z_0$ con z_0, z_1 en Z. Entonces, existe un control u tal que $\|\mathcal{B}_f^{n_0}u - z\| < \varepsilon$. Así,

$$\|\mathcal{B}_f^{n_0}u + \Phi(n_0,0)z_0 - z_1\| = \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon.$$

Luego, hemos obtenido una solución $z_u(\cdot)$ de (3.25) tal que $z_u(0) = z_0$ y $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$; lo cual nos permite concluir que (3.25) es aproximadamente controlable. ♠

Ahora, si definimos el operador $F : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z$ por

$$F(u) = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0,k) f(z(k-1), u(k-1)), \tag{3.40}$$

entonces

$$\mathcal{B}_f^{n_0}u = \mathcal{B}^{n_0}u + Fu. \tag{3.41}$$

Supongamos que f es una función tal que se satisface lo siguiente

$$\langle F \circ \mathcal{B}^{n_0 *}z, z\rangle > 0, \ \ \forall z \in Z, \ \ z \neq 0. \tag{3.42}$$

Entonces obtenemos el siguiente resultado:

Lema 3.4.3. *Si el sistema lineal (3.4) es aproximadamente controlable y se cumple la condición (3.42), entonces el sistema no lineal (3.25) es aproximadamente controlable.*

Demostración. Como (3.4) es aproximadamente controlable se sigue del Teorema 3.1.5 parte $(b)-(ii)$ que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}}z, z\rangle > 0, \ \ \forall z \in Z, \ \ z \neq 0.$$

Supongamos que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} \subsetneq Z$. Por el Teorema de Hahn-Banach se tiene que existe $z_0 \in Z$, $z_0 \neq 0$, tal que $\langle \mathcal{B}_f^{n_0} u, z_0 \rangle = 0, \forall u \in l^2(\mathbb{N}, U)$. En particular, $\langle \mathcal{B}_f^{n_0} \circ \mathcal{B}^{n_0 *} z_0, z_0 \rangle = 0$. Luego,

$$0 = \langle \mathcal{B}_f^{n_0} \circ \mathcal{B}^{n_0 *} z_0, z_0 \rangle = \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z_0, z_0 \rangle + \langle F \circ \mathcal{B}^{n_0 *} z_0, z_0 \rangle > 0.$$

Esta contradicción prueba que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$. Así, por la Proposición 3.4.2, se tiene que (3.25) es aproximadamente controlable. ♠

Otro resultado que muestra que la controlabilidad aproximada de (3.4) se preserva bajo cierta perturbación no lineal es el siguiente.

Lema 3.4.4. *Si el sistema lineal (3.4) es aproximadamente controlable,* Rango(F) *es relativamente compacto y para todo $z \in Z$, $\alpha > 0$ existe $u_\alpha \in l^2(\mathbb{N}, U)$ tal que*

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0 *}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)), \tag{3.43}$$

entonces el sistema no lineal (3.25) es aproximadamente controlable.

Demostración. Como (3.4) es aproximadamente controlable, se tiene, del Teorema 3.1.5 parte $(b) - (ii)$, que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0, \ \ \forall z \in Z, \ \ z \neq 0.$$

De donde se sigue que

$$\|z\| \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z\| \geq \langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z \rangle > \alpha \|z\|^2, z \neq 0.$$

Así, $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z\| > \alpha \|z\|$, $z \neq 0$. Por tanto, $\alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z\| < \|z\|$, $z \neq 0$ y entonces

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq 1. \tag{3.44}$$

Por otro lado, del Lema 3.1.10 se tiene que

$$\text{lím}_{\alpha \to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0, \quad \forall z \in Z. \tag{3.45}$$

Queremos probar que $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$, es decir, dado $z \in Z$, existe $\{u_\alpha\} \subset l^2(\mathbb{N}, U)$ tal que

$$\text{lím}_{\alpha \to 0^+} \mathcal{B}_f^{n_0} u_\alpha = z. \tag{3.46}$$

De (3.41) se sigue que (3.46) es equivalente a probar que

$$\text{lím}_{\alpha \to 0^+} [\mathcal{B}^{n_0} u_\alpha + F(u_\alpha)] = z,$$

ó

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha = z - \text{lím}_{\alpha\to 0^+} F(u_\alpha).$$

Ahora, de la hipótesis (3.43) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{n_0} u_\alpha &= \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)) \\
&= L_{\mathcal{B}^{n_0}}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)) \\
&= [(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} - \alpha I(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}](z - F(u_\alpha)) \\
&= [I - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}](z - F(u_\alpha)) \\
&= z - F(u_\alpha) - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)).
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{B}^{n_0} u_\alpha + F(u_\alpha) = z - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha))$. Luego, (3.46) se cumple si, y sólo si,

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)) = 0,$$

es decir,

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z - \text{lím}_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} F(u_\alpha) = 0. \tag{3.47}$$

El primer limite en (3.47) es cero por (3.45).
Ahora, como Rango(F) es relativamente compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que existe $y \in Z$ tal que

$$\text{lím}_{\alpha\to 0^+} F(u_\alpha) = y. \tag{3.48}$$

Luego,

$$\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} F(u_\alpha) = \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} y + \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(F(u_\alpha) - y).$$

Tomando en cuenta (3.44), (3.45), (3.48) y la expresión anterior, obtenemos que el segundo límite en (3.47) es cero. Así, se satisface (3.46) y por lo tanto el sistema no lineal (3.25) es aproximadamente controlable. ♠

Observación. En el caso en que el sistema lineal (3.4) es exactamente controlable y F es, además, una función lipschitziana con constante de lipschitz suficientemente pequeña, entonces (3.43) se satisface y así se tendría la conclusión del Lema 3.4.4 anterior.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES

En el presente capítulo, como aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 3, estudiaremos la controlabilidad de algunos problemas particulares. Pero antes haremos una formulación abstracta de los mismos para lo cual es necesario recordar algunas propiedades de el operador Laplaciano, que serán de utilidad en todas las aplicaciones que presentaremos a continuación.
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $X = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ y consideremos el operador lineal no acotado $A : D(A) \subset X \to X$ definido por $A\phi = -\Delta\phi$, donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{4.1}$$

El operador A tiene las siguientes propiedades bien conocidas: el espectro de A consiste de solo autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty,$$

cada uno con multiplicidad γ_n igual a la dimensión del correspondiente autoespacio.

a) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_n\}$ de autovectores de A.

b) Para todo $x \in D(A)$ tenemos

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\gamma_n} < \xi, \phi_{n,k} > \phi_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n \xi, \tag{4.2}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en X y

$$E_n x = \sum_{k=1}^{\gamma_n} < \xi, \phi_{n,k} > \phi_{n,k}. \tag{4.3}$$

Así, $\{E_n\}$ es una familia de proyecciones ortonormal completa en X y $x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x, \quad x \in X.$

c) $-A$ genera un semigrupo analítico $\{e^{-At}\}$ dado por

$$e^{-At}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n x. \tag{4.4}$$

d) Los espacios de potencias fraccionarios X^r están dados por:

$$X^r = D(A^r) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2r} \|E_n x\|^2 < \infty\}, \quad r \geq 0,$$

con la norma

$$\|x\|_r = \|A^r x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n x\|^2 \right\}^{1/2}, \quad x \in X^r,$$

y

$$A^r x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r E_n x. \tag{4.5}$$

Además, para $r \geq 0$ definimos $Z_r = X^r \times X$, el cual es un Espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_r}^2 = \|w\|_r^2 + \|v\|^2.$$

4.1. Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación de la Onda.

4.1.1. Caso Continuo.

Ejemplo 4.1.1. ***La ecuación de onda (n-dimensional) con control.***

Consideremos la ecuación de onda con control

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t,x), \quad x \in \Omega, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0,x) = y_0(x), \quad y_t(0,x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, el control $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$. El sistema (4.6) puede escribirse como una ecuación abstracta de segundo orden en el espacio de Hilbert $X = L^2(\Omega)$ como sigue:

$$\begin{cases} y'' = -Ay + u(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \end{cases} \tag{4.7}$$

donde el operador $-A$ es el operador Laplaciano definido arriba.
Usando el cambio de variables $y' = v$, la ecuación de segundo orden (4.7) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert $Z = Z_{1/2} = X^{1/2} \times X$ como

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu(t), z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde

$$z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$\mathcal{A}$ es un operador lineal acotado con dominio $D(\mathcal{A}) = D(A) \times X$ y $u \in L^2(0, \tau, U)$ con $U = X$. La prueba del siguiente teorema se sigue directamente del Lema 1.1.6.

Teorema 4.1.1. *El operador $\mathcal{A}$ dado por (4.9), es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ dado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \tag{4.10}$$

donde $\{P_j\}_{j\geq 1}$ es una familia completa de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert Z dadas por

$$P_j = diag[E_j, E_j], \quad j \geq 1, \tag{4.11}$$

y

$$A_j = R_j P_j, \quad R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Notese que

$$R_j^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j & 0 \end{bmatrix}, \quad A_j = R_j P_j, \quad A_j^* = R_j^* P_j, j \geq 1.$$

Además, $e^{A_j s} = e^{R_j s} P_j$ y los autovalores de R_j son: $\sqrt{\lambda_j} i$ y $-\sqrt{\lambda_j} i$.
Si se quiere ver una demostración del Teorema 4.1.1 anterior se puede también consultar Leiva [18], específicamente el Teorema 3.1, tomando $c = 0$ y $d = 1$.

Proposición 4.1.2. *El sistema (4.8) es exactamente controlable sobre* $[0,\tau]$ *para todo* $\tau > 0$.

Demostración. Por el Lema 3.2.3 parte a), es suficiente probar la existencia de $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z. \tag{4.13}$$

En efecto, en este caso tenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $P_j BB^* = BB^* P_j$ y

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z = \mathcal{B}_j^\tau \mathcal{B}_j^{\tau *} z &= \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\left[\frac{\sqrt{\lambda_j}\tau}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4}\right] E_j z_1 + \frac{1}{4\lambda_j}[\cos(2\sqrt{\lambda_j}\tau) - 1] E_j z_2 \\ \\ \frac{1}{4}[\cos(2\sqrt{\lambda_j}\tau) - 1] E_j z_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\left[\frac{\sqrt{\lambda_j}\tau}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4}\right] E_j z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $z = [z_1, z_2]^T$.
Luego,

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z\rangle &= \lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \langle E_j z_1, E_j z_2\rangle \\ &\geq \lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\|, \end{aligned}$$

donde

$$a_j = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4\sqrt{\lambda_j}}, \quad b_j = \frac{\tau}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4\sqrt{\lambda_j}}, \quad c_j = 1 - \cos(2\sqrt{\lambda_j}\tau).$$

Entonces para mostrar (4.13) es suficiente probar la siguiente desigualdad para algún $\gamma > 0$

$$\lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\| \geq \gamma\{\lambda_j \|E_j z_1\|^2 + \|E_j z_2\|^2\},$$

lo cual es equivalente a encontrar un $\widetilde{\gamma} = \frac{1}{\gamma} > 0$ tal que

$$\widetilde{\gamma}\lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + \widetilde{\gamma} b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\| \geq \lambda_j \|E_j z_1\|^2 + \|E_j z_2\|^2,$$

o

$$\lambda_j(\widetilde{\gamma}a_j - 1)\|E_j z_1\|^2 + (\widetilde{\gamma}b_j - 1)\|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}c_j\|E_j z_1\|\|E_j z_2\| \geq 0. \tag{4.14}$$

Ahora, (4.14) es cierto si

$$\widetilde{\gamma}a_j - 1 > 0, \quad \widetilde{\gamma}b_j - 1 > 0, \tag{4.15}$$

y

$$\lambda_j(\widetilde{\gamma}a_j - 1)(\widetilde{\gamma}b_j - 1) \geq \frac{1}{16}\widetilde{\gamma}^2 c_j^2. \tag{4.16}$$

La expresión en (4.16) es equivalente a

$$[\lambda_j\tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau)]\widetilde{\gamma}^2 - 4\lambda_j\tau\widetilde{\gamma} + 4\lambda_j \geq 0.$$

Puesto que la función real $x^2 - \sin^2(x)$ es no negativa, la última expresión (considerada como cuadrática en $\widetilde{\gamma}$) se satisface si

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma} &\geq \frac{4\lambda_j\tau + \sqrt{16\lambda_j^2\tau^2 - 16\lambda_j(\lambda_j\tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau))}}{2(\lambda_j\tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau))} \\
&= \frac{2\lambda_j\tau + 2\sqrt{\lambda_j}|\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|}{(\sqrt{\lambda_j}\tau - |\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|)(\sqrt{\lambda_j}\tau + |\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|)} \\
&= \frac{2}{\tau - \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}\right|}.
\end{aligned}$$

Con esto y (4.15) obtenemos que $\widetilde{\gamma}$ tiene que satisfacer la siguiente condición

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma} &> \text{máx}_{j\geq 1}\left(\frac{2}{\tau - \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}\right|}, \frac{2}{\tau - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}}, \frac{2}{\tau + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}}\right) \\
&= \text{máx}_{j\geq 1}\left(\frac{2}{\tau - \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}\right|}\right),
\end{aligned}$$

lo cual es posible para $\tau > 0$ pues $\tau - \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}\right| > 0$ para todo $\tau > 0$ y decrece en j. Así, podemos siempre encontrar un $\widetilde{\gamma} > 0$ adecuado (en consecuencia $\gamma > 0$) tal que (4.13) se cumpla. Por lo tanto, el sistema (4.8) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$

para cualquier $\tau > 0$. ♠

Ahora bien, si consideramos una perturbación de la ecuación (4.8), digamos

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu(t) + f(z,u), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{4.17}$$

donde el termino no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ satisface:

$$\|f(z_2,u_2) - f(z_1,u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}.$$

y L es suficientemente pequeño, tenemos, por los resultados de la sección 2.2, que (4.17) es exactamente controlable.

4.1.2. Caso Discreto.

Ejemplo 4.1.2. ***Discretización de la ecuación de la onda.***

La discretización en flujo de la abstracción de la ecuación de la onda lineal (4.8) mostrada en el ejemplo 4.1.1 está dada por

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{4.18}$$

donde

$$B : U \longrightarrow Z, \quad Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u.$$

Para este caso tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.3. *El sistema (4.18) es aproximadamente controlable para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En este caso, tenemos

$$\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z, \quad \mathcal{B}^{n_0}u = \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0,k))Bu(k-1),$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} : Z \longrightarrow Z, \quad L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0 *}.$$

Puesto que

$$BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

obtenemos que

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.19}$$

Por otro lado, tenemos que $T^*(t) = T(-t)$. Entonces

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}^{n_0}} z &= \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0,k)) BB^* T^*(\Theta(n_0,k)) z \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j \Theta(n_0,k)} P_j BB^* \sum_{i=1}^{\infty} e^{-A_i \Theta(n_0,k)} P_i z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} BB^* e^{-A_j \Theta(n_0,k)} P_j z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \end{aligned}$$

donde $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} y = \mathcal{B}_j^{n_0} \mathcal{B}_j^{n_0 *} y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0,k)} BB^* e^{-A_j \Theta(n_0,k)} y, \quad y \in \mathcal{R}(P_j)$.

En consecuencia, $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}$.

Sea $z = [z_1, z_2]^T$ en Z. Puesto que

$$e^{R_j s} = \left[cos(\sqrt{\lambda_j} s) \right] I + \frac{sen(\sqrt{\lambda_j} s)}{\sqrt{\lambda_j}} R_j, j \geq 1,$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} e^{A_j \Theta(n_0,k)} BB^* e^{-A_j \Theta(n_0,k)} P_j z &= e^{R_j \Theta(n_0,k)} BB^* e^{R_j^* \Theta(n_0,k)} P_j z \\ &= [0, E_j z_2]^T, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Así,

$$L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z = \sum_{k=1}^{n_0} [0, E_j z_2]^T = n_0 [0, E_j z_2]^T.$$

Entonces

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle = \langle n_0 [0, E_j z_2]^T, [E_j z_1, E_j z_2]^T \rangle = n_0 \|E_j z_2\|^2 > 0, \ \forall j.$$

Luego, usando (4.19), tenemos, para $z \neq 0$ en Z, que

$$
\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle = n_0 \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_2\|^2 = n_0 \|z_2\|^2 > 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, por el Lema 3.2.3 parte (c), la ecuación (4.18) es aproximadamente controlable. ♠

Ahora bien, si consideramos una perturbación de la ecuación (4.18), digamos

$$
\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z,u), \quad z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{4.20}
$$

donde el termino no lineal $f : Z \times U \longrightarrow Z$ satisface las hipótesis adecuadas, tenemos, por los resultados de la sección 3.4, que (4.20) es aproximadamente controlable.

4.2. Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación del Calor.

4.2.1. Caso Continuo.

Ejemplo 4.2.1. ***La Ecuación del Calor (n-dimensional) con control.***

Consideremos la ecuación del calor con control

$$
\begin{cases} y_t = \Delta y + u(t,x), \\ y(0,x) = y_0(x), \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.21}
$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, el control $u \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega))$. El sistema (4.21) puede escribirse como una ecuación abstracta en el espacio $Z = L^2(\Omega)$

$$
\begin{cases} z' = -Az + Bu(t), z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{4.22}
$$

donde $B = I$, la función de control u pertenece a $L^2(0,\tau; Z)$ y el operador A está dado por $A\phi = -\Delta\phi$ con dominio $D(A) = H^2 \cap H_0^1$ y

$$
Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n z.
$$

En este caso $P_j = E_j$, $j \geq 1$. Así,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z &= \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} E_j z ds \\ &= \int_0^\tau e^{-\lambda_j s} e^{-\lambda_j s} E_j z \\ &= \int_0^\tau e^{-2\lambda_j s} E_j z = -\frac{1}{2}[e^{-2\lambda_j \tau} - 1] E_j z. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} E_j z, E_j z \rangle &= -\frac{1}{2}[e^{-2\lambda_j \tau} - 1] \langle E_j z, E_j z \rangle \\ &= -\frac{1}{2}[e^{-2\lambda_j \tau} - 1] \|E_j z\|^2 > 0, \forall \ \ E_j z \neq 0 \ \text{ con } \ z \in Z, \ \ j = 1, 2, 3..., \end{aligned}$$

lo cual prueba que el sistema (4.22) es aproximadamente controlable. ♠

4.2.2. Caso Discreto.

Ejemplo 4.2.2. ***Discretización de la Ecuación del calor.***

La discretización en flujo de la abstracción de la ecuación del calor (4.22) presentada en el ejemplo 4.2.1 está dada por

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \quad z \in Z, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{4.23}$$

En este caso, $T^*(t) = T(t) = e^{-At}$ y $B = I$.

Proposición 4.2.1. *El sistema (4.23) es exactamente controlable para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En efecto, en este caso tenemos que:

$$\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z, \quad \mathcal{B}^{n_0} u = \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0, k)) u(k-1),$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} : Z \longrightarrow Z, \quad L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0 *} z = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z,$$

donde $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} e^{-2\lambda_j \Theta(n_0, k)} y, \quad y \in \mathcal{R}(E_j).$

Ahora, probaremos la existencia de $\gamma > 0$ tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z\rangle \geq \gamma \|E_j z\|^2.$$

Esto es equivalente a la existencia de $\gamma > 0$ tal que

$$\left[\sum_{k=1}^{n_0} e^{-2\lambda_j \Theta(n_0,k)} - \gamma\right] \|E_j z\|^2 \geq 0,$$

lo cual es obviamente cierto para $0 < \gamma < 1$ puesto que $e^{-2\lambda_j \Theta(n_0,n_0)} = 1$.
Entonces, para tal γ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z\rangle \geq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Así, $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z\rangle \geq \gamma \|z\|^2$, $z \in Z$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.1.5 parte $(a) - (ii)$ obtenemos que (4.23) es exactamente controlable. ♠

De manera análoga a la ecuación de la onda, si se considera una perturbación de la ecuación (4.23), donde el término no lineal satisfaga las hipótesis adecuadas, se tendrá que esa perturbación de la ecuación del calor discreta será exactamente controlable (Sección 3.3).

4.3. La Ecuación de Termoelásticidad.

Ejemplo 4.3.1. ***La Ecuación de Termoelásticidad en una placa con control.***

Considere la ecuación de termoelásticidad en una placa con control

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha \Delta\theta = u_1(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta w_t = u_2(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.24}$$

donde $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$, Ω es un dominio acotado suficientemente regular en $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ y $u_i \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega)), i = 1, 2$.

Consideremos $Z = X^1 \times X \times X$, el cual es un espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \right\|_Z^2 = \|w\|_1^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|.$$

En consecuencia, (4.24) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias abstracto en el espacio de Hilbert $Z = X^1 \times X \times X$ como sigue:

$$\begin{cases} w' = v, \\ v' = -A^2 w - \alpha A\theta + u_1, \\ \theta' = -\beta A\theta - \alpha A v + u_2, \end{cases} \tag{4.25}$$

Finalmente, el sistema (4.24) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert $Z = X^1 \times X \times X$ como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + Bu, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \tag{4.26}$$

donde $u \in L^2([0,\tau];U)$, $U = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ -A^2 & 0 & -\alpha A \\ 0 & -\alpha A & -\beta A \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{w \in H^4(\Omega) : w = \Delta w = 0\} \times D(A) \times D(A),$$

y $B : U \longrightarrow Z$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_X & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix}$ es un operador lineal acotado.

Proposición 4.3.1. *El adjunto del operador B está dado por*

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}, \quad y \quad BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}.$$

Demostración. Calcularemos B^*.

$$\langle Bu, z\rangle_Z = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle_Z$$

$$= \langle 0, z_1\rangle_{X^1} + \langle u_1, z_2\rangle_X + \langle u_2, z_3\rangle_X$$

$$= \langle u_1, z_2\rangle_{L^2} + \langle u_2, z_3\rangle_{L^2}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle u, \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} z \right\rangle_U .$$

Entonces, $B^* = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}$ and $B^* \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$.

Así, $BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_X & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}$. ♠

Ahora, usando directamente el Lema 1.1.6, obtenemos que el operador $\mathcal{A}$ dado por (4.27), es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z \quad t \geq 0.$$

donde $P_j = diag(E_j, E_j, E_j)$, $A_j = R_j P_j$, y

$$R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_j^2 & 0 & -\alpha\lambda_j \\ 0 & -\alpha\lambda_j & -\beta\lambda_j \end{bmatrix}, \quad j \geq 1.$$

La afirmación previa se puede ver también usando el Teorema 3.1 de Leiva [17].

Proposición 4.3.2. *El sistema (4.24) es aproximadamente controlable.*

Demostración. Es facil ver que $P_j BB^* = BB^* P_j$, $j = 1, 2, ...$ Así, aplicando el Lema 2.1.8, obtenemos que la controlabilidad aproximada del sistema (4.24) es equivalente a la controlabilidad aproximada de cada uno de los sistemas finito dimensionales

$$z' = A_j z + B_j u, \tag{4.28}$$

donde $z \in \mathcal{R}(P_j)$, $\dim(\mathcal{R}(P_j)) = 3\gamma_j$, $B_j = P_j B : U \to \mathbb{R}^3$,

$$B_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = P_j B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j u_1 \\ \\ E_j u_2 \end{bmatrix} = D_j \begin{bmatrix} E_j u_1 \\ \\ E_j u_2 \end{bmatrix}.$$

Pero la controlabilidad aproximada del sistema (4.28) es equivalente a la controlabilidad de cada uno de los sistemas finito dimensionales

$$z' = R_j z + D_j u, \quad z \in \mathbb{R}^3, \tag{4.29}$$

donde $u \in \mathbb{R}^2$. Y es conocido (Lee & Markus [15], Leiva & Zambrano [21]) que el sistema (4.29) es controlable si, y sólo si,

$$\text{rank}[D_j : R_j D_j : R_j^2 D_j] = 3,$$

lo cual, haciendo los cálculos respectivos, es trivialmente cierto. En consecuencia, hemos probado que el sistema (4.24) es aproximadamente controlable. ♠

4.4. Conclusión.

Las técnicas desarrolladas en este trabajo son generales y pueden ser aplicadas a aquellos sistemas de control gobernados por ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser escritos en la forma del Lema 1.1.6, a estos sistemas los llamaremos Sistemas Diagonal por Bloques como en Larez, Leiva & Uzcátegui [14]. Un caso particularmente importante es la siguiente clase de ecuación de difusión de segundo orden que, además de la ecuación de la onda, incluye como caso particular otras ecuaciones como la ecuación que modela un plato vibrante:

$$w'' + A_0 w = u + f(w, u), \quad w \in W, u \in U, \tag{4.30}$$

donde W, U son espacios de Hilbert, $A_0 : D(A_0) \subset W \longrightarrow W$ es un operador lineal no acotado en W, con la siguiente descomposición espectral:

$$A_0 w = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle \phi_{k,j}, w \rangle \phi_{k,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j w,$$

donde $E_j w = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle \phi_{k,j}, w\rangle \phi_{k,j}$ es un conjunto ortonormal completo de autovectores de $-A_0$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ con multiplicidad γ_n y $-A_0$ genera un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dado por

$$T(t)w = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j w, \quad w \in W, \quad t \geq 0.$$

El control $u \in L^2(0, \tau, U)$, y $f : W \times U \longrightarrow W$ una función adecuada. Un ejemplo de esta clase, además de los mostrados anteriormente, es el siguiente bien conocido sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

Ejemplo 4.4.1. ***El modelo de la placa vibrante.***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta^2 w = u(t,x) + f(u(t,x), w), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \\ w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \\ w(0,x) = \phi_0(x), \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.31}$$

donde Ω es un dominio acotado suficientemente suave en $\mathbb{R}^2$, $u \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega))$, $\phi_0, \psi_0 \in L^2(\Omega)$ y f una función adecuada.

BIBLIOGRAFÍA

[1] AGARWAL, R. (2000) Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications. Marcel Dekker .

[2] BARNETT, S. (1975) Introduction to Mathematical Control Theory. Clarendon Press, Oxford.

[3] BALACHANDRAN K. & DAUER J.P. (1987) Controllability of nonlinear systems via fixed-point theorems. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 12, N 3, pp. 345-352.

[4] BALACHANDRAN K. & PARK J. Y. (2003) Existence of Solution and Controllability of Nonlinear Integrodifferencial Systems in Banach Spaces. Mathematical Problems in Engeneering, Vol. 2, pp. 65-79.

[5] CHOW S. N. & LEIVA H. (1995) Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflows in Banach spaces. J. Differential Equations, Vol. 120, pp. 429-477

[6] CURTAIN R.F. & PRITCHARD A.J. (1978) Infinite Dimensional Linear Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 8. Springer Verlag, Berlin.

[7] CURTAIN R.F. & ZWART H.J. (1995) An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Text in Applied Mathematics, Vol. 21. Springer Verlag, New York.

[8] ELAYDI S. (2005) An introduction to Difference Equations. Springer, Third Edition.

[9] GOLDSTEIN J.A. (1985) Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford Mathematical Monographs, New York.

[10] HANSEN S. & ZHANG B.Y. (1997) Boundary Control of a Linear Thermoelastic Beam. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 210, pp. 182-205.

[11] HENRY D. (1981) Geometry Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 840. Berlin: Springer.

[12] KLAMKA J. (2000) Schauder's fixed point theorem in nonlinear Controllability problems. Control and Cybernetics, Vol. 29, N 1, pp. 153-165.

[13] LAKSHMIKANTHAM V. & TRIGIANTE D. (1988) Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 181.

[14] LAREZ H., LEIVA H. & UZCATEGUI J. (2009) Controllability of Block Diagonal Systems and Applications. International Journal of Systems, Control and Communications. Por aparecer.

[15] LEE E.B. & MARKUS L. (1967) Foundations of Optimal Control Theory, Wiley, New York.

[16] LEIVA H. (2003) A Lemma on C_0-Semigroups and Applications PDEs Systems. Quaestions Mathematicae, Vol. 26, pp. 247-265.

[17] LEIVA H. (2003) A necessary and sufficient algebraic condition for the controllability of thermoelastic plate equation. IMA Journal of Control and Information, Vol. 20, pp. 1-18.

[18] LEIVA H. (2005) Exact controllability of the suspension bridge model proposed by Lazer and McKenna. J. Math. Anal. Appl. Vol. 309, pp. 404-419.

[19] LEIVA H. & UZCATEGUI J. (2008) Controllability of Linear Difference Equations in Hilbert Spaces and Applications. IMA Journal of Mathematical Control and Information, Vol. 25, pp. 323-340.

[20] LEIVA H. & UZCATEGUI J. (2008) Exact controlllability for semilinear difference equation and application. Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 14, N^o 7, pp. 671-679.

[21] LEIVA H. & ZAMBRANO H. (1999) Rank condition for the controllability of a linear time-varying system. International Journal of Control, Vol. 72, pp. 920-931.

[22] MEGAN M., SASU A. L. & SASU B. (2003) Discrete Admissibility and Exponential Dichotomy for Evolution Families. Discrete and Continuous Dinamical Systems, Vol. 9, Nº 2, March, pp. 383-397.

[23] PAZY A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag.

[24] SASU A. L. (2006) Stabilizability and controllability for systems of difference equations. Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 12, Nº 8, pp. 821-826.

[25] SASU B. & SASU A.L. (2004) Stability and stabilizability for linear systems of difference equations. Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 10, Nº 12, pp. 1085-1105.

[26] ZHANG X. (2001) A remark on null exact controllability of the heat equation. SIAM J. CONTROL OPTIM. Vol. 40, Nº. 1, pp. 39-53.

[27] ZUAZUA E. (1993) Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 10, pp. 109-129.

[28] ZUAZUA E. (2005) Controllability of Partial Differential Equations. Notas del autor en su página web: http://www.bcamath.org/zuazua.