Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Centro de Física Fundamental
Grupo de Caos y Sistemas Complejos

Caracterización de la sincronización mediante teoría de la información

Br. Víctor D. González Avella.
Tutor:
Dr. Kay Tucci

Sincronización.

Sincronización de osciladores periódicos.

- Ajuste de fases y frecuencias.
- Osciladores auto-sostenibles.

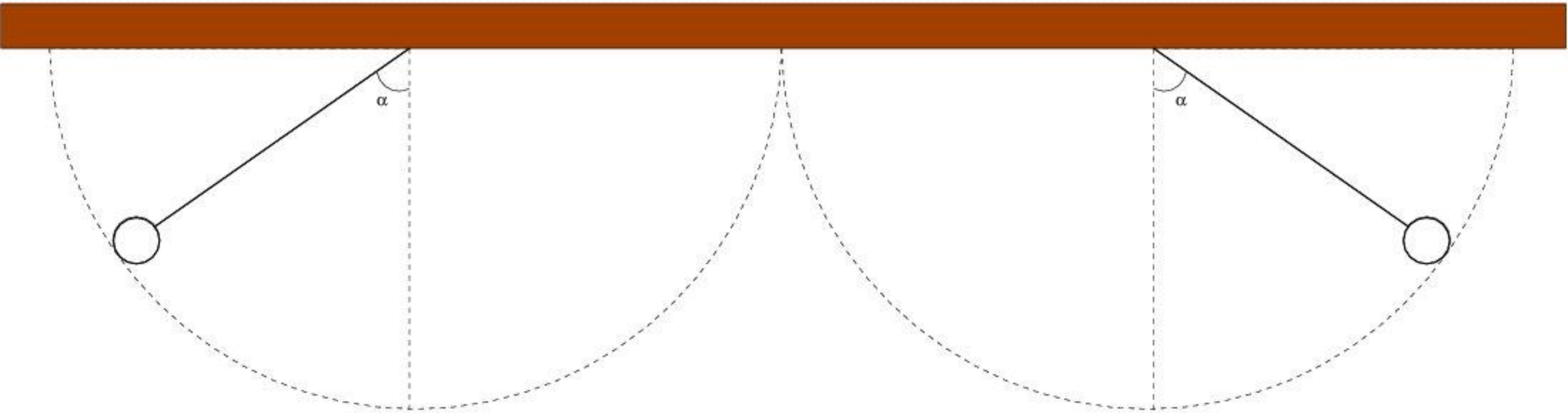


Fig. 1 Dos péndulos sincronizados con fases opuestas

Sincronización Caótica.

Sincronización Generalizada.

- Dos elementos caóticos acoplados.

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$$y_n = \varepsilon f(y_{n-1}) + (1-\varepsilon) f(x_{n-1})$$

- Relación funcional entre los elementos que conforman el sistema.

$$y_n = F(x_n)$$

Sincronización completa.

- Cuando los subsistemas son idénticos la relación funcional entre los elementos puede llegar a ser la identidad.

$$y_n = x_n$$

- Conociendo el estado del elemento x_n y la relación funcional $F(x_n)$ se puede construir el estado del elemento y_n.[1]

Información.

- Cuanto sabemos acerca de la salida de un sistema.
- Shannon utiliza el término "información", en un sentido descriptivo, como la salida de una fuente.
- Disminución de la incertidumbre. [2]
- Cantidad de "Sorpresa" que un receptor tiene cada vez que recibe un mensaje procedente de una fuente. [3]

Medir Información

Entropía de Shannon:

$$H = -\sum_{x} p(x)\log_2(p(x))$$

- Esta cantidad mide el número promedio de bits necesarios para enviar un mensaje.
- x representa un mensaje.
- $p(x)$ la probabilidad de transmitir el mensaje x.

Propiedades

- H=0 si se tiene un caso para el cual alguno de los posibles mensajes tiene probabilidad *1* y el resto *0*.
- Para un conjunto de *n* mensajes, *H* es máximo si todos los p_i son iguales, es decir $p_i = 1/n$, esta es la situación con más incertidumbre.
- Si $n \rightarrow \infty$ entonces $H \rightarrow \infty$.
- Cualquier cambio hacia la igualación de las probabilidades de cada evento $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$, incrementa *H*.

- Si hay un canal X con m posibles mensajes y otro canal Y con n posibles mensajes , y sea $p(x,y)$ la probabilidad conjunta:

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log(p(x,y))$$

- Tenemos:

$$H(X) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log(\sum_{y} p(x,y))$$

$$H(Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log(\sum_{x} p(x,y))$$

$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$$

- Si los mensajes X y Y no son independientes, para cualquier valor que el mensaje pueda asumir existe una probabilidad condicional $p_x(y)$ es dada por:

$$p_x(y) = \frac{p(x,y)}{\sum_y p(x,y)}$$

- La cantidad entropía condicional: [4]

$$H_X(Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log(p_x(y))$$

$$H_X(Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log(p(x,y)) + \sum_{x,y} p(x,y)\log(\sum_y p(x,y))$$

$$H_X(Y) = H(X,Y) - H(X) \Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H_X(Y)$$

$$H(X) + H_X(Y) \leq H(X) + H(Y)$$

$$H(Y) \geq H_X(Y)$$

Mutual Information

$$M(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log\left(\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}\right)$$

- Mide la cantidad de información que comparten dos sistemas.
- Esta cantidad no es efectiva a la hora de predecir eventos a través de los datos que se tienen, es simétrica.
- No indica cual es la dirección del flujo de información.

- En caso de que ambos canales, X y Y sean totalmente independientes, para un par de mensajes (x, y).

$$p(x, y) = p(x)\,p(y)$$

$$M(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x, y)\log\left(\frac{p(x)\,p(y)}{p(x)\,p(y)}\right)$$

$$M(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x, y)\log(1) = 0$$

- En caso de que ambos canales, X y Y sean idénticos

$$M(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log\left(\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}\right)$$

$$M(X,Y) = H(x) = -\sum_{x} p(x)\log(p(x))$$

Información Transferida.

$$T_{X\to Y} = -\sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log\left(\frac{p(x_{n+1} | x_n, y_n)}{p(x_{n+1} | x_n)} \right)$$

- Se basa en la tasa de cambio de entropía, de tal forma que captura la dinámica del sistema.
- Esta cantidad no es simétrica, de modo que, ayuda a determinar la dirección del flujo de la información entre dos sistemas.[5]

- Sustituyendo:

$$p(x_{n+1}|x_n, y_n) = p(x_{n+1}, x_n, y_n) / p(x_n, y_n)$$

$$p(x_{n+1}|x_n) = p(x_{n+1}, x_n) / p(x_n)$$

- Se obtiene:

$$T_{X \to Y} = -\sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log\left(\frac{p(x_{n+1}, x_n, y_n) p(x_n)}{p(x_n, y_n) p(x_{n+1}, x_n)} \right)$$

- Si X y Y son independientes se tiene:

$$p(x_{n+1} | x_n, y_n) = p(x_{n+1})$$

$$p(x_{n+1} | x_n) = p(x_{n+1})$$

$$T_{X \to Y} = -\sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_{n,} y_n) \log\left(\frac{p(x_{n+1})}{p(x_{n+1})}\right)$$

$$T_{X \to Y} = -\sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_{n,} y_n) \log(1) = 0$$

- Si los canales *X* y *Y* no son independientes, el comportamiento de *T* depende del acoplamiento entre dichas variables.
  - Si el acoplamiento entre las variables es unidireccional aumenta el valor de *T* en dicha dirección.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$
$$y_{n+1} = \varepsilon f(x_n) + (1-\varepsilon) f(y_n)$$

$$T_{X\to Y} = -\sum_{x_{n+1},x_n,y_n} p(x_{n+1},x_n,y_n)\log\left(\frac{p(x_{n+1},x_n,y_n)\,p(x_n)}{p(x_n,y_n)\,p(x_{n+1},x_n)}\right) > 0$$

$$T_{Y\to X} = -\sum_{x_{n+1},x_n,y_n} p(y_{n+1},y_n,x_n)\log\left(\frac{p(y_{n+1},y_n,x_n)\,p(y_n)}{p(y_n,x_n)\,p(y_{n+1},y_n)}\right) = 0$$

- Si el acoplamiento es bidireccional aumenta el valor de T aumenta en ambas direcciones.

$$x_{n+1} = \varepsilon_1 f(y_n) + (1-\varepsilon_1) f(x_n)$$

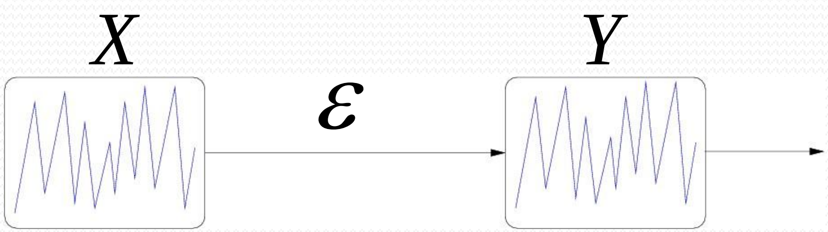
$$y_{n+1} = \varepsilon_2 f(x_n) + (1-\varepsilon_2) f(y_n)$$

$$T_{X \to Y} > 0$$

$$T_{Y \to X} > 0$$

Representación del modelo.

- Sistema Maestro-esclavo.
- Anillo unidireccional.
- Elementos idénticos.



(a)

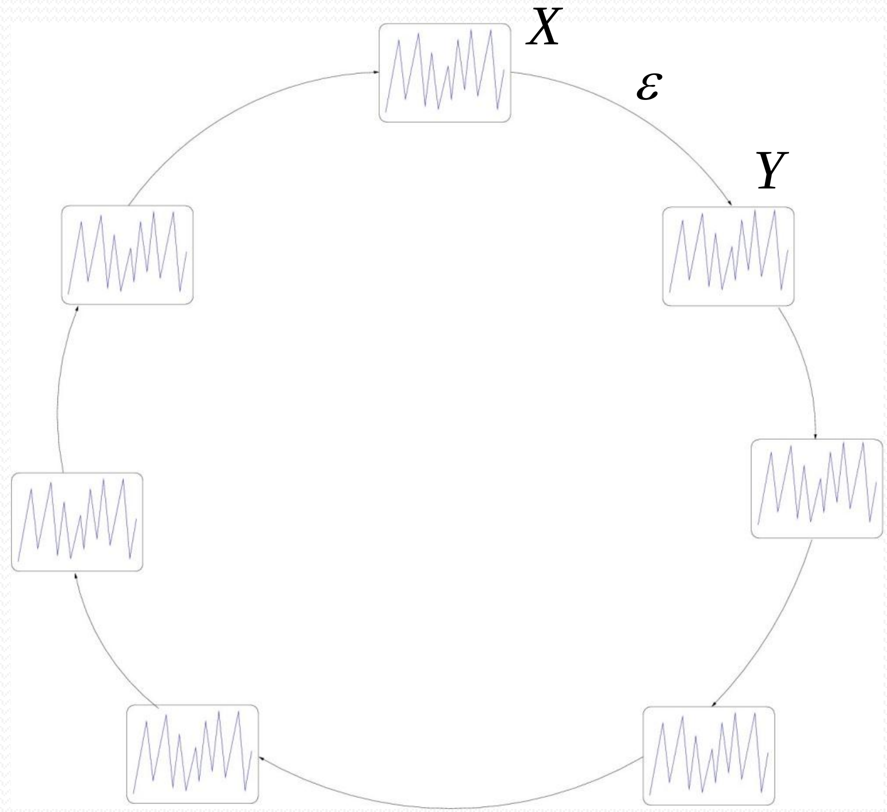


Fig. 2 (a) Sistema maestro-esclavo.
(b) anillo unidireccional.

Ejemplo para el mapa tienda.

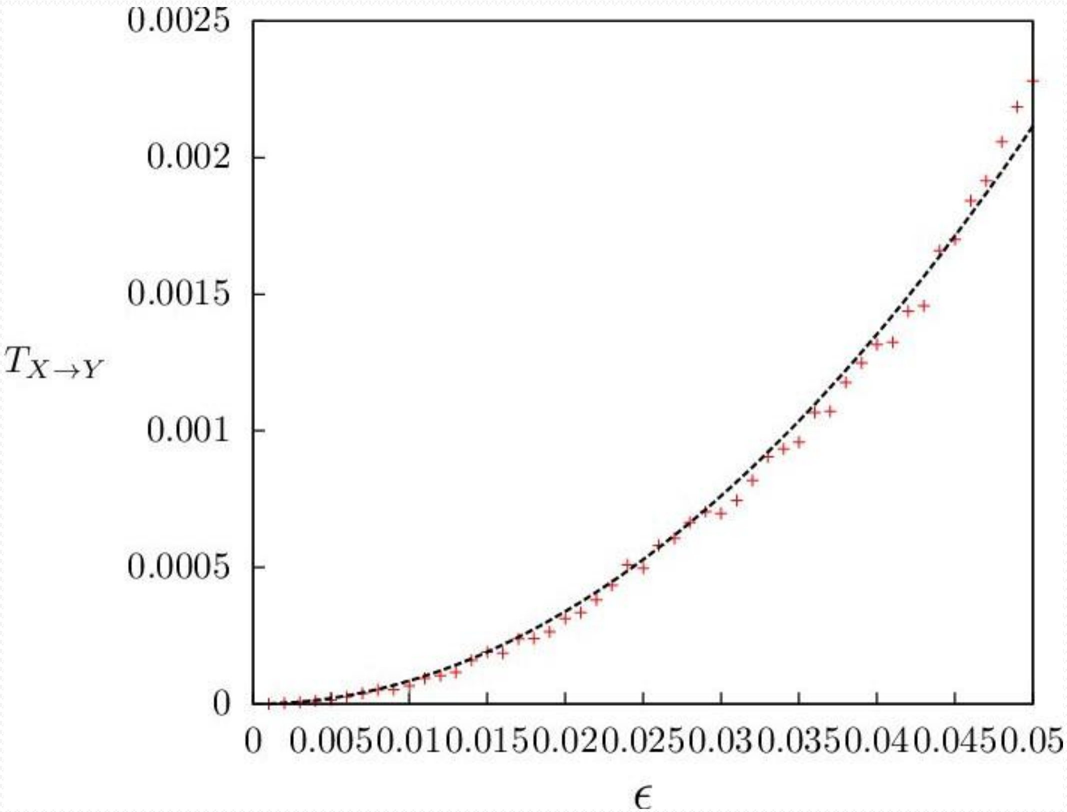


Fig. 3 Información transferida para un sistema de mapas tienda conectados unidireccionalmente.

Auto-transferencia de información.

- Un sistema compuesto por un mapa unidimensional x crea una serie de datos.
- Crear una nueva serie de datos y donde $y_n = x_{n+1}$.

$$T_{x_n \to x_{n+1}} = -\sum_{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}} p(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) \log\left(\frac{p(x_{n+1}, x_n, x_{n-1})\, p(x_n)}{p(x_n, x_{n-1})\, p(x_{n+1}, x_n)}\right)$$

Mapa logístico.

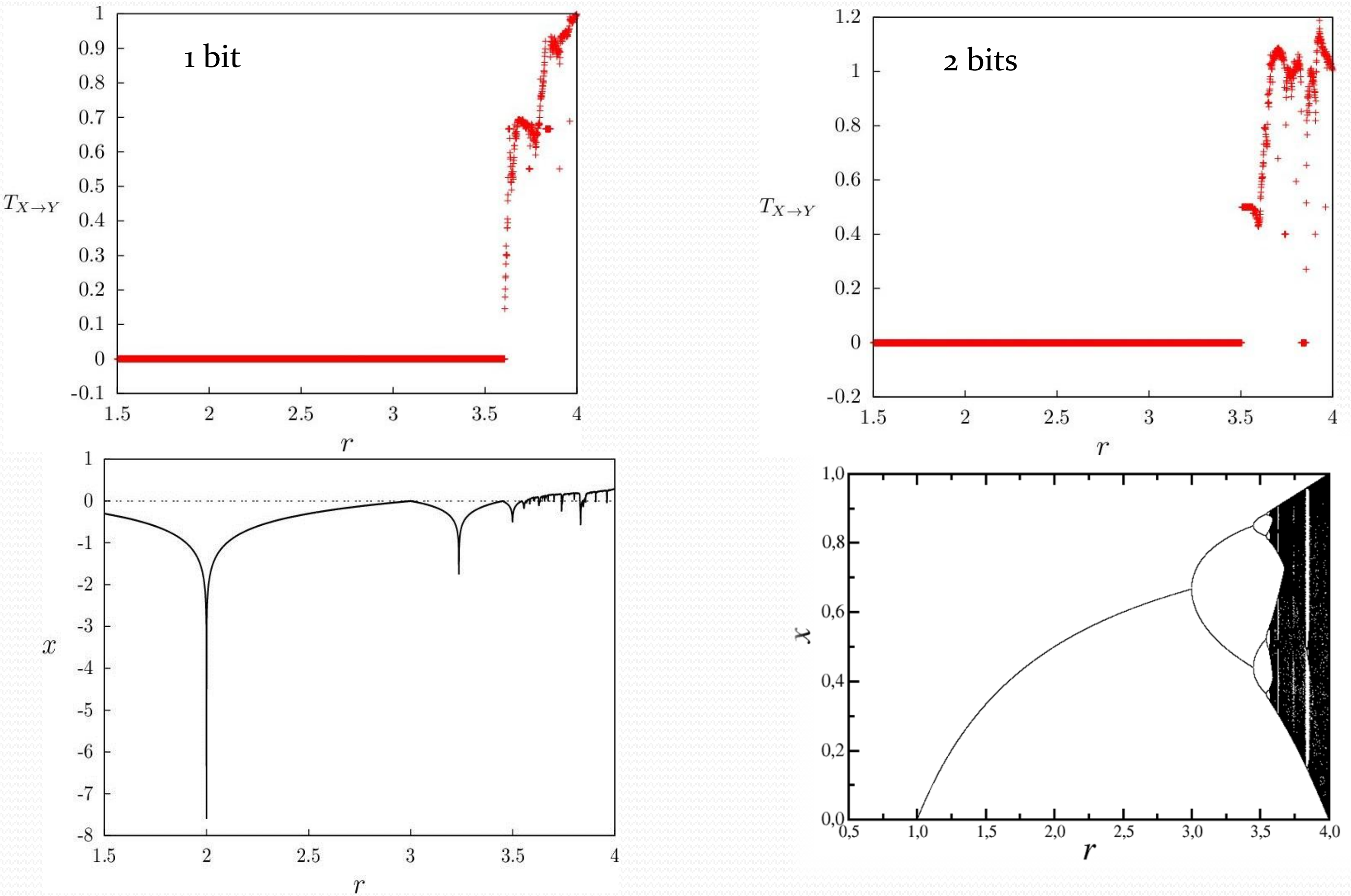


Fig. 4 Información auto-transferida.

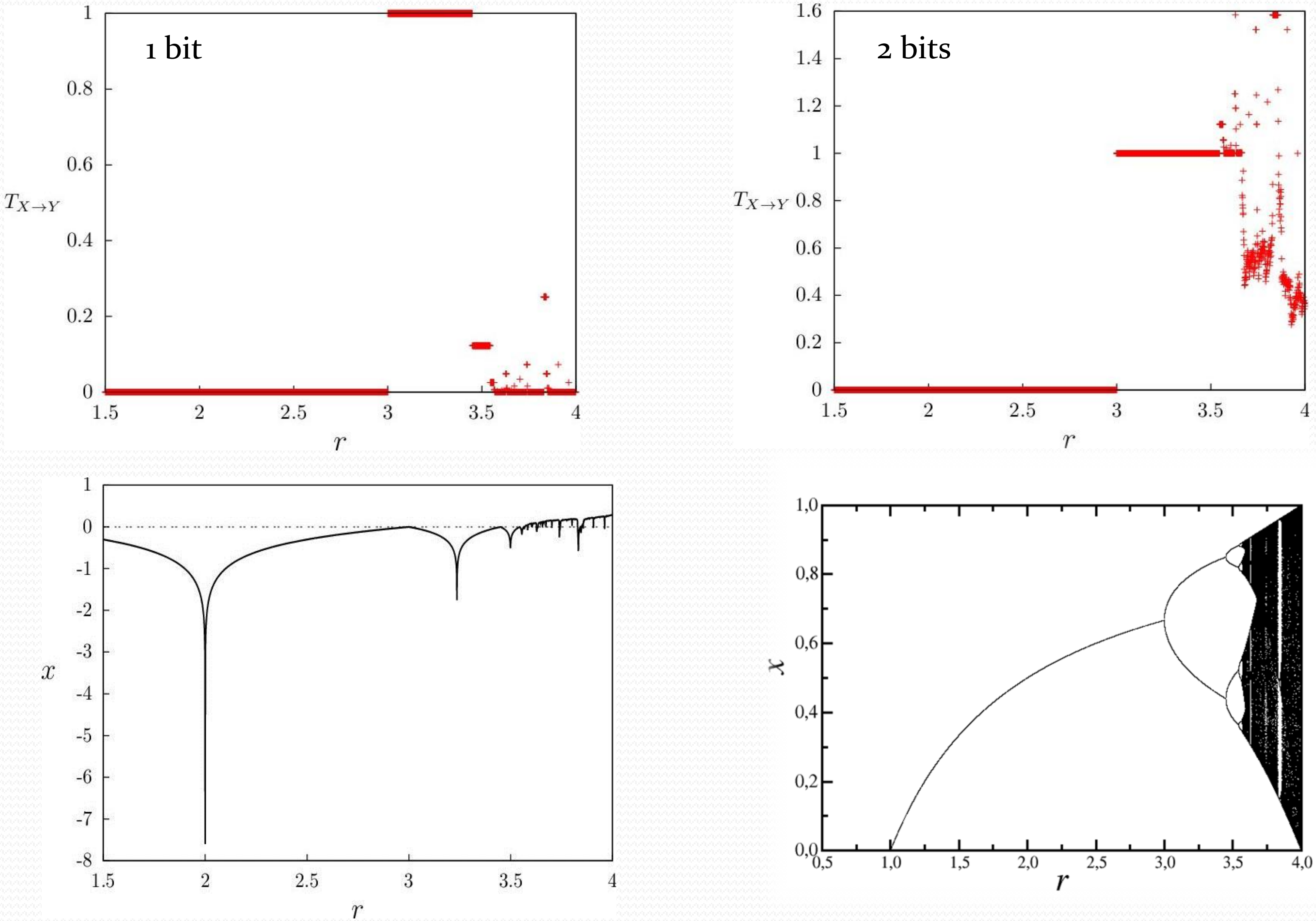


Fig. 5 Información mutua.

Transferencia instantánea de información.

- Tomar un sistema maestro esclavo.
- Aislar iteración i e $i+1$ para n simulaciones del sistema.

$$T_{x_n \to y_{n+1}} = \sum p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log\left(\frac{p(x_{n+1}, x_n, y_n)\, p(x_n)}{p(x_n, y_n)\, p(x_{n+1}, x_n)} \right)$$

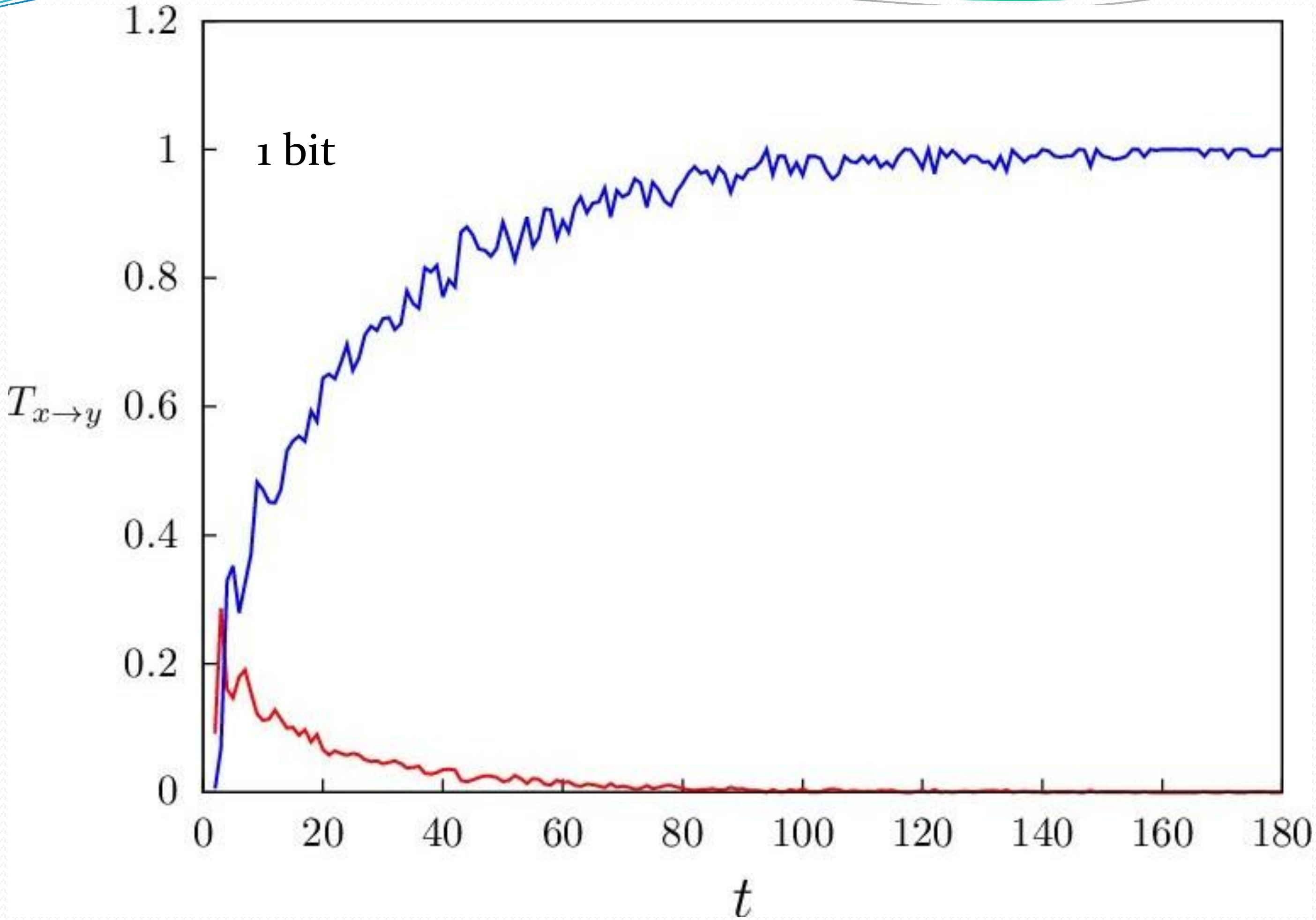


Fig. 6 Transferencia de información instantánea (rojo) e información mutua (azul) para el mapa Ulam, con $\varepsilon = 0{,}52$.

Referencias

- [1] J. Kurths, A. Pikovsky, and M. Rosenblum. *Synchronization A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

- [2] Kähre, J., The Mathematical Theory of Information. U.S.A. Kluwer Academic publishers (2002).

- [3] Introduction to complexity. Disponible en: http://www.complexityexplorer.org/ (consultado 23/05/2015).

- [4] Shannon, C. E. and Weaver, W. *The Mathematical Theory of Information*, University of Illinois Press, Urbana, IL.(1949)

- [5] T. Schreiber, Measuring Information Transfer. Physical Review Letters. 85 (2) 461-464. (2000)