

*Universidad de Los Andes*  
*Centro de Física Fundamental*  
*Area de Caos y Sistemas Complejos*

**Estructuras jerárquicas  
inducidas por estímulo externo  
en redes dinámicas adaptativas**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre  
**Universidad de Los Andes**  
como requisito parcial para optar al Título de:  
**Licenciado en Física**

Presentado por:  
**Br. Victor J. Márquez R.**

Tutor:  
**Dr. Mario Cosenza**

Mérida, Octubre de 2009



*A las dos personas que siempre me han guiado, apoyado y motivado  
para seguir mi camino,  
mis padres.*

*"It is this potential for plasticity of the relatively stereotyped units of the nervous system that endows each of us with our individuality."*

Eric Kandel

# Resumen

Se investiga una red coevolutiva de mapas acoplados, sujetos a un forzamiento, como un modelo simple de un sistema plástico de neuronas expuestas a un estímulo externo. Coevolución significa que la dinámica de los mapas produce cambios en la estructura de conectividad de la red, haciendo que la topología del sistema también varíe en el tiempo, lo cual a su vez afecta la dinámica local. La dinámica local es de tipo oscilatoria y caótica, descrita por el mapa del círculo. Se estudia la influencia de los parámetros del sistema, tales como la intensidad del estímulo externo, en la formación de estructuras y se caracteriza el comportamiento dinámico colectivo y las propiedades topológicas de la red emergente. Los resultados muestran que existen rangos de valores de la intensidad del estímulo para los cuales surgen estructuras jerárquicas en la red. Adicionalmente, se encuentra que el estímulo externo induce mayor estructura en la red cuando los estados de los mapas están menos sincronizados. Nuestro trabajo ilustra el gran potencial que tiene la aplicación de los modelos de mapas acoplados en el estudio de sistemas complejos coevolutivos.

# Agradecimientos

Al Profesor Mario Cosenza, quien además de haber sido un excelente tutor, me ha brindado grandes enseñanzas, apreciados consejos y una amistad, que espero transmitir algún día a personas afortunadas como he sido yo en esta ocasión.

Al Profesor Kay Tucci, por sus valiosos aportes y sugerencias en este trabajo. Por mostrarme que, con paciencia y dedicación, se pueden hacer cosas fascinantes con las computadoras, como ejemplo de ello, el ISyS.

A José Luis, por las opiniones y comentarios que han hecho de éste un mejor trabajo.

A la Profesora Mayerlin Uzcátegui, por sus orientaciones en el área computacional. Por haberme ayudado a hacer que ISyS llegara a Atenea.

A Alejandrita, quien me hizo descubrir a un grupo tan especial, como son los Caóticos, a quienes por supuesto debo agradecerles por todo su apoyo y su amistad.

Al Profesor Victor Garcia, por darme la oportunidad de participar en el programa académico interdisciplinario, con el cual tuve el agrado de conocer a otros profesores fuera de la Facultad de Ciencias, como los profesores del grupo de Fisiología de la Facultad de Medicina, de quienes aprendí muchas cosas; en particular, lo impresionante que es el sistema nervioso humano.

A mis amigos, quienes paradójicamente siempre estuvieron ahí para distraerme y a su vez para apoyarme cuando los necesité. Con quienes tengo el gusto de compartir dos de las cosas que más me apasionan en la vida, los deportes y la música.

A todos mis familiares, quienes siempre han estado allí para ayudarme. Especialmente a mis padres, que me han dado con su ejemplo y fortaleza, todo su apoyo para lograr grandes éxitos en la vida, en particular, la culminación de esta etapa de mi carrera universitaria.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Quasi-Periodicidad</b>	<b>4</b>
1.1. Caos . . . . .	4
1.2. Rutas al caos . . . . .	5
1.3. Quasi-periodicidad . . . . .	5
1.4. Mapa del círculo . . . . .	7
1.4.1. Número de rotación . . . . .	9
1.4.2. Exponente de Lyapunov del mapa del círculo . . . . .	10
<b>2. Redes</b>	<b>13</b>
2.1. Redes adaptativas . . . . .	14
2.2. Propiedades topológicas de redes . . . . .	16
2.2.1. Distribución de grados . . . . .	16
2.2.2. Coeficiente de clustering . . . . .	16
2.3. Redes de mapas acoplados . . . . .	17
2.3.1. Mapa globalmente acoplado . . . . .	17
<b>3. Modelo adaptativo de formación de estructuras en redes</b>	<b>19</b>
3.1. Procesamiento de información . . . . .	19
3.2. Modelo de la memoria de Atkinson y Shiffrin . . . . .	20
3.3. El Proceso de la memoria en el cerebro humano . . . . .	21
3.4. Modelo de Ito y Kaneko . . . . .	22
3.4.1. Formulación matemática del modelo de Ito y Kaneko . . . . .	23

3.4.2. Comportamiento del modelo de Ito y Kaneko . . . . .	24
<b>4. Formación de estructuras en redes adaptativas con estímulo variable</b>	<b>29</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

*“All Matter originates and exists only by virtue of a force. We must assume behind this force the existence of a conscious and intelligent Mind. This Mind is the matrix of all matter.”*

Max Planck

# Introducción

En años recientes, el concepto de *redes dinámicas* ha surgido como un paradigma para el estudio de los sistemas complejos y ha permeado todos los ámbitos de la ciencia contemporánea. Una gran variedad de sistemas naturales y artificiales, desde la ecología, la epidemiología, la socioeconomía, la internet y las ciencias computacionales hasta la neurociencia, se han podido investigar como redes dinámicas. Estos sistemas están constituidos por elementos conectados formando una red y cuyos estados evolucionan en el tiempo. La evolución de los estados de los elementos puede depender tanto de su dinámica local como de la estructura de conexión entre ellos. Muchos de estos sistemas son *coevolutivos* o *adaptativos*, es decir, que la dinámica de los elementos constituyentes produce cambios en la estructura de conexión de la red, haciendo que la topología del sistema también varíe en el tiempo, lo cual a su vez afecta la dinámica local. En estos sistemas la dinámica y la topología están acopladas y dependen la una de la otra. Actualmente, existe un gran interés en el estudio de sistemas coevolutivos en diferentes contextos.

Los modelos de redes de mapas acoplados han sido ampliamente utilizados para el estudio de redes dinámicas [1]. Las redes de mapas acoplados representan sistemas dinámicos espaciotemporales, donde tanto el espacio como el tiempo son discretos, pero los estados de los elementos interactivos son variables continuas. Estos modelos han demostrado ser capaces de describir una gran variedad de fenómenos observados en redes dinámicas, con la ventaja de ser computacionalmente muy eficientes. Sin

embargo, su aplicación en el estudio de sistemas coevolutivos apenas ha comenzado en los últimos años.

Muchos sistemas no se encuentran totalmente aislados en la naturaleza y pueden ser afectados por agentes o estímulos externos al sistema, generando cambios en su estructura y en su dinámica. En este caso, hablamos de sistemas forzados, no autónomos. Por ejemplo, en el cerebro humano, a pesar de que se cree que la mayor parte de la estructura global de la corteza está genéticamente predeterminada, algunas partes son plásticas o adaptativas, y son capaces de organizarse dinámicamente de una manera que depende de estímulos externos [2].

*En la presente Tesis abordamos el estudio de sistemas coevolutivos sujetos a una fuerza o estímulo externo. Específicamente, consideramos una red coevolutiva de mapas acoplados y sujetos a un forzamiento como un modelo simple de un sistema plástico de neuronas sujetas a un estímulo externo.*

Para nuestro estudio, nos basamos en un modelo propuesto por Ito y Kaneko [3] para el cambio adaptativo en las conexiones neuronales que conduce a una estructura dinámica jerárquica de una red bajo la influencia de un estímulo externo. En particular, estudiamos la influencia de los parámetros del sistema en la formación de estructuras y caracterizamos las propiedades topológicas de la red emergente. Nuestros resultados muestran que existen rangos de valores de parámetros, especialmente de la intensidad del estímulo, para los cuales surgen estructuras jerárquicas para el procesamiento de información en redes neuronales. En tal sentido hemos encontrado que el estímulo externo es capaz de inducir estructura en la red.

En el Capítulo 1 presentamos una revisión de la ruta al caos por quasi-periodicidad y del mapa del círculo, el cual describe la dinámica local de los elementos de la red coevolutiva, objeto de nuestro estudio.

En el Capítulo 2 hacemos una breve recopilación de varios conceptos y propiedades topológicas de las redes, los cuales utilizamos en el presente trabajo.

En el Capítulo 3 se describe un modelo clásico de procesamiento de información y de funcionamiento de la memoria, como motivación para el modelo neuronal propuesto. Se presenta el modelo de mapas adaptativos de Ito y Kaneko.

En el Capítulo 4 se plantea nuestra investigación de la influencia de los parámetros del modelo de Ito y Kaneko en las propiedades emergentes en la red. Se muestran diversas propiedades topológicas de la red en función de los valores de intensidad

del estímulo externo y del umbral de conectividad entre los elementos.

Finalmente, en las Conclusiones, se discuten los resultados del presente trabajo.

*You can always try to solve a problem  
by proving that no solution exists.*

Edward N. Lorenz.

# Capítulo 1

## Quasi-Periodicidad

### 1.1. Caos

En años recientes, gracias a la alta capacidad computacional y a demostraciones teóricas y experimentales, se ha podido ver claramente la abundancia del fenómeno de *caos* en la naturaleza, y además se ha hecho evidente su importancia y presencia en distintas ramas del conocimiento. El fenómeno del *caos* en un sistema dinámico está enlazado con tres condiciones fundamentales [4, 5, 6]:

- Es aperiódico a largo plazo. Las trayectorias en el espacio de fase del sistema no se ajustan a un punto fijo, órbitas periódicas u órbitas quasi-periódicas para  $t \rightarrow \infty$ .
- Es determinista. Las ecuaciones dinámicas del sistema no contienen parámetros o términos aleatorios o con ruido. El comportamiento irregular surge de la no linealidad del sistema.
- Es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Trayectorias cercanas se separan exponencialmente rápido.

El caos, es un tipo de movimiento que se encuentra entre las trayectorias deterministas generadas por soluciones de ecuaciones diferenciales y el estado de ruido o

de comportamiento estocástico impredecible que se caracteriza por su aleatoriedad [5].

Dos sistemas dinámicos que muestran el fenómeno de caos son las *ecuaciones diferenciales* y los *mapas iterativos*. Las ecuaciones diferenciales describen cómo evoluciona el sistema en tiempo continuo, mientras que los mapas iterativos son más adecuados para problemas de tiempo discreto [6].

## 1.2. Rutas al caos

Un sistema no lineal puede presentar comportamiento caótico en un cierto rango de valores de sus parámetros. Al variar uno o más parámetros, un sistema no lineal exhibe transiciones entre estados dinámicos regulares (periódicos, quasi-periódicos o puntos fijos) y estados dinámicos caóticos. Existen varios escenarios en los cuales ocurren transiciones al caos. Las principales rutas de transición al caos son [7]:

- A través de consecutivas *bifurcaciones de duplicación de período*. Esta transición es denominada como la *ruta de Feigenbaum*.
- A través de *bifurcaciones tangentes inversas*. Esta ruta se conoce como *intermitencia* o *ruta de Pomeau-Manneville*.
- A través de repetidas *bifurcaciones de Hopf*. Ésta ruta se denomina *quasi-periodicidad* o *ruta de Ruelle y Takens*.

En esta Tesis nos enfocaremos en la ruta de quasi-periodicidad al caos, puesto que éste es el escenario exhibido por los mapas que utilizaremos en nuestro trabajo.

## 1.3. Quasi-periodicidad

En cualquier sistema con dos o más osciladores acoplados de forma no lineal, ya sea por perturbaciones externas o porque el acoplamiento haya sido generado de manera natural, pueden ocurrir algunos efectos como resonancia de frecuencias, quasi-periodicidad, formación de patrones, intermitencia, período doble, caos temporal y caos espacial. Como ejemplos de sistemas que presentan comportamiento

multi-frecuencia, se tiene el péndulo amortiguado y forzado, el goteo de un grifo, las células cardíacas, el cerebro, el ciclo menstrual de las mujeres, entre otros [8].

El término de quasi-periodicidad se utiliza para describir el comportamiento de un sistema donde existe una competencia entre dos o mas frecuencias independientes, cuyo cociente es un número irracional. Generalmente este escenario se presenta en dos tipos de sistemas [9]:

- un sistema no lineal con una frecuencia de oscilación natural, estimulado por una fuerza periódica externa. Aquí, la competencia se hace entre frecuencia externa aplicada y la frecuencia natural de oscilación.
- sistemas no lineales que espontáneamente presentan oscilaciones en dos o más frecuencias a medida que se varían algunos parámetros del sistema. En este caso, la competencia se hace entre las frecuencias generadas por el mismo sistema.

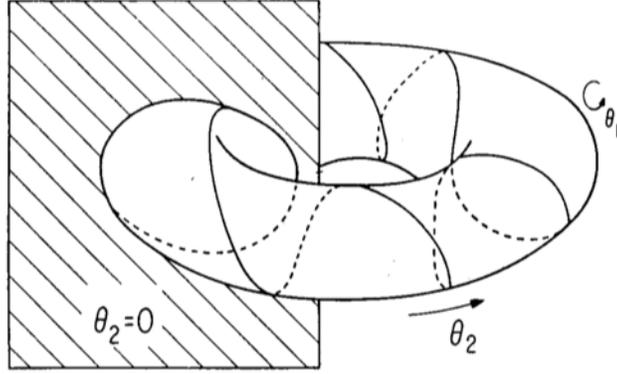
Consideremos un sistema de dos osciladores armónicos acoplados no linealmente y cuyas frecuencias individuales son  $f_1$  y  $f_2$ . Podemos caracterizar el estado del sistema mediante coordenadas que describen la amplitud de los osciladores  $x_1$  y  $x_2$ , y sus respectivas derivadas en el tiempo,  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$ . El número de variables se puede reducir a dos, expresando ambos pares de coordenadas en términos de coordenadas angulares  $\theta_1 \equiv f_1 t$  y  $\theta_2 \equiv f_2 t$ , con  $x_1 = \sin(\theta_1)$ ,  $\dot{x}_1 = f_1 \cos(\theta_1)$ ,  $x_2 = \sin(\theta_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2 \cos(\theta_2)$ . Estas coordenadas están definidas módulo 1, es decir,  $\theta_1 = 1$  y  $\theta_2 = 1$  equivalen a una rotación de  $2\pi$ . De este modo, la evolución del sistema en el tiempo puede representarse como una trayectoria sobre un toroide, donde el diámetro menor corresponde a  $\theta_1$  y el diámetro mayor corresponde a  $\theta_2$  (ver figura 1.1) [8].

El comportamiento del sistema depende del cociente de las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ . Si

$$\Omega = \frac{f_2}{f_1} = \frac{p}{q} = \text{racional}, \quad (1.1)$$

entonces, el movimiento del sistema es *periódico*; la trayectoria sobre el toroide se cierra después de  $q$  rotaciones alrededor de la circunferencia mayor. En este caso decimos que el sistema posee período  $q$  y completa  $p$  ciclos por período. Por otro lado, si

$$\Omega = \frac{f_2}{f_1} = \text{irracional}, \quad (1.2)$$



**Figura 1.1:** Representación del espacio de fase de un sistema con dos frecuencias, donde la trayectoria se mueve sobre un toroide. La línea helicoidal en el toroide traza la trayectoria del sistema. Las coordenadas angulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$  están indicadas. El corte con el plano indicado corresponde a una sección de Poincaré.

entonces el comportamiento del sistema es *quasi-periódico* [9]; la trayectoria nunca se intercepta a sí misma y cubre el toroide densamente, es decir, la trayectoria pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto sobre el toroide.

## 1.4. Mapa del círculo

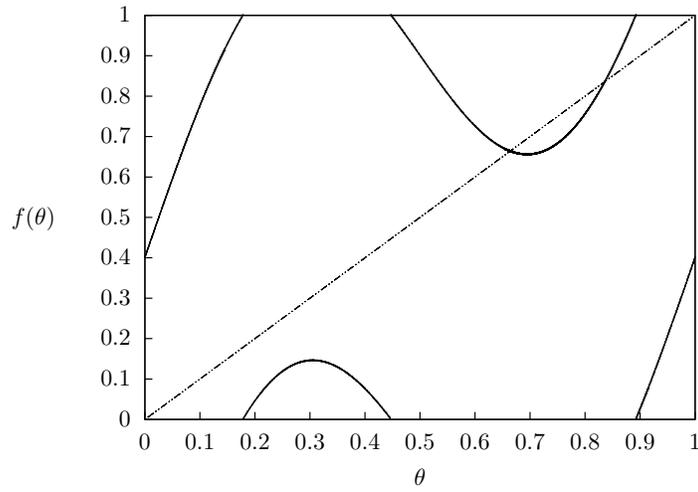
Se denomina sección de Poincaré a la intersección de una trayectoria en el espacio de fase con un plano dado en ese espacio. La sección de Poincaré da lugar a una sucesión de valores discretos obtenidos de la trayectoria, los cuales pueden describirse mediante un mapa iterativo.

El mapa del círculo, es un mapa unidimensional que asigna un círculo sobre sí mismo. Este mapa describe la dinámica de la trayectoria en una sección de Poincaré del toroide de la figura 1.1. Este mapa se define como

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1}, \quad (1.3)$$

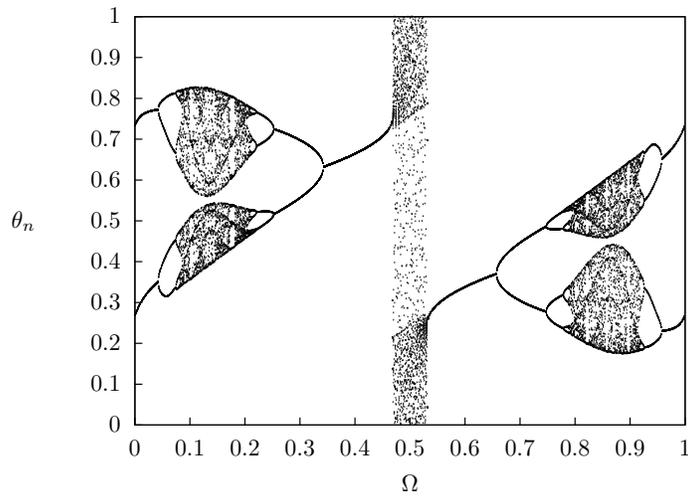
donde  $n$  es un número entero. El parámetro  $\Omega$  corresponde al cociente de las dos frecuencias, y  $k > 0$  es una medida de la intensidad de la no linealidad. El factor  $2\pi$  en el denominador permite mantener los valores  $\theta_n$  en el rango  $[0, 1]$ .

La figura 1.2 muestra la función del mapa del círculo. La figura 1.3 muestra el diagrama de bifurcación del mapa del círculo en función del parámetro  $\Omega$ , con un



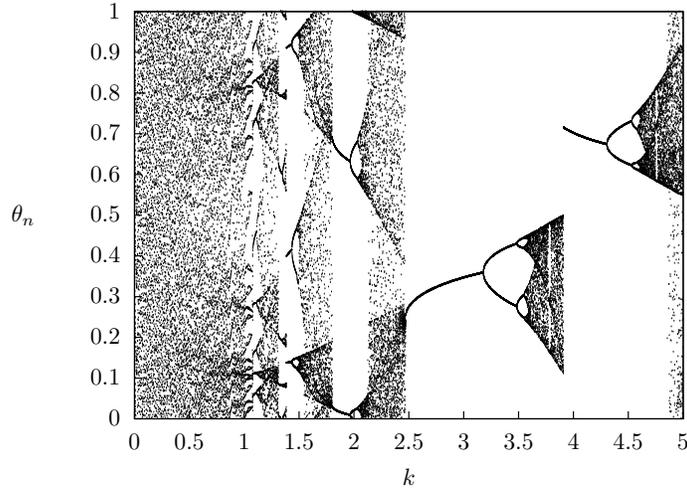
**Figura 1.2:** Mapa del Círculo. Los parámetros son  $\Omega = 0.4$  y  $k = 2.9392$ .

valor de  $k$  fijo. Se observan ventanas periódicas, con duplicación de períodos según la ruta de Feigenbaum, y ventanas caóticas. Note la simetría con respecto al valor  $\Omega = 0,5$



**Figura 1.3:** Diagrama de bifurcación para el mapa del círculo para  $k = 2.9392$ .

La figura 1.4 muestra el diagrama de bifurcación del mapa del círculo en función del parámetro  $k$ , con un valor de  $\Omega$  fijo. Los estados en  $k = 1$  se observa una órbita quasi-periódica caracterizada por una distribución uniforme de puntos en el intervalo  $\theta_n \in [0, 1]$ .



**Figura 1.4:** Diagrama de bifurcación para el mapa del círculo para  $\Omega = 0.606661$ .

### 1.4.1. Número de rotación

El número de rotación para el mapa del círculo se define como

$$\omega(\Omega, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n}, \quad (1.4)$$

donde  $f^{(n)}(\theta_0)$  indica la iteración  $n$ -ésima de la condición inicial  $\theta_0$ .

Para ilustrar el significado del número de rotación, consideremos el mapa del círculo con  $k = 0$ . En este caso el mapa se reduce a

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega \pmod{1}, \quad (1.5)$$

después de  $q$  iteraciones de un valor inicial  $\theta_0$ , tenemos

$$\theta_n = \theta_0 + n\Omega \pmod{1}. \quad (1.6)$$

El número de rotación será

$$\omega(\Omega, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n} = \Omega. \quad (1.7)$$

Es decir, el número de rotación mide la relación de las frecuencias en función del parámetro de la no linealidad  $k$ .

### 1.4.2. Exponente de Lyapunov del mapa del círculo

Anteriormente vimos que entre las condiciones para considerar a un sistema como caótico, se debe tener una divergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fase, como manifestación de la sensibilidad a las condiciones iniciales; es decir,  $\Delta x(t) \propto \Delta x(0)e^{\lambda t}$ . Esta divergencia se puede cuantificar mediante los exponentes de Lyapunov. Un sistema dinámico  $N$ -dimensional posee  $N$  exponentes de Lyapunov  $\lambda > 0$ . Un sistema es caótico si su exponente de Lyapunov mayor es positivo. Para un mapa unidimensional existe un sólo exponente de Lyapunov y se define como [4, 6]

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(\theta_i)|. \quad (1.8)$$

Para el mapa del círculo, tenemos

$$f'(\theta_n) = 1 + k \cos(2\pi\theta_n), \quad (1.9)$$

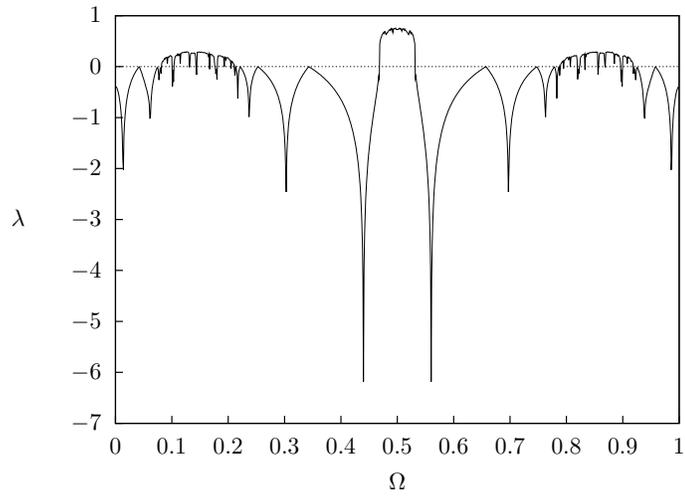
y el exponente de Lyapunov correspondiente es

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |1 + k \cos(2\pi\theta_i)|. \quad (1.10)$$

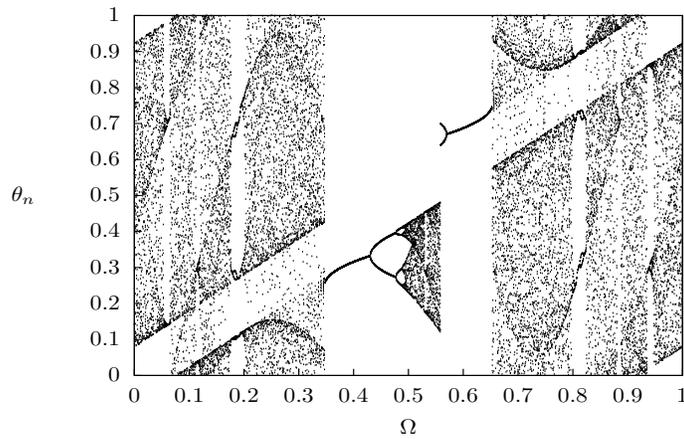
La figura 1.5 muestra el exponente de Lyapunov del mapa del círculo en función del parámetro  $\Omega$ , con  $k$  fijo. Las regiones donde  $\lambda > 0$  corresponden a comportamiento caótico y coinciden con las órbitas caóticas en el diagrama de bifurcación de la figura 1.3.

La figura 1.6 muestra el diagrama de bifurcación para el mapa del círculo en función de  $\Omega$ , con  $k = 4.1$ , que es el valor fijo de  $k$  que se utiliza en el modelo que se presenta en el Capítulo 3.

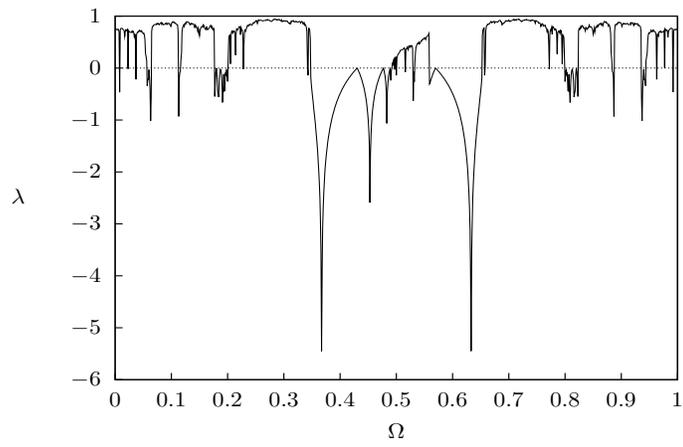
La figura 1.7 muestra el exponente de Lyapunov del mapa del círculo en función del parámetro  $\Omega$ , con  $k = 4.1$  fijo. Las regiones donde  $\lambda > 0$  corresponden a comportamiento caótico y coinciden con las órbitas caóticas en el diagrama de bifurcación de la figura 1.6.



**Figura 1.5:** Exponente de Lyapunov para el mapa del círculo para  $k = 2.9392$ .



**Figura 1.6:** Diagrama de bifurcación para el mapa del círculo para  $k = 4.1$ .



**Figura 1.7:** Exponente de Lyapunov para el mapa del círculo para  $k = 4.1$ .

*Isis necesitaba disfrutar de la soledad al amanecer para respirar mejor la esencia de la diosa, el rocío misterioso nacido de la comunión entre el cielo, la tierra y el templo. Puesto que llevaba el nombre de la diosa encarnada en File, tendría que hacerse digna de su inspiración.*

Christian Jacq, *Por Amor A Isis*.

## Capítulo 2

### Redes

El estudio de redes de conectividad tienen una larga historia en las matemáticas y en otras ciencias; sin embargo en los últimos años ha experimentado una explosión de interés en la comunidad de físicos, debido al descubrimiento de su ubiquidad en la naturaleza y las propiedades universales que poseen. Las redes están en todas partes y existen en una gran variedad de sistemas del mundo real, desde la ecología, la epidemiología hasta la neurociencia, la socioeconomía, la internet y las ciencias computacionales [10, 11, 12].

Las primeras definiciones de redes provienen del uso de un grafo para hacer una representación abstracta de un problema. Un grafo, que en griego quiere decir dibujo o imagen, es un conjunto de objetos, llamados vértices o nodos, unidos por líneas que se conocen como aristas o enlaces. Matemáticamente, un grafo  $G$  es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío de vértices o nodos, y  $E$  es un conjunto de aristas o enlaces, que relacionan los nodos [13].

Con el tiempo, la teoría de grafos se convirtió en el principal lenguaje matemático para describir las propiedades de una red de elementos interactivos, de modo que una red puede representarse como un grafo, como un conjunto de elementos discretos (los vértices o nodos), y un conjunto de conexiones (las aristas o enlaces) que conectan los elementos. A diferencia de un grafo, en una red se consideran tres puntos importantes [10]:

- Al enfocarse en las propiedades de redes del mundo real, se hace énfasis en preguntas empíricas, así como teóricas.
- Frecuentemente se considera que las redes no son estáticas, sino que evolucionan en el tiempo de acuerdo a varias reglas de dinámica.
- Su objetivo es, en última instancia, comprender las redes no sólo como objetos topológicos, sino también entender los procesos dinámicos que dan origen a los distintos tipos de redes.

La estructura de una red se puede caracterizar por su matriz de adyacencia. Los elementos  $a_{ij}$  de esta matriz representan cuáles nodos están conectados entre sí, y sólo pueden tomar valores  $a_{ij} = 0$  o  $a_{ij} = 1$ , para indicar si están conectados o no. Sin embargo, para algunos sistemas biológicos, ecológicos y económicos, donde las interacciones son heterogéneas, es apropiado utilizar redes que tengan distintos pesos para los enlaces, es decir, los elementos de la matriz de adyacencia tienen valores no binarios, y pueden ser distintos unos de otros [14].

La matriz de adyacencia indica también la dirección que tienen los enlaces de la red. Si la matriz es simétrica, los enlaces de la red son bidireccionales, y si la matriz es asimétrica, entonces los enlaces de la red son unidireccionales [11].

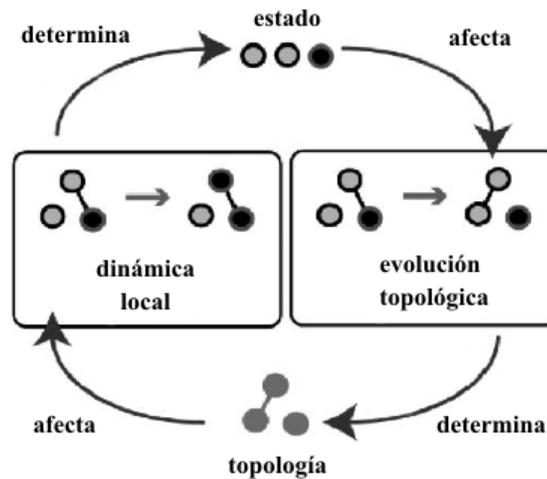
## 2.1. Redes adaptativas

Las redes cumplen un rol importante en el estudio de sistemas dinámicos y generalmente se utilizan en dos tipos de estudios [12]:

- Dinámicas en redes fijas:
  - Cada nodo de la red representa un sistema dinámico.

- Los sistemas individuales están acoplados de acuerdo a la topología de la red.
  - A pesar de que la topología de la red se mantiene estática, el estado de cada nodo cambia dinámicamente.
- Dinámicas de redes variables:
- La red cambia con el tiempo de acuerdo a reglas específicas.

En un sistema donde la dinámica de los nodos afecta la topología de conectividad entre ellos, y a la vez, la dinámica de cada nodo depende de las conexiones que éste tenga, se dice que los estados y la topología de la red están acoplados y *coevolucionan* y/o se *adaptan* en el tiempo [13]. Las redes coevolutivas o adaptativas se pueden representar con un lazo de retorno para que pueda haber un intercambio de información entre la topología de la red y la dinámica de los nodos [12]. La figura 2.1 ilustra el comportamiento de una red adaptativa.



**Figura 2.1:** En una red adaptativa, la evolución topológica depende de la dinámica de los nodos. Así, un lazo de retorno se crea para un intercambio dinámico de información.

## 2.2. Propiedades topológicas de redes

### 2.2.1. Distribución de grados

El grado  $k_i$  es el número de vecinos que tiene un nodo  $i$  en una red. Para redes bidireccionales puede escribirse como [15]

$$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji} \quad (2.1)$$

Para redes dirigidas, se tienen dos tipos de grado: el grado entrante o grado-in,  $k_i^{in}$ , que indica el número de enlaces que llegan al nodo  $i$ ,

$$k_i^{in} = \sum_j a_{ji}, \quad (2.2)$$

y el grado saliente o grado-out,  $k_i^{out}$ , que indica el número de enlaces salientes del nodo  $i$ ,

$$k_i^{out} = \sum_j a_{ij}. \quad (2.3)$$

El número total de conexiones que posee el nodo  $i$  se define como

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out}. \quad (2.4)$$

La distribución de grados,  $P(k)$ , expresa la fracción de vértices en una red con grado  $k$ .

### 2.2.2. Coeficiente de clustering

El coeficiente de agrupamiento o clustering es una medida de *vecindad* entre nodos, y básicamente describe en promedio, cuántos de los vecinos de cada nodo están conectados entre sí. El coeficiente de clustering local  $C_i$  es el número relativo de conexiones entre los vecinos del nodo  $i$ ,

$$C_i = \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}, \quad (2.5)$$

donde  $k_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $n_i$  es el número total de conexiones entre los vecinos de  $i$ . Promediando el coeficiente de clustering local sobre todos los nodos que conforman la red, se obtiene el coeficiente de clustering

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}, \quad (2.6)$$

donde  $N$  es el número total de nodos en la red [13, 16, 17] .

## 2.3. Redes de mapas acoplados

Las redes de mapas acoplados son modelos de sistemas dinámicos espacio-temporales, donde el espacio y el tiempo son discretos. La dinámica de cada nodo de la red se describe mediante un mapa iterativo que depende de su propio estado y de los estados de otros nodos que estén conectados con él. La interacción entre los nodos se representa por una matriz de acoplamiento, cuyas componentes representan las intensidades de interacción entre ellos, las cuales pueden ser homogéneas o heterogéneas. En redes coevolutivas, las componentes de la matriz de acoplamiento pueden variar en el tiempo. Las primeras redes de mapas acoplados investigadas fueron las redes euclidianas, con acoplamientos entre los vecinos más cercanos, y las redes de mapas globalmente acoplados, donde todos los elementos están conectados con todos [13, 18]. El modelo que vamos a estudiar en esta Tesis se basa en una red de mapas globalmente acoplados.

### 2.3.1. Mapa globalmente acoplado

La red de mapas globalmente acoplados fue introducida por primera vez por K. Kaneko [19] como un paradigma para el estudio de sistemas caóticos extendidos. Estas redes corresponden al límite extremo de los acoplamientos de largo alcance.

El primer ejemplo de una red de mapas globalmente acoplados propuesto por Kaneko fue el siguiente [19]

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)), \quad (2.7)$$

donde  $n$  son los pasos discretos del tiempo,  $i$  es el índice de cada elemento ( $i = 1, 2, \dots, N =$  tamaño del sistema),  $\epsilon$  describe la intensidad de acoplamiento entre los elementos, y  $f(x) = 1 - ax^2$  representa la dinámica local, correspondiente al mapa logístico, el cual puede tomarse como un prototipo para elementos caóticos. En este modelo, el campo medio del sistema afecta por igual a cada elemento de la red.

Posteriormente, Kaneko [20] estudió mapas circulares globalmente acoplados, dado por

$$x_{n+1}(i) = x_n(i) + \frac{K}{2\pi N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi[x_n(j) - x_n(i)]), \quad (2.8)$$

donde  $n$  son los pasos discretos del tiempo,  $i$  es el índice de cada elemento ( $i = 1, 2, \dots, N = \text{tamaño del sistema}$ ). En este caso, el término de acoplamiento puede tomar distintos valores para cada elemento.

*When humans encounter some difficulty, they have the ability to change the rules under which they operate and thereby overcome the dilemma and proceed.*

Kunihiko Kaneko,  
*Life: An Introduction to  
Complex Systems Biology.*

## Capítulo 3

# Modelo adaptativo de formación de estructuras en redes

### 3.1. Procesamiento de información

Actualmente es muy común estar rodeado de dispositivos electrónicos que para llevar a cabo sus funciones deben realizar ciertos procesos. Desde un teléfono celular hasta una súper computadora, por lo general, estos equipos han surgido a partir de modelos de procesamiento de información. Sin embargo, ningún modelo hasta ahora ha podido superar las capacidades del cerebro humano. El cerebro tiene aproximadamente 100.000 millones de neuronas, cada una de las cuales puede formar quizá entre 5.000 y 10.000 conexiones sinápticas con otras neuronas, que arrojan un total de alrededor de 5.00 y 1.000 billones de sinapsis en el cerebro adulto promedio. Esto

hace que el cerebro humano pueda tener una alta capacidad de memoria y de procesamiento de información, que a su vez le permite realizar una infinidad de tareas, ya sean sencillas o complejas [21].

Desde un enfoque general, procesamiento de información, puede considerarse simplemente como la asociación que se genera entre un estímulo y una respuesta. Un modelo clásico que ha dado lugar a la formulación de otros modelos sobre procesamiento de información y, más aún, sobre nuestro sistema de memoria, es el modelo propuesto en 1968 por Atkinson y Shiffrin [22].

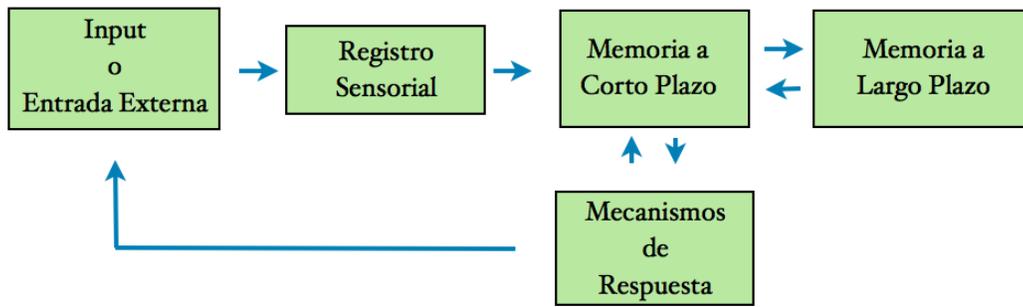
## 3.2. Modelo de la memoria de Atkinson y Shiffrin

En este modelo, el procesamiento de información se inicia con una entrada externa (input), por ejemplo, un sonido o una imagen. Ese estímulo pasa al registro sensorial donde ocurre un breve almacenamiento por una fracción de segundo o varios segundos, es decir, en esta fase el individuo simplemente presta atención al estímulo. Luego la información es transmitida a una memoria de corto plazo. Este tipo de memoria presenta un límite en cuanto a su capacidad y duración. Miller [22] propuso en 1956 que este tipo de memoria sólo puede retener en promedio 7 unidades de información<sup>1</sup>, y en cuanto al tiempo esta memoria no alcanza a retener información por más de un minuto. La memoria de corto plazo también es llamada memoria de trabajo, ya que ésta tiene como función codificar la información que se encuentra en ella. Esto ocurre de la siguiente manera. Cuando hay información en la memoria de corto plazo, conocimientos relacionados con esa información en la memoria de largo plazo son activados e integrados con la nueva información. En caso de que la memoria de largo plazo no tenga relación con la nueva información, ésta no puede ser codificada. Un ejemplo de esto ocurre cuando nos hablan en un idioma que no conocemos; podemos retener lo que nos dicen por un par de segundos, pero no podemos relacionar las palabras que escuchamos con la información que tenemos en nuestra memoria de largo plazo.

La figura 3.1 ilustra el modelo de la memoria de Atkinson y Shiffrin.

---

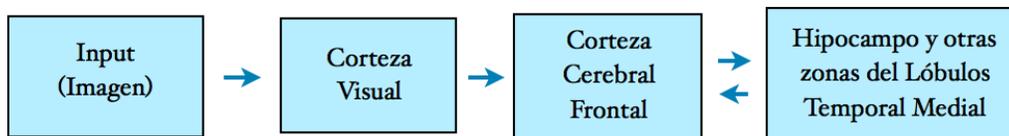
<sup>1</sup>Unidad de Información se refiere a un ítem que puede ser una letra, una palabra, un número o incluso una expresión común.



**Figura 3.1:** Modelo de Atkinson y Shiffrin.

### 3.3. El Proceso de la memoria en el cerebro humano

El proceso de la memoria se inicia cuando receptores sensoriales perciben una señal o un input. A continuación, estos receptores envían esa información a partes especializadas de la corteza, donde se retiene por fracciones de segundo. Para el esquema presentado en la figura 3.2 se tiene el caso donde la recepción es de tipo visual; por lo tanto, la parte especializada de la corteza que va a retener esta información por fracciones de segundo es la corteza visual. Luego, la corteza cerebral frontal recibe la información, la tiene disponible para su uso inmediato, y coordina su empleo por otras partes de la corteza cerebral. Inmediatamente, se inician acciones del hipocampo y otras zonas del lóbulo temporal medial para codificar la información. Una vez codificada la información, dependiendo de que tanto se repita el proceso, se fortalecen las conexiones nerviosas formadas y queda almacenada la información [21].



**Figura 3.2:** Proceso de la memoria en el cerebro humano.

### 3.4. Modelo de Ito y Kaneko

Una limitación importante del modelo de Atkinson y Shiffrin descrito anteriormente, es que no especifica cómo ocurre la transferencia de información de una área de almacenaje a otra. Muchos experimentos neurofisiológicos recientes han revelado que la corteza cerebral se divide en varias áreas funcionalmente especializadas. En particular, esto ha sido estudiado en detalle para la corteza visual del cerebro [23]. Estas áreas especializadas forman una estructura de capas conectadas en forma jerárquica y recíproca. La información visual proveniente de estímulos externos es procesada dentro de esta estructura jerárquica, la cual está constituida por unas 30 áreas visuales.

Aunque se cree que la mayor parte de la estructura global de la corteza está genéticamente predeterminada, algunas partes son plásticas o adaptativas, y son capaces de organizarse dinámicamente de una manera que depende de estímulos externos [2]. En tal sentido, resulta importante determinar si la información genética es indispensable para la formación de esta estructura, o si una estructura jerárquica puede emerger espontáneamente en la corteza cerebral a través de procesos dinámicos adaptativos.

En investigaciones teóricas y experimentales recientes, se ha propuesto que el cambio sináptico rápido es un proceso importante en la codificación temporal de información del cerebro [24]. Por tal motivo, es fundamental estudiar si el cambio adaptativo en las conexiones neuronales puede conducir a una estructura dinámica jerárquica bajo la influencia de estímulos externos, inclusive sin ninguna instrucción preestablecida.

En este contexto, J. Ito y K. Kaneko han propuesto un modelo simple de auto-organización jerárquica, inducida por un estímulo externo en una red dinámica adaptativa [3]. Este modelo posee las siguientes propiedades:

- Conexiones globales entre unidades no lineales que pueden exhibir comportamiento caótico u otro tipo de dinámica.
- Cambio plástico de las conexiones entre unidades que depende tanto de los estados de las unidades conectadas, como también de la influencia global de todas las otras unidades en el sistema.

- Un estímulo externo que actúa en una o varias unidades para cambiar sus estados.

El modelo emplea un mapa globalmente acoplado para la dinámica del sistema y, a diferencia de otros modelos de redes neuronales, donde se aplican mapas globalmente acoplados, donde a cada unidad le corresponde una neurona, aquí cada unidad representa un ensamble de varias neuronas.

### 3.4.1. Formulación matemática del modelo de Ito y Kaneko

Para llevar a cabo las propiedades mencionadas anteriormente en el modelo, J. Ito y K. Kaneko proponen el siguiente sistema de mapas globalmente acoplados

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^i) + I^i, \quad (3.1)$$

donde  $x_n^i$  es la fase o el estado de la unidad  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) en el tiempo discreto  $n$ , y  $N$  el número de unidades. La variable  $\epsilon_n^{ij}$  corresponde a la intensidad del acoplamiento desde la unidad  $j$  hacia la unidad  $i$  en el instante  $n$ ,  $I^i$  es el estímulo externo que se ejerce sobre la unidad  $i$ , y el parámetro  $c$  representa la intensidad de la influencia global del sistema sobre cada unidad. La función  $f(x_n^i)$  describe la dinámica local de la unidad  $i$ . Debido al interés en estudiar unidades con dinámica oscilatoria y caótica, J. Ito y K. Kaneko proponen el mapa del círculo como dinámica local

$$f(x_n) = x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (3.2)$$

donde  $\Omega$  es el parámetro que corresponde al número de rotación y  $k$  mide la intensidad de la no linealidad del mapa.

La dinámica del sistema entonces está descrita por las siguientes ecuaciones

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^i) + I^i, \quad (3.3)$$

En este modelo las intensidades de acoplamiento  $\epsilon_n^{ij}$  varían en el tiempo. En general para sistemas de este tipo la variación de las conexiones ha sido descrita por dinámicas de tipo Hebb, la cual establece que para una conexión dada, su variación depende sólo del estado de las dos unidades involucradas. Esto permite

un incremento o una disminución del peso de la conexión, dependiendo del grado de sincronización existente entre las dos unidades. Otros mecanismos de cambios de conexiones propuestos incluyen una interacción global como una competición de conexiones que convergen en cada unidad [25].

Tomando en cuenta ambos mecanismos, en el modelo de J. Ito y K. Kaneko la intensidad de acoplamiento entre una unidad  $i$  con una unidad  $j$  viene dada por la siguiente regla de evolución,

$$\epsilon_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)]\epsilon_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)]\epsilon_n^{ij}}, \quad (3.4)$$

donde  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) es un parámetro que representa el grado de plasticidad de las conexiones. La normalización de los pesos de las conexiones entrantes se utiliza para evitar la divergencia de los valores  $\epsilon_n^{ij}$ .

Los acoplamientos  $\epsilon_n^{ij}$  pueden representarse mediante una matriz  $N \times N$  no simétrica, que constituye la matriz de conectividad (también llamada matriz de adyacencia) del sistema. A diferencia de la mayoría de los sistemas dinámicos definidos en redes estáticas, en este modelo la matriz de conectividad cambia en el tiempo, a medida que cambian los estados de las unidades. Es decir, la dinámica del sistema y su topología de conectividad coevoluciona: el cambio de una afecta la otra y viceversa. Este tipo de sistemas se denominan coevolutivos o adaptativos.

### 3.4.2. Comportamiento del modelo de Ito y Kaneko

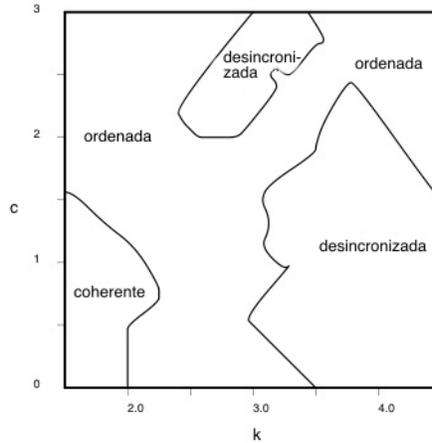
El modelo de Ito y Kaneko corresponde al siguiente sistema coevolutivo,

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^i) + I^i \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)]\epsilon_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)]\epsilon_n^{ij}}. \quad (3.6)$$

Este sistema de ecuaciones requiere dar los valores iniciales  $x_0^i$  y la matriz de conectividad inicial  $\epsilon_0^{ij}$ . Los valores iniciales se distribuyen aleatoria y uniformemente, tal que  $x_0^i \in [0, 1]$ , mientras que a los acoplamientos iniciales se asignan valores idénticos  $\epsilon_0^{ij} = 1/N$ ,  $\forall i, j$ , de tal manera que la estructura de la red al comenzar la simulación corresponde a una red globalmente acoplada y simétrica.

El comportamiento colectivo de este modelo presenta distintas fases que dependen de los valores de los parámetros del sistema. La figura (3.3) muestra el diagrama de fases del modelo de Ito y Kaneko en el espacio de parámetros  $(k, c)$ , para valores fijos  $\delta = 0.1$  y  $\Omega = 0$ , en ausencia de estímulo externo  $I^i = 0, \forall i$ .



**Figura 3.3:** Diagrama de fase del mapa globalmente acoplado descrito por la ecuación (3.3) en términos de los parámetros  $k$  y  $c$ . El diagrama se obtuvo con  $\delta = 0.1$  y  $\Omega = 0$ , en ausencia de estímulo externo  $I^i = 0$ , en un sistema de tamaño  $N = 10$ .

La figura 3.3 revela la existencia de tres fases, a medida que el parámetro de no linealidad  $k$  y el de acoplamiento global  $c$  varían:

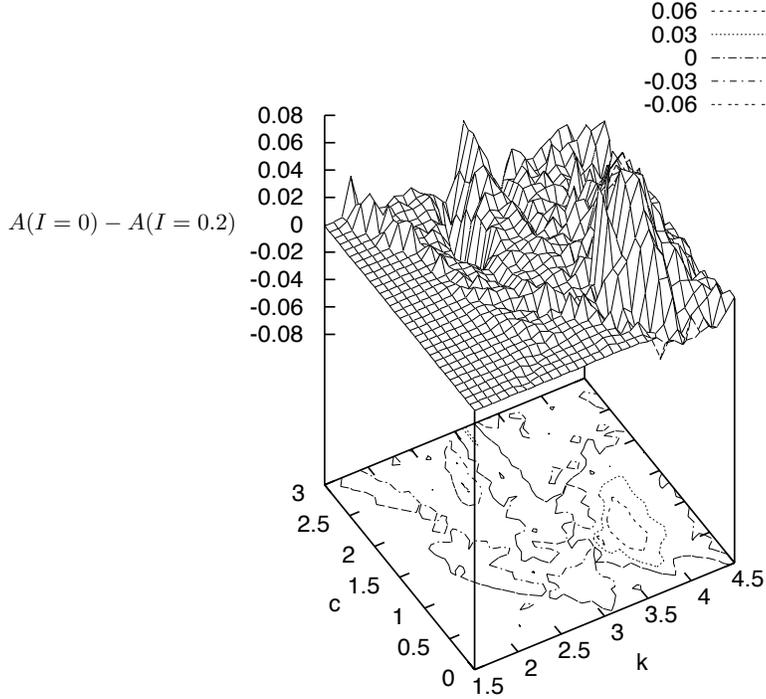
- Una fase coherente, donde todas las unidades oscilan de manera sincronizada.
- Una fase ordenada, donde las unidades se dividen para formar clusters, dentro de los cuales las unidades oscilan sincronizadamente.
- Una fase desincronizada o incoherente, donde no hay sincronización entre ningún par de unidades.

Consideremos ahora lo que ocurre cuando se aplica un estímulo externo constante a una de las  $N$  unidades, que podemos escoger  $i = 1$ . El diagrama de fase de la figura 3.3 no cambia cualitativamente. Sin embargo, aparece una diferencia en la correlación entre unidades, la cual se manifiesta mediante el surgimiento de una estructura no trivial en la matriz de  $\epsilon_{ij}^n$ . Una cantidad que permite caracterizar el

efecto del estímulo, es la variación promedio de la matriz de acoplamiento en cada paso, denominada la actividad de la red, definida como

$$A = \frac{1}{(N-1)^2} \frac{1}{\tau_m} \sum_{i \neq j} \sum_{n=\tau_t}^{\tau_t+\tau_m} |\epsilon_n^{ij} - \epsilon_{n-1}^{ij}|, \quad (3.7)$$

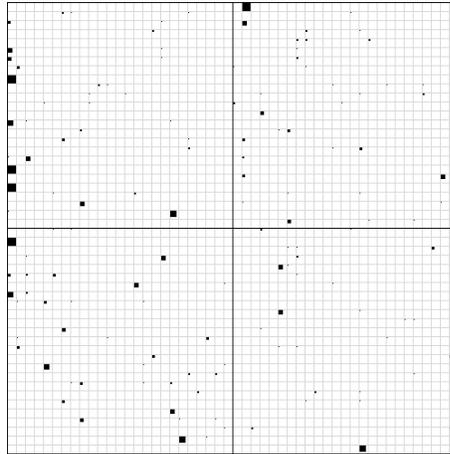
donde  $\tau_t$  es la duración del tiempo transiente y  $\tau_m$  es el tiempo asintótico. La figura (3.4) muestra la diferencia  $A(\text{con estímulo}) - A(\text{sin estímulo})$  en el espacio de parámetros  $(c, k)$ , con un estímulo constante  $I^1 = 0.2$ . La figura 3.4 nos permite ver que la respuesta más fuerte al estímulo se alcanza en la región  $3.5 < k < 4.2$  y  $0.2 < c < 2$ , que se localiza en la fase desincronizada, mostrada en la figura 3.3.



**Figura 3.4:** Diferencia entre las variaciones de  $\epsilon_{ij}$  con y sin estímulo. En la región  $3.5 < k < 4.2$  y  $0.2 < c < 2$ , esta diferencia es más grande. Esta región se localiza en la fase desincronizada.  $\delta = 0.1$  y  $\Omega = 0$ .

Una toma instantánea de la matriz de adyacencia en este régimen se muestra en la figura 3.5, donde la magnitud de  $\epsilon_{ij}$  se representa por el tamaño del cuadro localizado en el sitio  $ij$  de la matriz. Como se observa, las conexiones con valores de acoplamiento mayores, están concentrados en la columna izquierda, que corresponde

a  $i = 1$  donde se está ejerciendo el estímulo constante, de modo que las conexiones de la unidad  $i = 1$  son las más fuertes.

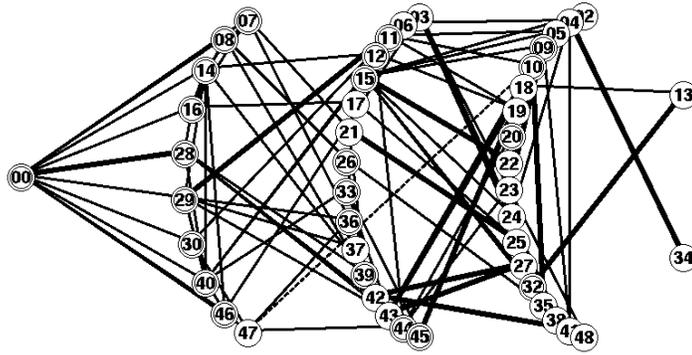


**Figura 3.5:** Toma instantánea de la matriz de adyacencia para  $N = 50$ . El tamaño de los cuadros negros es proporcional al valor de  $\epsilon_{ij}$ . Aquí,  $I = 0.2$ ,  $k = 4.1$ ,  $c = 1.0$  y  $\delta = 0.1$ .

Como método de visualización para detectar la estructura de la red, se establece un valor umbral  $u$ , tal que se define una conexión entre las unidades  $i$  y  $j$  si y sólo si  $\epsilon_{ij} > u$ . La estructura de la red extraída utilizando este método con un valor umbral  $u = 0.1$  se muestra en la figura 3.6. La red de conectividad inducida por el estímulo externo muestra una estructura jerárquica, donde las unidades se distribuyen en capas sucesivas. Estas capas pueden ser numeradas en orden de aparición, de izquierda a derecha. Se encuentra que casi todas las unidades en la capa  $M$  se conectan con unidades en la capa  $(M - 1)$ ,  $M$ , y  $(M + 1)$ . En este sentido se puede ver que la estructura de la figura 3.6 es real y no un artefacto del método de visualización.

Cuando el valor de umbral usado para visualización se varía, la estructura de la matriz de conectividad cambia. Sin embargo, aunque el número total de conexiones depende del valor del umbral los resultados generales aquí mostrados se mantienen para un rango significativo de valores de umbral, aproximadamente de 0.02 - 0.3.

En la figura 3.6, la unidad  $i = 1$  sobre la cual se aplica el estímulo externo se muestra en el extremo izquierdo, siendo ésta la capa 1, y las unidades que tienen conexiones con esta unidad se ubican en la capa 2, mientras que las unidades que poseen conexiones con las unidades de esta capa se localizan en la capa 3, y así sucesivamente.



**Figura 3.6:** Toma instantánea de la estructura de capas de la conectividad, para el caso de un valor umbral de  $u = 0.1$ . Líneas delgadas indican dirección de izquierda a derecha, y líneas gruesas indican dirección de derecha a izquierda. La línea punteada representa la única conexión que hay mayor a dos capas.

*“Those who study complex adaptive systems are beginning to find some general principles that underlie all such systems, and seeking out those principles requires discussions and collaboration among specialists in great many fields”*

M. Gell-Mann, “The Quark and the Jaguar”.

## Capítulo 4

# Formación de estructuras en redes adaptativas con estímulo variable

El modelo de Ito y Kaneko [3], que vimos en el Capítulo anterior, ilustra cómo se puede formar espontáneamente una estructura jerárquica en una red de elementos dinámicos globalmente acoplados mediante conexiones plásticas o adaptativas. Específicamente, Ito y Kaneko mostraron que este efecto es posible para un valor constante del estímulo externo y para valores fijos de otros parámetros. En el presente Capítulo nos proponemos a investigar el comportamiento de la estructura emergente en el modelo de Ito y Kaneko, en función de los parámetros del sistema. Es decir, estudiaremos la influencia del estímulo externo  $I$  en la formación de estructuras en la red de conectividad, y del valor umbral  $u$  en la visualización de las mismas.

Recordemos que el modelo de Ito y Kaneko está descrito por las siguiente ecua-

ciones:

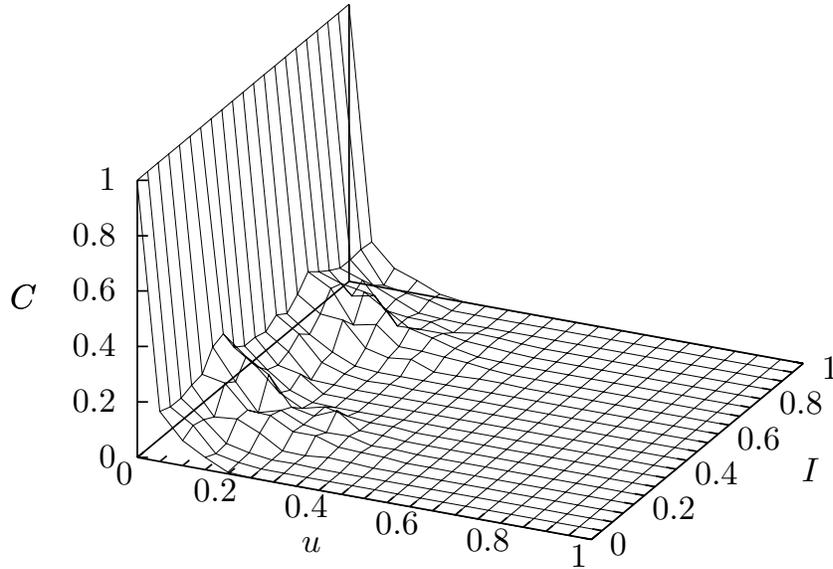
$$x_{n+1}^i = x_n^i + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^i) + I^i \quad (4.1)$$

$$\epsilon_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}. \quad (4.2)$$

Como vimos en el Capítulo 2, una cantidad importante para caracterizar las propiedades de conectividad de una red es el coeficiente de clustering, definido por

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{n_i}{\frac{1}{2} k_i (k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\frac{1}{2} k_i (k_i - 1)}, \quad (4.3)$$

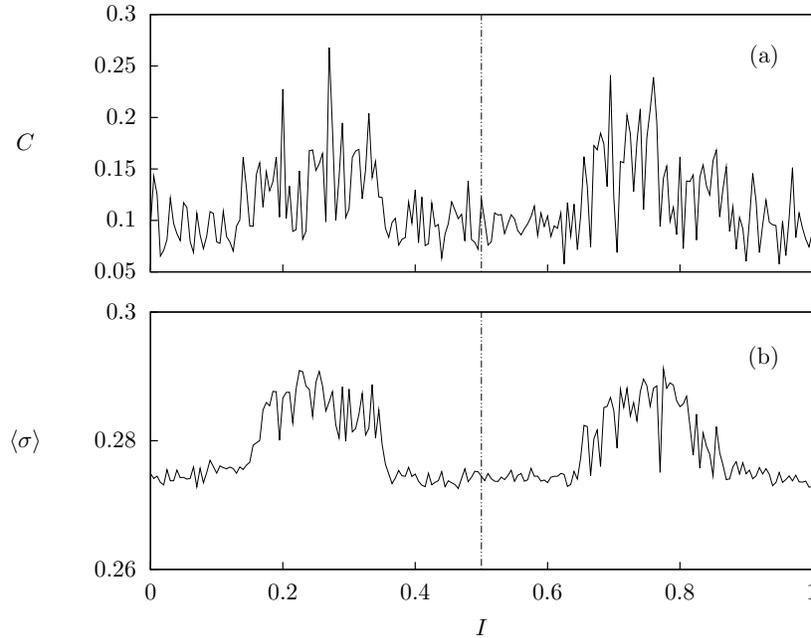
donde  $N$  es el número de nodos en la red,  $k_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $n_i$  es el número total de conexiones entre los vecinos de  $i$ .



**Figura 4.1:** Coeficiente de clustering promediado sobre 1000 iteraciones, despreciando un transiente de 50000 iteraciones, en función del valor de umbral  $u$  y del parámetro de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos:  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $N = 50$ .

La figura 4.1 muestra el coeficiente de clustering en función del parámetro  $I$  (independiente del tiempo) y de  $u$  para una red de tamaño  $N = 50$ , en el estado asintótico del sistema. En ella se aprecia que la mayor estructura emergente en la red, indicada por mayores valores del coeficiente  $C$ , ocurre para valores de umbral

$u$  pequeños. Por otro lado, se observa que los valores de  $C$  son aproximadamente simétricos con respecto al valor  $I = 0.5$ . Esto se debe a que los valores de los estados de los elementos de la red están definidos con módulo 1. En el intervalo  $I \in [0, 0.5]$  se observa un máximo en el coeficiente de clustering, alrededor de  $I = 0.25$ . Cabe notar que el valor fijo empleado por Ito y Kaneko en su artículo [3] corresponde a  $I = 0.2$ .



**Figura 4.2:** (a) Promedio del coeficiente de clustering  $C$  y (b) promedio asintótico de la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$ , como función del estímulo externo  $I$ , calculados sobre 1000 iteraciones, luego de un transiente de 50000 iteraciones. Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

La figura 4.2 (a) muestra el coeficiente de clustering como función de  $I$ , para un valor fijo de umbral  $u = 0.1$ . Se nota la existencia de un rango intermedio de valores de  $I$  alrededor de 0.25 (0.75), para el cual el coeficiente de clustering  $C$  alcanza valores máximos. Es decir, que intensidades muy bajas o muy altas del estímulo externo no inducen mayor estructura en la red.

Para investigar las propiedades dinámicas colectivas de los mapas en la red, calculamos el grado de sincronización de los mismos en función de la intensidad del estímulo externo. Para tal fin se puede calcular la dispersión o desviación estándar

instantánea de los estados de los mapas en la red, definida como

$$\sigma_n = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_n^i - \langle x_n \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

donde  $\langle x_n \rangle$  es la media instantánea de los valores  $x_n^i$ ,  $\forall i$ . La sincronización se puede caracterizar por el promedio asintótico  $\langle \sigma \rangle$  de los valores  $\sigma_n$ , después de descartar un número de transientes. Un estado sincronizado estable corresponde a un valor  $\langle \sigma \rangle = 0$ . Luego, valores de  $\langle \sigma \rangle$  pequeños indican un grado mayor de sincronización con respecto a valores grandes de  $\langle \sigma \rangle$ .

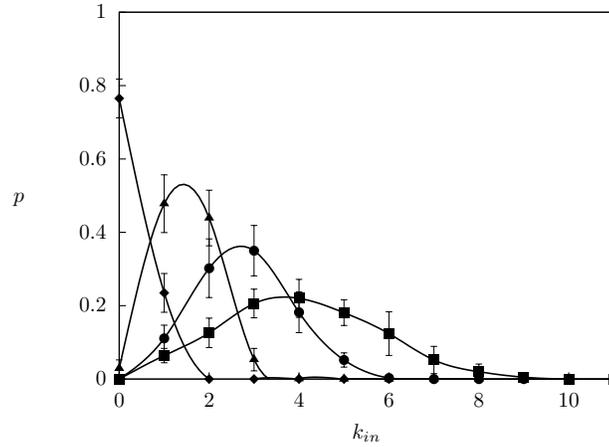
La figura 4.2 (b) muestra la cantidad  $\langle \sigma \rangle$  en función de la intensidad del estímulo externo  $I$ , para un valor fijo de umbral  $u = 0.1$ . Se observa que los estados de los mapas en la red presentan mayor desincronización justamente en el intervalo de  $I$  para el cual emerge mayor estructura en la red, como se observa en la figura 4.2 (a). Es decir, que el estímulo externo induce mayor estructura en la red adaptativa cuando los estados de los mapas están más dispersos. Note que esta región concuerda con el rango de valores donde se observan los estados desincronizados del sistema en ausencia de estímulo externo, como se muestra en la figura 3.3.

Este es uno de los resultados más importantes del presente trabajo: *la presencia de estructuras en una red no está asociada a la sincronización de los estados de sus elementos*. Este resultado tiene implicaciones importantes en cuanto al procesamiento de información en el sistema nervioso. En particular, estudios experimentales recientes muestran que la desincronización en algunas áreas del cerebro, están positivamente correlacionadas con el funcionamiento de la memoria de largo plazo, mientras que estados sincronizados se relacionan con la habilidad de codificar nueva información [26].

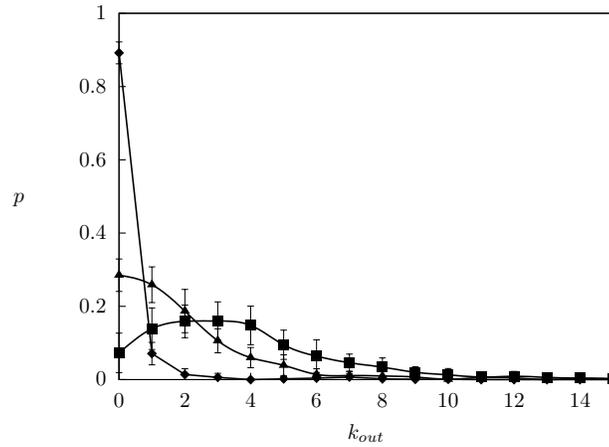
Con el fin de estudiar las propiedades topológicas de la estructura emergente inducida por el estímulo externo, calculamos la distribución de probabilidad del total de conexiones salientes y entrantes de los nodos de la red,  $k_{in}$  y  $k_{out}$  respectivamente.

La figura 4.3 muestra la distribución de probabilidad de  $k_{in}$  para distintos valores de umbral  $u$ , mientras que la figura 4.4 muestra la distribución de probabilidad de  $k_{out}$  para distintos valores de  $u$ . Note que en ambos casos las distribuciones de probabilidad cambian su forma, de tipo gaussiana a tipo ley de potencia, a medida que aumenta el valor del umbral  $u$ . Esto indica que para valores de umbrales pequeños

la conectividad de la red es más uniforme. En ambos casos para  $u = 0$  la red está globalmente acoplada, mientras que para  $u = 1$  la red está desconectada.

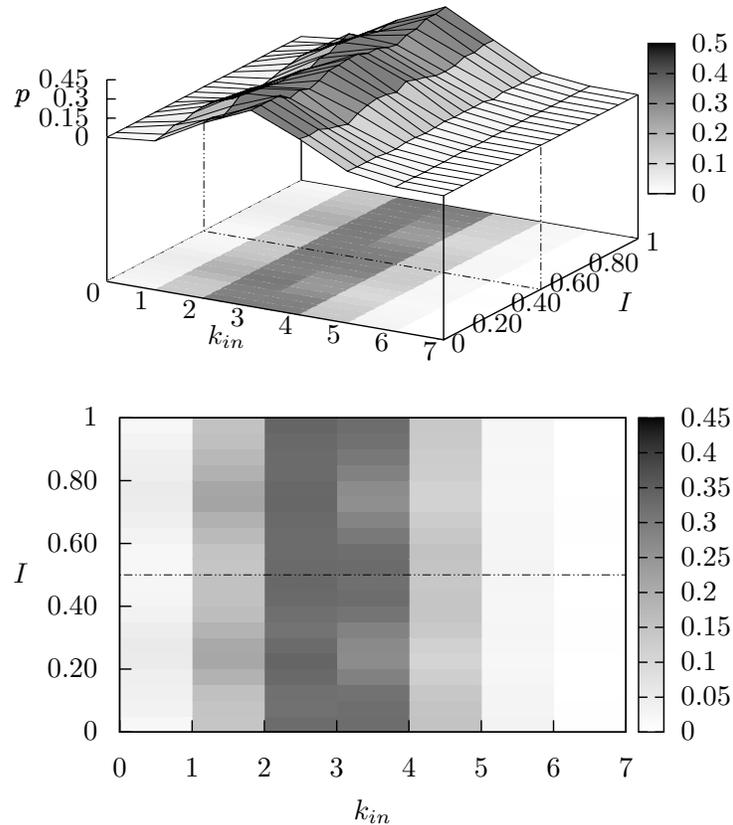


**Figura 4.3:** Distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  para distintos valores de umbral, ■ para  $u = 0.05$ , ● para  $u = 0.10$ , ▲ para  $u = 0.20$ , ◆ para  $u = 0.60$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $I = 0.2$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .



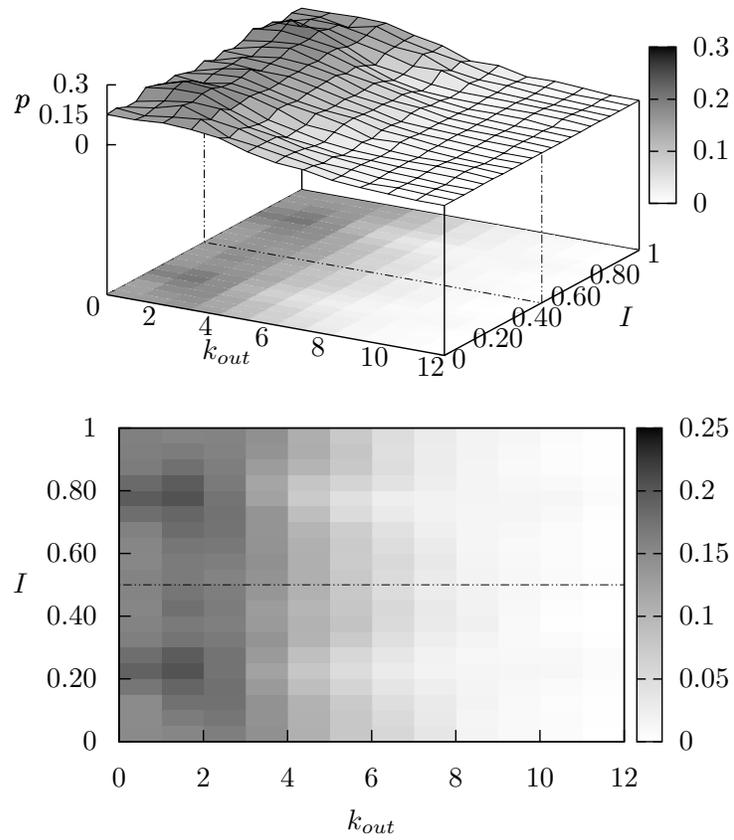
**Figura 4.4:** Distribución de probabilidad de conexiones salientes  $k_{out}$  para distintos valores de umbral, ■ para  $u = 0.05$ , ▲ para  $u = 0.15$ , ◆ para  $u = 0.60$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $I = 0.2$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

Las figuras 4.5 y 4.6 muestran las distribuciones de probabilidad de  $k_{in}$  y de  $k_{out}$ , respectivamente, para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Note otra vez la simetría con respecto al valor de  $I = 0.5$ . Note que la distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  es de tipo gaussiana, con un valor medio aproximado de  $k_{in} = 3$ . Por otro lado, la distribución de probabilidad de  $k_{out}$  posee una cola más larga para valores grandes del número de conexiones salientes.

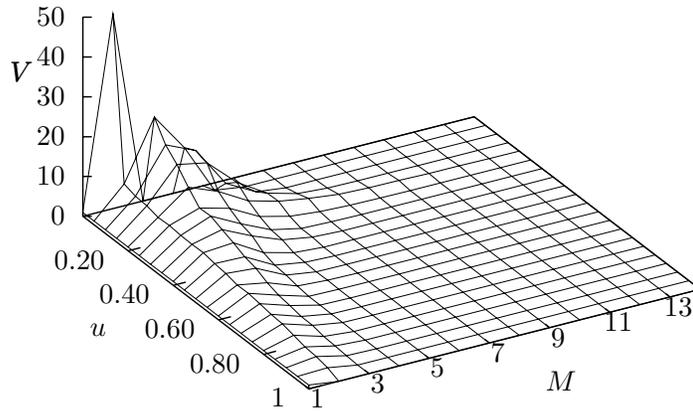


**Figura 4.5:** Distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$

Como vimos en el Capítulo anterior, el estímulo externo induce una estructura jerárquica de capas en la red adaptativa. La figura 4.7 muestra el promedio del número de nodos o vértices  $V$  presentes en las distintas capas  $M$  que se forman en la red con valor fijo del estímulo externo  $I = 0.2$ , para distintos valores de umbral  $u$ .



**Figura 4.6:** Distribución de probabilidad de conexiones saliente  $k_{out}$  para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$

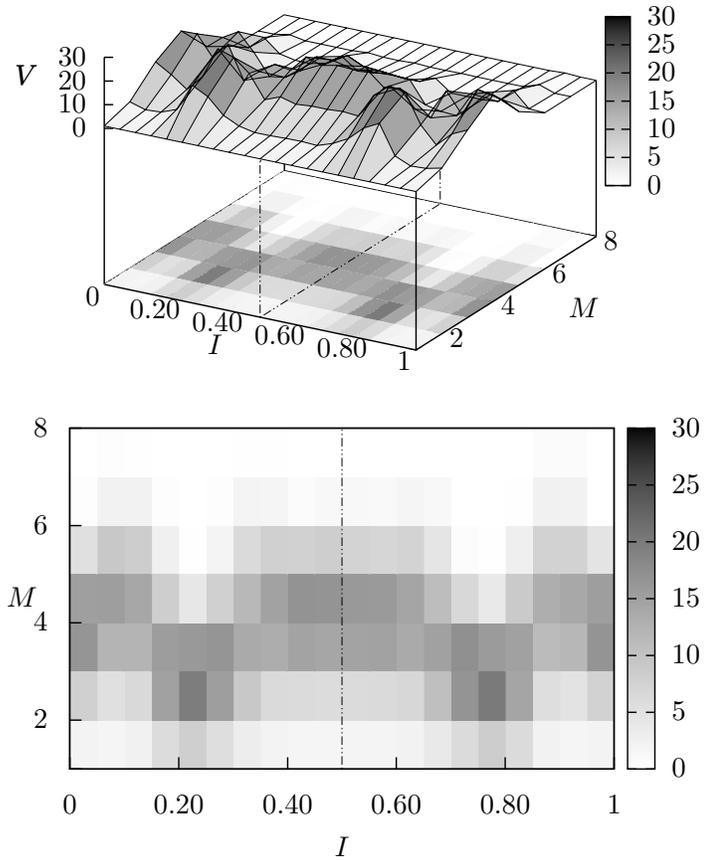


**Figura 4.7:** Promedio de número nodos  $V$  presentes en distintas capas  $M$  que se forman, para distintos valores de  $u$ , calculado sobre 1000 iteraciones, luego de un transiente de 50000 iteraciones. Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $I = 0.2$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

Se observa que la mayor concentración de nodos ocurre en pocas capas  $M$  (alrededor de  $M = 3$ ) para valores de umbral pequeño, en concordancia con el comportamiento del coeficiente de clustering. En este diagrama, la capa  $M = 1$  corresponde al nodo asociado al estímulo externo.

En ausencia de umbral ( $u = 0$ ), el sistema tiene solo dos capas; la del nodo con el estímulo externo y otra con el resto de los nodos.

Finalmente, la figura 4.8 muestra el número de vértices por capa, para distintos valores de la intensidad del estímulo  $I$ . Aquí también se observa la simetría con respecto al valor  $I = 0.5$ . Resalta el hecho de que el mayor número de vértices concentrados en pocas capas ocurre en el mismo intervalo de intensidad del estímulo alrededor de  $I = 0.25$  ( $I = 0.75$ ), para el cual se produce el mayor valor de coeficiente de clustering y la menor sincronización de los estados de los vértices. Valores de intensidad del estímulo fuera de este rango inducen un mayor número de capas en la red, con un menor número de nodos en cada una. Las redes neuronales artificiales pueden tener cualquier número de capas, y cualquier número de nodos por capas, pero en la gran mayoría de sus aplicaciones, utilizan estructuras de tres capas con una capa (saliente) que posee un sólo nodo [27]. La presencia del estímulo externo en la red es fundamental si se desea generar una estructura jerárquica de capas similar a la utilizada por las redes neuronales artificiales en algunas de sus aplicaciones.



**Figura 4.8:** Promedio de número nodos  $V$  presentes en distintas capas  $M$  que se forman, para distintos valores de  $I$ , calculado sobre 1000 iteraciones, luego de un transiente de 50000 iteraciones. Los valores de  $V$  se indican por el código de colores mostrados a la derecha de las figuras. Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

*"If I have seen further than others,  
it is by standing upon the shoulders  
of giants."*

Sir Isaac Newton

## Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado una red coevolutiva de mapas acoplados y sujetos a un forzamiento, como un modelo simple de un sistema adaptativo de neuronas expuestas a un estímulo externo. Este tipo de modelo tiene mucha relevancia en la investigación de los procesos cognoscitivos como la memoria y el procesamiento de información en el cerebro.

Nuestro estudio se ha basado en un modelo propuesto por Ito y Kaneko [3] para el cambio adaptativo en las conexiones neuronales, que conduce a una estructura dinámica jerárquica de una red bajo la influencia de un estímulo externo. En particular, hemos investigado la influencia del parámetro de la intensidad del estímulo externo  $I$  del sistema en la formación de estructuras, y el umbral de conectividad  $u$  en la visualización de las mismas, y hemos caracterizado el comportamiento dinámico colectivo y las propiedades topológicas de la red emergente.

Nuestros resultados muestran que existen rangos de valores de parámetros, especialmente de la intensidad del estímulo, para los cuales surgen estructuras jerárquicas para el procesamiento de información en redes neuronales. Adicionalmente, hemos encontrado que el estímulo externo induce mayor estructura en la red adaptativa cuando los estados de los mapas están más dispersos. Es decir, la presencia de estructuras en una red no está asociada a la sincronización de los estados de sus elementos. Este es uno de los resultados más importantes del presente trabajo. Este resultado tiene implicaciones importantes en cuanto al procesamiento de información en el sistema nervioso. Estudios experimentales recientes muestran que la desincro-

nización en algunas áreas del cerebro, están positivamente correlacionadas con el funcionamiento de la memoria de largo plazo, mientras que estados sincronizados se relacionan con la habilidad de codificar nueva información [26].

Por otro lado, hemos hallado que la mayor estructura emergente en la red, indicada por mayores valores del coeficiente de clustering  $C$ , se puede visualizar mejor con valores de umbral  $u$  pequeños. Hemos calculado las distribuciones de probabilidad de enlaces entrantes  $k_{in}$  y de enlaces salientes  $k_{out}$  para distintos valores de umbral  $u$ , encontrando que estas distribuciones cambian su forma, de tipo gaussiana a tipo ley de potencia, a medida que aumenta el valor de  $u$ . Esto sugiere que, para valores de umbrales pequeños, la conectividad que se muestra en la red es más uniforme con una mayor concentración de nodos en pocas capas.

Hemos mostrado que la presencia del estímulo externo en la red, en el mismo intervalo de valores de  $I$  donde se produce el mayor valor de coeficiente de clustering y la menor sincronización de los estados de los vértices, es fundamental para generar una estructura jerárquica de capas, con un mayor número de vértices concentrados en pocas capas. Esta estructura se asemeja a la utilizada para ciertas aplicaciones de redes neuronales artificiales [27].

Finalmente, la presente tesis demuestra el gran potencial que tiene la aplicación de los modelos de mapas acoplados en el estudio de sistemas complejos coevolutivos. Nuestro trabajo muestra que un modelo simple, con ingredientes mínimos, es capaz de capturar al menos la fenomenología de un sistema de neuronas, incluyendo su plasticidad y su estructura jerárquica.

# Bibliografía

- [1] K. Kaneko y I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer (2000).
- [2] Kilgard, M. P. and Merzenich M. M. (1998) Plasticity of temporal information processing in the primary auditory cortex. *Nature Neuroscience*, 1, 727-731.
- [3] J. Ito and K. Kaneko, "Self-organized hierarchical structure in a plastic network of chaotic units.", *Neural Networks* 13, 275 (2000).
- [4] Schuster, W. *Deterministic Chaos, an introduction*. 4th Edition. Wiley, 2005. Page 23.
- [5] Goldstein. *Classical Mechanics* (3rd edition), Page 483.
- [6] Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Page 15.
- [7] Nagashima H., Baba Y. *Introduction to Chaos*. Page 42.
- [8] Glazier, J. A. and A. Libchaber (1988). Quasi-Periodicity and Dynamical Systems: An Experimentalist's View. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 35(7), 790-809.
- [9] Hilborn, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Second Edition.
- [10] M. E. J. Newman, A. -L. Barabási and D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [11] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, "Evolution of networks", *Adv. Phys.* 51, 1079-1187 (2002).

- [12] T. Gross and B. Blasius, "Adaptive coevolutionary networks: a review", *J. R. Soc. Interface* 5: 259-271 (2008).
- [13] A. Méndez, "Emergencia de redes de pequeño mundo en sistemas coevolutivos de mapas caóticos", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, 2007.
- [14] Yook, S. H., Jeong, H., Barabási, A.-L. and Tu, Y., "Weighted evolving networks", *Phys. Rev. Lett.*, 86, 5835 (2001).
- [15] Luciano da F. Costa, Francisco A. Rodrigues, Gonzalo Travieso, P. R. Villas Boas, "Characterization of complex networks: A survey of measurements", *Advances in Physics*, Volume 56, pages 167 D 242, Issue 1 (2007).
- [16] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, "The shortest path to complex networks", *cond-mat/0404593 v4* (2004).
- [17] J. L. Herrera, "Modelo dinámico de la influencia del entorno en redes sociales de pequeño mundo", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, 2005.
- [18] J. Ito and K. Kaneko, "Self-Organization of Network Structure in Coupled-map Systems", to appear in "Adaptive Networks", ed. H. Sayama and T. Gross. (2009).
- [19] K. Kaneko, "Clustering, Coding, Switching, Hierarchical Ordering, and Control in Network of Chaotic Elements", *Physica* 41 D (1990) 137-172.
- [20] K. Kaneko, "Globally Coupled Circle Maps", *Physica* 54 D (1991) 5-19.
- [21] Joshua Foer, "Memory", *National Geographic Magazine*, November 2007.
- [22] Schunk, Dale H. *Learning Theories, an educational perspective*. Second Edition.
- [23] van Essen, D. C., Anderson, C. H. and Felleman, D. J. (1992) Information processing in the primate visual system: An integrated systems approach. *Science*, 255, 419-423.
- [24] Tsodyks, M. V. and Markram, H. (1997) The neural code between neocortical pyramidal neurons depends on neurotransmitter release probability. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 94, 719-723.

- [25] Tsukada, M., Aihara, T., Saito, H. and Kato, H. (1996) Hippocampal LTP depends on spatial and temporal correlation of inputs. *Neural Networks*, 9, 1357-1365.
  
- [26] Tianbao Zhuang, Hong Zhao, Zheng Tang. "An Analysis of Improving Memory Performance Based on EEG Alpha and Theta Oscillations". *Computer and Information Science*, 2, 109-114, (2009).
  
- [27] Steven W. Smith, "Chapter 26 - Neural Networks (and more!)", *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Pub., 1st edition (1997).