



Universidad de Los Andes
Centro de Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

Modelo coevolutivo de intercambio de riqueza

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Adrian A. Agreda G.

Tutor:
Dr. Kay Tucci

Mérida, octubre de 2012

Resumen

Se presenta un modelo económico en el que se investiga la estructura y evolución de una red, inicialmente aleatoria, que conecta individuos capaces de intercambiar riquezas. Las interacciones económicas se producen sólo entre agentes vecinos y cuya diferencia de capital no sobrepase una cantidad dada, a la que se llamó umbral. Si el intercambio no puede llevarse a cabo, los agentes son desconectados y uno de ellos es conectado con otro agente seleccionado aleatoriamente, permitiendo que la red se vaya transformando en el tiempo. En cada interacción existe una probabilidad de favorecer al más pobre y así simular la acción del estado. Para relacionar la estructura de la red con el proceder económico subyacente y el comportamiento colectivo del sistema, se miden dos cantidades: el índice de Gini, que es un indicador de la igualdad de la distribución de riqueza del sistema, y la actividad, que revela la magnitud del cambio promedio de las riquezas de los elementos en el espacio y en el tiempo. Se encontró una íntima relación entre la actividad del sistema y el índice de Gini. La red resultante posee bajo coeficiente de clustering y baja longitud característica, sin embargo, para ciertos valores de parámetros se reveló la formación de una red libre de escala además de la formación de comunidades o módulos que muestran cierta organización en el sistema. Los valores del índice de Gini resultaron ser menores cuando la red estaba fragmentada.

Índice general

Resumen	I
Índice general	II
Introducción	1
1. Econofísica y redes	3
1.1. La econofísica	3
1.2. Una breve historia de la econofísica	4
1.3. Teoría de redes	8
1.3.1. ¿Por qué usar redes para entender fenómenos económicos?	10
1.3.2. Clasificación de las redes.	11
1.3.3. Caracterización de las Redes	12
1.3.4. Algunas topologías de redes resaltantes	15
2. Modelo de intercambio de riqueza sobre redes dinámicas	19
2.1. El Modelo	20
2.2. Parámetros de Orden	22
2.2.1. Coeficiente de Gini \mathcal{G}	22
2.2.2. Actividad del Sistema \mathcal{A}	23
2.3. Resultados del Modelo	23
2.3.1. Estimación del tiempo de simulación.	24
2.3.2. Caracterización topológica de la red económica.	24
2.3.3. Influencia de la topología en la dinámica de la red.	29
Conclusiones	32
Bibliografía	34

Introducción

Luego de la instalación del primer mercado automático de acciones, el NASDAQ en 1971, los mercados financieros se convirtieron en grandes sistemas socio-económicos generadores de data y de información, esto aunado quizá a la poca financiación de investigaciones en el área de la Física al final de la Guerra Fría, llevó a algunos físicos estadísticos a estudiar y modelar los mercados financieros. En el mundo de los negocios, las instituciones financieras empezaron a hacer ofertas a PhD's en Física, mientras que en el mundo académico surgió una nueva área de investigación interdisciplinaria, la Econofísica, que usando los métodos y las ideas tomadas de la Mecánica Estadística, hace énfasis en el análisis empírico. A pesar de que antes de los 90's, muy pocos físicos hacían investigación en sistemas económicos, ya en 1720 Isaac Newton predijo equivocadamente los precios de las acciones, lo que lo llevó a perder mucho dinero¹. Carl Friederich Gauss, pudo amasar una gran fortuna con inversiones en bonos corporativos. Actualmente los mercados financieros modernos son bastante distintos a los que Newton estudió, y quizá una buena forma de definirlos es como un juego multiagente, en el que millones de comerciantes compiten entre ellos repetidamente.

Aparte de la Econofísica, los 90's fueron testigos de la aparición de otro campo interdisciplinario conocido como Teoría de Redes. Este campo de investigación se basa en el supuesto de que la información relevante de los Sistemas Complejos puede ser capturada con objetos relativamente simples, llamados redes o grafos. Los mercados financieros son un buen ejemplo de que un sistema complejo puede ser estudiado y modelado en el marco de la Teoría de Redes. En este sentido, un primer estudio fue realizado en 1999 por Mantegna, quien fue capaz de extraer información de los retornos de las acciones de series de tiempo con un método basado en redes [1]. Pero a pesar de que las redes son ubicuas en los fenómenos sociales y económicos, y que se pierde de vista la importancia fundamental de la estructura de redes en muchos sistemas de este tipo, el desarrollo de modelos teóricos, para analizar cómo las decisiones de los individuos contribuyen a la formación de la red, está aún incompleto.

El uso de métodos de la Teoría de Grafos ha permitido a la teoría económica de redes mejorar el entendimiento de los fenómenos económicos en los que las interacciones entre los individuos no pueden ser

¹Después de esto, Newton dijo el famoso comentario: "Puedo calcular el movimiento de los cuerpos celestes, pero no la locura de la gente"

obviadas. En este sentido, partimos de la hipótesis de que los mercados financieros son sistemas dinámicos complejos, evolutivos y adaptativos. Nos planteamos *estudiar un modelo coevolutivo de intercambio de riqueza donde los agentes, que poseen diferentes estados y normas de conducta, interactúan en un proceso iterativo*. Los resultados que se obtienen al ejecutar la simulación revelan una conducta global emergente que es estudiada a través de las interacciones locales de los agentes. Los agentes de nuestra red son del tipo inteligencia cero, es decir, actúan de manera aleatoria y con ciertas restricciones presupuestarias y de localidad.

A pesar de toda la complejidad que conlleva definir y estructurar un mercado artificial financiero, el número de variables utilizadas en el modelo, originalmente propuesto por Iglesias *et al.* [2, 3] y estudiado posteriormente por Herrera *et al.* [4] no se corresponde con el número de variables reales que intervienen en el proceso dinámico del sistema real. Nuestro objetivo, entonces, es desarrollar un modelo idealizado que muestre ciertos aspectos importantes producto de las interacciones, y que además produzca una gama de tipos de conductas sin volverse un sistema complicado y de muchas variables.

En el Capítulo 1 de esta tesis se exponen los orígenes y la historia de la Econofísica, así como también la importancia del uso de redes para modelar Sistemas Económicos. Además se hace un análisis de los tipos de redes y sus principales características.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo utilizado, el cual está conformado por N agentes dispuestos sobre una red inicialmente aleatoria en la que se le asigna a cada agente i una riqueza inicial $w_i(0)$ y una aversión al riesgo $\beta_i \in [0, 1]$, los agentes interactúan siguiendo ciertas reglas especificadas en el algoritmo de simulación. Se exponen y miden dos parámetros de orden utilizados en el trabajo de Herrera *et al* [4] como son el índice de Gini y la actividad del sistema. Además como el sistema es coevolutivo se caracteriza la evolución de la red midiendo su coeficiente de clustering, longitud característica, distribución de grados, el tamaño del subgrafo más grande y su modularidad. Por último se trata de detectar la formación de comunidades en la red y mostrar su relación con la dinámica del sistema.

CAPÍTULO 1

Econofísica y redes

1.1. La econofísica

Las áreas de interés en gran parte del último siglo para los físicos fueron el mundo de lo muy grande (teoría general de la relatividad y cosmología) y el mundo de lo muy pequeño (teoría cuántica y partículas subatómicas). Como en estos dos “mundos” aparecen frecuentemente no linealidades, caos y procesos de auto-organización colectiva; en los últimos treinta años del siglo pasado se desarrollaron nuevos métodos para analizar y estudiar dichos fenómenos. Esta expansión se erigió como la doctrina que hoy conocemos como Dinámica No Lineal, la cual ha irrumpido en múltiples disciplinas como sociología, meteorología, biología, etc; y por supuesto la economía.

El interés por la dinámica de la economía se remonta a finales del siglo XIX, cuando L. Walras ya utilizaba ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiarla. Sin embargo, quien realmente estableció el uso de ecuaciones diferenciales para el análisis de la dinámica económica fue P.A. Samuelson (1947) en su libro *Foundations of Economic Analysis*. Desde ese momento, tanto las ecuaciones diferenciales como las ecuaciones en diferencias han sido ampliamente utilizadas por los economistas, fundamentalmente en modelos lineales (o linealizados) [5]. En general es fácil manejar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, el problema es que estos tienen ciertas limitaciones, volviéndose insuficientes para comprender la riqueza de la dinámica de la economía. Es por esto que se ha comenzado a tratar de explicar el comportamiento de algunas variables económicas a través de modelos deterministas no lineales. Generalmente, no es posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, exceptuando algunas ecuaciones especiales, por eso hay que recurrir a resoluciones numéricas.

En este contexto, la Econofísica trata de aplicar desde la perspectiva de la Física, los métodos, conceptos y herramientas propios de esta ciencia a la teoría económica.

Los métodos relacionados con caos y no linealidad son bastante nuevos en economía. La mayor parte de

los trabajos de investigación en esta dirección han sido publicados en los últimos diez años. En este período han aparecido nuevas revistas, así como nuevas secciones dedicadas a este tema en las revistas tradicionales, muchas conferencias se han organizado en torno a esta área, y un gran número de nuevos campos científicos, áreas, temas y aplicaciones han sido identificadas. En fin, en los últimos tiempos la econofísica ha tenido un gran auge y evolución. Como una nueva y muy joven ciencia, la econofísica significa un nuevo dominio para los físicos y a su vez nuevos métodos y maneras de pensar para los economistas en un mundo moderno.

1.2. Una breve historia de la econofísica

El uso de modelos físicos como las bases del modelo neoclásico estándar¹, que actualmente los econofísicos procuran desplazar, se remonta a más de dos siglos atrás: por ejemplo, N. F. Canard escribió, en 1801, que oferta y demanda eran ontológicamente como fuerzas físicas opuestas; en 1874 León Walras formuló el concepto de la teoría general de equilibrio en economía, siendo profundamente influenciado por el físico Louis Poincaré; y la tesis de Irving Fisher, padre de la economía matemática americana en su forma neoclásica, fue supervisada por el padre de la mecánica estadística, J. Willard Gibbs² en 1891.

El interés de los físicos en sistemas económicos y financieros tiene raíces que datan de 1936, cuando Majorana escribió un artículo pionero, publicado en 1942 y titulado *Il Valore Delle Leggi Statistiche Nella Fisica e Nelle Scienze Sociali*, basado en la analogía esencial entre las leyes estadísticas en la física y en las ciencias sociales. Varios años después, en 1974, el físico estadístico E. Montroll, en conjunto con W.W. Badger, escribieron el libro *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena*[9]. Sin embargo en las últimas tres décadas es que ha sido posible la aplicación de conceptos como distribuciones de ley de potencia, correlaciones, escalas, series de tiempo impredecibles y procesos aleatorios a mercados financieros.

Al final del siglo XIX, el físico, economista, ingeniero y sociólogo italiano Vilfredo Pareto sugirió que la distribución de ingresos en una sociedad es descrita por una ley de potencia. De hecho, datos actuales confirman que para los estratos altos las distribuciones siguen la ley de Pareto, que viene dada por

$$y \sim x^{-\nu} , \quad (1.1)$$

donde y es el número de personas que tienen un ingreso mayor o igual a x y el exponente $\nu \approx 1.5$.

¹ El modelo neoclásico estándar incluye las siguientes suposiciones [6] (1) competencia perfecta, (2) información perfecta, (3) comportamiento racional, (4) todos los precios son flexibles (todos los mercados están en equilibrio). Entonces, el equilibrio del mercado que resulta es eficiente. Ver [7] para una discusión acerca de estas suposiciones.

²La mecánica o física estadística fué desarrollada en la segunda mitad del siglo XIX por James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann, y Josiah Willard Gibbs. Estos físicos desarrollaron métodos matemáticos para describir las propiedades estadísticas de los átomos: la distribución de probabilidad de velocidades de moléculas en un gas (La distribución de Maxwell-Boltzmann), y la distribución general de probabilidad de estados con diferentes energías (La distribución de Boltzmann-Gibbs) [8].

Pareto se dió cuenta de la generalidad del resultado y que podía ser aplicado a países tan diferentes como Inglaterra, Irlanda, Alemania, Italia, entre otros. Más recientemente los econofísicos han descubierto que, por ejemplo, las fluctuaciones de las tasas de crecimiento de los tamaños de compañías decaen siguiendo leyes de potencias y han observado leyes semejantes en la distribución de salarios, el número de empleos, etcétera.

La ley de Pareto, al igual que todas las leyes de potencia, son invariantes a cambios de escala, esto es, carecen de una escala característica; es decir, que cualquier cambio de escala es absorbido por la constante de normalización, y la forma de la función permanece invariante, lo que resulta contraintuitivo. Lo anterior, junto con el auge del modelo estándar aplicado a los mercados, hizo que los modelos basados en leyes de potencias quedaran relegados. Esto se mantuvo hasta la década de 1990, cuando ocurrieron catastróficos quiebres económicos y financieros, que fueron difíciles de explicar con el modelo estándar [10].

Otro hito de la econofísica fue la primera formalización matemática de un *random walk*, publicada por Louis Bachelier en su tesis doctoral titulada *Théorie de la Speculation*, en la Academia de París, el 29 de marzo de 1900. Su tutor fué Henry Poincaré, uno de los más grandes matemáticos del momento. Bachelier determinó la probabilidad del cambio de los precios, la tesis tiene que ver con la valoración de opciones en mercados especulativos, una actividad que hoy es muy importante en los mercados financieros. La primera descripción de un *random walk* hecha por un físico fue realizada en 1905 por Albert Einstein, y un análisis matemático más riguroso del *random walk* fué hecho por Norbert Wiener en 1923.

La distribución probabilística de los cambios de precio (retornos) de acciones, bonos y productos transados en mercados especulativos ha sido frecuente materia de estudio en la economía. En los años 60's destacan los trabajos de Mandelbrot y Fama, quienes propusieron nuevas distribuciones del tipo Pareto-Lévy en sustitución de las distribuciones normales. La hipótesis de Fama-Mandelbrot ha sido posteriormente evaluada empíricamente por otros autores [11, 12, 13, 14].

Un año clave para el nuevo campo científico de la econofísica fué 1973, cuando las monedas comenzaron a ser cambiadas en mercados financieros, y fué publicado el artículo que presentó la teoría de Black y Scholes, considerada la base principal de la econofísica, que proporcionó la primera fórmula racional para fijar el precio de las opciones³.

Una nueva revolución comenzó en la década de 1980, cuando el intercambio electrónico fué adaptado al mercado de divisas, y cuyo resultado ha sido una gran cantidad de data financiera electrónicamente almacenada y de fácil acceso. Simultáneamente, en las ciencias físicas se reconoció que series de tiempo impredecibles y procesos estocásticos no son sinónimos. La teoría del caos ha mostrado que series de tiempo impredecibles pueden resultar de sistemas no lineales deterministas. Estudios teóricos y empíricos

³Una opción es un contrato financiero que concede al suscriptor el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender un activo, cuyo precio fluctúa en el mercado, a un precio establecido para una fecha futura dada.

han investigado si la evolución temporal de los precios de los activos en los mercados financieros se deben a dinámicas deterministas no lineales [15, 16, 17, 18].

Desde la década de 1990, un creciente número de físicos ha intentado analizar y modelar mercados financieros y, de forma más general, sistemas económicos. Las investigaciones de econofísica lidian actualmente con conceptos como distribuciones de ingresos en mercados financieros [19, 20, 21, 22, 23, 24]; correlación de tiempo de una serie financiera [25]; analogías y diferencias entre dinámica de precios en un mercado financiero y procesos físicos como turbulencia [26, 27] o sistemas ecológicos [28, 29, 30]; distribución de crisis económicas y tasas de variación de crecimiento [31, 32]; la distribución del tamaño de las empresas y tasas de crecimiento [33, 34]; la distribución del tamaño de las ciudades [35]; la distribución de descubrimientos científicos [36]; y la distribución de ingreso y riqueza [37, 38, 39].

Econofísica significa también una visión científica de la economía cuantitativa usando ideas, modelos, métodos conceptuales y computacionales de la física estadística y la dinámica no lineal. En años recientes muchas teorías físicas como la teoría de turbulencia [40], teorías de escala [41], teoría de matrices aleatorias [42], o grupo de renormalización [43] fueron satisfactoriamente aplicadas a economía dando empuje a las técnicas de computación modernas de análisis de datos, manejo de riesgo, mercados artificiales y macroeconomía. Así, la econofísica se ha convertido en una disciplina regular que cubre un gran espectro de problemas de la economía moderna.

La econofísica al igual que la física, ha estado tradicionalmente dividida en teórica y experimental, y como en la física, en ambos grupos, los computadores juegan un creciente e importante rol. La econofísica experimental trata de analizar datos reales provenientes de mercados reales y trata de darles algún sentido, intenta conocer la dinámica que los rige. Mientras que la econofísica teórica trata de encontrar modelos microscópicos que coincidan en cierta forma con los hechos experimentales y que reflejen el comportamiento macroscópico de los sistemas económicos.

La econofísica fué desde el principio la aplicación de los principios de la física al estudio de los mercados financieros, bajo la hipótesis de que el mundo económico se comporta como un conjunto de electrones o un grupo de moléculas de agua que interactúan unas con otras, pero después del año 2000, la econofísica ha madurado lo suficiente como para permitir aplicaciones generales, y a pesar de que sigue siendo la ciencia que usa modelos tomados especialmente de la física estadística, dinámica no lineal y simulaciones que incluyen agentes para describir algunos fenómenos económicos, ahora ocurre que el interés directo de la comunidad física en esos temas ha crecido, especialmente en las áreas de los modelos de mercados financieros [21, 24, 42] y comportamiento colectivo social [19, 44, 45, 46] o económico [26, 47, 48]. Las características comunes que estos modelos poseen son un conjunto de agentes los cuales deciden un conjunto de acciones que a su vez afectan a los agentes.

En particular, dentro del modelado de comportamientos colectivos, se ha desarrollado un fuerte interés en el problema de formación de redes, aplicados a mercados, sociedades, dispersión de rumores, enfermedades, etc.

Nuestra tesis, enmarcada dentro del área de la econofísica teórica, presenta un modelo microscópico de intercambio de riqueza entre agentes ubicados sobre una red para estudiar la distribución de riqueza. En este sentido, en los últimos años se han propuesto algunos modelos de este tipo. Pianegonda *et al.* citados en [2, 3] presentaron una serie de artículos en los que introducen modelos de redistribución de riqueza sobre una red unidimensional. También muestran un modelo simplificado para el aprovechamiento de recursos por parte de los agentes interactuantes, en una economía con propiedades de pequeño mundo. Finalmente, comparan un sistema donde los enlaces comerciales están fijos con uno en el que los agentes pueden escoger a sus compañeros comerciales en cada iteración.

Chakraborti [49] estudió las distribuciones de dinero en un sistema económico simple y cerrado para diferentes tipos de transacciones monetarias. En este trabajo se estudiaron las distribuciones que se forman para intercambios arbitrarios y aleatorios locales conservando las transacciones de dinero. También se consideraron los efectos de los ahorros y observó cómo cambia la distribución. Por último, propuso un nuevo modelo donde los agentes invierten montos de dinero iguales en cada transacción, encontrando que para periodos de tiempo cortos la distribución de dinero sigue una ley de potencia.

A. Das y S. Yarlagadda [50] analizaron matemáticamente un modelo de mercado donde las transacciones en cada paso de tiempo involucran sólo dos agentes conservando la suma de sus riquezas, generando una redistribución de las riquezas de los dos agentes.

Más tarde, Manolova *et al.* [51, 52] consideraron una economía donde el dinero fiduciario es intrínsecamente necesario para el intercambio, debido a la estructura local de la interacción entre agentes. Investigaron el impacto permanente y transitorio de las inyecciones locales y globales de dinero en la dinámica del sistema y los mecanismos que explican esta evolución.

Recientemente Laguna *et al.* [53] estudiaron el efecto de la estratificación social en la distribución de riqueza en un sistema de agentes económicos interactuantes que están limitados a interactuar sólo con su misma clase económica. Obtuvieron diferentes distribuciones como una función del ancho de la clase económica. Encontraron un rango de anchos en los que la sociedad se divide en dos clases, separadas por una brecha grande que evita posteriores intercambios entre agentes ricos y pobres, quedando eliminada la clase media. utilizaron al índice de Gini para medir la igualdad social.

Herrera *et al.* [4] propusieron un modelo de intercambio económico entre agentes, que incorporó el concepto de estratificación de Laguna *et al.* y el concepto de localización espacial, es decir, los agentes económicos son ubicados sobre los vértices de redes unidimensionales y bidimensionales. Principalmente

estudiaron los efectos tanto de la estratificación como de la distribución espacial, en los fenómenos colectivos que emergen en el sistema.

1.3. Teoría de redes

Así como los economistas son los “expertos” en las actitudes del consumidor y los sociólogos en la interacción social humana, los físicos son los expertos simplificando problemas complejos. Sin embargo, usualmente no se les pregunta a los físicos acerca de las previsiones del mercado de valores [54], ni tampoco se piensa en un físico cuando se quiere conocer el comportamiento de multitudes [55]. Muchos científicos que trabajan con problemas complejos reales no toman amigablemente el hecho de que los físicos se incorporen en su campo de estudio y propongan teorías extremadamente simples. Parafraseando a Lind [56], se escuchan bromas sobre físicos que asumen a los pollos como una esfera. Esto es porque las suposiciones y simplificaciones deben ser hechas con criterio y cuidado; no todas pueden ser tomadas en cuenta, ya que se debe tratar de retener las características esenciales para poder explicar lo que se observa. Por ejemplo, el aire es un sistema bastante complejo, sin embargo para explicar cómo se infla un globo no recurrimos a decir que el aire está compuesto por un conjunto de moléculas de nitrógeno, oxígeno, argón y dióxido de carbono, entre otros; y que cada una de estas moléculas es un arreglo de átomos con diferentes pesos y que cada átomo es un sistema de quarks y electrones interactuando de acuerdo a ciertas fuerzas. Simplemente asumimos que el aire es un conjunto de pequeñas esferas viajando en todas direcciones y colisionando entre ellas y con las paredes del globo. Estas colisiones son *esencialmente* las responsables de lo que llamamos presión del gas. Todo lo demás puede ser ignorado.

De esta forma, los físicos simplifican la realidad hasta sus componentes e interacciones elementales, llevándolos a descubrir las leyes fundamentales de la naturaleza. Precisamente eso es lo que se hace al usar la teoría de redes para tratar de explicar ciertos fenómenos: los componentes del sistema bajo estudio se reducen a elementos que retienen las características esenciales que se quieren abordar y las interacciones entre tales componentes son representadas por enlaces que unen a los elementos [57]. Estos elementos pueden ser moléculas con enlaces representando las colisiones entre ellas, pero también pueden ser vistos como personas enlazadas por su amistad o como empresas conectadas entre ellas de acuerdo al comercio o intercambio que realicen.

La teoría de redes se basa en la observación de elementos que interactúan entre sí. La estructura de una red es importante en la determinación del resultado de muchas relaciones sociales y económicas. Por ejemplo, las redes cumplen un rol fundamental para determinar cómo se intercambia la información [44]. Tal información puede ser tan simple como una invitación a una fiesta, o tan trascendente e importante como información sobre oportunidades de trabajo [45, 58, 59], productos de consumo [60, 61], conocimiento

[62] o las ganancias del crimen [63]. Las redes también juegan un papel muy importante en los beneficios obtenidos de la negociación con una organización [64] y en el intercambio de bienes y servicios.

El enfoque de los problemas desde el punto de vista de redes se remonta al siglo XVIII, cuando Leonhard Euler quiso resolver el problema de “Los 7 puentes de Königsberg”⁴ [65]. Al resolverlo, probando que era imposible encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio, Euler introdujo el concepto de grafo como un objeto matemático compuesto por nodos y arcos, y fundó la llamada teoría de grafos [66]. Recientemente los físicos adoptaron el término red en vez de grafo y, con la ayuda de computadores, desarrollaron el enfoque de redes para abordar nuevos problemas de Física, Biología, Sociología, y Economía. Dado que las redes subyacentes en muchos de los sistemas que las involucran tienen una estructura muy complicada, como la que se muestra en la figura 1.1, es común referirse a estas como redes complejas. Muchos artículos y libros han sido publicados en el campo de investigación de las redes complejas en la última década [57, 67, 68, 69, 70, 71].

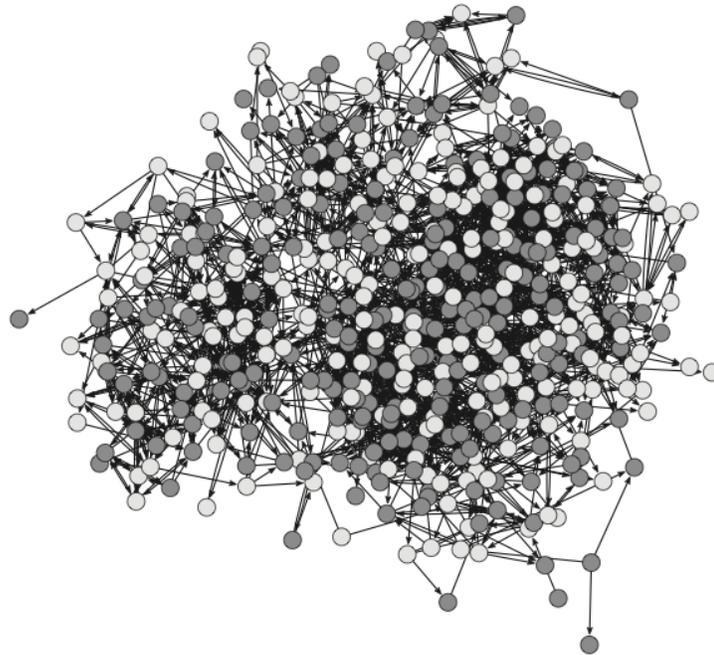


Figura 1.1: Ilustración de una red de diferentes relaciones sociales de amistades en una escuela de EEUU [72]. Las diferentes tonalidades de grises distinguen entre estudiantes masculinos y femeninos. Las Flechas indican quién apunta a quién como amigo.

Las redes son muy importantes en un amplio rango de fenómenos económicos y se podría decir que son ubicuas en los fenómenos económicos y sociales [73]. A pesar de esto, la teoría económica estándar raramente considera redes económicas de manera explícita en sus análisis, y el desarrollo de las bases

⁴La ciudad de Königsberg - ahora llamada Kaliningrado, ubicada en Rusia - está dispuesta a ambos lados del Río Pregel, teniendo dos islas entre ellos. Ambas islas están conectadas una con otra y con ambos lados del río por siete puentes, y Euler resolvió el problema de probar si es posible cruzar cada puente exactamente una vez y volver al punto de partida

teóricas de los modelos para analizar cómo las decisiones y las interrelaciones sociales de los individuos contribuyen a la formación de una red está todavía muy inmaduro. Sin embargo, una gran novedad en teoría económica ha sido el uso de métodos derivados de la teoría de grafos para describir y estudiar las relaciones entre los agentes económicos en las redes [4, 44, 47, 48, 53, 58, 61, 73]. Esto ha provocado un rápido crecimiento en la investigación teórica de redes económicas.

1.3.1. ¿Por qué usar redes para entender fenómenos económicos?

Gallegati y Kirman [48, 74] proponen que el comportamiento agregado de una economía no puede ser estudiado en términos del comportamiento de individuos aislados, como se hace usualmente en la teoría económica estándar. De todo el conjunto de empresas que existen en la economía, las empresas interactúan sólo con otras pocas empresas. Además, existen diferentes maneras de interacción entre las empresas, y estas pueden aprender a través del tiempo y adaptar o cambiar sus interacciones, es decir, fortalecen las interacciones rentables y a su vez eliminan las costosas. Todo esto basado en su experiencia previa. Podemos ver entonces a la economía como una red evolutiva.

En cambio en el modelo económico neoclásico, se asume que individuos anónimos y autónomos toman decisiones de manera independiente e interactúan en el sistema de precios sin poder siquiera influenciarlo. Esto es lo que se denomina un mercado con competencia perfecta. Sin embargo, es claro que la competencia se vuelve imperfecta fácilmente porque, si los agentes tienen poco poder en el mercado, medirán muy bien las consecuencias de sus acciones y tratarán de anticiparse a las acciones de otros. Para resolver esta deficiencia, teóricos han tratado de integrar de manera estratégica empresas o individuos que interactúen en un marco de equilibrio general⁵. Aun así, quedan dos problemas sin resolver. Primero, se asume que el comportamiento es optimizar al máximo posible teniendo en cuenta todas las acciones posibles, tanto propias como de otros. Esto trae como resultado agentes con habilidades extremadamente sofisticadas en el procesamiento de información. Tal habilidad de transmitir estas enormes cantidades de información en tiempos cortos no puede ser encontrada en ningún escenario real de interacción humana. Segundo, el problema de coordinación de actividades no se toma en cuenta en el modelo de equilibrio estándar de la economía. Al contrario, se asume que cada agente puede interactuar y comercializar con cualquier otro agente, lo que resulta considerablemente irreal para sistemas grandes. Una manera de limitar el entorno en el cual los agentes operan es ver a la economía como una red en la cual los agentes interactúan sólo con sus vecinos y con agentes con patrimonio o riqueza cercanos al propio.

⁵El proceso de generar una decisión individual es representado maximizando una *función de utilidad*. Una *función de utilidad* es una manera de asignar un número a cada posible escogencia de modo que las escogencias preferidas tengan un número más alto que las menos preferidas [75]. Los gradientes de la *función de utilidad* se entienden como fuerzas que hacen que los individuos hagan transacciones, y de los cuales emerge el equilibrio económico como una especie de equilibrio de fuerzas [76].

Finalmente, la evolución de la red en sí misma debe ser endógena, originarse en virtud de causas internas. En este caso la evolución de la estructura de los enlaces depende de la experiencia de los agentes con sus enlaces. Los individuos aprenden y adaptan su comportamiento, esto resultará en la evolución de la estructura de la red la cual repercutirá en los incentivos a los agentes para formar o romper enlaces.

1.3.2. Clasificación de las redes.

Como ya se dijo antes, las redes están formadas por nodos y enlaces. Según el problema que se quiera estudiar las características de esos nodos y enlaces cambiará, entonces lo primero que se debe conocer cuando se va a construir una red es el tipo de componentes o elementos y las interacciones que se producirán entre ellos. En la figura 1.2 se muestran los principales tipos de enlaces y nodos.

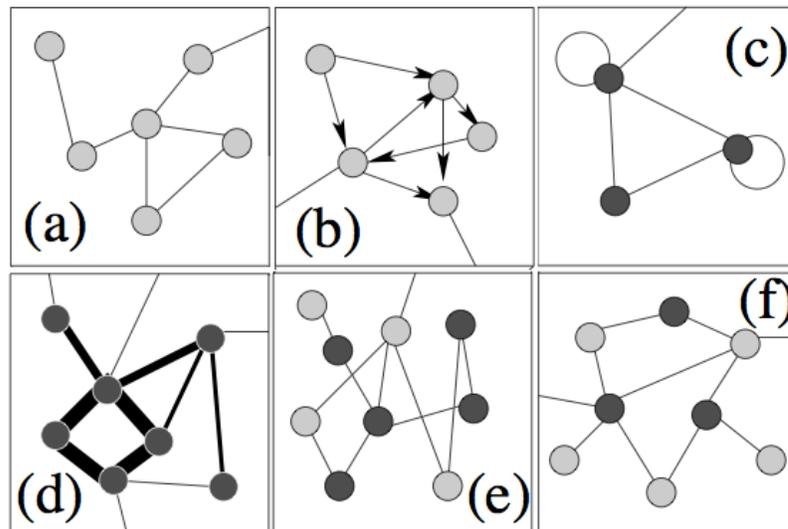


Figura 1.2: Clasificación de las redes. Ilustración de parte de una red: (a) no dirigida, (b) dirigida, (c) con conexiones a sí mismo, (d) ponderadas, (e) monopartitas, donde la naturaleza del nodo no influencia la existencia de conexión y (f) bipartita, donde los nodos de un tipo se conectan sólo a nodos de otro tipo [56]

Al igual que pasa en la física, los sistemas económicos y sociales involucran interacciones que pueden ser tanto simétricas como asimétricas. Una conexión de amistad entre dos personas es simétrica, no hay dirección preferida en la conexión (los enlaces mostrados en la fig. 1.2(a) son suficientes para representar las conexiones entre amigos). Si por el contrario, se tiene una red de conocidos, es decir, no necesariamente amigos, habrá seguramente personas más famosas que otras, por lo que no se garantiza que si la persona “x” conoce a la persona “y”, la persona “y” también conozca a la persona “x”. Entonces, se le debe dar dirección a los enlaces que representan a las interacciones como se muestra en la figura 1.2(b). Las redes con interacciones simétricas son bidireccionales, mientras que las redes con interacciones asimétricas son unidireccionales. Esto puede parecer sin importancia, pero en muchos casos la simetría o asimetría de las interacciones entre los elementos tiene grandes implicaciones en la dinámica de la red. Por ejemplo en

propagación de rumores o flujo de dinero o información [68, 70, 77].

Las interacciones simétricas o asimétricas sólo aparecen en conexiones que involucran diferentes nodos, pero puede ocurrir el caso de conexiones de un nodo a sí mismo, como se ilustra en la figura 1.2(c) y ser de mucha importancia. Recientemente fue mostrado que en una red de autores donde las conexiones representan referencias a otros autores, las autoreferencias son una característica importante para seguirle la pista al cambio de los científicos desde un campo de estudio a otro [78].

Además de establecer la naturaleza de los enlaces se puede pensar en la posibilidad de agregar un valor, ponderación o peso a la conexión, por ejemplo, el número de llamadas de teléfono entre dos personas en un sistema social puede ser visto como una medida de su amistad [79]. La figura 1.2(d) muestra conexiones ponderadas.

Si hablamos de la naturaleza de los nodos, estos pueden determinar si las conexiones pueden existir entre ellos o no. Si los nodos son personas y las conexiones unen a personas coautoras de un mismo artículo, no hay restricción impuesta por los nodos, las personas pueden ser ricas o pobres y no habrá diferencia en las conexiones, como se muestra en la figura 1.2(e). Pero puede existir el caso en el que la naturaleza de los nodos predisponga la ocurrencia de una conexión de algún tipo entre ellos. Por ejemplo, en una red donde los nodos pueden ser individuos de distinto sexo y las conexiones representan relaciones íntimas entre ellos, uno esperaría que se generaran con mucha más frecuencia conexiones entre elementos de distinto sexo, como se ilustra en la figura 1.2(f). Esta estructura particular donde los nodos de un tipo están conectados a nodos de otro tipo es conocida como estructura bipartita, lo opuesto son estructuras monopartitas.

Por supuesto, todas estas características antes mencionadas pueden aparecer solas o combinadas. Una red donde las interacciones miden el número de llamadas telefónicas hechas por una persona “x” a una persona “y” tiene conexiones que son unidireccionales (“x” llama a “y”) y ponderadas (número de llamadas).

En conjunto, estos componentes constituyen las diferentes formas fundamentales para construir una red que represente a un sistema real. A pesar de esto, las redes pueden tener una estructura complicada, que generalmente, es difícil estudiar analíticamente, principalmente por el hecho de que la distribución de los nodos y conexiones está asociada con algunos eventos estocásticos o probabilísticos. Por lo tanto, el estudio analítico de las redes es hecho usualmente en prototipos de redes deterministas que tienen las propiedades estructurales de las redes reales que se quieren estudiar.

1.3.3. Caracterización de las Redes

Ahora que ya sabemos cómo construir una red, el siguiente paso será conocer lo necesario para entender su estructura. Una red de N nodos se puede definir, entre otras formas, por su matriz de adyacencia \mathbf{A} , la cual está compuesta por los elementos a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, donde $a_{ij} = 0$, significa que el nodo i

no está conectado al nodo j , y $a_{ij} = 1$, indica que sí está conectado. Para redes ponderadas como las que se construyen en algunos sistemas biológicos, ecológicos y económicos, donde las interacciones son heterogéneas, los elementos a_{ij} toman valores que corresponden al peso de la interacción. Si la red es bidireccional, entonces \mathbf{A} es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$, y si la red es unidireccional la matriz será asimétrica. En lo que sigue nos referiremos solamente a redes no ponderadas y bidireccionales, las extensiones a los otros tipos de redes son sencillas.

Distribución de Grados

En una red, cada nodo i tiene un determinado número de conexiones llamado grado del nodo i . Si la red es bidireccional, se puede definir como

$$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji} , \quad (1.2)$$

El grado promedio de un grafo es definido como

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N k_i = \sum_{i=0}^N P(k_i) k_i , \quad (1.3)$$

Con el grado de cada nodo es sencillo calcular la distribución de grados

$$P(k) = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{kk_i} , \quad (1.4)$$

donde $\delta_{kk_i} = 1$ si $k = k_i$ y 0 si $k \neq k_i$.

La distribución de grados es capaz de distinguir diferentes familias de redes, pero esta medida puede sufrir grandes fluctuaciones, sobre todo cuando las redes no son lo suficientemente grandes, como ocurre frecuentemente en sistemas empíricos. Por esto, muchas veces es preferible calcular la función de distribución acumulada

$$F(k) = \sum_{k' > k} P(k') , \quad (1.5)$$

Coefficiente de clustering

Para conocer cómo cada vértice está agrupado con sus vecinos, lo que equivale a contar cuantos vecinos son vecinos entre ellos, se mide la fracción de conexión entre los vecinos de un determinado nodo del total de conexiones posibles entre ellos, a esto se le llama coeficiente de clustering, Y es una medida de vecindad entre nodos. El coeficiente de clustering C_i del nodo i , es el número relativo de conexiones entre sus vecinos.

Un nodo i puede tener hasta $k_i(k_i - 1)/2$ conexiones entre sus k_i vecinos, por consiguiente, si hay sólo m_i conexiones entre los vecinos el coeficiente de clustering viene dado por

$$C_i = \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)} = \frac{\sum_{j,n} a_{ij}a_{jn}a_{ni}}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1.6)$$

donde el tercer miembro muestra explícitamente cómo contar el número de enlaces entre vecinos del nodo i [56]. Promediando el coeficiente de clustering local mostrado en la ecuación (1.6) sobre todos los nodos, obtenemos el coeficiente de clustering global

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1.7)$$

donde N es el número total de nodos de la red.

Longitud característica

Ahora se podría preguntar ¿qué tan lejos están dos nodos determinados?, lo que lleva naturalmente al concepto del promedio de la longitud del camino más corto entre nodos o longitud característica de la red, que viene dada por

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \geq j} d_{ij}, \quad (1.8)$$

donde d_{ij} es la distancia más corta del nodo i al nodo j medida en número de enlaces en el camino de i a j . La longitud característica L es el número promedio de conexiones que unen a dos nodos escogidos aleatoriamente. Es obvio que L crecerá con el tamaño de la red N , y es importante conocer la rapidez de dicho crecimiento para caracterizar la red. Si L se incrementa lentamente, por ejemplo si $L \approx \ln N$, entonces podemos afirmar que en general dos nodos cualesquiera están cercanos en comparación con el tamaño de la red.

Hay que mencionar que la longitud característica de la red no es fácil de calcular eficientemente en un computador, ya que implica la determinación del camino más corto entre todos los caminos posibles entre dos nodos.

Modularidad

El gran tamaño de algunos tipos de redes como las sociales, las de usuarios de telefonía o el internet, en las cuales hay millones de nodos, hacen necesario formular nuevos métodos que permitan extraer datos relevantes de su estructura. Un enfoque prometedor consiste en descomponer las redes en subredes o

comunidades más pequeñas, definidas como conjuntos de nodos altamente interconectados y con pocas conexiones hacia el exterior [80]. La identificación de comunidades dentro de la red es de gran importancia ya que pueden ayudar a develar información que a priori es desconocida, tales como tendencias y tópicos en redes de información, o cibercomunidades en redes sociales. Además, la “meta-red” resultante, en la cual sus nodos son las comunidades, puede ser usada para visualizar la estructura de la red original.

El problema de la detección de comunidades requiere la partición de la red en conjuntos de nodos que están altamente conectados, y en la cual los nodos de conjuntos distintos estén levemente conectados. Obtener resultados exactos de este problema de optimización es computacionalmente imposible. Muchos algoritmos han sido propuestos para conseguir comunidades en una red de manera relativamente rápida. Estos algoritmos se pueden agrupar en: algoritmos divisivos que detectan los enlaces entre comunidades y los remueven de la red [81], algoritmos aglomerativos que juntan nodos y comunidades similares de manera recursiva [82] y métodos de optimización basados en la maximización de una función objetivo [83]. La calidad de las particiones de la red obtenidas por estos métodos es medida en términos de la modularidad.

La modularidad $Q \in [-1, 1]$, mide la densidad de enlaces dentro de las comunidades comparada con los enlaces entre comunidades, es decir, cuantifica la calidad de la división de la red. Altos valores significan divisiones bien definidas, por lo tanto se tendrá una alta densidad de conexiones dentro de la comunidad, y una baja densidad de conexiones entre comunidades. La modularidad se define como

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left[a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(c_i, c_j), \quad (1.9)$$

donde m es el número total de enlaces, c_i es el caracterizador que identifica a la comunidad a la que el nodo i pertenece, y la función δ es la delta de Kronecker.

1.3.4. Algunas topologías de redes resaltantes

Ahora que conocemos las propiedades y cantidades que nos permiten caracterizar a las redes, presentamos algunas de las principales familias de redes que usualmente son estudiadas.

Redes Aleatorias

Uno de los más viejos y simples modelos de redes son las redes aleatorias [84], introducidas por Salomonoff y Rapoport en 1951 y estudiadas en profundidad por Paul Erdős y Alfred Rényi en una serie de artículos clásicos publicados al final de los años cincuenta [65, 85] donde las usaron para estudiar los principios de organización que mostraban algunas redes reales.

Para construir una red aleatoria tipo Erdos-Renyi, se define la probabilidad $p(N)$ de que un par de nodos estén conectados entre sí, donde N es el número total de nodos, y se aplica a los $N(N - 1)/2$ pares de nodos.

Con este algoritmo de construcción las conexiones son generalmente de largo alcance y la distribución de grados k_i es del tipo Poisson. Una característica importante de las redes aleatorias es la baja longitud característica L , casi siempre L crece menos que logaritmicamente con el tamaño de la red. Este tipo de redes posee un bajo coeficiente de clustering que decrece usualmente con el tamaño de la red como $1/N$. El cuadro 1.1 muestra las distintas distribuciones de grados $P(k)$, coeficientes de clustering C y el promedio de la longitud del camino más corto L para redes aleatorias y otras redes de topologías complejas.

	Aleatoria	Pequeño Mundo	Libres de Escala
$P(k)$	$e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k / k!$	$e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k / k!$	$2m^2/k^3$
C	$\langle k \rangle / N$	$C_0 (1 - p)^3$	$\sim N^{-3/4}$
L	$\ln N / \ln(pN)$	$\ln N$	$\ln N / \ln \ln(N)$

Cuadro 1.1: Distintas distribuciones de grados $P(k)$, coeficientes de clustering C y el promedio de la longitud del camino más corto L para las diferentes topologías complejas. N es el número total de nodos, p es la probabilidad de que dos nodos estén conectados, $\langle k \rangle$ es el número promedio de conexiones por nodo, C_0 es el coeficiente de clustering de la retícula regular de la que se construye la red pequeño mundo, y m es el número de conexiones iniciales de cada nodo en una red libre de escala.

Redes Pequeño Mundo

Uno de los experimentos más conocidos sobre las redes pequeño mundo fué el realizado por el psicólogo Stanley Milgram [86], con el que trataba de explicar cómo en las redes sociales, aunque el conjunto de vecinos de cada elemento es prácticamente compartido por todos sus vecinos, muchos nodos pueden alcanzarse desde otros vértices a través de un pequeño número de pasos. Este fenómeno es conocido como los “seis grados de separación” y se basa en la idea de que el número de conocidos de una persona crece exponencialmente con el número de enlaces de la red personal. En consecuencia, todos estamos conectados en promedio a través de seis contactos intermedios.

Posteriormente, el experimento fue reproducido a una escala mayor por Dodds[46] usando el correo electrónico como medio de comunicación. Éste resultó en 384 mensajes que alcanzaron el destino y un promedio de la longitud del camino de 4.

Las redes pequeño mundo pueden ser vistas como un paso intermedio entre las redes regulares, caracterizadas por altos coeficientes de clustering y grandes diámetros o distancia media entre nodos, y redes aleatorias, caracterizadas por un bajo coeficiente de clustering y pequeños diámetros. Watts y Strogatz [87] definen a las redes pequeño mundo como grafos que exhiben un alto coeficiente de clustering, como

las redes regulares, pero un diámetro pequeño, como los grafos aleatorios. Basándose en esta definición ellos propusieron un algoritmo para construir redes tipo pequeño mundo.

La idea del modelo de Watts-Strogatz [87] es empezar con una retícula regular de N nodos en la que cada vértice está conectado con los $\langle k \rangle$ vecinos más cercanos, donde $N \gg \langle k \rangle \gg \ln(N) \gg 1$. Luego reconectar aleatoriamente, con probabilidad P , cada uno de los extremos de cada enlace. Si $P = 0$, tenemos una estructura original que es ordenada con un gran número de lazos pero grandes distancias; pero, cuando $P \rightarrow 1$, la red se convierte en un grafo aleatorio con distancias cortas pero pocos lazos. Con unas cuantas reconexiones el diámetro del grafo se habrá reducido dramáticamente mientras que el coeficiente de clustering se mantendrá alto. La distribución de grados para las redes de pequeño mundo son similares a la de redes aleatorias pero con un pico en $\langle k \rangle$.

Redes Libres de Escala

Tradicionalmente el modelo de Erdős-Rényi ha sido el área de estudio predominante en el campo de grafos aleatorios. Sin embargo, numerosos estudios indican que el modelo de Erdős-Rényi falla al querer reproducir muchas de las propiedades observadas en redes reales. Una de las propiedades más simples de una red que puede ser medida directamente es la distribución de grados, o la fracción $P(k)$ de nodos que tienen k conexiones (grado k). Las redes de Erdős-Rényi tienen una distribución de grados de tipo Poisson, $P(k) = e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k / k!$, donde $\langle k \rangle$ es el promedio de grados.

Medidas directas de la distribución de grados para redes reales como internet, correo electrónico, referencias de artículos científicos, metabólicas y muchas más, muestran que la distribución de Poisson no se ajusta de manera adecuada. Más bien estas redes muestran una distribución de grados que sigue una ley de potencia:

$$P(k) \sim k^{-\gamma},$$

donde γ no es universal, sino que depende del tipo específico de red. Para la mayor parte de los sistemas, dicho parámetro se encuentra en el rango $2 < \gamma < 3$.

Para construir una red libre de escala, Albert y Barabasi [88] proponen un algoritmo que empieza con un pequeño número de nodos totalmente interconectados, y se agrega iterativamente un nodo con m conexiones a los nodos anteriores, usando una función de probabilidad proporcional al grado de cada uno de los nodos ya presentes en la red, lo que hace que los nodos más conectados tengan más probabilidad de recibir a los nuevos nodos. Con esta construcción se obtiene una distribución de grados $P(k) \propto k^{-\gamma}$, donde $\gamma \rightarrow 3$ a medida que $N \rightarrow \infty$, independiente del número inicial de nodos totalmente interconectados y de m .

Desde el punto de vista computacional la inserción preferencial de nodos debe ser implementada tomando en cuenta los enlaces existentes en vez de implantar una probabilidad basada en la proporcionalidad del número de conexiones. De hecho, una escogencia aleatoria en el conjunto de enlaces existentes es equivalente a escoger en el conjunto de nodos proporcionales a su grado, y es mucho más eficiente [56].

Las redes libres de escala tienen típicamente pequeños L y C , similar a las redes aleatorias. Un incremento en el número inicial m de conexiones tiende a hacer que L decrezca y que C se incremente.

Finalmente, también es posible generar redes libres de escala introduciendo una distribución de ley de potencia de todas las conexiones distribuidas aleatoriamente, o siguiendo una regla iterativa determinista para nuevos nodos. El primer procedimiento genera el llamado grafo generalizado aleatorio, mientras que el segundo se refiere entre otras a las redes deterministas libres de escala.

Modelo de intercambio de riqueza sobre redes dinámicas

La economía es una ciencia social que estudia las relaciones que tienen que ver con los procesos de producción, intercambio, distribución y consumo de bienes y servicios, por lo tanto, el comportamiento agregado de una economía debería ser estudiado en términos del comportamiento de individuos aislados que interactúan entre sí, lo que sugiere que la economía puede ser estudiada sobre redes de tipo libres de escala, pequeño mundo, regulares, etc. En la actualidad existen varios modelos que intentan explicar fenómenos económicos haciendo uso de la teoría de redes [4, 47, 48, 53, 61, 73], como es el caso de nuestro modelo.

En particular, han sido propuestos innumerables modelos de intercambios de riqueza tratando de explicar la aparición de distribuciones de Ley de Potencia del tipo obtenido por Vilfredo Pareto hace aproximadamente un siglo [89]. Datos internacionales empíricos muestran que la Ley de Pareto funciona bien para países con altos ingresos [38, 89, 90], no siendo así para economías de ingresos bajos y medios [91, 92, 93], para las cuales han sido propuestas diversas distribuciones como log-normal o de Boltzman. En su mayoría, los modelos de intercambio de riqueza proponen interacciones asimétricas, en las que el mayor beneficiado del intercambio económico sea el agente o el individuo más pobre, tratando así de simular la acción reguladora del estado [2, 94]. Casi todos estos modelos escogen a los agentes que intercambian riquezas de manera aleatoria [95] o siguiendo una dinámica externa [2, 3] resultando en distribuciones Gibbs-exponenciales, coincidiendo muchas veces con distribuciones empíricas para ciertos rangos de ingresos. Otros modelos proponen el agregado de una aversión al riesgo, mostrando también una distribución del tipo Gibbs-exponencial y en ciertos límites de ley de potencia [95].

En general, estos modelos no consideran la relación que existe entre la riqueza de los agentes y la

probabilidad de que interactúen, a pesar de que puede resultar determinante en la distribución el incluir restricciones en las interacciones, como por ejemplo considerar que agentes con riquezas semejantes tienden a interactuar entre ellos. Este factor fué introducido en el modelo propuesto por Laguna *et al* [53] y más tarde estudiado por Herrera *et al* [4] sobre redes para introducir la noción de localidad de las interacciones.

En este capítulo presentamos nuestro modelo, que toma en cuenta los dos aspectos anteriores, es decir, restricciones sobre las interacciones mediante el uso de umbrales y la localidad de las interacciones. Y como aspecto innovador, nuestro modelo contempla una red dinámica que permite reconexiones entre los agentes de la red en caso de no poderse dar la interacción entre ellos. En la próxima sección se explicará con más detalle el funcionamiento del modelo.

2.1. El Modelo

Se propone un modelo de intercambio económico entre los agentes de una red siguiendo las reglas de interacción del modelo de Herrera *et al* [4]. El modelo está conformado por N agentes, donde el agente i -ésimo posee una riqueza w_i y una aversión al riesgo β_i , con $i = 1 \dots N$. El valor inicial de las riquezas es $w_i(0) = 1 \forall i$ y la aversión al riesgo $\beta_i \in [0, 1]$ se asigna aleatoriamente a cada agente y no cambia durante la simulación. La fracción de riqueza que el agente i está dispuesto a arriesgar en cada transacción es $(1 - \beta_i)$. Cabe destacar que la riqueza w_i de cada agente cambia a medida que la simulación transcurre debido a las diferentes transacciones que se realizan.

El agente i está conectado con un conjunto de agentes vecinos η_i que depende de la topología específica de la red. Se define k_i como el número de vecinos del agente i , determinado por la cantidad de elementos pertenecientes al conjunto η_i , o lo que es lo mismo, su cardinalidad. Por ejemplo, en redes regulares $k_i = \langle k \rangle$, constante para todos los elementos de la red.

En cada instante de tiempo t se seleccionan dos agentes vecinos que intercambien recursos. Para ello se escoge un agente i de forma aleatoria y luego se escoge otro agente j de la vecindad de i , es decir, $j \in \eta_i$, si la diferencia de riqueza entre ellos no sobrepasa un umbral normalizado u_N , se lleva a cabo la transferencia, esto es

$$|w_i(t) - w_j(t)| < u_N \quad (2.1)$$

donde u_N es el umbral normalizado que viene dado por

$$u_N = u \cdot \text{máx}[w_i(t), w_j(t)] \quad 0 \leq u_N \leq 1 \quad (2.2)$$

y u es un parámetro dado. Pero si los agentes i y j escogidos no resultan ser de la misma clase económica,

es decir, que la desigualdad de la ec. (2.1) no se cumple, entonces no se produce interacción y en cambio el agente i se desconecta de j y se reconecta con otro agente escogido aleatoriamente que no esté en su vecindad. Así que el parámetro u y por lo tanto u_N miden el ancho de la clase económica. Nótese que la interacción se da sólo entre agentes vecinos y que pertenezcan al mismo estrato económico.

Adicionalmente se establece que ningún agente puede ganar más de lo que invierta, por lo tanto la cantidad a ser intercambiada es la mínima inversión entre los dos agentes, es decir,

$$dw = \text{mín} [(1 - \beta_i)w_i, (1 - \beta_j)w_j] \quad (2.3)$$

En el modelo existe una probabilidad, $p \geq 1/2$, de favorecer al más pobre de los dos agentes interactuantes, definida como

$$p = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)} \quad (2.4)$$

donde f es un parámetro que va desde $f = 0$, igual probabilidad de favorecer a ambos agentes, hasta $f = 1/2$, máxima probabilidad de favorecer al más pobre. Así, en cada interacción el agente más pobre tiene una probabilidad p de salir favorecido y ganar la cantidad dw y el agente más rico de perderla, mientras que se tiene una probabilidad de $(1 - p)$ de que pase lo contrario.

De esta forma la riqueza total del sistema se conserva, es decir,

$$\Omega = \sum_{i=1}^N w_i(t) = \sum_{i=1}^N w_i(0) \quad \forall t \quad (2.5)$$

El siguiente algoritmo iterativo resume al modelo:

1. Escoger aleatoriamente un agente que llamaremos i .
2. Escoger aleatoriamente entre los vecinos de i otro agente j .
3. Verificar, usando la ec. (2.1), si los dos agentes se encuentran en el mismo nivel económico, de ser así pasar al paso 4 y de no serlo ir al paso 8.
4. Calcular la cantidad dw a intercambiar usando la ec. (2.3).
5. Calcular, usando la ec. (2.4) la probabilidad p .
6. Con probabilidad p agregar la cantidad dw al más pobre entre i y j y restársela al más rico; y con probabilidad $(1 - p)$ hacer lo contrario.
7. Ir al paso 1.
8. Desconectar al agente i de j .
9. Escoger aleatoriamente un agente $b \neq j$ y que no esté en η_i y conectarlo con i .

10. Volver al paso 1.

2.2. Parámetros de Orden

Para capturar y estudiar el comportamiento y la transición de los diferentes comportamientos del sistema, que emergen producto de la dinámica de la red, se requiere introducir algunos parámetros de orden. La longitud característica, el coeficiente de clustering, la distribución de grados y la modularidad, que ya definimos en el capítulo anterior, son algunos de ellos y, como ya vimos, nos permiten caracterizar la red.

Para caracterizar la dinámica de la riqueza, se presentan, en esta sección dos cantidades adicionales: El Coeficiente de Gini \mathcal{G} y la Actividad del sistema \mathcal{A} .

2.2.1. Coeficiente de Gini \mathcal{G}

La curva de Lorenz, que se muestra en la figura 2.1, es una representación gráfica de una función de distribución acumulada de un conjunto de fuentes y se define matemáticamente como la proporción acumulada de los ingresos totales (eje y) que obtienen las proporciones acumuladas de la población (eje x).

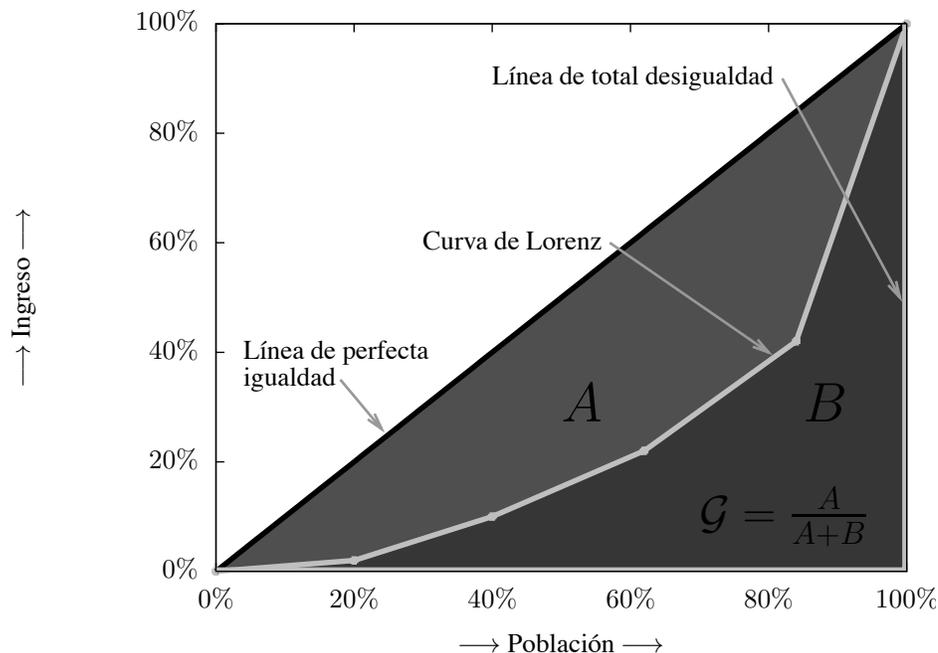


Figura 2.1: Cálculo del Coeficiente de Gini

Estas fuentes pueden ser personas (como en el uso original de la curva de Lorenz), actores, autores, artículos, industrias, etc. Los economistas, sociólogos o físicos generalmente utilizan una curva de Lorenz

basados en la data de los ingresos de un grupo, una ciudad o un país para calcular el coeficiente de Gini. El valor del coeficiente de Gini $\mathcal{G} \in [0, 1]$ muestra el grado de desigualdad de ingresos en una distribución, donde $\mathcal{G} = 1$ significa completa desigualdad y $\mathcal{G} = 0$ completa igualdad.

Para conocer el coeficiente de Gini de una distribución se calcula la razón entre el área bajo la curva de Lorenz de la distribución y el área bajo la curva correspondiente a la distribución uniforme, es decir, de la igualdad perfecta (ver figura 2.1).

En esta tesis se calcula el coeficiente de Gini \mathcal{G} en el estado asintótico del sistema ($t \rightarrow \infty$) que viene dado por

$$\mathcal{G} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |w_i(T) - w_j(T)|}{2N^2\Omega} \quad (2.6)$$

donde $w_i(T)$ es la riqueza del agente i en un tiempo T suficientemente grande, N es el número total de agentes que posee el sistema y Ω es la riqueza total del sistema.

2.2.2. Actividad del Sistema \mathcal{A}

Otro parámetro de orden que se utiliza para caracterizar el comportamiento del sistema es la *Actividad del Sistema*, basada en la definición de Ito y Kaneco [96] y en la posterior adaptación hecha por Herrera *et al* [4]. La actividad será utilizada en este trabajo como una medida de los cambios de riqueza promedio de cada elemento a través del tiempo y viene dada por

$$\alpha(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |w_t^i - w_{t-1}^i| \quad (2.7)$$

Para tener una mejor visión de la actividad del sistema, definimos la *actividad acumulada* \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \sum_{t=1}^T \alpha(t) \quad (2.8)$$

donde T es el tiempo de simulación (suficientemente largo).

2.3. Resultados del Modelo

Las simulaciones se llevaron a cabo sobre una red aleatoria tipo Erdős-Rényi de tamaño $N = 10^4$ agentes. Cada agente tiene $k = 16$ vecinos, una riqueza inicial $w_i(0) = 1 \forall i$ y una aversión al riesgo $\beta_i \in [0, 1]$ uniformemente distribuida sobre todos los agentes. En general, la escogencia de los valores de los parámetros dinámicos se basó en la actividad del sistema, es decir, no se tomaron en cuenta aquellos

valores en los que la actividad estaba muy próxima a cero en el estado asintótico. El umbral se varió entre $u \in [0.6, 1]$ y la probabilidad de favorecer al más pobre para $f \in [0, 0.5]$.

2.3.1. Estimación del tiempo de simulación.

Las simulaciones, luego de un transiente, llegan a un estado asintótico donde la riqueza ha sido redistribuida debido a las interacciones. Las figuras 2.2a y 2.2b muestran la evolución temporal del índice de Gini y la actividad acumulada para $u = 0.90$ y distintos valores de f . En ella se aprecia cómo el sistema llega al estado asintótico al rededor de $T = 10^8$ iteraciones.

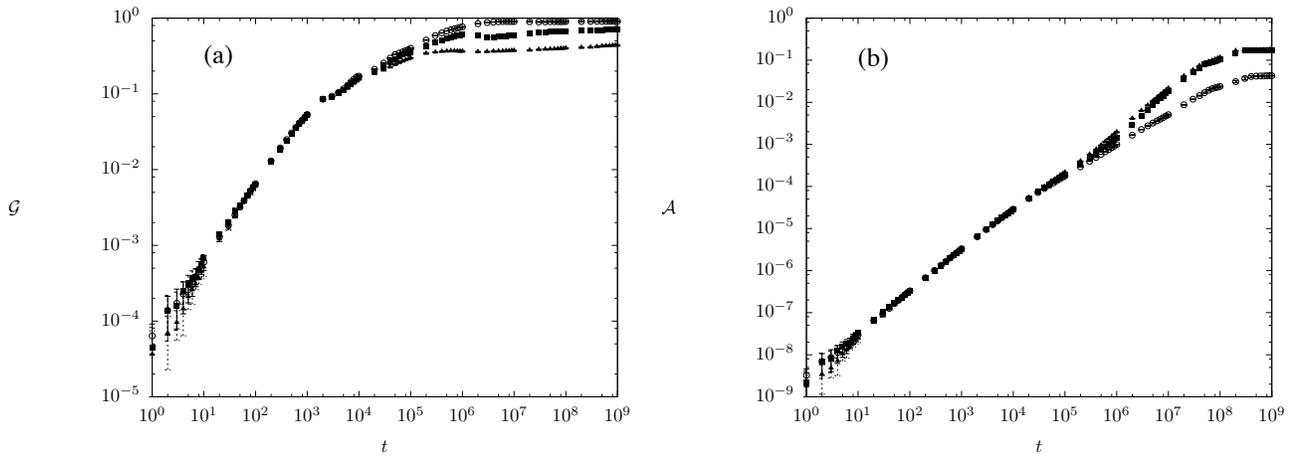


Figura 2.2: (a) Promedio de cinco realizaciones de la variación del índice de Gini del sistema en función del número de iteraciones. (b) Variación de la actividad del sistema en función del número de iteraciones. Círculos $f = 0.1$, cuadros $f = 0.3$ y triángulos $f = 0.5$.

Para pocas iteraciones se observan valores casi nulos del índice de Gini así como de la actividad. En el primer caso, esto se debe a que la distribución inicial de riqueza es homogénea, todos los agentes tienen la misma riqueza y no hay la suficiente actividad como para haberse producido una redistribución. En el segundo caso, está presente el hecho de que la actividad es acumulativa, empezando en 0 y teniendo siempre una tendencia al incremento.

2.3.2. Caracterización topológica de la red económica.

Para caracterizar la estructura de la red que se forma en el estado estacionario, fijamos $T = 10^9$ y estudiamos los diferentes comportamientos del sistema que emergen producto de la misma dinámica. Además del índice de Gini y la actividad del sistema, se midieron, el coeficiente de clustering, la longitud característica, la modularidad, el tamaño del subgrafo más grande y la distribución de grados de la red en el estado asintótico del sistema.

El subgrafo más grande que se forma al realizar las simulaciones posee características de una red aleatoria, exhibe una baja longitud característica y un bajo coeficiente de clustering con muy poca variación a lo largo de todos los valores de u y f en términos comparativos con el tamaño del grafo, así lo muestran las gráficas de las figuras 2.3a y 2.3b.

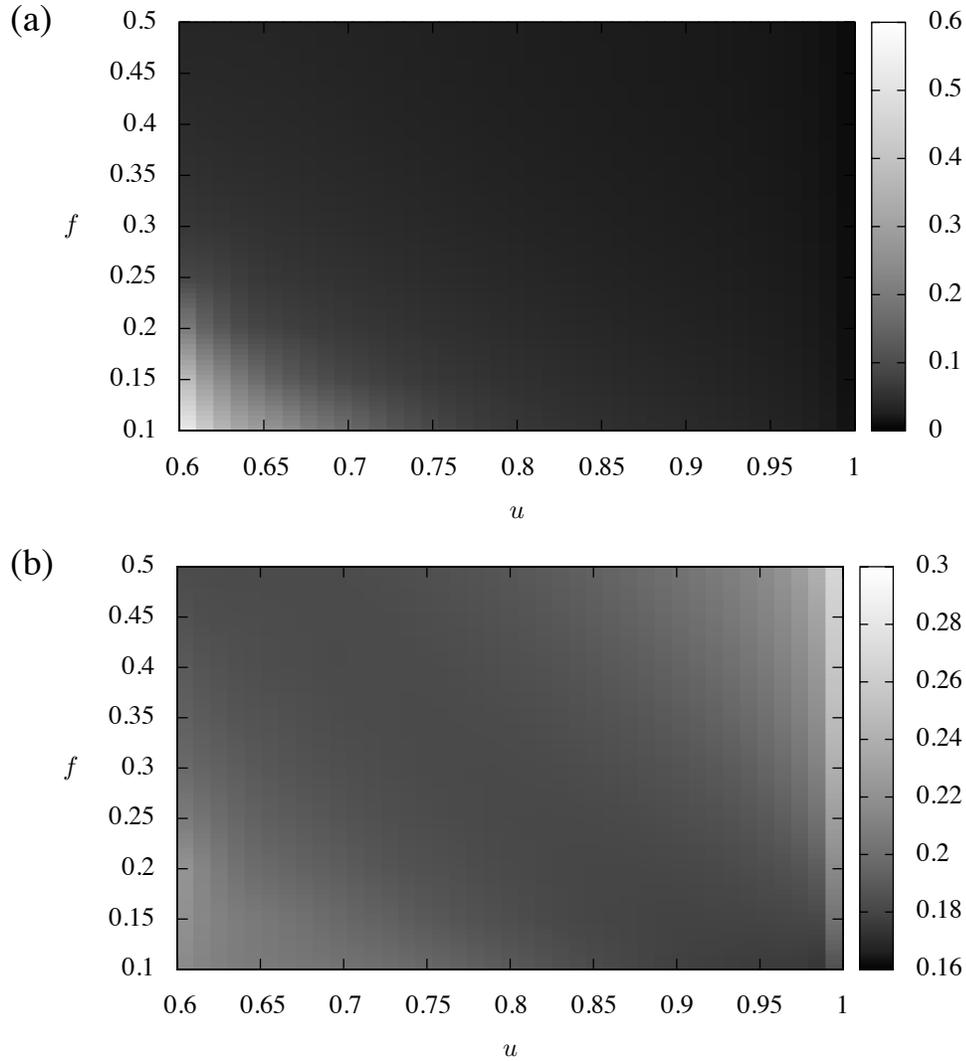


Figura 2.3: (a) Coeficiente de clustering en función de u y f . (b) Longitud característica normalizada promedio de la componente más grande en función de u y f .

Las distribuciones de grados de la red para $u < 1$ mostradas en la figura 2.4 se aproximan a una distribución típica de redes aleatorias Erdős Rényi, en las que la mayoría de los nodos tienen un grado intermedio y los demás nodos tienen grados distribuidos al rededor del promedio. Cabe destacar que a medida que $u \rightarrow 1$ y $f \rightarrow 0.5$ la distribución de grados se va pareciendo más a una distribución de redes libres de escala, en las que la mayoría de los nodos tienen baja conectividad y unos pocos están altamente conectados. Es notable el cambio de la distribución al incrementar el umbral, a pesar de que el incremento

es bastante bajo la red cambia considerablemente. Esto ocurre gracias a que en $u = 1$ existe una gran cantidad de agentes que pueden intercambiar riqueza sin restricciones.

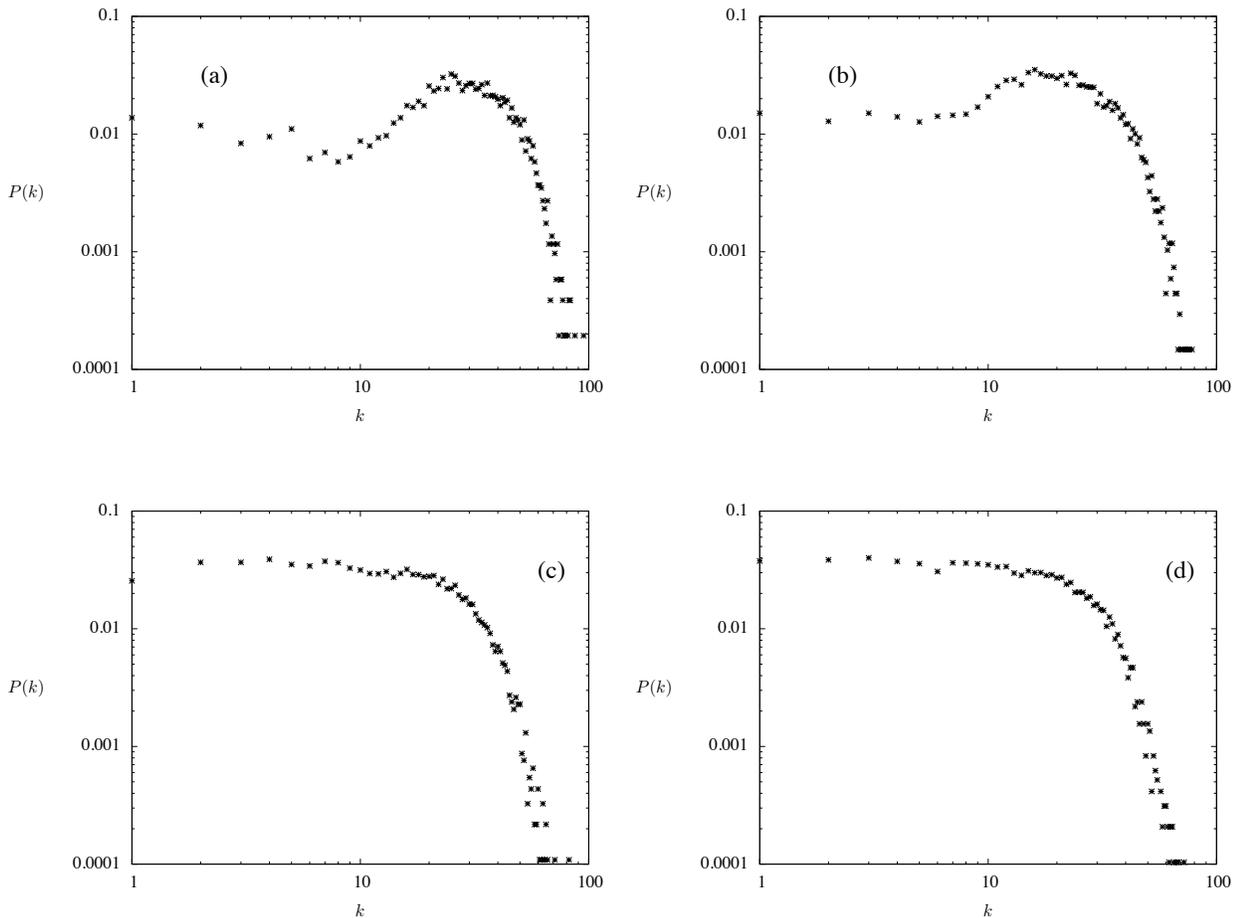


Figura 2.4: Distribución de grados. (a) para una red con $u = 0.98$ y $f = 0.4$, 5160 nodos conexos. (b) para una red con $u = 0.98$ y $f = 0.5$, 6728 nodos conexos. (c) para una red con $u = 1$ y $f = 0.4$, 9121 nodos conexos. (d) para una red con $u = 1$ y $f = 0.5$, 9600 nodos conexos.

Para detectar la formación de comunidades o grupos en la red es necesario el cálculo de la modularidad del grafo, cantidad que fué mencionada en el capítulo 1. La figura 2.5 muestra estos valores en función del umbral u y de la probabilidad de favorecer al más pobre f para $T = 10^9$. En general los valores de la modularidad en nuestra red son bajos, sin embargo existen dos regiones en las que el valor de Q es significativamente mayor, lo que indica la existencia de comunidades para estos valores de parámetros.

La primera región se presenta para valores de la probabilidad de favorecer al más pobre pequeños, esto es $f < 0.3$, y se va haciendo más angosta a medida que aumenta el valor del umbral de interacción u . Por su parte, la segunda región corresponde a valores de $u \approx 1.0$ donde crece la modularidad Q a medida que f aumenta hasta que en $u = 1.0$; $f = 0.5$ llega a un máximo.

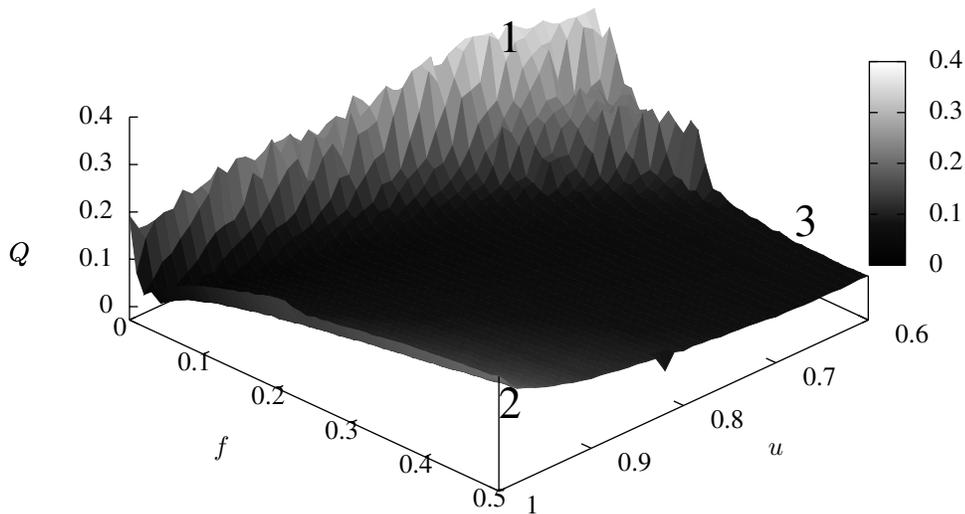


Figura 2.5: Modularidad de la red en función de u y f .

Con el fin de comprender el surgimiento de comunidades en las dos regiones y localizar en el espacio de parámetros (u, f) los rompimientos y transiciones de la estructura de la red, estudiemos el tamaño del subgrafo más grande S que se forma en ella. La figura 2.6 muestra dichos resultados para diferentes valores de u y f . El gráfico exhibe un comportamiento que guarda relación con el de la modularidad (figura 2.5). Tenemos dos regiones que revelan que la componente más grande del grafo es del orden del tamaño del sistema, es decir, $S \approx 1$; separadas por una tercera región donde la componente más grande es mucho más pequeña. La primera región se encuentra para valores de f relativamente bajos y coincide con la primera región donde se presenta el máximo de modularidad observado en la figura 2.5. La segunda región donde la red es mayormente conexas se encuentra en valores de u y f lo suficientemente grandes como para que existan muy pocas desconexiones entre los agentes y en consecuencia el valor de S crece.

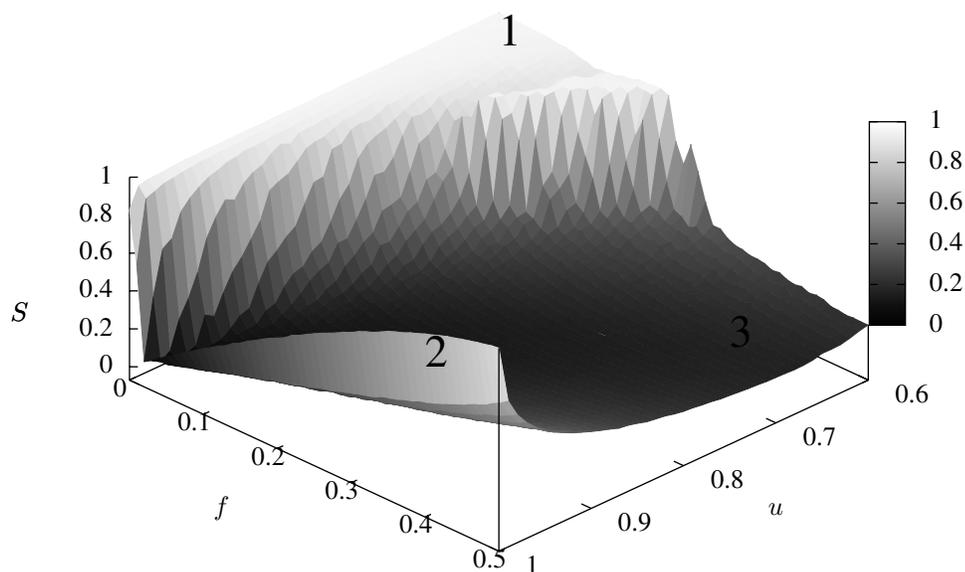


Figura 2.6: Tamaño de la fracción de nodos más grande de la red en función de u y f .

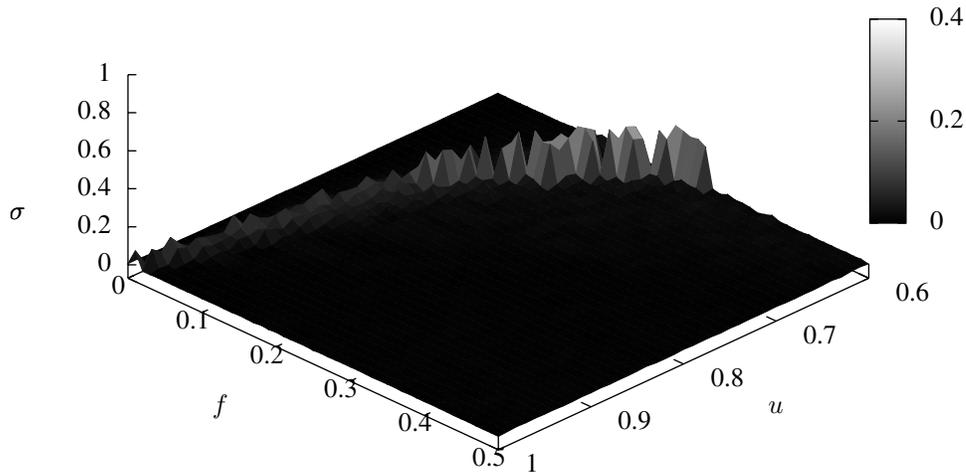


Figura 2.7: Desviación estándar σ de la componente más grande de la red en el espacio de parámetros de u y f .

La existencia de tres regiones bien marcadas y coincidentes en los gráficos de la modularidad Q y la componente más grande S , además de un aumento considerable en la desviación estándar de S sugieren una transición y un cambio en la estructura de la red a partir de ciertos valores críticos. En este sentido la figura 2.8 muestra el diagrama de fases de Q y S en el espacio de parámetros (u, f) .

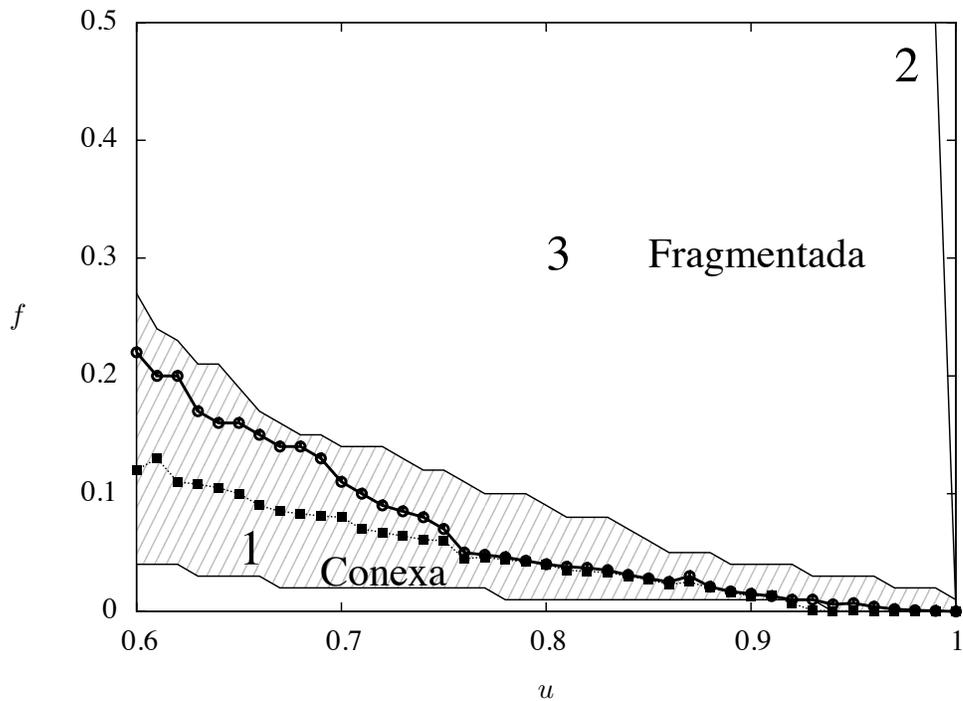


Figura 2.8: Diagrama de fases de Q y S en el espacio de parámetros de u y f . La región sombreada corresponde a redes con modularidad Q alta. La curva segmentada con cuadros corresponde al máximos absoluto de Q . La curva continua con círculos corresponde a la frontera entre redes conexas ($S \approx 1$) y redes fragmentadas ($S < 1$)

En ella se muestran las transiciones de Q y S para el espacio de parámetros de u y f . La línea continua representa la frontera entre la región donde las redes son conexas ($S \approx 1$) y fragmentadas ($S < 1$). Por debajo de la curva tenemos redes conexas, en cambio por encima las redes se fragmentan.

Nótese que por debajo de la transición de S está el máximo absoluto de la modularidad Q , representado por la curva segmentada. Esto sugiere que para valores fijos del umbral u y al aumentar la probabilidad de favorecer al más pobre, el grafo forma comunidades muy poco conectadas entre ellas justo antes de romperse. También se aprecia que por encima de la transición de S existe una región de máximos relativos de la modularidad sugiriendo que el rompimiento de la red generó comunidades no conectadas entre ellas.

2.3.3. Influencia de la topología en la dinámica de la red.

El objetivo más importante de todo el estudio es predecir cambios en la dinámica del sistema producto de la coevolución entre los estados y la estructura de la red. En este sentido se hicieron mediciones del índice de Gini \mathcal{G} y de la actividad del sistema \mathcal{A} en el espacio de parámetros de u y f . En la figura 2.9 se muestra la actividad del sistema en función del umbral y la probabilidad de favorecer al más pobre.

A medida que existe más libertad de intercambio económico, es decir, a medida que u se incrementa, también lo hace la actividad del sistema, sin verse afectada significativamente por la estructura de la red.

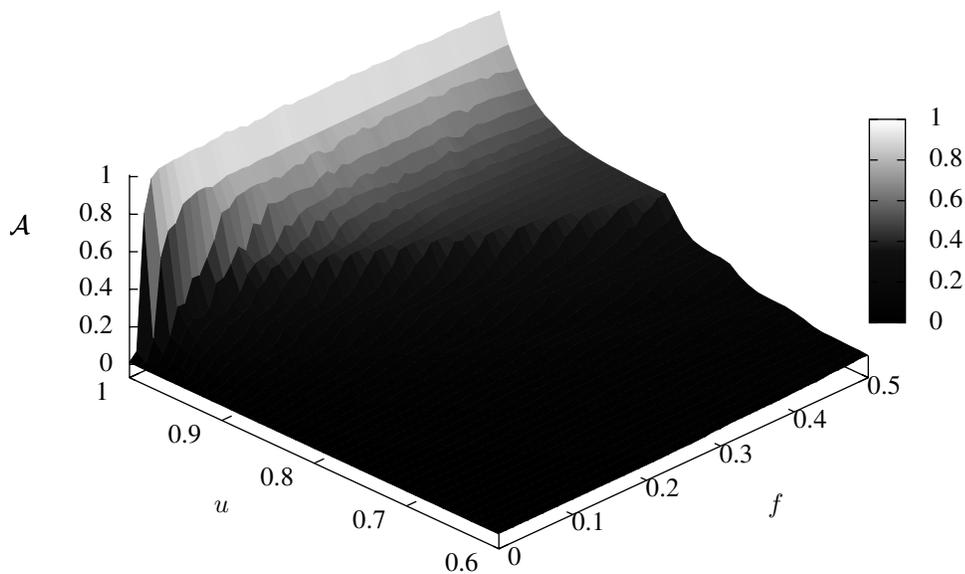


Figura 2.9: Actividad acumulada normalizada del sistema para todo el espacio de parámetros estudiado.

Por su parte la figura 2.10 muestra el índice de Gini en el espacio de parámetros (u, f) . Como es de esperarse se percibe una disminución de \mathcal{G} a medida que u y f aumentan, por otra parte, se corrobora el hecho de que mayor actividad genera un sistema más equitativo.

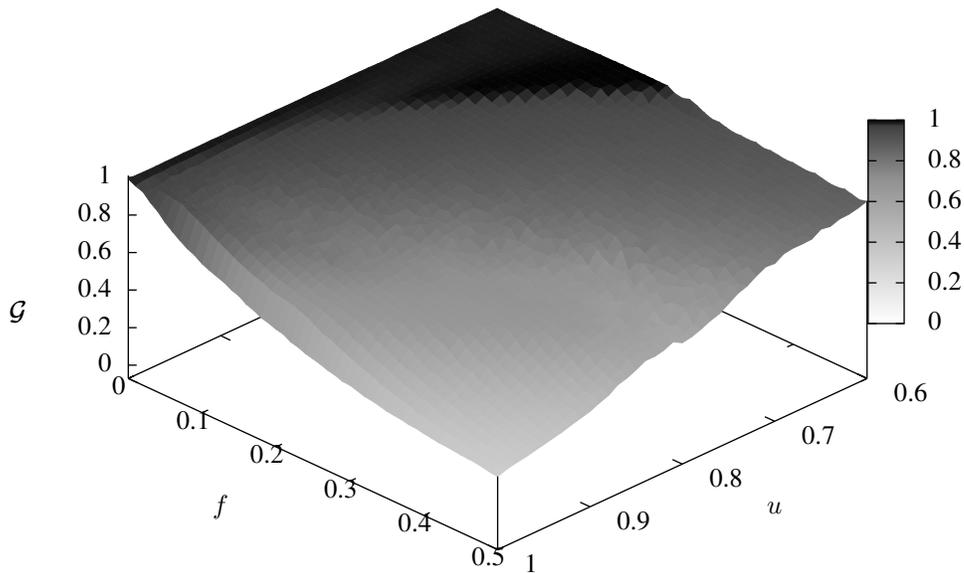


Figura 2.10: Índice de Gini para todo el espacio de parámetros estudiado.

Cabe destacar que para valores pequeños de f el índice de desigualdad en el sistema es máximo, es decir, $\mathcal{G} \approx 1$ y no es sino a partir de $u \gtrsim 0.75$ y $f \gtrsim 0.2$ que se empiezan a obtener valores del índice de Gini que se ajustan a la realidad de varios países y del mundo en general, a continuación se muestra un mapa esquemático de países según su igualdad de nivel de ingresos.



Figura 2.11: Mapa esquemático de países según su índice de Gini. Fuente: Informe de la ONU sobre el desarrollo humano 2007/2008.

La desigualdad mundial se estima que es de 0.63, donde “la renta del 20% de las personas más ricas del mundo es 28.7 veces más elevada que la del 20% más pobre” [97].

La figura 2.10 muestra la región con alto índice de Gini y cómo a partir de ciertos valores de u y f el

índice comienza a experimentar un decaimiento sostenido. Si observamos dicho gráfico con detenimiento, nos daremos cuenta de que guarda cierta relación con los gráficos de las figuras 2.5 y 2.6 de la modularidad Q y de la componente más grande S respectivamente. Esto nos invita a pensar en un cambio en los valores del índice de Gini producto de la topología de la red. La figura 2.12 muestra el diagrama de fases para S , Q y el índice de Gini \mathcal{G} .

Al observar el diagrama de fases de la figura 2.12 se hace muy clara la gran relación que existe entre la fragmentación de la red y el índice de Gini. Las transiciones de \mathcal{G} y S coinciden casi perfectamente, esto es, el rompimiento del grafo en comunidades más pequeñas estimula la disminución del índice de Gini, es decir, un sistema económico fragmentado en grupos de agentes es más equitativo en términos de riqueza, es decir $\mathcal{G} < 1$, que un sistema formado por un gran grupo de agentes totalmente conectados donde $\mathcal{G} \approx 1$.

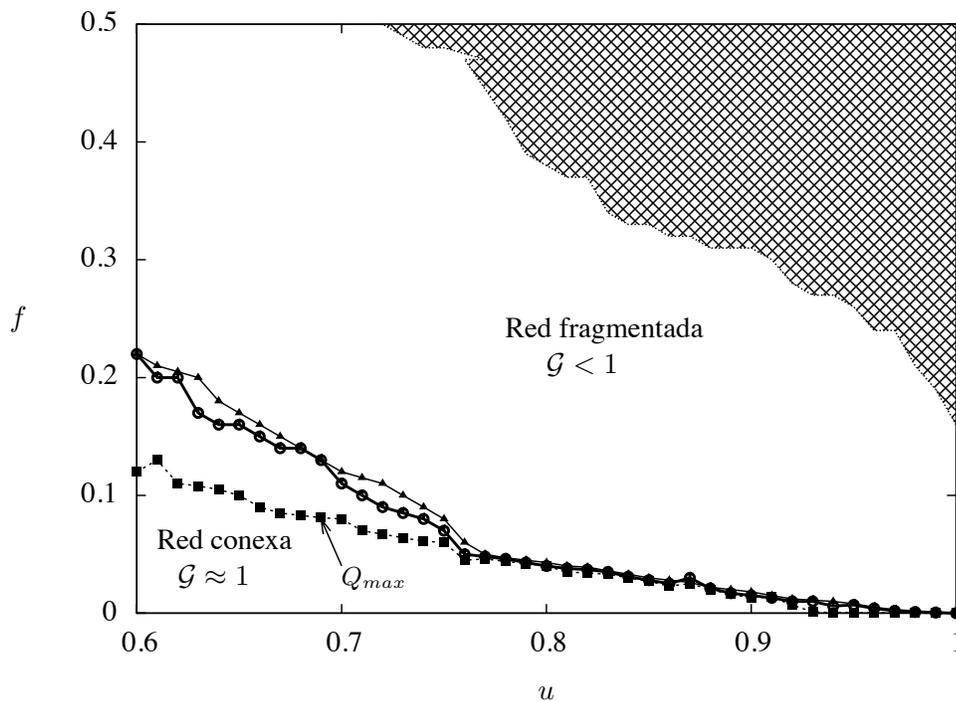


Figura 2.12: Diagrama de fases de \mathcal{G} y S en el espacio de parámetros de u y f . Transición de S (círculos). Transición de \mathcal{G} (triángulos). La curva segmentada y con cuadros corresponde al máximo absoluto de Q . En el área sombreada los valores de \mathcal{G} son similares a los de la realidad.

Conclusiones

El concepto de un modelo de economía estratificada, en el que los agentes están limitados a interactuar sólo con su misma clase económica fué incluido en el trabajo de Laguna, Gusman e Iglesias [53] y más tarde ampliado con la idea de localidad de Herrera *et al* [4]. Esta tesis se basó en esos dos trabajos, de los que se tomó un sistema estratificado y además localizado, agregando una novedad, si la transacción entre agentes no puede ser llevada a cabo producto de una diferencia de riquezas mayor a la permitida, estos dos agentes se desconectan y uno de ellos se conecta con otro agente escogido aleatoriamente. Esto con el fin de hacer la red dinámica y de simular el hecho de que los individuos o empresas con los que un agente económico interactúa en el mundo real es dinámico y depende de las mismas interacciones.

En nuestro modelo se midieron cantidades como el índice de Gini y la actividad del sistema, llegando a deducciones similares a las de los trabajos de Laguna y Herrera. Hay una clara dependencia del índice de Gini con la actividad del sistema. Cuando no se realiza una cantidad considerable de transacciones, la riqueza no es redistribuida y el índice de Gini alcanza valores muy altos, y viceversa.

Por otro lado, se caracterizó la red resultante, la cual mostró valores del coeficiente de clustering y de la longitud característica bajos para casi todo el rango de parámetros. La distribución de grados resultó típica de redes aleatorias para $u < 1$, con la mayoría de los nodos con un grado intermedio y los demás distribuidos al rededor de ese valor promedio; sin embargo, para valores máximos de u y f la distribución de grados mresultó ser una red libre de escala.

Cabe destacar que a medida que el umbral para el intercambio económico crece, la actividad también lo hace y todas las cantidades que caracterizan a la red mostraban una red más organizada, pero sin dejar de tener longitud característica y coeficiente de clustering pequeños. Como en estudios anteriores, el parámetro f , que simula la acción reguladora del estado, causó de manera esperada un incremento en la actividad del sistema además de un sistema mucho más equitativo.

No obstante, hubo resultados bastante importantes al evaluar la influencia de topología de la red en la dinámica del sistema. Se detectó un valor crítico de f para la transición del tamaño del subgrafo más grande que varia con u . La modularidad mostró que la ruta que sigue el sistema desde una red conexas a una fragmentada pasa por la formación de comunidades.

Por último, para todos los valores del umbral u el índice de Gini mostró disminuciones repentinas relacionadas directamente con el tamaño del subgrafo más grande, lo que sugiere que la formación de grupos o comunidades que rompen la red genera un sistema más equitativo. Como contraparte, cuando S se aproximaba al tamaño de la red y $u \neq 1$, se tiene que $\mathcal{G} \approx 1$, es decir, un gran cúmulo de agentes tienen riqueza cercana a cero mientras uno o muy pocos elementos poseen toda la riqueza del sistema.

Bibliografía

- [1] Mantegna R.N. “Hierarchical structure in financial markets”. *European Physical Journal B*, tomo 11:193–197, 1999.
- [2] Iglesias J.R., Goncalves S., Abramson G. y Vega J.L. “Correlation between risk aversion and wealth distribution”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2003.
- [3] Pianegonda S., Iglesias J.R., Abramson G. y Vega J.L. “Wealth redistribution with conservative exchanges”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, tomo 322:667–675, 2003.
- [4] Herrera J.L., Cosenza M.G. y Tucci K. “A model of economic exchange in a stratified society with local interactions”. *Revista Científica UNET*, tomo 21:8, 2009.
- [5] Vera de Serio V. y Balacco H. “Reunión anual, 32, bahía blanca”. En A.A. de Economía Política, editor, “Dinámica no lineal en economía. Un análisis introductorio”, Universidad Nacional del Sur. Departamento de Economía; Asociación Argentina de Economía Política, 1997.
- [6] Gabszewicz J. *Strategic Interaction And Markets*. Oxford scholarship online. Oxford University Press, 1999.
- [7] Hausman D. *The Inexact and Separate Science of Economics*. Cambridge University Press, 1992.
- [8] Meyers R. *Finance, Econometrics and System Dynamics*. Springer, 2010.
- [9] Savoiu G.G. y Iorga, Siman I. “Some relevant econophysics, moments of history, definitions, methods, models and new trends”. *Romanian Economic Business Review*, tomo 3:29–41, 2008.
- [10] Bouchaud J.P., Sornette D., Walter C. y Aguilar J.P. “Taming large events: Optimal portfolio theory for strongly fluctuating assets”. Informe técnico, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1995.
- [11] Press S.J. “A compound events model for security prices”. *The Journal of Business*, tomo 40, 1967.

- [12] Blattberg R.C. y Gonedes N.J. “A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices”. *The Journal of Business*, tomo 47:244–80, 1974.
- [13] Teichmoeller J. “A note on the distribution of stock price changes”. *Journal of the American Statistical Association*, tomo 66:282–284, 1971.
- [14] Officer R.R. “The distribution of stock returns”. *Journal of the American Statistical Association*, tomo 67:807–812, 1972.
- [15] Peters E. *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. Wiley Finance Editions. Wiley, 1996.
- [16] Scheinkman J.A. y Lebaron B. “Nonlinear dynamics and stock returns”. *The Journal of Business*, tomo 62:311–37, 1989.
- [17] Hsieh D.A. “Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets”. *Journal of Finance*, tomo 46:1839–77, 1991.
- [18] Barnett W.A. y Serletis A. “Martingales, nonlinearity, and chaos”. *Econometrics*, EconWPA, 1998.
- [19] Mirowski P. *More Heat Than Light: Economics As Social Physics, Physics As Nature’s Economics*. Historical Perspectives on Modern Economics. Cambridge University Press, 1991.
- [20] Mantegna R.N. “Levy walks and enhanced diffusion in milan stock exchange”. *Physica A*, tomo 179:232–242, 1991.
- [21] Bouchaud J.P. y Cont R. “A langevin approach to stock market fluctuations and crashes”. *EUROPEAN PHYSICS JOURNAL B*, tomo 6:543–550, 1998.
- [22] Gopikrishnan P., Plerou V., Amaral L., M. M. y Stanley H. “Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices”. *Phys. Rev.*, tomo 60:5305–5316, 1999.
- [23] Farmer J.D. y Joshi S. “The price dynamics of common trading strategies”. Working papers, Santa Fe Institute, 2000.
- [24] Sornette D. *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton paperbacks. Princeton University Press, 2003.
- [25] Wu M.C., Huang M.C., Yu H.C. y Chiang T.C. “Phase distribution and phase correlation of financial time series”. *Finance*, EconWPA, 2005.

- [26] Farmer J.D. “Market force, ecology, and evolution”. *INDUSTRIAL AND CORPORATE CHANGE*, tomo 11:895–953, 2002.
- [27] Potters M., Cont R. y Bouchaud J.P. “Financial markets as adaptative ecosystems”. *Europhys. Lett.*, tomo 41:239–244, 1998.
- [28] Ghashghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P. y Dodge Y. “Turbulent cascades in foreign exchange markets”. *Nature*, tomo 381:767–770, 1996.
- [29] Mantegna R.N. y Stanley H.E. “Turbulence and financial markets”. *Nature*, tomo 383:587–588, 1996.
- [30] Mantegna R.N. y Stanley H.E. “Physics investigation of financial markets”, 1997. Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”.
- [31] Bak P., Chen K., Scheinkman J.A. y Woodford M. “Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics”. *Ricerche Economiche*, tomo 47:3–30, 1993.
- [32] Canning D., Amaral L., Lee Y., Meyer M. y Stanley H.E. “A power law for scaling the volatility of gdp growth rates with country size”. *Economics Letters*, tomo 60:335–341, 1998.
- [33] Stanley M.H.R., Amaral L., Buldyrev S.V., Havlin S., Leschhorn H., Maass P., Salinger M.A. y Stanley H.E. “A power law for scaling the volatility of gdp growth rates with country size”. *Nature*, tomo 379:804–806, 1996.
- [34] Takayasu H. y Okuyama K. “Country dependence on company size distributions and a numerical model based on competition and cooperation”. *Fractals An Interdisciplinary Journal On The Complex Geometry Of Nature*, tomo 6:67–79, 1998.
- [35] Gabaix X. “Zipf,Ãs law for cities: An explanation”. *Quarterly Journal of Economics*, tomo 114:739–768, 1999.
- [36] Plerou V., Amaral L.A., Gopikrishnan P., Meyer M. y Stanley H.E. “Similarities between the growth dynamics of university research and of competitive economic activities”. *Nature*, tomo 400:433–437, 1999.
- [37] Levy M. y Solomon S. “New evidence for the power-law distribution of wealth”. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, tomo 242:90–94, 1997.
- [38] Dragulescu A. y Yakovenko V.M. “Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2001.

- [39] Chatterjee A., Yarlagadda S. y Chakrabarti B. *Econophysics of Wealth Distributions: Econophysics-Kolkata I*. New Economic Windows. Springer, 2005.
- [40] Chen S.H. y Li S.P. “Econophysics: Bridges over a turbulent current”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2011.
- [41] Zhuang X.t. y Huang X.y. “Scale theory and empirical research in the securities market”. *Systems Engineering-theory and Practice*, tomo 3:1–8, 2003.
- [42] Coelho R., Richmond P., Hutzler S. y Lucey B.M. “A random-matrix-theory-based analysis of stocks of markets from different countries”. *Advances in Complex Systems (ACS)*, tomo 11:655–668, 2008.
- [43] Canessa E. “Economics mapping to the renormalization group scaling of stock markets”. Informe técnico, arXiv.org, 2000. doi:10.1007/PL00011113.
- [44] Jackson M.O. y Watts A. “The evolution of social and economic networks”. *Journal of Economic Theory*, tomo 106:265–295, 1999.
- [45] Topa G. “Social interactions, local spillovers and unemployment”. Working papers, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, 1997.
- [46] Dodds P.S., Muhamad R. y Watts D.J. “An experimental study of search in global social networks”. *Science*, tomo 301:827–829, 2003.
- [47] Martins T., Araújo T., Santos M. y Aubyn M. “Network effects in a human capital based economic growth model”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2009.
- [48] Kirman A.P. “The economy as an evolving network”. *Journal of Evolutionary Economics*, tomo 7:339–353, 1997.
- [49] Chakraborty A. “Distributions of money in model markets of economy”. *Int. J. Mod. Phys. C*, tomo 13:1315. 9 p, 2002.
- [50] Das A. y Yarlagadda S. “Analytic treatment of a trading market model”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2003.
- [51] Manolova P., Tong C.L. y Deissenberg C. “Money and exchange in an economy with spatially differentiated agents”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, tomo 324:445–453, 2003.
- [52] Manolova P., Lai-Tong C. y Deissenberg C. “Real taxation and production in a monetary economy with spatially differentiated agents”. Modeling, computing, and mastering complexity 2003, Society for Computational Economics, 2005.

- [53] Laguna M.F., Gusman S.R. y Iglesias J.R. “Economic exchanges in a stratified society: End of the middle class?” *Quantitative finance papers*, arXiv.org, 2005.
- [54] Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V. y Stanley H.E. “A theory of power-law distributions in financial market fluctuations.” *Nature*, tomo 423:267–270, 2003.
- [55] Dussutour A., Fourcassié V., Helbing D. y Deneubourg J.L. “Optimal traffic organization in ants under crowded conditions”. *Nature*, tomo 428:70–73, 2004.
- [56] Lind P.G. “The network approach: basic concepts and algorithms”. *Physics and society papers*, arXiv.org, 2008.
- [57] Ben-Naim E., Frauenfelder H. y Toroczkai Z. *Complex Networks*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2010.
- [58] Boorman S.A. “A Combinatorial Optimization Model for Transmission of Job Information Through Contact Networks”. *Bell Journal of Economics*, tomo 6:216–249, 1975.
- [59] Montgomery J.D. “Social networks and labor-market outcomes: Toward an economic analysis”. *American Economic Review*, tomo 81:1408–1418, 1991.
- [60] Ellison G. y Fudenberg D. “Word-of-Mouth Communication and Social Learning”. *The Quarterly Journal of Economics*, tomo 110:93–125, 1995.
- [61] Iacobucci D. y Hopkins N. “Modeling dyadic interactions and networks in marketing”. *Journal of Marketing Research*, tomo 29:5, 1992.
- [62] Basu K., Foster J., of the Senior Vice President W.B.O. y Chief Economist D.E. *On measuring literacy*. Número no. 1997 en Policy research working papers. World Bank, Office of the Senior Vice President, Development Economics, 1998.
- [63] Glaeser E.L., Sacerdote B. y Scheinkman J.A. “Crime and social interactions”. *Quarterly Journal of Economics*, tomo 111:507–548, 1996.
- [64] Wang P. y Wen Q. “Network bargaining”. *mimeo*, páginas 507–548, 1998.
- [65] Newman M., Barabási A. y Watts D. *The Structure And Dynamics of Networks*. Princeton Studies in Complexity. Princeton University Press, 2006.
- [66] Bornholdt S. y Schuster H.G. *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet*. Wiley-VCH, 2003.

- [67] Reka A. y Barabási. “Statistical mechanics of complex networks”. *Rev. Mod. Phys.*, tomo 74:47–97, 2002.
- [68] Dorogovtsev S.N. y Mendes J.F.F. “Evolution of networks”. *Advances in Physics*, tomo 51:1079–1187, 2002.
- [69] Newman M.E.J. “The structure and function of complex networks”. *SIAM REVIEW*, tomo 45:167–256, 2003.
- [70] Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M. y Hwang D. “Complex networks: Structure and dynamics”. *Physics Reports*, tomo 424:175–308, 2006.
- [71] Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V. y Mendes J.F.F. “Critical phenomena in complex networks”. *Reviews of Modern Physics*, tomo 80:1275–1335, 2008.
- [72] Udry J., Bearman P. y Harris K. “Add Health program”. PO1- HD31921.
- [73] Battiston S. “From graph theory to models of economic networks . a tutorial”. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, tomo 613:23–63, 2009.
- [74] Gallegati M. y Kirman A. *Beyond the representative agent*. Edward Elgar, 1999.
- [75] Varian H. *Intermediate microeconomics: a modern approach*. WW Norton & Co., 2006.
- [76] Farmer J., Shubik M. y Smith E. “Economics: the next physical science?”, 2005.
- [77] DeCastro D.J. y Tucci K. “Chaotic synchronization on directed networks”. *Journal of Physics: Conference Series*, tomo 246:012010, 2010.
- [78] Hellsten I., Lambiotte R., Scharnhorst A. y Ausloos M. “Self-citations, co-authorships and keywords: A new approach to scientists’ field mobility?” *Scientometrics*, tomo 72:469–486, 2007.
- [79] Gonzalez M.C. y Barabasi A.L. “Complex networks: From data to models”. *Nature Physics*, tomo 3:224–225, 2007.
- [80] Fortunato S. y Castellano C. “Community structure in graphs”. *Networks*, tomo 814:42, 2007.
- [81] Girvan M. y Newman M.E. “Community structure in social and biological networks.” *Proc Natl Acad Sci U S A*, tomo 99:7821–7826, 2002.
- [82] Pons P. y Latapy M. “Computing communities in large networks using random walks”. *J. of Graph Alg. and App. bf*, tomo 10:284–293, 2004.

- [83] Newman M.E.J. “Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices”. *Physical Review E*, tomo 74:036104+, 2006.
- [84] Bollobas B., Fulton W., Katok A., Kirwan F., Sarnak P., Simon B. y Totaro B. *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2001.
- [85] Erdős P. y Rényi A. “On random graphs I”. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, tomo 6:290, 1959.
- [86] Travers J. y Milgram S. “An experimental study of the small world problem”. *Sociometry*, tomo 32:425–443, 1969.
- [87] Watts D.J. y Strogatz S.H. “Collective dynamics of “small-world” networks”. *Nature*, tomo 393:440–442, 1998.
- [88] Barabasi A.L. y Albert R. “Emergence of scaling in random networks”. *Science (New York, N.Y.)*, tomo 286:509–512, 1999.
- [89] Pareto V. *Cours d’Economie Politique*. Droz, 1896.
- [90] Gibrat R. *Les inégalités économiques*. Libraire du Recueil Siray, Paris France, 1931.
- [91] Clementi F. y Gallegati M. “Pareto’s law of income distribution: Evidence for germany, the united kingdom, and the united states”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2006.
- [92] Clementi F., Gallegati M. y Kaniadakis G. “A k-generalized statistical mechanics approach to income analysis”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2009.
- [93] Clementi F. y Gallegati M. “Power law tails in the italian personal income distribution”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2004.
- [94] Pianegonda S. y Iglesias J.R. “Inequalities of wealth distribution in a conservative economy”. Quantitative finance papers, arXiv.org, 2003.
- [95] Iglesias J.R., Gonçalves S., Pianegonda S., Vega J.L. y Abramson G. “Wealth redistribution in our small world”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, tomo 327:12–17, 2003.
- [96] Ito J. y Kaneko K. “Spontaneous structure formation in a network of chaotic units with variable connection strengths”. *Phys. Rev. Lett.*, tomo 88:028701, 2001.
- [97] Lafuente Lechuga M., Carmona A.L. y Sánchez Martínez A. “XIV jornadas de ASEPUMA y II encuentro internacional”. En “Análisis de la evolución de la desigualdad económica mundial en los últimos años”, 2005.