UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
VENEZUELA

akademia

tesis universitaria en cd rom

Consejo de Publicaciones

Título de la obra: **EL TEOREMA DE CATEGORÍA DE BAIRE Y APLICACIONES**

Autor: Wilman **Brito**

Editado por el Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes
Av. Andrés Bello, antiguo CALA. La Parroquia
Mérida, estado Mérida. Venezuela
Telefax (+58274) 2713210, 2712034, 2711955
e-mail cpula@ula.ve
http://www.ula.ve/cp

1ª edición en CD-Rom. 2011

Diseño de portada: INNOVA. Diseño y Tecnología C.A.

Mérida, Venezuela, 2011

El Teorema de Categoría de Baire
y
Aplicaciones

Wilman Brito

DEDICATORIA

A *Claudia*, mi esposa.

A mis hijos:

Sebastian, Rubén, Noelia, Diego, Andrea y *Fabiola*,

y a la memoria de mi amigo

Diómedes Bárcenas.

PRÓLOGO

Una *trivialidad profunda*. Así califica T. W. Körner [270] al Teorema de Categoría de Baire. Uno está inclinado a pensar que la razón fundamental para tal declaración es que, aparte de su simple y elegante demostración, pocos resultados comparten, como lo hace el Teorema de Categoría de Baire, el privilegio de intervenir, directa o indirectamente, en la demostración de una cantidad elevadísima de resultados muchos de los cuales son no triviales, algunos son un verdadero reto a la propia imaginación y muchos otros son, simplemente, espléndidos, hermosos. El contenido de estas notas muestran algunas de las formidables y, a veces, inimaginables aplicaciones que se apoyan en dicho teorema.

Como se puede entrever, el título de este libro indica una declaración de intenciones. A pesar de la inmensa gama de aplicaciones que se sustentan sobre el Teorema de Categoría de Baire, existe un sorprendente vacío de un texto que se dedique exclusivamente a recoger gran parte de esas aplicaciones. Ese vacío no se llena con esta modesta contribución, pero es un paso hacia adelante. Por consiguiente, el primer objetivo de estas notas es presentar, con un tratamiento absolutamente informal, algunas de esas aplicaciones. Es importante observar que en casi todos los textos de Análisis Funcional, del Análisis Real o la Topología cuando desarrollan algunas de las aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire muestran, por su interés particular, casi siempre los mismos resultados entre los que se encuentran, en el caso del Análisis Funcional, de los Teoremas de Acotación Uniforme, de la Aplicación Abierta o del Gráfico Cerrado y, en algunos casos, demostrar la existencia de un conjunto "abundante" de funciones continuas que poseen una serie de Fourier que diverge en un punto. Cuando se trata de la Topología o el Análisis, el ejemplo más emblemático es la demostración de la abundancia de las funciones continuas a valores reales definidas, digamos, sobre $[0,1]$ que no poseen derivada finita en ningún punto de su dominio, mientras que en otros casos se dedican a demostrar la imposibilidad de expresar a $\mathbb{Q}$, el conjunto de números racionales, como un G_δ-denso, o una demostración de que el conjunto ternario de Cantor es no numerable, etc. Esos ejemplos son enteramente comprensibles y justificables, pero pueden sustentar la idea de que el ámbito de aplicaciones del mencionado teorema se reduce a los ejemplos ya descritos y, tal vez, a otras pocas aplicaciones. Estas notas intenta convencer al lector de lo contrario al ofrecer un abanico muchísimo más amplio de aplicaciones que, por lo general, no son fáciles de encontrar en casi ningún otro texto donde se aplica el Teorema de Categoría de Baire. Por supuesto, muchas otras aplicaciones, además de los "resultados clásicos", son incorporadas en estas notas mostrándose, por supuesto, otras de data más reciente pero dejando, aun por fuera, muchísimas otras aplicaciones.

En su tesis doctoral *"Sur les fonctions des variables réelles"* [28], escrita en 1899, René Baire, después de introducir los conceptos de primera y segunda categoría al final del capítulo 2 escribe: *el continuum constituye un conjunto de segunda categoría*, resultado que más tarde se conocerá como el Teorema de Categoría de Baire y por el cual Baire es famoso en la comunidad matemática. Poco tiempo antes, George Cantor había demostrado que *ningún conjunto numerable podía llenar totalmente un intervalo abierto*; es decir, *la totalidad de los puntos de cualquier intervalo abierto es no numerable*. Baire extiende este principio al demostrar que *ningún conjunto de primera categoría en* $\mathbb{R}$ (de los cuales, los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ constituyen un caso particular) *puede cubrir totalmente un intervalo abierto*, es decir, el Teorema de Categoría de Baire es una generalización de mayor alcance que la no numerabilidad del conjunto de los números reales. El objetivo fundamental en la tesis de Baire era caracterizar aquellas funciones de dos variables que eran continuas en cada variable separadamente pero que podían ser o no continuas simultáneamente en ambas variables. Cauchy había afirmado en su famoso libro "Cours d'Analyse" (una afirmación falsa) que "si una función de dos variables es continua respecto a cada una de ellas, entonces dicha función es continua como función de ambas variables". Casi al final de las primeras 27 páginas de su tesis, Baire había demostrado que esas funciones (las funciones de dos variables que eran continuas en cada variable separadamente pero no continuas simultáneamente en ambas variables) eran puntualmente discontinuas sobre cada conjunto perfecto. (Una función f es *puntualmente discontinua* con respecto a un conjunto cerrado F, si el conjunto de puntos de continuidad de $f|_F$ es denso en F). De hecho, Baire mostró que dichas funciones se pueden representar como límites puntuales de sucesiones convergentes de funciones continuas. Tales funciones serán conocidas posteriormente como *funciones de la primera clase de Baire*, término acuñado por Ch. J. de la Vallée Poussin (1866-1962) y denotadas por $\mathfrak{B}_1$. Seguidamente Baire prueba que el conjunto de puntos de discontinuidad de cualquier función $f \in \mathfrak{B}_1$ es de primera categoría y extiende dicho resultado mostrando que las familias de las funciones derivadas, las semicontinuas y las de variación acotada están contenidas en $\mathfrak{B}_1$. De esta manera, para todas esas clases de funciones, el conjunto de sus puntos de discontinuidad es "pequeño". Una elegante y agradable exposición histórica del trabajo de R. Baire la desarrolla Gilles Godefroy en [184].

Existen varias maneras de describir o determinar el *tamaño* de los conjuntos. Por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos ellos se miden en términos de su *cardinalidad* y, por consiguiente, tanto los conjuntos finitos así como los infinitos numerables son considerados pequeños, mientras que los conjuntos no numerables son pensados como muy grandes. Esa manera de clasificar a tales conjuntos fue usado por primera vez por Cantor para demostrar la existencia de los números trascendentes. En efecto, en primer lugar Cantor demostró que $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, era no numerable y, posteriormente, que el conjunto de los números algebraicos era numerable. Esos dos ingredientes le permitieron, finalmente, concluir que los números trascendente existen (sin mostrar ninguno de ellos) y que tales números, en comparación con los números algebraicos, son más numerosos. Similarmente, en la Teoría de la Medida e Integración, se usa la noción de *longitud* o *medida* para describir el tamaño de los conjuntos. Los conjuntos de medida cero, así como uniones numerables de tales conjuntos, se piensan como conjuntos pequeños, mientras que los de medida positiva se consideran grandes. Observe que si λ es la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$, entonces cualquier subconjunto finito o infinito numerable de $[0,1]$ tiene medida cero por lo que la noción de "conjunto pequeño" coincide en ambas teorías para los conjuntos finitos y los infinitos numerables. Sin embargo, existen en $[0,1]$ conjuntos no numerables que poseen medida de Lebesgue cero como es el caso del conjunto ternario de Cantor. Esta distinción establece que la manera de cómo se mide el tamaño de los conjuntos en ambas teorías, al menos desde el punto de vista de los conjuntos no numerables, son distintos. Por otro lado, la noción de *categoría* de Baire ofrece otra perspectiva de medición de conjuntos pero desde la óptica topológica. En este ambiente, los conjuntos *nunca densos* son considerados conjuntos pequeños. Cualquier conjunto que es unión numerable de estos conjuntos pequeños es llamado un conjunto de *primera categoría* o *magro* y, en consecuencia, también se le considera pequeño. Un conjunto que no es de primera categoría se le suele llamar de *segunda categoría* o *no-magro*. Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría son conjuntos *grandes* o *muy abundantes*. Similar a la observación anterior existen conjuntos que son grandes desde el punto de vista de la categoría de Baire pero que resultan ser pequeños en la Teoría de la Medida e Integración y viceversa. Como veremos más adelante, el Teorema de Categoría de Baire resulta ser, en consecuencia, un resultado acerca del *tamaño* de los subconjuntos de un espacio métrico completo u otro espacio apropiado pero siempre sustentado sobre la noción de densidad. Existen en la literatura otras variedades de conjuntos pequeños que han sido estudiados con cierta profundidad como son, por ejemplo, los conjuntos σ-porosos o los conjuntos Gamma-nulos, también están los conjuntos de Gauss nulo y los Haar nulo, que son de especial interés, particularmente, en la Teoría de Probabilidades, etc.

El Teorema de Categoría de Baire constituye, sin lugar a dudas, una herramienta poderosa. Dicho teorema ofrece un método no constructivo para demostrar la existencia, pero sin exhibir ningún ejemplo concreto, de ciertos objetos que por lo general son muy difíciles de visualizar y, por supuesto, de construir. Una formulación equivalente de dicho teorema en espacios topológicos es la siguiente: Un espacio topológico X es llamado un *espacio de Baire* si cualquier colección numerable de subconjuntos abiertos densos en X posee intersección densa. ¿Cómo se aplica el método de categoría de Baire? Pues bien, supongamos que queremos demostrar la existencia de un objeto matemático x satisfaciendo alguna propiedad $P(x)$. El *método de categoría* consiste, esencialmente, en encontrar un espacio métrico completo adecuado X (o algún otro espacio de Baire "suficientemente bueno") y mostrar que el conjunto $\{x \in X : P(x)\}$ es abundante en X; o de modo equivalente, que el conjunto $\{x \in X :\ P(x) \text{ no se cumple}\}$ es de primera categoría en X. Esto no sólamente muestra que existe un x tal que $P(x)$ se cumple, sino que en el espacio X "*casi todos*" los elementos x tienen, desde el punto de vista topológico, la propiedad $P(x)$.

Ahora explicaremos cómo hemos organizado la presentación de estas notas. En el capítulo 1 se introducen algunos pre-requisitos necesarios, pero insuficientes, para darle cierta coherencia, armonía e independencia a los resultados objeto de estudios. Posteriormente se introducen las nociones de conjuntos de primera y segunda categoría y se prueban algunos resultados relacionados con esas nociones, entre los cuales se encuentra, por supuesto, el trivialmente profundo Teorema de Categoría de Baire para varios clases importantes de espacios de Baire tales como los espacios métricos completos, los localmente compactos y, en general, para una categoría más amplia conocida como los espacios Čech-completos. Similarmente, se prueba que el método de categoría de Baire también es aplicable a los espacios Oxtoby-completos, etc. Ya en éste capítulo se comienzan a dibujar algunas de las extraordinarias consecuencias que se obtienen por medio el Teorema de Categoría de Baire al mostrarnos algunos hechos aparentemente excepcionales e insospechados. El capítulo 2 es, por su amplitud y variedad, el más interesante. Las aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire comienzan, en primer lugar, con una galería de monstruos, es decir, examinando ciertos objetos que en principio se consideran como excepcionalmente raros y, a veces, extravagantes pero que tales objetos constituyen, de hecho, la regla y no la excepción. Algunos de esos resultados generaron, en sus comienzos, ciertas reacciones adversas que les permitieron a algunos matemáticos "alejarse con horror y temor de esas plagas lamentables", pero a otros les causó una especie de alegría contagiosa en busca de otros monstruos ocultos. En todo caso, lo que esos resultados muestran es el triunfo del método de categoría de Baire en revelar abundantes objetos ocultos con apariencia insólita y, a veces, inimaginables. La mayoría de esas aplicaciones abarcan áreas fundamentalmente del Análisis Real y Complejo incluyendo Teoría de la Medida, así como en la Teoría de los Espacios de Banach y de los Operadores Lineales Acotados entre ellos. Por ejemplo, en el transcurso de estas notas tratamos de mostrar cómo el Teorema de Categoría de Baire aparece como una herramienta importante en la demostración de resultados vinculados con: Principios Variacionales, Análisis Diferencial en Espacios de Banach, Dentabilidad, Fragmentabilidad, Juegos Topológicos, Funciones Analíticas, Series Trigonométricas y de Fourier, etc. El último capítulo es una breve incursión al hermoso, sutil y delicado resultado conocido con el nombre de *El Teorema Grande de Baire*. En dicho capítulo se tratan ciertos aspectos de las funciones de la primera clase de Baire, la caracterización clásica de tales funciones, así como algunas (muy pocas) aplicaciones en el ámbito de los espacios de Banach. Tangencialmente nos involucramos con ciertos índices y sus relaciones con las funciones de la primera clase de Baire.

Finalmente queremos hacer notar, en primer lugar, que lo extenso de estas notas se debe fundamentalmente al esfuerzo que se ha hecho para que dicha exposición sea lo más autocontenida posible tratando, en lo posible, de demostrar gran parte de los resultados enunciados y utilizados, aunque en algunos casos, muy pocos, se provee sólo un bosquejo de la demostración y, en consecuencia, se hace imprescindible pedirle al lector que en la bibliografía recomendada al final del libro consulte los resultados no demostrados en estas notas. Por otro lado, existe una sección marcada con dos asteriscos, la última del Capítulo 2, que no presenta ninguna demostración. El único interés en incluirlas es el de informar brevemente al lector sobre ciertos resultados actuales e importantes vinculados en, cierta medida, con el Teorema de Categoría de Baire y que tratan sobre ciertos conjuntos que sin poseer una estructura lineal, contienen subespacios lineales que a veces resultan ser muy grandes. En segundo lugar, muchos otros aspectos que tienen que ver, directa o indirectamente, con el Teorema de Categoría de Baire no han sido incluidos por diversas razones. Por ejemplo, los relacionados con las versiones computables del Teorema de Categoría de Baire, así como la noción de porosidad en la Teoría de los Espacios Métricos, la noción de prevalencia en espacios de Banach y su relación con otras nociones en la Teoría de la Medida e Integración y otros campos del quehacer matemático no aparecen en estas notas. Los libros de John C. Oxtoby [345] (el clásico por excelencia en este tema), R. P. Boas [56], N. L. Carothers [84], A. B. Kharazishvili [253], A. M. Bruckner [76], B. S. Thomson, J. B. Bruckner y A. M. Bruckner [426], así como la tesis de Sara H. Jones [241], el artículo de Haworth-McCoy [208], y algunos otros que no mencionamos, tratan temas que no hemos incluidos en estas notas. Las tesis de Ivan Bergman [49] y fundamentalmente la de Johan Thim [424] también son ampliamente recomendadas.

Quiero expresar mis más profundas gracias al profesor y amigo Diómedes Bárcenas quien se nos fue así, de improviso, dejándonos con una tristeza que uno no sabe dónde ubicarla y un profundo dolor. En la primera versión de estas notas, el Dr. Bárcenas las leyó completamente haciéndome llegar sus observaciones que me parecieron muy pertinentes y que, por supuesto, incorporé con sumo entusiasmo. La versión casi final de las mismas, la que ahora tenemos a mano, fueron sometidas a un riguroso y meticuloso escrutinio por parte del Dr. Dick van Dulst convirtiendo su lectura en algo más comprensible y agradable. Tenemos la firme convicción que su intervención ha sido determinante en la fase final de la misma y de un enorme beneficio en su presentación. Muchos resultados fueron corregidos, otros desincorporados y algunos vueltos a rehacer. A ellos un $\aleph_\alpha$ de gratitud. Eso no significa que no puedan seguir existiendo posibles errores u omisiones que, dicho sea de paso, son de mi entera responsabilidad, pero de ninguna manera imputables ni al Dr. van Dulst ni al Dr. Bárcenas. Aunque tenemos que ceder a la tentación de las siempre necesarias y, a veces, inagotables ampliaciones y correcciones cuando se escribe unas notas tan extensas, debemos, sin embargo, agradecer a quien, por algún medio, me haga saber sobre omisiones o errores encontrados en el mismo para, en un futuro (si tal cosa es posible), mejorar las mismas. Gracias por adelantado.

Como comentario final debemos decir que lo único que aspiramos con la publicación de estas notas es que algún lector encuentre algo de interés en ellas y pueda divertirse disfrutando de la trivialidad profunda del Teorema de Categoría de Baire paseándose por sus, a veces simples, y en ocasiones profundas, pero siempre hermosas y poderosas, aplicaciones.

W.B.
E-mail: wbrito@ula.ve
Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

EL TEOREMA DE CATEGORÍA DE BAIRE

Introducción

Las aplicaciones clásicas del Teorema de Categoría de Baire sustentan la idea de que dicho teorema es uno de los tantos resultados importantes en matemáticas. Que ello sea verdad no añade nada nuevo, sin embargo, dicho resultado va más allá del simple hecho de considerarlo como un teorema importante. Aunque su demostración es simple, su amplio abanico de aplicaciones, como intentaremos probarlo en estas notas, es inmenso. Tal vez por esa razón Körner [270] lo califica como una *trivialidad profunda*. Por ejemplo, su área de influencia en la demostración de un número significativo de resultados importantes e interesantes se hace sentir en el análisis clásico, en topología, en ecuaciones diferenciales, en la teoría de números, en el análisis convexo, en el análisis funcional, en probabilidades, en análisis armónico, etc. Constituye, de hecho, un método poderoso para probar, no sólo la existencia de ciertos objetos cuyas construcciones son, en muchas casos, tremendamente difíciles, sino la abundancia de tales objetos. Sin embargo, y este es uno de los retos que hay que sortear con éxito, existe un cierto grado de dificultad en relación con el método de Categoría de Baire el cual consiste en "encontrar" el espacio métrico completo adecuado o, en su defecto, algún espacio de Baire apropiado donde dicho método es aplicable. Ocasiones tendremos de exhibir numerosos ejemplos donde tal método es aplicado tales como la existencia de funciones continuas que no son diferenciables en ningún punto de su dominio, así como funciones diferenciables que siempre oscilan en cualquier subintervalo de su dominio, etc.

Antes de entrar de lleno en los pormenores del Teorema de Categoría de Baire y algunas de sus aplicaciones, será necesario revisar de manera sucinta algunas nociones básicas de Teoría de Conjuntos, Funciones y Espacios Topológicos que asumiremos, corriendo el riesgo de equivocarnos, que el lector conoce. Sin embargo, parte de la teoría de los Espacios de Banach y, en particular, de los Espacios de Hilbert que se necesitan en estas notas no se desarrollan en esta sección aunque se discuten brevemente en ciertas porciones del mismo. En todo caso, la bibliografía al final de estas notas pueden servir al lector de ayuda para conocer (y ver su demostración) de algunos de los resultados en las que no se provee ninguna prueba.

1.1. Conjuntos y funciones

|| ► Conjuntos

En esta sección revisaremos brevemente algunas propiedades básicas de conjuntos y funciones que son de interés para el desarrollo de estas notas. Comúnmente, un **conjunto** se describe como una colección (o reunión) de objetos de cualquier naturaleza llamados los **elementos** o **miembros** del conjunto pero evitando definir lo que es una colección o lo que es un objeto con el sólo propósito de eludir la aparición de las denominadas paradojas de la Teoría de Conjuntos. Por tal motivo, en estas notas, los términos "conjunto" y "elemento" permanecerán sin ser definidos y serán aceptados como entidades fundamentales confiando en que el lector posee una noción, o sentimiento intuitivo, de lo que es un "conjunto" y lo que es "elemento de un conjunto". Los elementos que forman parte de un conjunto particular, digamos X, serán denotados por el símbolo "$x \in X$" que se lee: "x es un **elemento** o **miembro** de X", o también se dirá que "x **pertenece** a X." Análogamente, el enunciado "$x \notin X$" significa que "x **no pertenece** a X", o "x **no es un miembro o elemento** de X".

En general, usaremos letras minúsculas tales como $a, b, c, \ldots, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para indicar los miembros o elementos de un conjunto, y letras mayúsculas $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc., para designar conjuntos. Si los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos (los cuales serán representados por letras mayúsculas), entonces dicho conjunto será llamado una **familia**, o una **colección** de conjuntos e indicado con una letra tipo gótica $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc., o una letra de tipo caligrafía $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.

Si A y B son conjuntos, el enunciado "$A \subseteq B$", que se lee: A es un **subconjunto** de B, o también A está **contenido** o A es una **parte** de B, significa que todo elemento de A pertenece al conjunto B aunque pueden existir elementos de B que no estén en A. Por otro lado, decir que A **no es un subconjunto** de B, en notación $A \nsubseteq B$, significa que existe al menos un elemento de A que no es miembro de B. Como suele suceder en muchas partes de las matemáticas, existen convenciones que resultan ser muy adecuadas. Por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos, postular la existencia de un conjunto que no posee elementos es una de ellas. A tal conjunto se le llama el **conjunto vacío** y denotado por $\emptyset$. El conjunto vacío está caracterizado por la siguiente propiedad: "$x \in \emptyset$" *nunca se satisface, cualquiera que sea* x. Es importante destacar que, una vez admitido la existencia del conjunto vacío, siempre se cumple que $\emptyset \subseteq X$, para cualquier conjunto X. En efecto, suponer que $\emptyset \nsubseteq X$ significa que existe algún $x \in \varnothing$ tal que $x \notin X$, pero como $x \in \varnothing$ nunca se satisface, entonces ello obliga a sentenciar que $\emptyset \subseteq X$. De esto último se deduce que el conjunto vacío es único. Un método usual de obtener subconjuntos de un conjunto dado es el siguiente: se parte de un conjunto X y se considera una propiedad $\mathbf{P}$ referente a los elementos de X la cual puede o no ser cierta para algunos o todos los miembros de X. En este sentido, cualquier conjunto de la forma $A = \{x \in X : \mathbf{P}(x) \text{ es cierta}\}$ define un subconjunto de X. Dado un conjunto X, indicaremos por $\mathcal{P}(X)$ el **conjunto de las partes de** X, es decir,

$$\mathcal{P}(X) = \big\{A : A \subseteq X\big\}.$$

Observe que $A \in \mathcal{P}(X)$ si, y sólo si, $A \subseteq X$. Diremos que A es **igual** a B, en notación, "$A = B$", si ocurre que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si la relación $A = B$ no se cumple, entonces diremos que A y B son **distintos** y lo denotaremos por $A \neq B$. La notación "$A \subsetneqq B$" significa que $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, que se expresa diciendo que A es un **subconjunto propio** de B. La **diferencia** $A \setminus B$ es el conjunto formado por todos los elementos de A que no son miembros de B, esto es,

$$A \setminus B = \big\{x : x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\big\}.$$

En el caso particular en que X es un conjunto fijo y $A \subseteq X$, entonces a $X \setminus A$ se le llama el **complemento** de A (relativo a X) y también denotado por A^c.

Dados los conjuntos A y B, la **unión** e **intersección** de ambos conjuntos denotados por $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente, se definen como:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ó}\ x \in B\} \qquad \text{y} \qquad A \cap B = \{x : x \in A \ \text{y}\ x \in B\}.$$

En el caso particular en que $A \cap B = \varnothing$, entonces se dice que A y B son conjuntos **disjuntos**. Similarmente, el **producto cartesiano** $A \times B$ se define por

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Puesto que no existe ninguna limitación para restringirnos a dos conjuntos en las definiciones de unión e intersección, podemos considerar uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos. Sea entonces $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos, definimos la **unión** e **intersección**, respectivamente, de dicha familia como

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\} \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\},$$

Con frecuencia, escribiremos $\bigcup \mathcal{A}$ y $\bigcap \mathcal{A}$ como sinónimos para la unión e intersección de la familia $\mathcal{A}$, respectivamente. Si $\mathcal{A}$ es una familia numerable, digamos $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$, entonces, en lugar de escribir $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, usaremos la notación $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Lo mismo se hace con la intersección, es decir, escribiremos $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ en lugar de $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Como antes, si ocurre que $A \cap B = \varnothing$ para cada par de conjuntos A, B en $\mathcal{A}$, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es una **familia disjunta** o que los conjuntos de $\mathcal{A}$ son **disjuntos dos a dos**.

Suponga ahora que X es un conjunto no vacío y que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X. Si ocurre que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es un **cubrimiento** de X. Si la familia $\mathcal{A}$ es disjunta y, además, es un cubrimiento de X, entonces se dice que $\mathcal{A}$ es una **partición** de X.

Algunas propiedades importantes sobre familias de conjuntos y que se usan frecuentemente son las siguientes. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ familias de conjuntos. Entonces se verifica que:

$$\Big(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\Big) \cap \Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big) = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} (A \cap B)$$

y

$$\Big(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\Big) \cup \Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\Big) = \bigcap_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} (A \cup B).$$

También se cumplen las **Leyes de Morgan**: si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) \qquad \text{y} \qquad X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A).$$

Algunas de las definiciones formuladas anteriormente constituyen una parte de los denominados Axiomas de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, habitualmente referidos como **ZF** y que evitan la famosa paradoja de Bertrand Russell. Los demás axiomas o propiedades en **ZF** no formuladas explícitamente en estas notas se pueden consultar, por ejemplo, en [240], o [230].

Confiamos en que el lector ha tenido, o posee, cierta experiencia con el sistema de los números reales $\mathbb{R}$ así como también con el sistema de los números complejos $\mathbb{C}$ por lo que no le dedicaremos tiempo a su construcción. En particular, asumiremos familiaridad con $\mathbb{Z}$, el conjunto de todos los números enteros, con $\mathbb{N}$, el conjunto de todos los números enteros positivos, con $\mathbb{Q}$, el conjunto de todos los números racionales y su complemento, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto de todos los números irracionales. El símbolo $\mathbb{K}$ denotará indistintamente $\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{C}$, mientras que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Recordemos que un conjunto A de $\mathbb{R}$ se dice **acotado superiormente** (respectivamente, **inferiormente**) si existe una constante M tal que $x \leq M$ (respectivamente, $M \leq x$) para todo $x \in A$. Diremos que A es **acotado** si él es acotado tanto superiormente así como inferiormente. También se dice que A tiene o posee un **supremo** finito $a_0 \in \mathbb{R}$, que escribiremos como, $a_0 = \sup A$, si las siguientes dos condiciones se cumplen:

(1) $x \leq a_0$ para todo $x \in A$, y

(2) si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$, entonces $a_0 \leq a$.

La condición (2) puede ser reemplazada por

$(2')$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $a_0 - \varepsilon < x$.

El **ínfimo**, $\text{ínf} A$, se define de manera similar. La siguiente propiedad fundamental, conocida con el nombre de **Axioma del Supremo**, se cumple: *cualquier conjunto A de $\mathbb{R}$ acotado superiormente (inferiormente) posee un supremo (ínfimo).* Si A no está acotado superiormente (inferiormente), escribiremos $\sup A = +\infty$ ($\text{ínf} A = -\infty$).

‖ ► Funciones

Sean X, Y conjuntos no vacíos. Una **relación** de X en Y es un subconjunto R de $X \times Y$. Cualquier elemento (x,y) de R se indicará por el símbolo xRy. Si $X = Y$, entonces a la relación R se le llama **relación binaria**.

Recordemos que una **relación de equivalencia** sobre un conjunto X es una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre dicho conjunto que es **reflexiva**, **simétrica** $\big((x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$, para todo $x,y \in X\big)$ y **transitiva**. Cuando $(x,y) \in \mathcal{R}$, escribiremos $(x \sim y)$ *mod* $\mathcal{R}$ y diremos que x y y son $\mathcal{R}$-**equivalentes** o **equivalentes módulo** $\mathcal{R}$. Cuando no exista ninguna posibilidad de un mal entendido, escribiremos $x \sim y$ en lugar de $(x \sim y)$ *mod* $\mathcal{R}$. La clase de equivalencia de x módulo $\mathcal{R}$ es el conjunto $C_x = \{y \in X : (x \sim y) \ mod\ \mathcal{R}\}$. Puesto que $x \in C_x$ para todo $x \in X$, resulta que las clases de equivalencias forman una partición de X, es decir, $X = \bigcup_{x \in X} C_x$ y, cualesquiera sean $x, y \in X$, se verifica que $C_x = C_y$ o bien $C_x \cap C_y = \varnothing$. Al conjunto

$$X/\mathcal{R} \ = \ \Big\{C_x : x \in X\Big\},$$

se le llama el **conjunto cociente** de X por la relación R. Observe que si $x, y \in C_z$, entonces $C_x = C_y = C_z$, esto es, *todos los elementos de una misma clase dan origen a clases idénticas*. La función $Q : X \to X/\mathcal{R}$ definida por $Q(x) = C_x$ para cada $x \in X$, se le llama la **aplicación cociente** o **canónica**. Q es claramente sobreyectiva.

Una **función**, o **aplicación**, de X en Y es una relación f de X en Y con la propiedad adicional de que si (x,y) y (x,z) están en la relación, entonces $y = z$, es decir, para cada $x \in X$ existe exactamente uno, y sólo un elemento $y \in Y$, al que denotaremos por $f(x)$, tal que $(x, f(x)) \in f$. Siguiendo la tradición, a la función f la expresaremos, en lo sucesivo, con el símbolo $f : X \to Y$. Al conjunto X se le llama el **dominio** de la función f, mientras que a Y se le llama el **contradominio** de f. Dos funciones $f : X \to Y$ y $g : X' \to Y'$ son **iguales** si $X = X'$, $Y = Y'$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. El conjunto

$$\text{Gra}(f) \ = \ \big\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\big\}$$

es llamado el **gráfico** de la aplicación $f : X \to Y$. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subseteq X$, entonces la **imagen** de A por f, es el conjunto

$$f(A) \ = \ \big\{ f(x) \in Y : x \in A\big\}.$$

Por otro lado, si $B \subseteq Y$, la **imagen inversa** de B por f, es el conjunto

$$f^{-1}(B) \;=\; \big\{x \in X : \; f(x) \in B\big\}.$$

Es fácil ver que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces

$$f\Big(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\Big) \;=\; \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f(A), \qquad\qquad f\Big(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\Big) \;\subseteq\; \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A).$$

Observe que la inclusión anterior puede ser propia. En efecto, si existen elementos $x, y \in X$ con $x \neq y$ pero satisfaciendo $f(x) \neq f(y)$, entonces tomando $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$, se tiene que $A \cap B = \varnothing$, de donde $f(A \cap B) = \varnothing$, mientras que $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\}$.

Para la imagen inversa se cumple que si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, entonces

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big) \;=\; \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B) \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\Big) \;=\; \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B).$$

Si $B \subseteq Y$, también es válida la siguiente igualdad:

$$f^{-1}\big(Y \setminus B\big) \;=\; X \setminus f^{-1}(B).$$

Más aun, dado $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, mientras que si $B \subseteq Y$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Una función $f : X \to Y$ se llama **inyectiva** si dados $x, y \in X$ arbitrarios, $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Otros sinónimos de la palabra inyectiva que comúnmente se usan son **biunívoca** y **uno a uno**. La función f se dice que es **sobreyectiva**, o simplemente **sobre**, si $Y = f(X)$, es decir, si para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Si f es tanto inyectiva así como también sobreyectiva, entonces la llamaremos **biyectiva**.

Observe que, para que ocurra la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$ cualquiera que sea $A \subseteq X$, es necesario y suficiente que f sea inyectiva. Similarmente, f es sobreyectiva si, y sólo si, $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subseteq Y$.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones, entonces podemos definir la **función compuesta** $g \circ f : X \to Z$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$. Sea A un subconjunto de X. La aplicación $i : A \to X$, definida por $i(x) = x$ para todo $x \in A$, se llama la **aplicación inclusión** de A en X. En el caso particular cuando $A = X$, la aplicación inclusión de X en X, se llama la **función identidad** y será indicada por $\mathrm{Id} : X \to X$. Cada función biyectiva $f : A \to B$ da origen a otra función biyectiva, llamada la **inversa** de f y denotada por $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Sean $f : X \to Y$ una función y A un subconjunto no vacío de X. La **restricción** de f al subconjunto A es la aplicación $f|A : A \to Y$ definida por $(f|A)(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Nótese que $f|A = f \circ i$, donde $i : A \to X$ es la inclusión de A en X. Por otro lado, dada una función $g : A \to Y$, toda aplicación $f : X \to Y$ tal que $g = f|A$ se llama una **extensión** de g al conjunto X. La función $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

se le denomina la función **característica** de A.

|| ► Familias indexadas, productos cartesianos

Sea J un conjunto no vacío cuyos elementos llamaremos **índices**. Dado un conjunto arbitrario X, cualquier función $x(\cdot) : J \to X$ es llamada una **familia de elementos de** X (con índices en J si es necesario enfatizar el conjunto de índices). La imagen de cada elemento $\alpha \in J$ por medio de $x(\cdot)$ se denotará por x_α y la función $x(\cdot)$ se indicará por el símbolo $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. Cuando $J = \mathbb{N}$, entonces cualquier familia de elementos de X con índices en $\mathbb{N}$ se llamará una **sucesión** en X y se denotará por $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty, (z_n)_{n=1}^\infty$, etc.

Suponga ahora que $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y que $x(\cdot) : J \to \mathcal{A}$ es una aplicación sobreyectiva. Por definición, para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ existe un índice $\alpha \in J$ tal que $x(\alpha) = A$ al que denotaremos por A_α. En este caso, la colección $\mathcal{A}$ se identifica con la **familia de conjuntos** $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$, lo que frecuentemente escribiremos como $\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha\in J}$. En este caso escribiremos $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ en lugar de $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ y lo mismo para la intersección. Si $J = \mathbb{N}$, usaremos la notación $\mathcal{A} = (A_n)_{n=1}^\infty$ a la que llamaremos una **sucesión de conjuntos**. Una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^\infty$ se dice que es **creciente** (respectivamente, **decreciente**) si $A_n \subseteq A_{n+1}$ (respectivamente, $A_n \supseteq A_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Si las inclusiones son todas estrictas, entonces diremos que la sucesión es **estrictamente creciente** (respectivamente, **estrictamente decreciente**).

Sea $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ una familia cualquier de conjuntos. Se define el **producto cartesiano** de esta familia como el conjunto de todas las funciones x que tienen dominio J tal que $x(\alpha) = x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$, es to es,

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha = \left\{ x(\cdot) : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \;\middle|\; x(\alpha) = x_\alpha \in A_\alpha \text{ para cada } \alpha \in J \right\}.$$

Cada función $x \in \prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es llamada una **función de elección** para la familia $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$. Si ocurre que todos los A_α son iguales, digamos, $A_\alpha = A$ para todo $\alpha \in J$, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ se denotará brevemente por A^J. En el caso particular en que $J = \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, escribiremos A^n en lugar de A^J. Similarmente, si $J = \mathbb{N}$, pondremos $A^{\mathbb{N}}$ como un sinónimo de A^J. En general, escribiremos $\prod_{n=1}^\infty A_n$ como sinónimo de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$. El conjunto $\mathbb{K}^n$ es llamado el **espacio Euclideano de dimensión** n **(o** n**-dimensional)** y si X es un conjunto arbitrario, entonces $\mathbb{K}^X$ denota el conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$. De interés es el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ donde $A_\alpha = \{0, 1\}$ para todo $\alpha \in J$. A éste producto lo denotaremos por $2^{\mathbb{N}}$, el cual consiste de todas las sucesiones de 0's y $1's$.

1.2. El Axioma de Elección, el Lema de Zorn, el Principio del Buen-Orden, Ordinales, Cardinales y la Hipótesis del Continuo

|| ► El Axioma de Elección

El Axioma de Elección es un axioma de la teoría de conjuntos que postula la existencia de ciertos objetos sin dar ninguna indicación de cómo obtenerlos. Desde su aparición ha resultado ser un axioma muy controversial. Su aceptación, en términos generales, se sustenta sobre la creencia de que nuestra percepción sobre los conjuntos finitos se puede ampliar a los conjuntos infinitos, pero más allá de eso, el principal argumento para su aceptación es que dicho axioma es tremendamente útil. Muchos resultados importantes y fundamentales en Análisis Real, Topología, Análisis Funcional, Algebra, etc. se pueden demostrar si se acepta, sin limitaciones, el Axioma de Elección. Una muestra de ello se puede ver, por ejemplo, en el libro de H. Herrlich: Axiom of Choice [215]. Entre las numerosas formas equivalentes del Axioma de Elección que existen, tal vez una de las más populares sea el siguiente:

Axioma de Elección (AC). *Si $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ es una familia de conjuntos tal que X_α es no vacío para todo $\alpha \in J$, entonces existe al menos una función de elección para la familia $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$.*

Lo anterior se puede expresar diciendo que: *dada cualquier colección $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es no vacío*, lo que cotidianamente se traduce en afirmar que, *dada cualquier* *colección $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ de conjuntos no vacíos uno puede elegir, de cada X_α, un único punto x_α para formar un nuevo conjunto.* Es un hecho ya establecido que el Axioma de Elección es independiente de los axiomas de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (**ZF**) en el sentido de que ni la verdad, ni la falsedad de dicho axioma puede ser demostrado en **ZF**. Añadiéndole a la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel el Axioma de Elección se obtiene una Teoría de Conjuntos mucho más amplia y poderosa denominada brevemente **ZFC**. El uso del Axioma de Elección muchas veces se oculta y, aunque sea obvio para el experto, puede no ser percibido por el principiante. De hecho, grandes matemáticos tales como Borel y Lebesgue que eran acérrimos detractores de tal axioma, lo usaron inconscientemente en la prueba de algunos teoremas. Por ejemplo, Lebesgue lo utilizó para demostrar que uniones numerables de conjuntos medibles son medibles, mientras que Borel se valió de él para demostrar la existencia de funciones continuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las cuales no pueden ser representadas como series dobles de polinomios.

‖ ► El Lema de Zorn

Entre las numerosas y variadas formas equivalentes del Axioma de Elección, se encuentra el así llamado Lema de Zorn, un resultado formulado por M. Zorn en 1935 [456] y que resulta ser extremadamente útil en varias ramas del quehacer matemático. Por ejemplo, el Lema de Zorn es fundamental para demostrar resultados importantes tales como: el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de Krein-Milman, el Teorema del Ultrafiltro, la prueba de la existencia de una base de Hamel en cualquier espacio vectorial no trivial, etc. Recordemos que una relación binaria sobre un conjunto X no es otra cosa que cualquier subconjunto $\mathcal{R}$ de $X\times X$. La relación binaria $\mathcal{R}$ se dice que es un **orden parcial** si ella es

(a) **reflexiva**: $(x,x)\in\mathcal{R}$ *para todo* $x\in X$,

(b) **antisimétrica**: *si* (x,y) *y* (y,x) *están en* $\mathcal{R}$, *entonces* $x=y$,

(c) **transitiva**: *si* (x,y) *y* (y,z) *están en* $\mathcal{R}$, *entonces* $(x,z)\in\mathcal{R}$.

Escribiremos $\preceq$ para denotar un orden parcial sobre X. Un conjunto X equipado con un orden parcial $\preceq$ es llamado un **conjunto parcialmente ordenado** y denotado por $(X,\preceq)$. Dos elementos x,y en un conjunto parcialmente ordenado se dicen que son **comparables** si $x\preceq y$ o $y\preceq x$. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualquier par de elementos son comparables es llamado un **conjunto totalmente (o linealmente) ordenado** y a dicho orden se le denomina un **orden total** o **lineal**. Una **cadena** en un conjunto parcialmente ordenado es un subconjunto que está totalmente ordenado. En un conjunto parcialmente ordenado $(X,\preceq)$ la relación $x\prec y$ significa que $x\preceq y$ pero $x\neq y$. Con frecuencia escribiremos $y\succeq x$ como sinónimo de $x\preceq y$.

Sea $(X,\preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $A\subseteq X$. Un elemento $x\in X$ es una **cota superior** de A si $a\preceq x$ para todo $a\in A$. Si x_0 es una cota superior de A y si cualquier otra cota superior x de A satisface $x_0\preceq x$, entonces se dice que x_0 es el **supremo** de A. Un elemento $x_0\in X$ se dice que es el **máximo** o el elemento **más grande** en X si $x\preceq x_0$ para todo $x\in X$. Por otro lado, un elemento $x_0\in X$ se dice que es un elemento **maximal** en X si no existe $y\in X$ para el cual $x_0\prec y$, es decir, si el único elemento $x\in X$ que satisface $x_0\preceq x$ es el propio x_0. Observe que un elemento maximal no tiene porque ser más el grande de todos: más aun, lo que no le está permitido a un elemento maximal es ser menor que cualquier otro elemento del conjunto. Por ejemplo, sea $X=\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|_2\leq 1\}$, es decir, X es la bola cerrada unitaria con la norma euclideana. Sobre X defina el siguiente orden parcial $\preceq$: si $x,y\in X$, $x\preceq y$ si, y sólo si, $x\in I_y$, donde I_y es el segmento radial que va desde el origen al punto y. Es claro que cualquier par de vectores $x,y\in X$ no son comparables si ellos están sobre segmentos radiales distintos. De esto se sigue que cualquier vector $v\in\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|_2=1\}$ es maximal pero no es un máximo. Las definiciones de ínfimo, mínimo y minimal se definen de modo enteramente similar. La demostración del próximo resultado se puede ver, por ejemplo, en [215].

Lema 1.2.1 (Lema de Zorn). *Sea $(X,\preceq)$ un espacio parcialmente ordenado. Si cualquier cadena en X posee una cota superior, entonces X posee un elemento maximal.*

Con mucha frecuencia, el Lema de Zorn se utiliza cuando $\mathfrak{F}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto dado X ordenados por la relación de inclusión $\subseteq$ con la propiedad de que cualquier cadena $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{F}$, su unión $\bigcup\mathcal{C}$, también esté en $\mathfrak{F}$. (Observe que $\bigcup\mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$ con respecto a $\subseteq$). En este caso particular, el Lema de Zorn se expresa del modo siguiente:

Corolario 1.2.1 (Principio Maximal de Hausdorff). *Sea $\mathfrak{F}$ una familia de subconjuntos no vacíos de un conjunto no vacío X. Suponga que los elementos de $\mathfrak{F}$ están ordenados por la relación de inclusión $\subseteq$ y que para cualquier cadena $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{F}$, se cumpla que su unión $\bigcup\mathcal{C}$ también está en $\mathfrak{F}$. Entonces $\mathfrak{F}$ posee un elemento maximal.*

‖ ► Principio del Buen-Orden

Entre los conjuntos infinitos, el conjunto de los números naturales con su orden natural $(\mathbb{N},\leq)$ es un conjunto que disfruta del denominado **principio del buen-orden**, el cual establece que *cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ contiene un primer elemento*, es decir, el elemento más pequeño (o mínimo) del subconjunto. Si pudiéramos extender dicho principio a cualquier conjunto no vacío con un orden establecido abrigaríamos la esperanza de poder trabajar con cualquier conjunto bien ordenado del mismo modo conque trabajamos con $\mathbb{N}$ y, por supuesto, eso nos conduciría a extender nuestra manera tradicional de contar más allá de los naturales y, por supuesto, dispondríamos de una extensión del proceso de inducción matemática. Por tales motivos, el principio del buen orden es una propiedad que pudiéramos pensar como altamente deseada.

Sea $(X,\preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $\preceq$ es un **buen-orden** en X o que X está **bien-ordenado** por $\preceq$ si cualquier subconjunto no vacío A de X posee un primer elemento, es decir, un elemento $x\in A$ es el **primer elemento** o el **elemento mínimo** en A si $x\preceq a$ para todo $a\in A$. Observe que un buen-orden $\preceq$ sobre un conjunto X automáticamente lo convierte en un conjunto totalmente ordenado. En efecto, si $x,y\in X$, entonces el conjunto $A=\{x,y\}$ posee, por ser $\preceq$ un buen orden sobre X, un primer elemento, es decir, o bien $x\preceq y$, o bien $y\preceq x$. Por esta razón uno puede suponer que un conjunto bien ordenado es un par $(X,\preceq)$, donde X un conjunto totalmente ordenado y $\preceq$ es un buen-orden en X. Si $(X,\preceq)$ y $(X',\preceq')$ son conjuntos bien-ordenados, entonces una función $f:X\to X'$ se dice que es un **orden-isomorfismo** si f es biyectiva y $f(x)\prec f(y)$ siempre que $x\prec' y$. En este caso diremos que X y Y son orden-isomorfos o, simplemente, isomorfos.

El orden lexicográfico es un ejemplo de un buen-orden en el producto cartesiano de dos conjuntos bien-ordenados. Recordemos su definición. Sean $(A,\preccurlyeq_A)$ y $(B,\preccurlyeq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. El **orden lexicográfico**, también conocido como el **orden del diccionario**, es una relación de orden $\preceq$ definida sobre el producto cartesiano $A\times B$ del modo siguiente: para todo $(a,b),(a',b')\in A\times B$,

$$(a,b)\preceq(a',b') \iff a\preccurlyeq_A a' \quad \text{o bien} \quad (a=a' \ \wedge\ b\preccurlyeq_B b')$$

Nótese que la regla que define a $\preceq$ es la misma regla que se utiliza para ordenar las palabras en cualquier diccionario. De allí su nombre.

Suponga ahora que $(A,\preccurlyeq_A)$ y $(B,\preccurlyeq_B)$ son dos conjuntos bien-ordenados y que el producto cartesiano $A\times B$ está provisto del orden lexicográfico $\preceq$. Sea X un subconjunto no vacío de $A\times B$. Observe que el conjunto $X_1=\{a\in A:(a,b)\in X\}$ por ser no vacío en A, posee un primer elemento, llamémoslo a_0 (recuerde que estamos asumiendo que $(A,\preccurlyeq_A)$ es un conjunto bien-ordenado). De modo enteramente similar, el conjunto $X_2=\{b\in B:(a_0,b)\in X\}$ posee, en B, un primer elemento, digamos b_0. Resulta claro, por la definición del orden lexicográfico, que (a_0, b_0) es el primer elemento de X y, por lo tanto, $A \times B$ con el orden lexicográfico $\preceq$ es un conjunto bien-ordenado. Es fácil ver que si $n \in \mathbb{N}$ y si $(A_i, \preccurlyeq_i)$ es un conjunto bien-ordenado para $i = 1, \dots, n$, entonces uno puede, recursivamente, definir el orden lexicográfico $\preceq$ en el producto cartesiano $\prod_{i=1} A_i$ y entonces hacer de éste un conjunto bien-ordenado.

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $x \in X$, defina

$$\mathrm{S}(x) = \{y \in X : y \prec x\}.$$

Al conjunto $\mathrm{S}(x)$ se le llama un **segmento inicial** determinado por x.

Teorema 1.2.1 (Principio del Buen-Orden). *Cualquier conjunto no vacío puede ser bien-ordenado.*

Prueba. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$\mathfrak{F} = \Big\{(A, \preccurlyeq_A) : A \subseteq X \ \text{ y } \ \preccurlyeq_A \ \text{ es un buen-orden sobre } A\Big\}.$$

Puesto que cualquier conjunto finito está bien ordenado por cualquier orden lineal o total, resulta que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Sobre $\mathfrak{F}$ se define el orden parcial $\precsim$ declarando que: $(A, \preccurlyeq_A) \precsim (B, \preccurlyeq_B)$ si

(1) $A \subseteq B$,

(2) $\preccurlyeq_A$ y $\preccurlyeq_B$ coinciden sobre A y,

(3) si $x \in B \setminus A$, entonces $a \preccurlyeq_B x$ para todo $a \in A$.

Sea ahora $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathfrak{F}$ y definamos $C = \bigcup\{A : (A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{C}\}$. Sobre C se define el orden $\preccurlyeq_C$ del modo siguiente: $x \preccurlyeq_C y$ si, y sólo, si existe un $(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{C}$ tal que $x, y \in A$, en cuyo caso, $x \preccurlyeq_A y$. Es fácil ver que el ordenamiento $\preccurlyeq_C$ está bien definido y es un buen orden sobre C. Por esto, $(C, \preccurlyeq_C) \in \mathfrak{F}$ y es claro que $(C, \preccurlyeq_C)$ es una cota superior para $\mathcal{C}$. Por consiguiente, por el Lema de Zorn, el conjunto $\mathfrak{F}$ posee un elemento maximal, digamos, $(A_0, \preccurlyeq)$. Afirmamos que $A_0 = X$. En efecto, suponga por un momento que $A_0 \neq X$ y sea x cualquier elemento en $X \setminus A_0$. Ordene el conjunto $B_0 = A_0 \cup \{x\}$ con el mismo orden que posee A_0 estipulando, además, que $a \preccurlyeq x$ para todo $a \in A_0$. Entonces $(B_0, \preccurlyeq)$ es un elemento de $\mathfrak{F}$ tal que $(A_0, \preccurlyeq) \precsim (B_0, \preccurlyeq)$, lo que evidentemente contradice la maximalidad de $(A_0, \preccurlyeq)$. Por esto $A_0 = X$ y $\preccurlyeq$ es un buen-orden sobre X. ■

Se puede demostrar que el Axioma de Elección, el Lema de Zorn y el Principio del Buen-Orden son todos equivalente (véase, por ejemplo, [240]).

‖ ► Números ordinales

Mientras que el cardinal de un conjunto mide la cantidad de elementos que él posee, el ordinal de un conjunto bien-ordenado mide su “longitud”. Siguiendo a John von Neumann diremos que:

Definición 1.2.1. *Un **número ordinal** es un conjunto bien-ordenado* α *con la propiedad de que* $\mathrm{S}(\xi) = \xi$, *para todo* $\xi \in \alpha$.

Esta definición es equivalente a afirmar que X es **transitivo**, es decir, si $a \in x \in X$, entonces $a \in X$ y, además, que X está totalmente ordenado por la relación $\in$. Con esta definición podemos escribir, con el orden usual, $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $\dots$, $n+1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\dots$, es decir, cada número natural es un número ordinal finito. De conformidad con la notación estándar denotaremos por ω_0 el conjunto bien-ordenado de los números naturales $\mathbb{N}_0$. En general, si α es un ordinal, entonces $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ también es un ordinal llamado el **sucesor inmediato** de α. En lo que sigue escribiremos $\alpha^+ = \alpha+1$. Similarmente, se puede demostrar de que si A es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup A$ es igualmente un ordinal. Un ordinal sin un sucesor inmediato es llamado un **ordinal límite**, es decir, α es un ordinal límite si $\alpha = \bigcup_{\beta \prec \alpha} \beta$. Usando la definición de sucesor inmediato, podemos continuar generando ordinales numerables del modo siguiente:

$$\omega_0^+ = \omega_0 + 1, \quad (\omega_0+1)^+ = \omega_0 + 2, \quad \cdots$$

En esta escala, después de $\omega_0, \omega_0+1, \omega_0+2, \ldots$, viene $\omega_0 + \omega_0 = \omega_0 2$. Similarmente, después de $\omega_0 2, \omega_0 2 + 1, \omega_0 2 + 2, \ldots$ viene $\omega_0 2 + \omega_0 = \omega_0 3$. Si se continúa con este mecanismo indefinidamente se logra construir una gigantesca cantidad de ordinales cada uno de los cuales es, por definición, un ordinal numerable:

$$\begin{aligned}&\omega_0, \ldots, \omega_0 2, \ldots \omega_0 3 \ldots, \omega_0^2, \ldots, \omega_0^2+1, \ldots \omega_0^2+2, \ldots, \omega_0^2+\omega_0, \ldots, \omega_0^2+\omega_0+1, \ldots,\\ &\omega_0^2+\omega_0+2, \ldots, \omega_0^2+\omega_0 2, \ldots, \omega_0^3, \ldots, \omega_0^{\omega_0}, \ldots, \omega_0^{\omega_0^{\omega_0}}, \ldots\end{aligned}$$

Es importante destacar que ninguno de los ordinales: $\omega_0, \omega_0 2, \ldots, \omega_0^2, \ldots, \omega_0^{\omega_0}, \ldots$ posee un predecesor inmediato. Cada uno de ellos es, por supuesto, un ordinal límite.

Se puede demostrar que todos los números ordinales isomórficos entre sí, son iguales. Esto permite que cualquier par de números ordinales puedan ser comparados, esto es, si α y β son números ordinales y si definimos

$$\alpha \le \beta \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad \alpha \in \beta \quad \text{ó} \quad \alpha = \beta,$$

resulta que para cualesquiera dos números ordinales α y β, se cumplirá una, y sólo una, de las siguiente tres posibilidades: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$. A la relación de orden $\le$ la llamaremos el **orden canónico** de los números ordinales. Es un hecho ya establecido que:

(a) *Si A es cualquier conjunto de números ordinales, entonces $(A, \le)$ está bien-ordenado.*

(b) *Cualquier conjunto bien-ordenado es isomórfico a único número ordinal.*

Sea β un número ordinal tal que $\omega_0 < \beta$ y sea X un conjunto arbitrario. Similar a la definición de sucesión en X, por una **sucesión transfinita de tipo** β en X entenderemos cualquier aplicación $\varphi : \mathrm{S}(\beta) \to X$. El elemento de X asignado al número ordinal $\alpha < \beta$ es denotado por x_α en lugar de $\varphi(\alpha)$, y la sucesión transfinita en sí misma es denotada por $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, \alpha < \beta$, o brevemente por $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$. Si en lugar de puntos se consideran subconjuntos de X, entonces estaremos hablando de una sucesión transfinita de conjuntos que denotaremos por $\big(F_\alpha\big)_{\alpha<\beta}$. La sucesión transfinita de conjuntos $\big(F_\alpha\big)_{\alpha<\beta}$ es llamada **no decreciente** si $F'_\alpha \subseteq F_\alpha$ para $\alpha' < \alpha < \beta$ y **no creciente** si $F'_\alpha \supseteq F_\alpha$ para $\alpha' < \alpha < \beta$.

Los conjuntos bien-ordenados son útiles, entre otras cosas, porque ellos poseen una estructura inductiva la cual permite pensarlo como “inductivamente construido”. ¿Qué significa esto? Pues bien, suponga que $(X, \preccurlyeq)$ es un conjunto infinito bien-ordenado y sea x_1 su primer elemento. Considere ahora el primer elemento de $X \setminus \{x_1\}$, digamos x_2, después el primer elemento de $X \setminus \{x_1, x_2\}$, llamémoslo x_3, etc. Por supuesto, si X es no-numerable, tal procedimiento no agota la totalidad de los elementos de X pero, aun en este caso, después de obtener una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X con $x_1 \prec x_2 \prec \cdots$, podemos continuar con nuestro proceso inductivo eligiendo el primer elemento de $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$ y se continúa. Tal procedimiento es conocido como el Principio de Inducción Transfinita.

Teorema 1.2.2 (Principio de Inducción Transfinita). *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado y sea $A \subseteq X$. Si ocurre que para cada $x \in X$, la condición: “$\mathrm{S}(x) \subseteq X$ implica que $x \in A$”, entonces $A = X$.*

Prueba. Suponga que $A \neq X$. El subconjunto $B := X \setminus A$ de X es no vacío y, gracias al hecho de X está bien ordenado, B posee un primer elemento, llamémoslo x_0. Sin embargo, como $\mathrm{S}(x_0) \subseteq X$, nuestra hipótesis nos revela que $x_0 \in A$, lo cual contradice el hecho de que $x_0 \notin A$. Por esto, $A = X$. ■

Existe una forma alternativa de expresar el resultado anterior que guarda una estrecha similitud con el Principio de Inducción clásico. Puesto que $\mathrm{S}(\beta)$ es un conjunto bien ordenado para cada ordinal β, entonces existe un principio de inducción por cada ordinal. Sea β un ordinal y sea A un subconjunto de $\mathrm{S}(\beta)$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $1 \in A$,

(2) $\alpha + 1 \in A$, *siempre que* $\alpha \in A$ y, finalmente,

(3) $\alpha \in A$ *siempre que* $S(\alpha) \subseteq A$*, para cualquier ordinal limite* $\alpha < \beta$.

Entonces $A = S(\beta)$.

Otro hecho que con frecuencia usaremos es el siguiente: *Suponga que X es cualquier conjunto no vacío. Por el Principio del Buen-Orden existe un conjunto bien ordenado $(D, \preccurlyeq)$ que sirve como un conjunto de índices para los elementos de X, es decir, a X lo podemos representar como $X = \{x_\alpha : \alpha \in D\}$.*

‖ ► Cardinalidad

La noción anterior de números ordinales se introdujo como conjuntos estándar para comparar conjuntos bien-ordenados por medio de isomorfismos. Si la relación de orden no es nuestra prioridad, entonces la herramienta principal para comparar conjuntos es la noción de equipotencia. Dos conjuntos X y Y se dice que son **equipotentes**, o que ellos poseen el mismo números de elementos, si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Escribiremos $X \sim Y$ para denotar que X y Y son equipotentes. Un extraordinario resultado de Cantor establece que:

Teorema 1.2.3 (Cantor). *Cualquier conjunto arbitrario X es equipotente a un subconjunto propio de $\mathcal{P}(X)$, pero no es equipotente a $\mathcal{P}(X)$.*

Prueba. Decir que X no es equipotente a $\mathcal{P}(X)$ significa que *ninguna función $f : X \to \mathcal{P}(X)$ puede ser sobreyectiva*. Para ver esto, sea $x \in X$. Entonces $f(x)$ es un subconjunto de X que puede o no contener a x. Considere ahora el conjunto $F = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Afirmamos que no existe $x \in X$ tal que $F = f(x)$. Suponga por un momento que existe algún $x_0 \in X$ para el cual $F = f(x_0)$ y observe que: $x_0 \in F$ si, y sólo si, $x_0 \notin f(x_0) = F$. Esta contradicción establece que f no puede ser sobreyectiva y, en consecuencia, X y $\mathcal{P}(X)$ no son equipotentes. Más aun, si definimos $f(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$, resulta que f es inyectiva y, así, X es equipotente a un subconjunto propio de $\mathcal{P}(X)$ y concluye la prueba. ■

Sea ahora α un número ordinal. Por el Teorema de Cantor el conjunto potencia $\mathcal{P}(\alpha)$ posee las siguientes dos propiedades:

(a) α es equipotente a un subconjunto propio de $\mathcal{P}(\alpha)$, y

(b) α no es equipotente a $\mathcal{P}(\alpha)$.

Por el Principio del Buen-Orden, el conjunto $\mathcal{P}(\alpha)$ admite un buen-orden. Sea ω_* el número ordinal del conjunto bien-ordenado $\mathcal{P}(\alpha)$ y considere el conjunto $F_\alpha = \{\beta \in \omega_* : \beta \sim \alpha\}$. Si ς es cualquier número ordinal tal que $\varsigma \sim \alpha$, entonces $\varsigma < \omega_*$ pues, en caso contrario, tendríamos que $\varsigma = \omega_*$ lo que nos indicaría que $\mathcal{P}(\alpha)$ es equipotente a un subconjunto de α, lo cual es imposible. Se sigue ahora del carácter transitivo de ω_* que $\varsigma \in \omega_*$. De allí que el conjunto F_α es el conjunto de todos los números ordinales que son equipotentes a α. Lo anterior justifica la siguiente definición.

Definición 1.2.2. *Un **número cardinal** es un número ordinal α tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\beta \in F_\alpha$, donde F_α es el conjunto de todos los números ordinales que son equipotentes a α.*

Claramente cualquier número natural es un número cardinal finito. Es interesante observar, por lo visto anteriormente, que $\mathbb{N}_0$, el conjunto de los números naturales, admite dos representaciones: una como ω_0, el primer ordinal infinito y la otra como $\aleph_0$, el primer cardinal infinito. Como cualquier conjunto bien-ordenado es isomórfico a único número ordinal, resulta que *cualquier conjunto X es equipotente a único número cardinal* que denotaremos por $\operatorname{card}(X)$. Por otro lado, del Teorema de Cantor se sigue que

$$\aleph_0 \;<\; \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \;=\; 2^{\aleph_0} \;=\; \mathfrak{c},$$

donde $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ denota el cardinal de $\mathbb{R}$.

‖ ► La Hipótesis del Continuo

Un **aleph**, $\aleph$, *es el número cardinal de un conjunto infinito bien-ordenado*. Puesto que todo subconjunto de un conjunto bien-ordenado hereda esa propiedad, es decir, sigue siendo bien-ordenado, resulta que:

Cualquier cardinal infinito menor que un $\aleph$ es un $\aleph$.

Teniendo en cuenta que, en presencia del Axioma de Elección, todos los conjuntos están bien-ordenados, entonces *todos los cardinales infinitos son alephs*. En particular, el conjunto $(\mathcal{A}, \leq)$ de todos los alephs está bien-ordenado. Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{Z}_0$ formado por todos los ordinales cuya cardinalidad es $\aleph_0$. No es difícil ver que $\mathcal{Z}_0$ es no-numerable. Definimos entonces $\aleph_1$ como el cardinal de $\mathcal{Z}_0$. En general, si para cada $n \in \mathbb{N}$, el cardinal $\aleph_n$ ha sido definido, entonces $\aleph_{n+1}$ es el cardinal del conjunto $\mathcal{Z}_n$ de todos los ordinales de cardinalidad $\aleph_n$. El cardinal $\aleph_{\omega_0}$ es el cardinal de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ y se continúa la construcción de cada $\aleph_\alpha$ para cada ordinal $\alpha > \omega_0$.

Se sigue de la definición de $\aleph_1$ que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. En su *Continuum Hypothesis*, G. Cantor estableció su famosa conjetura:

Hipótesis del Continuo (**CH**). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Es decir, en la sucesión infinita de cardinales transfinitos $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots$, la Hipótesis del Continuo afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esta hipótesis también se puede formular en los siguientes términos: teniendo en cuenta que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, *¿existirá algún conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\aleph_0 < \operatorname{card}(A) < \mathfrak{c}$?* La Hipótesis del Continuo es la que afirma que un tal conjunto A no existe, en otras palabras: *si A es un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, entonces* $\operatorname{card}(A) = \aleph_0$, *o bien* $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{c}$.

Muchos resultados interesantes e importantes son posibles si se acepta dicha hipótesis. En 1938 Kurt Gödel demostró la consistencia del sistema **ZFC** + **CH**. Paul Cohen, en 1964, demostró la consistencia del sistema **ZFC** + $\neg$**CH**.

‖ ► Construcción de ω_1, el primer ordinal no numerable.

Sea X un conjunto no numerable y suponga que X está bien-ordenado por la relación $\leq$. Entonces existe un conjunto $\Omega \subseteq X$ tal que:

(1) *Ω es no numerable, y*

(2) *para cada $\alpha \in \Omega$, el conjunto $\mathrm{S}(\alpha) = \{\beta \in \Omega : \beta < \alpha\}$ es numerable.*

Para demostrar esto, considere el conjunto

$$\mathcal{S} \;=\; \big\{\alpha \in X : \mathrm{S}(\alpha) \textit{ es no numerable}\big\},$$

donde $\mathrm{S}(\alpha) = \{\beta \in X : \beta < \alpha\}$. Nuestro conjunto $\mathcal{S}$ puede, o no, ser vacío. Si $\mathcal{S} \neq \varnothing$, entonces el Principio del Buen-Orden nos garantiza que $\mathcal{S}$ posee un primer elemento, llamémoslo ω_1 y la prueba termina una vez que hallamos definido $\Omega = \mathrm{S}(\omega_1)$. En efecto, como $\omega_1 \in \mathcal{S}$, tenemos que:

(a) $\mathrm{S}(\omega_1)$ es no numerable, y además,

(b) por ser ω_1 es el ordinal más pequeño para el cual (a) se cumple, se sigue que si $\alpha \in \Omega = \mathrm{S}(\omega_1)$, es decir, $\alpha < \omega_1$, entonces $\mathrm{S}(\alpha)$ es numerable .

If $\mathcal{S} = \varnothing$, defina $\mathcal{W} = X \cup \{X\}$ y extienda el orden $\leq$ de X al nuevo conjunto $\mathcal{W}$ declarando que $\alpha < X$ para cualquier $\alpha \in X$. Si ahora hacemos $\omega_1 = X$ y $\Omega = \mathrm{S}(\omega_1)$, vemos que las conclusiones (a) y (b) dadas arriba son inmediatas.

A ω_1 se le conoce con el nombre de **el primer ordinal no numerable**, mientras que a los elementos del conjunto $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\omega_1\}$ se les llaman **ordinales numerables**. Observe que $\mathrm{card}(\omega_1) = \aleph_1$. El hecho de que Ω posee un primer elemento nos permite pensar a $\mathbb{N}_0$ como un subconjunto de Ω identificando al número 0 con el primer elemento de Ω y, recursivamente, identificando cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, con el primer elemento de $\Omega \setminus \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ de modo que se preserve el orden de los naturales.

$\|$ ► Conjunto de Bernstein

El Principio del Buen-Orden permite construir ciertos conjuntos extraños en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, *existe un subconjunto no vacío* **B** *de* $\mathbb{R}$ *tal que él y su complemento intersectan cualquier conjunto cerrado no numerable de* $\mathbb{R}$. Tal conjunto se conoce con el nombre de **Monstruo de Bernstein** o, simplemente, **conjunto de Bernstein**. Veamos su construcción. Considere la familia $\mathfrak{F}$ de todos los subconjuntos cerrados no numerables de $\mathbb{R}$. Por el Principio del Buen-Orden podemos indexar a dicho conjunto con los números ordinales menores que ω_1, esto es, $\mathfrak{F} = \{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Usaremos inducción transfinita para construir a **B**. Para ello es necesario, invocando de nuevo el Principio del Buen-Orden, que asumamos que $\mathbb{R}$ está bien-ordenado y, por consiguiente, que cada F_α también lo está. Sean p_1, q_1 los primeros dos elementos de F_1. Para cada $1 < \alpha < \omega_1$, suponga que p_β, q_β han sido definidos para todo $\beta < \alpha$. Puesto que $\bigcup_{\beta<\alpha}\{p_\beta, q_\beta\}$ es numerable y F_α es no numerable, entonces el conjunto $K_\alpha := F_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha}\{p_\beta, q_\beta\}$ es no vacío y, por consiguiente, bien-ordenado. Seleccionemos ahora los dos primeros elementos de K_α, digamos p_α, q_α. Esto termina nuestro proceso por inducción transfinita. Sea $\mathbf{B} = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Puesto que $p_\alpha \in \mathbf{B} \cap F_\alpha$ y $q_\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbf{B}) \cap F_\alpha$ para cualquier $\alpha < \omega_1$ y como cualquier conjunto cerrado no-numerable es algún F_α, resulta que el conjunto **B** tiene las propiedades deseadas.

Observe que si **B** es conjunto de Bernstein también lo es $\mathbb{R} \setminus \mathbf{B}$. Más aun, si **B** es conjunto de Bernstein, entonces cualquier conjunto cerrado $F \subseteq \mathbf{B}$ es, necesariamente, numerable pues, en caso contrario, F debería contener puntos de $\mathbb{R} \setminus \mathbf{B}$ lo que resulta imposible. En particular, **B** no contiene a ningún conjunto perfecto, un subconjunto de $\mathbb{R}$ el cual es cerrado y no posee puntos aislados. En efecto, es un hecho bien conocido que todo subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$ es no numerable (véase el Teorema 1.8.8, página 52) y entonces el resultado sigue de la observación anterior.

1.3. Espacios métricos

Sea X un conjunto no vacío. Una **métrica** sobre X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

(1) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$,

(2) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$,

(4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x,y \in X$.

El par (X,d), donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X, es llamado un **espacio métrico**. Si la condición $d(x,y) = 0$ no siempre implica que $x = y$ y todas las demás se cumplen, entonces diremos que d es una **pseudo-métrica** y, en consecuencia, diremos que (X,d) es un **espacio pseudo-métrico**. Si (X,d) es un espacio métrico y Y es un subconjunto no vacío de X, entonces la restricción de d a $Y \times Y$ es una métrica sobre Y que seguiremos denotando por d. El espacio métrico (Y,d) se le denomina **subespacio métrico** de (X,d). Aquí están algunos ejemplos de espacios métricos.

(a) Una de las métricas más simples que se puede definir sobre cualquier conjunto no vacío X es la **métrica discreta** d definida, para todo $x,y \in X$, por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

El espacio métrico (X,d) se le conoce con el nombre de **espacio métrico discreto**.

(b) Si $1 \leq p < \infty$, la función $d_p^n : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_p^n\big((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\big) \;=\; \left(\sum_{i=1}^n \big|x_i - y_i\big|^p \right)^{1/p}$$

para todo $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ es una métrica sobre $\mathbb{K}^n$. A tales espacios lo denotaremos por ℓ_p^n. Si $p = \infty$, la métrica $d_\infty^n : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ se define por

$$d_\infty^n\big((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\big) \;=\; \max_{1 \leq i \leq n} \big|x_i - y_i\big|$$

para todo $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Como antes, escribiremos ℓ_∞^n en lugar de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

En general, si $1 \leq p < \infty$, indicaremos por ℓ_p el espacio vectorial de todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ de números reales o complejos que son p-**sumables**, es decir, que satisfacen

$$\sum_{n=1}^\infty \big|x_n\big|^p < \infty,$$

dotado de la métrica

$$d_p\big((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty\big) \;=\; \left(\sum_{n=1}^\infty \big|x_n - y_n\big|^p \right)^{1/p},$$

mientras que si $p = \infty$, entonces ℓ_∞ denota el espacio vectorial de todas las **sucesiones acotadas** de escalares (reales o complejos), es decir, $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ si, y sólo si, existe una constante no negativa K tal que $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, provisto de la métrica del supremo

$$d_\infty\big((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty\big) \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|x_n - y_n\big|.$$

Dos subespacios realmente importantes de ℓ_∞ son

$$c \;=\; \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty : \lim_{n\to\infty} x_n \;\text{ existe}\big\} \qquad \text{y} \qquad c_0 \;=\; \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\,\big\}.$$

(c) Si X es un conjunto no vacío, denotaremos por $(B_\infty(X), d_\infty)$ el espacio métrico de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son acotadas, es decir, existe una constante $K_f \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \le K_f$ para todo $x \in X$, donde $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ se define por

$$d_\infty(f, g) \ = \ \sup_{x\in X} \big| f(x) - g(x) \big|$$

para todo $f, g \in B_\infty(X)$. En el caso particular en que $X = \mathbb{N}$ ó $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces $B_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$ y $B_\infty(\{1, 2, \ldots, n\}) = \ell_\infty^n$.

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea (X_n, d_n) un espacio métrico y considere el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$. Entonces las aplicaciones $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definidas para cada par $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ y $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de X por

$$d(x, y) \ = \ \sum_{n=1}^\infty \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \rho(x, y) \ = \ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \tag{P}$$

representan, cada una, una métrica sobre X.

Fijemos un espacio métrico (X, d). Los conjuntos

$$U(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) < r\big\}, \quad B(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) \le r\big\}$$

y

$$S(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) = r\big\}.$$

los llamaremos, respectivamente, la **bola abierta**, la **bola cerrada** y la **esfera** con centro x y radio $r > 0$. Un subconjunto $G \subseteq X$ se dice que es **abierto** si para cada $x \in G$, existe un $r > 0$ tal que $U(x, r) \subseteq G$. Un subconjunto F de X se dice que es **cerrado** si $X \setminus F$ es abierto. No es difícil demostrar que tanto c, así como c_0 son cerrados en ℓ_∞.

Sea A un subconjunto de X. Un punto $x \in A$ es un **punto interior** de A si existe un $r > 0$ tal que $U(x, r) \subseteq A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A será denotado por $\mathrm{int}(A)$ y llamado el **interior** de A. Es fácil ver que $\mathrm{int}(A)$ es un conjunto abierto y que si U es un subconjunto abierto de A, entonces $U \subseteq \mathrm{int}(A) \subseteq A$, es decir, $\mathrm{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A. En particular, A es abierto si, y sólo si, $A = \mathrm{int}(A)$. La **clausura** de A, que indicaremos con el símbolo $\overline{A}$, es el conjunto cerrado más pequeño conteniendo a A, esto es, si F es un subconjunto cerrado de X con $A \subseteq F$, entonces $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$. Se sigue que A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$. Un subconjunto A de X es **denso** en X si $\overline{A} = X$. Un punto $x \in X$ es un llamado un **punto frontera** de A si para cualquier $r > 0$, la bola abierta $U(x, r)$ contiene puntos tanto de A así como de $X \setminus A$. El conjunto de todos los puntos frontera de A lo escribiremos por $\mathrm{Fr}(A)$ y lo nombraremos la **frontera** o el **borde** de A.

Si $x \in X$ y A es un subconjunto no vacío de X, la **distancia** entre x y A se define como

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf \big\{d(x, a) : a \in A\big\}.$$

Se puede comprobar, sin mucha dificultad, que

(a) $\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, \overline{A})$,

(b) $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in \overline{A}$, y

(c) $\big|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)\big| \le d(x, y)$ cualesquiera sean $x, y \in X$.

Diremos que A es **acotado** en X, si existe una constante $M \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq M$ para todo $x,y \in A$. Si A es acotado en X, el **diámetro** de A se define mediante el número

$$\operatorname{diam}(A) := \sup \big\{ d(a,b) : a,b \in A \big\}.$$

Pondremos $\operatorname{diam}(A) = \infty$ si el conjunto A no sea acotado en X.

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X y $x_0 \in X$, diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** a x_0, en notación $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ o, brevemente, $x_n \to x_0$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Es fácil ver que si F es un subconjunto de X, $x \in \overline{F}$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en F tal que $x_n \to x_0$. En particular, F es cerrado si, y sólo si, siempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en F que converge a algún $x_0 \in X$, entonces $x_0 \in F$.

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X se llama **sucesión de Cauchy** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $m,n \geq N$. Un hecho importante que hay que destacar referente a las sucesiones de Cauchy es que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, entonces se puede determinar la existencia una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo, el recíproco no es, en general, válido. Si una sucesión de Cauchy en X, digamos$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, posee alguna subsucesión convergente a algún punto $x \in X$, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es en sí misma convergente y converge, además, al punto x. Un espacio métrico en donde toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de dicho espacio, es llamado un **espacio métrico completo**.

Cualquier espacio métrico discreto es completo, de hecho, todos los espacios métricos definidos en los ejemplos anteriores son completos, salvo, por supuesto, el del producto cartesiano. En este caso, si $(X_n, d_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de espacios métricos, entonces el producto cartesiano $\big(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d\big)$ es completo si, y sólo si, cada (X_n, d_n) es completo.

Un espacio métrico (X,d) se llama **separable** si contiene un subconjunto denso numerable. Es fácil ver que un espacio métrico (X,d) es separable si, y sólo si, X es **2° numerable**, lo cual significa que X posee una **base numerable**, es decir, existe una colección numerable $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos de X tal que todo abierto no vacío U de X se puede expresar como una unión de elementos de $\mathcal{C}$. Más aun, si X es un espacio métrico separable, entonces X es de **Lindelöf**. Esto último significa que, si $\mathcal{C}$ es cualquier **cubrimiento abierto** de X, es decir, una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal $X = \bigcup_{V\in\mathcal{C}} V$, entonces existe una subcolección numerable de $\mathcal{C}$, digamos, $\mathcal{C}_0 = \big\{V_n \in \mathcal{C} : n \in \mathbb{N}\big\}$ que también cubre a X, esto es, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones a valores reales definidas sobre X se dice que **converge uniformemente** sobre X a una función f si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que si $n \geq N$, entonces se cumple que

$$\big| f_n(x) - f(x) \big| \; < \; \varepsilon$$

para todo $x \in X$.

El siguiente test para la convergencia uniforme de una serie dada debido a K. Weierstrass, es muy conveniente (véase, por ejemplo, [386], Theorem 7.10, p. 148).

M-Test de Weierstrass. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones a valores reales definidas sobre un espacio métrico (X,d). Suponga que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una constante no negativa M_n tal que*

$$\big| f_n(x) \big| \; \leq \; M_n \quad \text{para todo } x \in X.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre X.

Si (X,d) es un espacio métrico, denotaremos por $(C(X),d_\infty)$ el subespacio vectorial de $(B_\infty(X),d_\infty)$ formado por todas las funciones continuas y acotadas $f:X\to\mathbb{R}$. En este caso, $(C(X),d_\infty)$ resulta ser cerrado en $(B_\infty(X),d_\infty)$ y, en consecuencia, un espacio métrico completo, pues $(B_\infty(X),d_\infty)$ es completo.

Dado un espacio métrico arbitrario (X,d), si dicho espacio no es completo, entonces siempre se puede construir un espacio métrico completo $\left(\widehat{X},\widehat{d}\,\right)$ y una aplicación φ con las siguientes propiedades:

(a) la aplicación $\varphi:X\to\widehat{X}$ es una isometría de X sobre $\varphi(X)$ y $\varphi(X)$ es denso en $\widehat{X}$,

(b) el espacio métrico completo $\left(\widehat{X},\widehat{d}\,\right)$ es, salvo isometría, único; es decir, si $\left(\left(\widetilde{X},\widetilde{d}\,\right),\psi\right)$ es otra completación de (X,d), entonces existe una única isometría $f:\widehat{X}\to\widetilde{X}$ tal que $f\circ\varphi=\psi$.

Al par $\left(\left(\widehat{X},\widehat{d}\,\right),\varphi\right)$ lo llamaremos la **completación** de (X,d). En la práctica, casi siempre ocultamos la isometría φ, identificamos a X con su imagen $\varphi(X)$ y simplemente decimos que $\left(\widehat{X},\widehat{d}\,\right)$ es la completación de (X,d). En este caso, $\widehat{d}$ coincide con d sobre $X\times X$.

1.4. Espacios topológicos

Los conjuntos abiertos son las piezas fundamentales en la teoría de los espacios métricos. La abstracción de las propiedades básicas de tales conjuntos conduce a la construcción de una nueva área de estudio denominada “*los espacios topológicos*”.

Definición 1.4.1. *Sea X un conjunto no vacío y suponga que τ es una colección no vacía de subconjuntos de X. Diremos que τ es una **topología** sobre X siempre que se cumplan las siguientes propiedades:*

(a) $\varnothing, X\in\tau$,

(b) *si $\{U_\alpha:\alpha\in J\}$ es cualquier colección de elementos de τ, entonces $\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\in\tau$, y*

(c) *si para cualquier $k\in\mathbb{N}$, $U_1,\dots,U_k\in\tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k}U_i\in\tau$.*

Los elementos de cualquier topología τ son llamados **conjuntos abiertos** o simplemente **τ-abiertos**. Un **espacio topológico** es un par (X,τ), donde X es un conjunto no vacío y τ es una topología sobre X. Con frecuencia hablaremos de un espacio topológico X sin mencionar la topología τ cuando sobre dicho conjunto no se ha definido explícitamente ninguna otra topología.

Cualquier subconjunto no vacío Y de un espacio topológico (X,τ) puede ser considerado en sí mismo como un espacio topológico definiendo la topología τ_Y sobre Y del modo siguiente: $\tau_Y:=\left\{U\cap Y: U\in\tau\right\}$, esto es,

$$G\in\tau_Y \quad \text{si, y sólo si, existe } U\in\tau \text{ tal que} \quad G=U\cap Y.$$

En este caso se dice que (Y,τ_Y) es un **subespacio** de (X,τ) y a τ_Y se le llama la topología inducida por τ. En un espacio topológico (X,τ), un subconjunto G de X se llama un **entorno** de un punto $x\in X$ si existe un conjunto abierto U tal que $x\in U\subseteq G$. El conjunto G se dice que es un **entorno abierto** de un punto $x\in X$ si G, además de ser un entorno de x, es un conjunto abierto. Se puede demostrar que un conjunto $G\subseteq X$ es abierto si, y sólo si, para cada $x\in G$, existe un entorno abierto V_x de x tal que $V_x\subseteq G$. Un subconjunto F de un espacio topológico (X,τ) se llama **conjunto cerrado** si $X\setminus F$ es un conjunto abierto. Se sigue de las propiedades de los conjuntos abiertos que:

(a) $\varnothing$ y X son conjuntos cerrados,

(b) si $\{F_\alpha:\alpha\in J\}$ es cualquier colección de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap_{\alpha\in J}F_\alpha$ es cerrado, y

(c) si para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $F_1, \ldots, F_k$ son conjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ también es cerrado.

Sea (X, τ) un espacio topológico y suponga que E es un subconjunto de X. La unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en E es llamado el **interior** de E y denotado por $\mathrm{int}_\tau(E)$ o $\tau - \mathrm{int}(E)$. Observe que si E no contiene ningún subconjunto abierto, entonces $\mathrm{int}_\tau(E) = \varnothing$. En cualquier caso, $\mathrm{int}_\tau(E)$ es el conjunto abierto más grande contenido en E. Escribiremos $\mathrm{int}(E)$ cuando no exista ninguna otra topología explícitamente definida sobre X. Similarmente, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E es llamado la **clausura** de E y denotado por $\overline{E}^{\,\tau}$. Observe que $\overline{E}^{\,\tau}$ siempre existe. En efecto, la familia $\mathcal{F} : \{F \subseteq X : E \subseteq F,\ F \text{ cerrado}\}$ es no vacía pues X pertenece a $\mathcal{F}$ y gracias a que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado, resulta que $\overline{E}^{\,\tau} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Como antes, si el contexto es claro, es decir, si no existe otra topología definida sobre X, escribiremos simplemente $\overline{E}$ en lugar de $\overline{E}^{\,\tau}$. Se tiene entonces que $\overline{E}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a E. Cualquier punto $x \in \overline{E}$ es llamado un **punto de clausura** de E.

Teorema 1.4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y suponga que E es un subconjunto de X.*

(1) *$x \in \overline{E}$ si, y sólo si, $V \cap E \neq \varnothing$ para cualquier conjunto abierto V conteniendo a x.*

(2) *Si $E \subseteq Y \subseteq X$, entonces $\overline{E}^{\,\tau_Y} = \overline{E}^{\,\tau} \cap Y$.*

Prueba. Ejercicio.

Para cada $x \in X$, denote por $\mathcal{N}_x$ la familia de todos los conjuntos abiertos que contienen a x. Según el resultado anterior vemos que

$$\overline{E} = \{x \in X :\ V \cap E \neq \varnothing \text{ para todo } V \in \mathcal{N}_x\}.$$

Un resultado que es particularmente útil es el siguiente:

Lema 1.4.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y U un subconjunto abierto no vacío de X. Si $A \subseteq X$ es tal que $U \cap A = \varnothing$, entonces $U \cap \overline{A} = \varnothing$. En particular, si U y V son abiertos no vacíos y disjuntos, entonces $U \cap \overline{V} = \varnothing = \overline{U} \cap V$.*

Prueba. Suponga que A es un subconjunto de X para el cual $U \cap A = \varnothing$, pero que $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$. Sea $x \in U \cap \overline{A}$. Entonces $x \in U$ y $x \in \overline{A}$. Ahora bien, como $x \in \overline{A}$, del Teorema 1.4.1 se sigue que cualquier entorno abierto de x intersecta a A; en particular, siendo U un entorno abierto de x (pues $x \in U$), tenemos que $U \cap A \neq \varnothing$, lo que constituye una flagrante violación a nuestra hipótesis. ■

Observe que el Lema 1.4.1 también se puede reescribir en la forma:

$$U \cap \overline{A} \neq \varnothing \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad U \cap A \neq \varnothing.$$

Definición 1.4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea D un subconjunto de X. Diremos que D es **denso** en X si $\overline{D} = X$.*

Notemos que $\overline{D} = X$ significa que el conjunto cerrado más pequeño que contiene a D es X. En general, si A y B son subconjuntos de X se dice que A es **denso en** B si $B \subseteq \overline{A}$. Esto último también se puede expresar diciendo que si V es un abierto no vacío de X tal que $V \cap B \neq \varnothing$, entonces $V \cap A \neq \varnothing$. En efecto, si fuera $V \cap A = \varnothing$, entonces el Lema 1.4.1 nos diría que $V \cap \overline{A} = \varnothing$ y, en consecuencia, como $B \subseteq \overline{A}$, tendríamos que $V \cap B = \varnothing$, lo cual es contradictorio.

Una condición equivalente a la definición de densidad que no hace referencia a ningún punto del espacio y que usaremos frecuentemente es la siguiente:

Teorema 1.4.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico Hausdorff y D un subconjunto de X. Entonces, D es* ***denso*** *en X si, y sólo si, para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $U\cap D\neq\varnothing$.*

Prueba. Supongamos, en primer lugar, que D es denso en X y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Si fuera $U\cap D=\varnothing$, entonces $F:=X\setminus U$ sería un conjunto cerrado conteniendo a D y, en consecuencia, $\overline{D}\subseteq F$, lo que contradice la densidad de D, ya que $F=X\setminus U\subsetneqq X$.

Recíprocamente, suponga que $U\cap D\neq\varnothing$ para cada subconjunto abierto no vacío U de X. Si fuera $\overline{D}\neq X$, entonces $U:=X\setminus\overline{D}$ sería un conjunto abierto no vacío que satisface $U\cap D=\varnothing$. Esta contradicción establece que $\overline{D}=X$. ■

Una primera consecuencia del resultado anterior es el siguiente.

Corolario 1.4.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Si D es denso en X y U es un subconjunto abierto no vacío de X, entonces $\overline{U}=\overline{U\cap D}$.*

Prueba. Puesto que $U\cap D\subseteq U$, resulta que $\overline{U\cap D}\subseteq\overline{U}$. Para verificar la otra inclusión tomemos un $x\in\overline{U}$ arbitrario y suponga que V es un entorno abierto de x. En este caso, $U\cap V\neq\varnothing$ y como D es denso en X, vemos que $V\cap(U\cap D)=(U\cap V)\cap D\neq\varnothing$. Esto prueba que $x\in\overline{U\cap D}$ y, en consecuencia, $\overline{U}\subseteq\overline{U\cap D}$. ■

Definición 1.4.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una familia $\mathcal{B}\subseteq\tau$ es llamada una* ***base de*** *τ, si cada conjunto abierto no vacío es la unión de miembros de $\mathcal{B}$.*

La familia $\mathcal{B}$ también es llamada una **base para** X. Las familias $\mathcal{B}\subseteq\tau$ que pueden servir como bases para X se caracterizan del modo siguiente:

Teorema 1.4.3. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}\subseteq\tau$. Son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{B}$ es una base para X.*

(2) *Para cada conjunto abierto no vacío G de X y cada $x\in G$, existe un $V\in\mathcal{B}$ tal que $x\in V\subseteq G$.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x\in G$. Puesto que $\mathcal{B}$ es una base para X, existe una subfamilia $\{V_\alpha\in\mathcal{B}:\alpha\in J\}$ de $\mathcal{B}$ tal que $G=\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha$. Entonces existe al menos un $V_\alpha\in\mathcal{B}$ tal que $x\in V_\alpha\subseteq G$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $G\in\tau$. Para cada $x\in G$, encuentre un $V_x\in\mathcal{B}$ con $x\in V_x\subseteq G$. Entonces $G=\bigcup_{x\in G}V_x$ es un abierto, lo cual prueba que $\mathcal{B}$ es una base para X. ■

Además del resultado anterior, existe un modo más práctico de describir los conjuntos abiertos de un espacio topológico.

Corolario 1.4.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}\subseteq\tau$ una base para X. Un subconjunto G de X es abierto si, y sólo si, para cada $x\in G$, existe un $V\in\mathcal{B}$ tal que $x\in V\subseteq G$.*

Prueba. Si G es abierto, entonces la condición sigue del Teorema 1.4.3. Recíprocamente, si la condición se cumple, entonces (como en la prueba del Teorema 1.4.3) encontramos que $G=\bigcup_{x\in G}V_x$ donde cada $V_x\in\mathcal{B}$ y, por consiguiente, G es abierto. ■

Sobre cualquier conjunto no vacío siempre existen dos topologías "extremas": la **topología discreta** $\mathcal{T}_D:=\mathcal{P}(X)$, y la **topología trivial** o **indiscreta** $\mathcal{T}_T:=\{\varnothing,X\}$. Todo conjunto no vacío X provisto de la topología discreta (respectivamente, de la topología trivial) será llamado un **espacio topológico discreto** (respectivamente, un **espacio topológico trivial**). Cualquier otra topología sobre X, digamos τ, se encuentra entre ellas dos, es decir, $\mathcal{T}_T\subseteq\tau\subseteq\mathcal{T}_D$. En general, si $\mathfrak{G}$ es una familia arbitraria de topologías sobre un conjunto no vacío X, entonces $\bigcap_{\mathcal{J}\in\mathfrak{G}}\mathcal{J}$ también es una topología sobre X. De esto se sigue que, para cualquier colección de subconjuntos $\mathcal{A}$ de un conjunto X, siempre existe una topología $\tau_{\mathcal{A}}$, llamada la **topología generada por** $\mathcal{A}$, con las siguientes propiedades: (1) $\mathcal{A}\subseteq\tau_{\mathcal{A}}$, y (2) $\tau_{\mathcal{A}}$ es la topología más pequeña sobre X que contiene a $\mathcal{A}$, es decir, si τ' es cualquier topología sobre X con $\mathcal{A}\subseteq\tau'$, entonces $\tau\subseteq\tau'$. En efecto, la familia $\mathfrak{G}_{\mathcal{A}}$ formada por todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{A}$ es no vacía pues $\mathcal{T}_D\in\mathfrak{G}_{\mathcal{A}}$. La topología $\tau_{\mathcal{A}}=\bigcap_{\mathcal{J}\in\mathfrak{G}_{\mathcal{A}}}\mathcal{J}$ cumple con los dos requerimientos anteriores. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un mismo conjunto X. Diremos que τ_2 es **más fina** que τ_1 si $\tau_1\subseteq\tau_2$, es decir, si τ_2 contiene más abiertos que τ_1. En este caso también se dice que τ_1 es **menos fina** que τ_2.

Si (X,d) es un espacio métrico, entonces la colección τ_d formada por todas las bolas abiertas $U(x,r)$ con $x\in X$ y $r>0$ constituye una topología sobre X denominada la **topología métrica**. Un espacio topológico (X,τ) se dice que es **metrizable** si existe una métrica d sobre X tal que la topología métrica τ_d coincide con la topología original τ.

Definición 1.4.4. *Un espacio topológico (X,τ) se llama un **espacio de Hausdorff** si cualesquiera dos puntos distintos en X poseen entornos abiertos disjuntos, es decir, si $x\neq y$, entonces existen entornos abiertos V_x y V_y de x e y respectivamente tal que $V_x\cap V_y=\varnothing$.*

La propiedad de ser Hausdorff implica que para cada x en un espacio de Hausdorff, el conjunto $\{x\}$ es cerrado. En efecto, sea $y\in X\setminus\{x\}$. Entonces $y\neq x$ de donde existen entornos abiertos V_y y V_x de y y x respectivamente tal que $V_y\cap V_x=\varnothing$. Esto prueba que cada $y\in X\setminus\{x\}$ posee un entorno abierto V_y contenido en $X\setminus\{x\}$, es decir, $X\setminus\{x\}=\bigcup_{y\in X\setminus\{x\}}V_y$ es abierto y, por lo tanto, $\{x\}$ es cerrado.

Definición 1.4.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff (X,τ). Diremos que X es **regular** si, dado cualquier conjunto cerrado $F\subseteq X$ y cualquier punto $x\notin F$, existen conjuntos abiertos disjuntos G_1 y G_2 tales que $x\in G_1$ y $F\subseteq G_2$. Similarmente, diremos que X es **normal** si, para cualesquiera par de subconjuntos cerrados y disjuntos F_1 y F_2, existen subconjuntos abiertos y disjuntos G_1 y G_2 tales que $F_1\subseteq G_1$ y $F_2\subseteq G_2$.*

Es claro que todo espacio topológico normal es regular. También es fácil establecer que todos los espacios métricos son espacios de Hausdorff. De hecho, cualquier espacio métrico es normal y, por consiguiente, regular.

Una de las nociones topológicas importantes y que se usa frecuentemente es la de compacidad. Sean (X,τ) un espacio topológico y K un subconjunto de X. Una colección $\mathcal{V}=\{V_\alpha:\alpha\in I\}$ de subconjuntos de X se dice que es un **cubrimiento abierto** de K si cada V_α es un conjunto abierto y $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha$. Si J es un subconjunto de I y si la subcolección $\mathcal{V}_0=\{V_\alpha:\alpha\in J\}$ cubre a K, entonces decimos que $\mathcal{V}_0$ es un **subcubrimiento** de K. Diremos que $\mathcal{V}$ posee un **subcubrimiento finito** de K si existen $V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_n}$ en $\mathcal{V}$ tal que $K\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}V_{\alpha_k}$.

Definición 1.4.6. *Un subconjunto K de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que es **compacto** si cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{V}=\{V_\alpha:\alpha\in I\}$ de K se puede reducir a un subcubrimiento finito, es decir, existen $V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_n}$ en $\mathcal{V}$ tal que $K\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}V_{\alpha_k}$.*

Por ejemplo, todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^n$ es compacto para cualquier $n\in\mathbb{N}$. En general, en cualquier espacio normado de dimensión finita $(X,\|\cdot\|)$ se cumple que: *un subconjunto K de X es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado*. Este resultado se conoce como el **Teorema de Heine-Borel**. Observe que *ningún espacio discreto infinito numerable puede ser compacto*. En efecto, suponga que (X,τ) es un espacio topológico con la topología discreta cuya cardinalidad es igual a $\aleph_0$. Escribiendo a X como una sucesión, digamos $X=\{x_1,x_2,\dots\}$, resulta que $\mathcal{V}=\{\{x_n\}:n\in\mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de X del cual no se puede extraer un subcubrimiento finito. También es fácil demostrar que si $K_1,\dots,K_n$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces:

(a) $K_1\cup\cdots\cup K_n$ es compacto.

(b) $K_1\cap\cdots\cap K_n$ es compacto.

(c) $\prod_{i=1}^n K_i$ es compacto.

Se demuestra, igualmente con facilidad, que *todo espacio métrico compacto* (X,d) *es acotado*. En efecto, fijemos cualquier $x_0\in X$ y considere el cubrimiento abierto $\mathcal{U}=\big\{U(x_0,n): n=1,2,\dots\big\}$ de X. Entonces, por compacidad, existe $n_1,\dots,n_k$ en $\mathbb{N}$ tal que $X=\bigcup_{i=1}^k U(x_0,n_i)$. Si ahora definimos $N=\text{máx}\{n_1,\dots,n_k\}$, vemos que $X=U(x_0,N)$ y, por lo tanto, X es acotado.

Teorema 1.4.4. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff y suponga que* $K\subseteq X$*.*

(1) *Si K es compacto, entonces es cerrado.*

(2) *Si X es compacto y K es cerrado, entonces K es compacto.*

Prueba. (1). Suponga que K es compacto y fijemos un $x_0\in X\setminus K$. Para cada $x\in K$, usemos el hecho de que X es Hausdorff, para hallar entornos abiertos y disjuntos V_x y $V_x(x_0)$ de x y x_0 respectivamente. Puesto que $\mathcal{V}:=\big\{V_x: x\in K\big\}$ es un cubrimiento abierto de K, la compacidad de K permite reducirlo a un subcubrimiento finito, digamos, $\big\{V_{x_1},\dots,V_{x_n}\big\}$. Claramente $U:=\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ y $V:=\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}(x_0)$ son conjuntos abiertos disjuntos con $x_0\in V\subseteq X\setminus K$. Esto prueba que $X\setminus K$ es abierto, es decir, K es cerrado.

(2). Suponga que X es compacto y que K es un subconjunto cerrado de X. Sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de K. Como K es cerrado, entonces $X\setminus K$ es abierto y, en consecuencia, $\mathcal{V}\cup(X\setminus K)$ es un cubrimiento abierto de X. Por compacidad, existen $V_1,\dots,V_n$ en $\mathcal{V}$ tal que $X=V_1\cup\cdots\cup V_n\cup(X\setminus K)$. Claramente $\big\{V_1,\dots,V_n\big\}$ es un cubrimiento de K. ■

Como una consecuencia del resultado anterior tenemos que

Corolario 1.4.3. *Sea* (X,τ) *un espacio de Hausdorff compacto. Entonces X es normal y, por consiguiente, regular.*

Prueba. Sean K_1 y K_2 dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Por el Teorema 1.4.4 sabemos que ambos conjuntos son compactos. Fijemos un $x\in K_1$ y, para cada $y\in K_2$, seleccionemos conjuntos abiertos y disjuntos V_y^x y V_y tales que $x\in V_y^x$ y $y\in V_y$. Del cubrimiento abierto $\mathcal{V}_2=\big\{V_y: y\in K_2\big\}$ de K_2 seleccionemos, por compacidad, un subcubrimiento finito, digamos $\big\{V_{y_1},\dots,V_{n(x)}\big\}$. Sean

$$U_x=\bigcap_{i=1}^{n(x)} V_{y_i}^x \qquad \text{y} \qquad H_x=\bigcup_{i=1}^{n(x)} V_{y_i}.$$

Puesto que este procedimiento se puede llevar a cabo para cada $x\in K_1$, la colección $\mathcal{V}_1=\big\{U_x: x\in K_1\big\}$ resulta ser un cubrimiento abierto de K_1 que, gracias a la compacidad de dicho conjunto, se puede reducir a un subcubrimiento finito, digamos $\big\{U_{x_1},\dots,U_{x_m}\big\}$. Definamos ahora

$$G_1:=\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \qquad \text{y} \qquad G_2:=\bigcup_{i=1}^{m} H_{x_i}.$$

Entonces, por construcción, $K_1\subseteq G_1$, $K_2\subseteq G_2$ y $G_1\cap G_2=\varnothing$. Como tanto G_1 así como G_2 son abiertos, concluimos que X es normal. ■

Propiedades más agradables se obtienen en espacios métricos compactos. Antes es preciso recordar algunos resultados fundamentales en la teoría de los espacios métricos. El primero establece que en espacios métricos completos los conjuntos cerrados son los únicos que heredan la completitud.

Teorema 1.4.5. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y F un subconjunto de X. Entonces (F,d) es completo si, y sólo si, F cerrado.*

Prueba. Suponga que F es cerrado y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en F. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y, por la completitud de X, ella converge a algún $x \in X$. Esto prueba que x es punto de acumulación de F el cual pertenece a F por ser dicho conjunto cerrado.

Recíprocamente, suponga que F es completo y sea $x \in \overline{F}$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en F que converge a x. Puesto que toda sucesión convergente es de Cauchy, resulta que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio métrico completo (F,d) y, por consiguiente, converge al mismo punto x. Por esto, $x \in F$ y termina la prueba. ■

El siguiente resultado es la pieza fundamental para la demostración del Teorema de Categoría de Baire en espacios métricos completos.

Teorema 1.4.6 (Encaje de Cantor). *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Si $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$.*

Prueba. Apliquemos el Axioma de Elección para escoger, por cada $n \in \mathbb{N}$, un $x_n \in F_n$. Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y usemos el hecho de $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ para elegir un entero $N > 0$ tal que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Como la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, se sigue que si $m,n \geq N$, entonces $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. En efecto, como $x_n \in F_n \subseteq F_N$ y también $x_m \in F_m \subseteq F_N$, resulta que $d(x_n,x_m) \leq \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Por esto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, gracias a la completitud de X, ella converge a un $x_0 \in X$. Puesto que todos los términos de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, salvo un número finito, están en F_n para todo $n \in \mathbb{N}$, result que $x_0 \in \overline{F}_n = F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esto, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Para demostrar la otra inclusión, observe que como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces la existencia de cualquier $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ nos indicaría que $x_0, y \in F_m$ y, por consiguiente, $d(x_0,y) \leq \operatorname{diam}(F_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto prueba que $y = x_0$ y termina la demostración. ■

Definición 1.4.7. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que X es **totalmente acotado** o **precompacto** si, para cada $\varepsilon > 0$, del cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U(x,\varepsilon) : x \in X\}$ de X se puede extraer un subcubrimiento finito, es decir, existen $x_1,\dots,x_n$ en X tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i,\varepsilon)$.*

Es claro que cualquier espacio métrico compacto es totalmente acotado. También es cierto que cualquier subconjunto de un espacio totalmente acotado es totalmente acotado. Más aun, si K es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\overline{K}$ también es totalmente acotado. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y suponga que $\{U(x_1,\varepsilon/2),\dots,U(x_n,\varepsilon/2)\}$ es un cubrimiento abierto finito de K. Como

$$\overline{K} \subseteq \overline{U(x_1,\varepsilon/2) \cup \cdots \cup U(x_n,\varepsilon/2)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U(x_i,\varepsilon/2)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i,\varepsilon),$$

resulta que $\{U(x_1,\varepsilon)\cap\overline{K},\dots,U(x_n,\varepsilon)\cap\overline{K}\}$ es un cubrimiento abierto finito de $\overline{K}$, lo que demuestra que $\overline{K}$ es totalmente acotado.

Totalmente acotado es una propiedad que revela muchas cosas, entre ellas el siguiente resultado.

Teorema 1.4.7. *Si un espacio métrico (X,d) es totalmente acotado, entonces X es separable.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon_n = 1/n$. Usemos el hecho de que X es totalmente acotado para obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto finito $D_n = \left\{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right\}$ de X tal que $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} U(x_i, 1/n)$. Pongamos $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Claramente D es numerable. Veamos que $\overline{D} = X$. En efecto, sea $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe algún $y_n \in D_n$ y, por consiguiente, $x \in U(y_n, 1/n)$. Lo anterior permite construir una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $d(y_n, x) < 1/n$. Esto, por supuesto, indica que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, lo que a su vez nos dice que $x \in \overline{D}$. Fin de la prueba. ■

Una de las caracterizaciones clásicas de compacidad en espacios métricos, pero de suprema importancia, es la siguiente:

Teorema 1.4.8. *Sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

(1) *X es compacto.*

(2) *X es completo y totalmente acotado.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que X es compacto y sea $(\widehat{X}, \widehat{d})$ la completación de (X,d). Como $\widehat{X}$ es un espacio de Hausdorff y X es un subconjunto compacto de $\widehat{X}$, el Teorema 1.4.4 nos dice que X es cerrado en $\widehat{X}$, pero además, siendo X también denso en $\widehat{X}$, entonces se tiene que $X = \widehat{X}$. Por esto, X es completo. Que X es también totalmente acotado sigue del hecho de que X es compacto.

$(2) \Rightarrow (1)$. Suponga que X es completo y totalmente acotado. Para obtener una contradicción, suponga que X no es compacto. Esto significa que existe algún cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X del que no es posible extraer ningún subcubrimiento finito. Ahora bien, como X es totalmente acotado, podemos seleccionar un cubrimiento abierto y finito de X, digamos $\{U_1^1, \ldots, U_{k_1}^1\}$, tal que el diámetro de todos ellos sean iguales pero menor que 1. Observe $\{\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_k\}$ también es un cubrimiento finito de X por lo que al menos uno de esos conjuntos cerrados, llamémoslo F_1, no se puede cubrir por una subcolección finita de $\mathcal{V}$. Puesto que F_1 también es totalmente acotado, podemos cubrirlo por una colección finita $\{U_1^2, \ldots, U_{k_2}^2\}$ de conjuntos abiertos todos de igual diámetro pero menor que $1/2$. Como antes, $\{\overline{U}_1^2, \ldots, \overline{U}_{k_2}^2\}$ es un cubrimiento finito de F_1 y, por consiguiente, al menos uno de esos conjuntos cerrados, digamos F_2, no se puede cubrir por una subcolección finita de $\mathcal{V}$. Continuando indefinidamente con este proceso, se obtiene una sucesión decreciente $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\big(F_n\big) = 0$. Como X es completo, el Teorema 1.4.6 nos revela que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. De aquí se sigue que $x_0 \in V_0$ para un cierto $V_0 \in \mathcal{V}$ y, en consecuencia, por ser V_0 abierto, $U(x_0, 1/n) \subseteq V_0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, puesto que $x_0 \in F_n$ y $\operatorname{diam}\big(F_n\big) < 1/n$, concluimos que $F_n \subseteq U(x_0, 1/n)$, de donde se obtiene que $F_n \subseteq V_0$, lo cual es una contradicción pues, según nuestra construcción, ningún F_k podía ser cubierto por una subcolección finita de $\mathcal{V}$, sin embargo, $\mathcal{V}_0 = \{V_0\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{V}$ que cubre a F_n. Esto termina la prueba. ■

Observe que en la prueba de la primera parte del teorema anterior se demostró que: *si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces su completación también es compacto*. De hecho, uno puede pedir menos para obtener la misma conclusión como lo demuestra el siguiente corolario.

Corolario 1.4.4. *Un espacio métrico (X,d) es totalmente acotado si, y sólo si, su completación $(\widehat{X}, \widehat{d}\,)$ es compacto.*

Prueba. Suponga que X es totalmente acotado y sea $(\widehat{X}, \widehat{d}\,)$ su completación. Como X es totalmente acotado su clausura $\overline{X}$, por lo visto anteriormente, también es totalmente acotado y puesto que $\overline{X} = \widehat{X}$, se concluye que $\widehat{X}$ es totalmente acotado (y completo). Se sigue del Teorema 1.4.8, que $\widehat{X}$ es compacto. El recíproco es inmediato. ■

Un subconjunto K de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que es **relativamente compacto** si $\overline{K}$ es compacto. En $\mathbb{K}^n$, todo subconjunto acotado es relativamente compacto. En general, vale el siguiente resultado.

Teorema 1.4.9. *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Un subconjunto K de X es relativamente compacto si, y sólo si, él es totalmente acotado.*

Prueba. Suponga que K es un subconjunto relativamente de X. Entonces $\overline{K}$ es compacto y se sigue que $\overline{K}$ y, por consiguiente K, es totalmente acotado.

Recíprocamente, suponga que K es totalmente acotado. Entonces $\overline{K}$ es totalmente acotado. Más aun, puesto que X es completo y $\overline{K}$ es cerrado, entonces $\overline{K}$ también es completo. Uno invoca de nuevo al Teorema 1.4.8 para concluir que $\overline{K}$ es compacto. ■

Otro de los resultados importantes de los conjuntos compactos es el siguiente.

Teorema 1.4.10 (Tychonoff). *Sea $(K_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos compactos. Entonces el producto $\prod_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto.*

Prueba. Véase, por ejemplo, [141], XI, Theorem 1.4, p. 224.

Del Teorema 1.4.4 también se deduce que si $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos compactos en algún espacio topológico de Hausdorff (X,τ), entonces $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto, aunque dicha intersección puede ser vacía. Sin embargo, si la familia $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ es numerable, digamos $(K_n)_{n=1}^\infty$, y además decreciente, entonces $\bigcap_{n=1}^\infty K_n \neq \varnothing$. Lo anterior permite justificar la siguiente definición.

Definición 1.4.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una familia de subconjuntos $(K_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de X se dice que tiene la* ***propiedad de intersección finita (PIF)*** *si, para cada subconjunto finito $F\subseteq\Gamma$, $\bigcap_{\alpha\in F} K_\alpha \neq \varnothing$.*

Una de las tantas caracterizaciones hermosas que poseen los espacios compactos de Hausdorff es la siguiente:

Teorema 1.4.11. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) es compacto si, y sólo si, cualquier familia $(K_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita, se cumple que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} K_\alpha \neq \varnothing$.*

Prueba. Supongamos que X es compacto y sea $(K_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita. Si ocurriera que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} K_\alpha = \varnothing$, entonces, haciendo $U_\alpha = X \setminus K_\alpha$ para cada $\alpha\in\Gamma$, resultaría que la familia $(U_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sería un cubrimiento abierto de X, del que, por la compacidad de X, se podría extraer un subcubrimiento finito, digamos $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}$. De esto se seguiría que $\bigcap_{k=1}^n K_{\alpha_k} = \varnothing$ lo cual es una contradicción. La otra implicación es más sencilla de probar. ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente.

Corolario 1.4.5. *Si $(K_\alpha)_{\alpha<\beta}$ es una familia transfinita no-creciente de subconjuntos compactos no vacíos de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ), entonces $\bigcap_{\alpha<\beta} K_\alpha$ es compacto y no vacío.*

Prueba. Para demostrar este hecho podemos suponer que X es compacto pues, en caso contrario, trabajaríamos con K_1. Puesto que cualquier intersección finita de los K_α es no vacía, se sigue del Teorema 1.4.11 que $K := \bigcap_{\alpha<\beta} K_\alpha$ es no vacío y, además, como K es cerrado (por ser intersección de conjuntos cerrados Teorema 1.4.4) y contenido en el compacto X tenemos, por una nueva aplicación del Teorema 1.4.4, que K es compacto. ■

Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff. Recordemos que una función $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ es **continua en un punto** $x\in X$ si, para cualquier entorno abierto V de $f(x)$, existe un entorno abierto U de x tal que $f(U)\subseteq V$. La función se dice **continua en** X si f es continua en todos los puntos de X. Si (X,d) es un espacio métrico, una función $f:X\to\mathbb{R}$ se dice que es **uniformemente continua** si dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ dependiendo sólo de ε tal que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ para cualesquiera $x,y\in X$ que satisfagan $d(x,y)<\delta$. Es claro que toda función uniformemente continua es continua. Aunque el recíproco no siempre es cierto, en algunos casos, por ejemplo *cuando X es un espacio métrico compacto, cualquier función continua $f:X\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Teorema 1.4.12. *Sea $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ una función, donde (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) *f es continua en X.*

(2) *Para cualquier conjunto abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*

(3) *Para cualquier conjunto cerrado F en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

(4) *Para cualquier conjunto E en X, $f\big(\overline{E}\big)\subseteq\overline{f(E)}$.*

Prueba. Ejercicio.

El siguiente resultado establece que compacidad se preserva por imágenes continuas, es decir:

Teorema 1.4.13. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff y $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ una función continua. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es compacto en Y.*

Prueba. Sea $\mathcal{V}=\big\{V_\alpha:\alpha\in I\big\}$ un cubrimiento abierto de $f(K)$. Puesto que f es continua, la colección $\mathcal{U}=\big\{f^{-1}\big(V_\alpha\big):\alpha\in I\big\}$ es un cubrimiento abierto de K el cual, por compacidad, se reduce a un subcubrimiento finito, digamos $\big\{f^{-1}(V_{\alpha_1}),\ldots,f^{-1}(V_{\alpha_n})\big\}$, es decir, $K\subseteq\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$. De esto se sigue que $f(K)\subseteq\bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ y termina la prueba. ■

Cualquier espacio métrico compacto es separable y todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado. Observe que si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff y si $K\subseteq Y\subseteq X$, entonces K es compacto en Y si, y sólo si, K es compacto en X.

Sabemos que toda función continua $f:X\to Y$ transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes; sin embargo, no ocurre lo mismo para sucesiones de Cauchy, es decir, f no necesariamente transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Por otro lado, cualquier función uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Un de los resultados fundamentales sobre funciones uniformemente continuas es el siguiente:

> **Teorema de Extensión Continua**. *Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos. Suponga que (Y,ρ) es completo, D es un subconjunto denso en X y $f:D\to Y$ es un función uniformemente continua. Entonces existe una única extensión a todo X que preserva la continuidad uniforme, es decir, existe una única función $F:X\to Y$ tal que F es uniformemente continua sobre X* y *$F(x)=f(x)$ para todo $x\in D$.*

Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff. Una función continua $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ se dice que es un **homeomorfismo** si ella es biyectiva y su inversa f^{-1} es continua. En este caso se dice que los espacios topológicos X e Y son homeomorfos . Si (X,d) y (Y,ρ) son espacios métricos y $f:X\to Y$ es un aplicación biyectiva y continua tal que $d(x,y)=\rho(f(x),f(y))$ para todo $x,y\in X$, entonces diremos que X y

Y son **isométricos** y a la función f se le llama una **isometría sobreyectiva**. Dos espacios isométricos son, desde el punto de vista métrico, indistinguibles. Es importante destacar que una función continua y biyectiva no es necesariamente un homeomorfismo. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ con la topología discreta y $Y = \mathbb{R}$ con la topología estándar, entonces la función identidad $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo pues id^{-1} no es continua. Sin embargo, si (X,τ) es compacto, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.4.14. *Sean (X,τ) y (Y,ς) espacios topológicos de Hausdorff y suponga que (X,τ) es compacto. Entonces toda biyección continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo.*

Prueba. Sólo tenemos que demostrar que la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua en Y, es decir, si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ es cerrado en Y. Suponga que F es un subconjunto cerrado en X. Como X es compacto, el Teorema 1.4.4 nos garantiza que F es compacto y la continuidad de f nos revela, gracias al Teorema 1.4.13, que $f(F)$ es compacto en Y. Por una nueva aplicación del Teorema 1.4.4 tenemos que $f(F)$ es cerrado en Y. ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 1.4.6. *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff compacto. Si ς es otra topología sobre X que es menos fina que τ, entonces $\varsigma = \tau$.*

Prueba. El hecho de que ς sea menos fina que τ significa que la función identidad $\mathrm{id} : (X,\tau) \to (X,\varsigma)$ es una biyección continua y, entonces, por el Teorema 1.4.14, id es un homeomorfismo. ■

Sea (K,τ) un espacio de Hausdorff compacto. Denotemos por $C(K)$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : K \to \mathbb{K}$ y dotemos a dicho espacio de la topología de la convergencia uniforme, esto es, la topología generada por la métrica del supremo $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}$ para todo $f,g \in C(K)$. $(C(K), d_\infty)$ resulta ser un espacio métrico completo. ¿Cómo se caracterizan los subconjuntos compactos de $C(K)$? La respuesta viene dada por un formidable resultado atribuido a G. Ascoli y C. Arzelá y conocido como el Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 1.4.15 (Arzelá-Ascoli). *Sea (K,τ) un espacio de Hausdorff compacto. Un subconjunto S de $C(K)$ es relativamente compacto si, y sólo si,*

(a) *S es puntualmente acotado, esto es,* $\sup\{|f(x)| : f \in S\} < \infty$ *para cada $x \in K$, y*

(b) *S es **equicontinuo**, lo cual significa que: dado $\varepsilon > 0$, cualquier punto $x \in K$ posee un entorno abierto V_x tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$* y *cualquier $f \in S$. .*

Prueba. Suponga que S es relativamente compacto. Entonces $\overline{S}$ es compacto en $(C(K), d_\infty)$ y puesto que todo conjunto compacto es acotado se sigue, en particular, que S es acotado, esto es, existe una constante $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \le M$ para todo $f,g \in S$. De aquí se sigue que S es puntualmente acotado ya que si tomamos $g \equiv 0$, entonces para cada $x \in K$ se verifica que $\sup\{|f(x)| : f \in S\} \le M$. Para demostrar la equicontinuidad fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea x_0 un punto cualquiera en K. Observe que, gracias al Teorema 1.4.8, $\overline{S}$, y entonces S, es totalmente acotado. Escojamos ahora un subconjunto finito $G = \{f_1, \ldots, f_n\}$ en S de modo que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon/3)$. Como cada aplicación $f_i \in G$ es continua, podemos escoger un entorno abierto V_{x_0} de x_0 tal que

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3$$

para cualquier $x \in V_{x_0}$ y cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea f un elemento arbitrario de S. Entonces $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, de donde se sigue que para ese i y para todo $x \in V_{x_0}$ se cumple que

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Esto prueba la equicontinuidad de S.

Para demostrar la otra implicación, suponga que $S \subseteq C(K)$ es puntualmente acotado y equicontinuo y fijemos un $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$, uno invoca la equicontinuidad de S para hallar un entorno abierto V_x de x tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ para cualquier $y \in V_x$ y cualquier $f \in S$. Puesto que la colección $\{V_x : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K, la compacidad de K nos revela la existencia de una colección finita, digamos $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq K$, tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$, en particular, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$|f(x) - f(x_i)| \ < \ \varepsilon/3 \quad \text{para todo } x \in V_{x_i} \text{ y todo } f \in S. \tag{1}$$

Por otro lado, como S es puntualmente acotado, el conjunto $F := \big\{(f(x_1), \ldots, f(x_m)) \in \mathbb{K}^m : f \in K\big\}$ es acotado en $(\mathbb{K}^m, \rho)$, donde $\rho(u,v) = \sup\{|u_i - v_i| : i = 1, 2, \ldots, m\}$ para cada $u = (u_1, \ldots, u_m)$ y $v = (v_1, \ldots, v_m)$ en $\mathbb{K}^m$. Se sigue del Teorema de Heine-Borel que $\overline{F}$ es compacto y entonces, por el Teorema 1.4.9 resulta que F es totalmente acotado lo cual implica la existencia de una colección finita $G := \big\{f_1, \ldots, f_n\big\}$ de funciones en S tal que para cada $f \in S$, existe un $j \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual

$$\rho\big((f(x_1), \ldots, f(x_m)), (f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m))\big) \ < \ \varepsilon/3. \tag{2}$$

Tomemos ahora cualquier $f \in S$ y fijemos uno de los $f_j \in G$. Si $x \in K$, entonces existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in V_{x_i}$ y, por consiguiente, de (1) y (2) se deduce que

$$\big|f(x) - f_j(x)\big| \ \leq \ \big|f(x) - f(x_i)\big| + \big|f(x_i) - f_j(x_i)\big| + \big|f_j(x_i) - f(x)\big| \ < \ \varepsilon.$$

Esto prueba que $d_\infty(f, f_j) \leq \varepsilon$ lo cual significa que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(f_j, \varepsilon)$, esto es, S es totalmente acotado y, de nuevo, por el Teorema 1.4.9 tenemos que S es relativamente compacto.

Definición 1.4.9. *Un espacio topológico de Hausdorff (X, τ) es llamado* ***localmente compacto*** *si cualquier punto $x \in X$ posee un entorno abierto V_x que es relativamente compacto.*

No es difícil ver que un subconjunto A de un espacio localmente compacto (X, τ) es localmente compacto si, y sólo si, A es de la forma $A = V \cap F$, donde V es abierto y F es cerrado.

Lema 1.4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff y suponga que G es un subconjunto de X el cual es localmente compacto. Si G es denso en X, entonces G es abierto en X.*

Prueba. Sea $x \in G$. Por la compacidad local de G, existe un entorno abierto U de x contenido en G tal que $\overline{U} \cap G$ es compacto y, por consiguiente, cerrado en X. Por otro lado, puesto que G es denso en X y U es abierto, resulta del Corolario 1.4.1 que $\overline{U} = \overline{U \cap G}$. Más aun, como $\overline{U} \cap G$ es un cerrado conteniendo a $U \cap G$, se obtiene que $\overline{U} = \overline{U \cap G} \subseteq \overline{U} \cap G$, es decir, $\overline{U} \subseteq G$. Finalmente, puesto que U es un subconjunto abierto de G, existe un conjunto abierto $V \subseteq X$ tal que $U = V \cap G$, de donde se sigue, por una nueva aplicación del Corolario 1.4.1, que $x \in V \subseteq \overline{V} = \overline{V \cap G} = \overline{U} \subseteq G$, lo que confirma que G es abierto en X. ∎

Un resultado bien conocido que usaremos en el transcurso de estas notas es el siguiente:

Teorema 1.4.16. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff localmente compacto. Para cualquier conjunto compacto $K \subseteq X$ y cualquier conjunto abierto V conteniendo a K, existe un conjunto abierto no vacío U en X tal que $\overline{U}$ es compacto y $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.*

Prueba. Para cada $x \in K$, tomemos un entorno abierto V_x de x tal que $\overline{V}_x \subseteq V$ y un entorno abierto W_x de x tal que $\overline{W}_x$ es compacto en X. Pongamos $U_x = V_x \cap W_x$. Entonces $\overline{U}_x$ es compacto por ser un subconjunto cerrado del compacto $\overline{W}_x$. Por la compacidad de K, existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tal que

$$K \ \subseteq \ U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \ := \ U.$$

Entonces U es abierto, el conjunto $\overline{U} = \overline{W}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{W}_{x_n}$ es compacto y se cumple que $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$. ■

Un subconjunto A de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que es un **σ-compacto** si existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compacto de X tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Definición 1.4.10. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) es llamado **$\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto** si X es σ-compacto y localmente compacto.*

Observe que $\mathbb{Q}$ es una unión numerable de conjuntos compactos, es decir, es un σ-compacto pero no es localmente compacto, por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto. Más adelante volveremos a considerar espacios σ-compactos que no son, en general, localmente compactos.

Definición 1.4.11. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) es un **espacio de Lindelöf** si cada cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento numerable.*

Es fácil ver que si $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ es una función continua y sobreyectiva y si el espacio de Hausdorff X es de Lindelöf, entonces Y también es de Lindelöf. En general, un subespacio de un espacio de Lindelöf no necesita ser de Lindelöf. Sin embargo, subespacios cerrados viviendo en espacios de Lindelöf permanecen Lindelöf. La siguiente caracterización de los espacios $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compactos resulta ser muy útil.

Teorema 1.4.17. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) *X es $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto.*

(2) *X se puede representar en la forma $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, donde cada U_n es un conjunto abierto relativamente compacto y $\overline{U}_n \subseteq U_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

(3) *X es un espacio de Lindelöf localmente compacto.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que X es $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto. Entonces X se puede escribir en la forma $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es algún compacto de X. Puesto que X es localmente compacto, por el Teorema 1.4.16 existe un conjunto abierto no vacío U_1 tal que $\overline{U}_1$ es compacto y $K \subseteq U_1 \subseteq \overline{U}_1$. Proceda inductivamente con la misma receta para escoger, por cada $n > 1$, un conjunto abierto relativamente compacto U_n conteniendo al compacto $\overline{U}_{n-1} \cup K_n$. Es claro que la colección $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface los requerimientos de (2).

$(2) \Rightarrow (3)$. Suponga que (2) se cumple y sea $\mathcal{C} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ cualquier cubrimiento abierto de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, use la compacidad de $\overline{U}_n$ para extraer de $\mathcal{C}$ un subcubrimiento finito, digamos $\{V_{i,j} \in \mathcal{C} : 1 \leq j \leq n(i)\}$. Entonces, la familia $\mathcal{U} := \{V_{i,j} \in \mathcal{C} : 1 \leq j \leq n(i),\ i \in \mathbb{N}\}$ es un subcubrimiento numerable de X.

$(3) \Rightarrow (1)$. Usemos la compacidad local de X para construir un cubrimiento de X por entornos abiertos relativamente compactos, digamos $\{V(x) : x \in X\}$. Ahora, como X es Lindelöf, podemos extraer un subcubrimiento numerable y la prueba termina. ■

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Un punto $x_0 \in X$ se llama un **punto límite** o **punto de acumulación** de un subconjunto F de X si, cualquier conjunto abierto G conteniendo a x_0 contiene puntos de F distinto de x_0. Si se denota por F' el conjunto de todos los puntos de acumulación de F, se tiene que $\overline{F} = F \cup F'$. A F' se le llama el conjunto **derivado** de F.

Teorema 1.4.18. *Sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

(1) *X es compacto.*

(2) *X es **numerablemente compacto**, es decir, cualquier sucesión en X posee un punto de acumulación.*

(3) *X es **secuencialmente compacto**, esto es, cualquier sucesión en X posee una subsucesión convergente.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que X es compacto pero que existe una $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que no posee puntos de acumulación. Entonces $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es infinito y $M' = \varnothing$. Se sigue que $\overline{M} = M \cup M' = M$, por lo que M resulta ser un conjunto cerrado viviendo en el compacto X. Por el Teorema 1.4.4, M es compacto, lo cual es imposible pues M es discreto.

$(2) \Rightarrow (3)$. Es inmediato.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Por hipótesis, dicha sucesión posee una subsucesión convergente, de donde se sigue que la sucesión de Cauchy converge. Esto prueba que X es completo. Veamos que X también es totalmente acotado. Para ver esto último, sea $\varepsilon > 0$ y escojamos un punto $x_1 \in X$. Si ocurre que $X = U(x_1, \varepsilon)$ nos detenemos pues el resultado ha sido demostrado. En caso contrario, existe un $x_2 \in X$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Si $X = U(x_1, \varepsilon) \cup U(x_2, \varepsilon)$ paramos el proceso pues la demostración ha concluido. En caso contrario, existe un $x_3 \in X$ tal que $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ y $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. Continuando con este proceso, o se construye un conjunto finito de puntos $x_1, \ldots x_n$ en X para el cual

$$X \;=\; U(x_1,\varepsilon) \,\cup\, U(x_2,\varepsilon) \,\cup \cdots \cup\, U(x_n,\varepsilon),$$

o en caso contrario se obtiene una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ para todo $m \neq n$. Claramente de tal extravagante sucesión no se puede extraer ninguna subsucesión convergente contradiciendo de este modo nuestra hipótesis. Con esto hemos demostrado que X totalmente acotado. Un llamado al Teorema 1.4.8 nos permite concluir que X es compacto. ■

Uno puede, con la ayuda del resultado anterior, derivar el siguiente resultado.

Corolario 1.4.7. *Si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Prueba. Suponga que f no es uniformemente continua. Esto significa que existe algún $\varepsilon > 0$ con la propiedad de que cualquiera que sea $\delta > 0$, podemos determinar un par de puntos $x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ pero tal que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $\delta = 1/n$, lo anterior permite la construcción de un par de sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, y_n) < 1/n \qquad\qquad \text{pero} \qquad\qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Como X es compacto, el Teorema 1.4.18 nos dice que podemos extraer una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a algún punto $z \in X$. Puesto que

$$d(z, y_{n_k}) \;\leq\; d\big(z, x_{n_k}\big) + d\big(x_{n_k, y_{n_k}}\big) \;<\; d\big(z, x_{n_k}\big) + \frac{1}{n_k}, \qquad \forall k \geq 1$$

se concluye que la subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge a z. Veamos que esto conduce a un imposible. En efecto, por un lado, como f es continua, resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \big|f(x_{n_k}) - f(z)\big| \;=\; 0 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \lim_{k\to\infty} \big|f(y_{n_k}) - f(z)\big| \;=\; 0. \tag{1}$$

Mientras que, por el otro lado, para todo $k \geq 1$ se cumple que

$$0 \;<\; \varepsilon \;\leq\; \big|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big| \;\leq\; \big|f(x_{n_k}) - f(z)\big| + \big|f(y_{n_k}) - f(z)\big|.$$

Esto último conduce a que uno de los límites $\lim_{k\to\infty} \big|f(x_{n_k}) - f(z)\big|$ o $\lim_{k\to\infty} \big|f(y_{n_k}) - f(z)\big|$ debe ser estrictamente positivo, lográndose de este modo un disparate en relación a (1). Por esto f es uniformemente continua y finaliza la prueba. ■

Otro hermoso, pero clásico, resultado que resulta ser mucha utilidad es el siguiente.

Teorema 1.4.19. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff compacto. Son equivalentes:*

(1) X *es metrizable.*

(2) $(C(X),d_\infty)$ *es separable.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que X es metrizable y sea d una métrica sobre X que genera la topología τ. Tenemos que (X,d) es un espacio métrico compacto y, por consiguiente, separable, gracias al Teorema 1.4.7. Por ser X separable, podemos seleccionar una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ densa en X. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección de bolas abiertas $\mathcal{U}_n = \{U(x_i,1/n) : i = 1,2,\dots\}$ es un cubrimiento abierto de X y, por ser X compacto, dicha colección se puede reducir a un subcubrimiento finito, digamos, $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} U(x_i,1/n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada uno de los $i \in \{1,2,\dots,k_n\}$ considere los conjuntos

$$F_n^i = \{x \in X : d(x_i,x) \leq 1/n\} \qquad \text{y} \qquad G_n^i = \{x \in X : d(x_i,x) \geq 2/n\}.$$

Puesto que la aplicación $x \to d(x,A)$ es continua de X en $\mathbb{R}$ cualquiera que sea el subconjunto A de X, resulta que cada función $f_{ni} : X \to [0,+\infty)$ definida por

$$f_{ni}(x) = \frac{d(x,G_n^i)}{d(x,G_n^i)+d(x,F_n^i)}$$

es continua y verifica que

$$f_{ni}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in F_n^i, \\ 0, & \text{si } x \in G_n^i. \end{cases}$$

Finalmente, definiendo $\varphi_{ni} : X \to [0,+\infty)$ por

$$\varphi_{ni}(x) = \frac{f_{ni}(x)}{f_{n1}(x)+\cdots+f_{ni}(x)+\cdots+f_{nk_n}(x)},$$

vemos que:

(a) cada φ_{ni} es continua,

(b) $\varphi_{ni}(x) = 0$ para todo $x \in G_n^i$, y

(c) $\varphi_{n1}(x)+\cdots+\varphi_{nk_n}(x) = 1$ para cualquier $x \in X$.

Si consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $D_n = \{\varphi_{ni} : i = 1,2,\dots,k_n\}$, tendremos que $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ es numerable y denso en $(C(X),d_\infty)$. Veamos esto último. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $f \in C(X)$. Como f es uniformemente continua, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ cualesquiera sean $x,y \in X$ satisfaciendo $d(x,y) < 2/n$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = a_1\varphi_{n1}(x)+\cdots+a_n\varphi_{nk_n}(x)$$

donde $a_i = f(x_i)$ para $i = 1,\dots,k_n$. Claramente g es continua y como $\varphi_{n1}+\cdots+\varphi_{nk_n} = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &= \Big|\Big(\sum_{i=1}^{k_n}\varphi_{ni}(x)\Big)f(x) - \sum_{i=1}^{k_n}\varphi_{ni}(x)f(x_i)\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n}\varphi_{ni}(x)\big|f(x)-f(x_i)\big| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que D_0, el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma $a_1\varphi_{n1}+\cdots+a_n\varphi_{nk_n}$ donde los $a_i=f(x_i)$ y los φ_{ni} están en D es denso en $(C(X),d_\infty)$ y, por consiguiente, también lo es D (esto último no requiere gran esfuerzo demostrarlo). Por esto, $(C(X),d_\infty)$ es separable.

$(2)\Rightarrow(1)$. Se deja como ejercicio al lector. ■

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado.

Teorema 1.4.20. *Sea (X,d) un espacio métrico separable.*

(1) *Si G es un subconjunto abierto de X, entonces G es separable.*

(2) *Si (Y,ρ) es otro espacio métrico y $f:X\to Y$ es una función continua sobreyectiva, entonces Y también es separable.*

Prueba. (1) es consecuencia inmediata del Corolario 1.4.1. Para demostrar (2), sea D un subconjunto numerable y denso de X. Veamos que $f(D)$ es numerable y denso en Y. En efecto, la numerabilidad de $f(D)$ sigue del hecho de que f es sobreyectiva. Para ver la densidad, sea $V\subseteq Y$ cualquier abierto no vacío y sea $y\in V$. Como f es sobreyectiva, existe $x\in X$ tal que $y=f(x)$. Por la continuidad de f en x, existe un abierto $U\subseteq X$ conteniendo a x tal que $f(U)\subseteq V$. La densidad de D conduce a que $U\cap D\neq\varnothing$ y, en consecuencia, $\varnothing\neq f(U\cap D)\subseteq f(U)\cap f(D)\subseteq V\cap f(D)$. Esto termina la prueba. ■

1.5. Espacios normados y de Hilbert

Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una **norma** sobre X es una aplicación $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}$ tal que

(1) $\|x\|\geq 0$ para todo $x\in X$,

(2) $\|x\|=0$ si, y sólo si, $x=0$,

(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ para todo $\alpha\in\mathbb{K}$ y todo $x\in X$,

(4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ para todo $x,y\in X$.

Al par $(X,\|\cdot\|)$ se le llama un **espacio normado**. En ocasiones diremos que X es un espacio normado sin mencionar de manera explícita la norma $\|\cdot\|$. Si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la norma $\|\cdot\|$ genera una métrica sobre X, llamada la **métrica norma**, definida por $d(x,y)=\|x-y\|$ para todo $x,y\in X$. Por consiguiente, todo espacio normado resulta ser un espacio métrico con la métrica norma. A todo espacio normado completo se le conoce con el nombre de **espacio de Banach**.

Si sobre el espacio $B_\infty(X)$ se define $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$, para cada $f\in B_\infty(X)$, entonces $(B_\infty(X),\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. De particular interés en estas notas es cuando $X=[0,1]$. En este caso, $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ es cerrado en $(B_\infty(X),\|\cdot\|_\infty)$ y, por consiguiente, es un espacio de Banach. Igualmente, si $1\leq p<\infty$, entonces $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p=\left(\sum_{n=1}^\infty|x_n|^p\right)^{1/p}$ es una norma sobre ℓ_p que hace que dicho espacio sea completo. Para $p=\infty$, $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ define una norma sobre ℓ_∞ que lo convierte en un espacio de Banach. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos el espacio de Banach de dimensión finita ℓ_p^n como

$$\ell_p^n\;=\;\left\{(a_1,\ldots,a_n):a_i\in\mathbb{K},\ i=1,\ldots,n\right\}$$

con la norma $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$ si $1\leq p<\infty$, o $\|x\|_\infty=\sup_{1\leq i\leq n}|x_i|$ si $p=\infty$, para cualquier $x=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n$.

Si $(X,\|\cdot\|_X)$ y $(Y,\|\cdot\|_Y)$ son espacios normados, toda aplicación $T:X\to Y$ que satisfaga la igualdad $T(ax+by)=aT(x)+bT(y)$ cualesquiera sean $x,y\in X$ y $a,b\in\mathbb{R}$, se llama una **transformación lineal**.

Si T es transformación lineal y si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$, entonces diremos que T es un **operador lineal continuo** o **acotado**. Si se define, para cada operador lineal acotado $T : X \to Y$, el número $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$, entonces $\|T\|$ define una norma sobre el espacio vectorial $L(X,Y)$ de todos los operadores lineales acotados de X en Y. Más aun, $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si, y sólo si, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es de Banach. Cuando $Y = \mathbb{R}$, escribiremos X^* en lugar de $L(X,\mathbb{R})$. A X^* se le llama el **dual** (topológico) de X, sus elementos los llamaremos **funcionales lineales continuos** o **acotados** y escribiremos $x^*, y^*, \ldots$ para denotar, en general, a los elementos de X^*, aunque en algunas ocasiones escribiremos $f, g, \ldots$ para denotar elementos de X^*. Observe que, por el resultado anterior, X^* con la norma $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \leq 1\}$ para todo $x^* \in X^*$, siempre es un espacio de Banach independientemente si X es o no de Banach. Es fácil establecer que si X es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{x^*(x) : \|x\| \leq 1\}.$$

Dado $x^* \in X^*$ y $x \in X$, en ocasiones, en lugar de usar la notación $x^*(x)$ para denotar el valor de x^* en x, escribiremos $\langle x, x^* \rangle$.

Recordemos que un subconjunto K de un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es **convexo**, si $tx + (1-t)y \in K$ siempre $x, y \in K$ y $0 < t < 1$, es decir, si cualquier segmento lineal $[x,y] := \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en K, cualesquiera sean $x, y \in K$. Si $K \subseteq X$ es convexo, entonces un punto $x \in K$ se dice que es un **punto extremal** de K si x no es el centro de ningún segmento lineal (no trivial) contenido en K. Denotaremos por $\text{ext}(K)$ el conjunto de todos los puntos extremales de K.

Cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, el diámetro de $A \subseteq X$ será denotado por $\|\cdot\| - \text{diam}(A)$, $\text{diam}_{\|\cdot\|}(A)$, norma-diam$(A)$, o simplemente $\text{diam}(A)$ cuando no exista peligro de confusión en la notación. También, si A es un subconjunto de un espacio topológico de Hausdorff (X, τ), el interior de A lo denotaremos por $\tau - \text{int}(A)$, $\text{int}_\tau(A)$ o $\text{int}(A)$ si el contexto es claro, mientras que su clausura será denotada por $\overline{A}^\tau$, $\overline{A}^X$, o $\overline{A}$ si no existe posibilidad alguna de confusión. Similarmente, $X \setminus A$, o bien A^c, denotará el complemento de A en X.

Un **producto interno** sobre un espacio vectorial real X es una aplicación $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes propiedades: para todo $x, y, z \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

(1) $\langle x, y \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$,

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(4) $\langle x, z \rangle \leq \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$.

Al par $(X, \langle , \rangle)$ se le llama **espacio producto interno**. Con frecuencia diremos que X es un espacio producto interno sin especificar explícitamente el producto interno $\langle , \rangle$. Cuando X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces la definición de producto interno exige, además, que $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in X$. Si $(X, \langle , \rangle)$ es un espacio producto interno, entonces el producto interno $\langle , \rangle$ genera la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in X$ y, en consecuencia, todo espacio producto interno puede ser pensado como un espacio normado con la norma antes definida. Si dicho espacio normado resulta ser completo, entonces diremos que $(X, \langle , \rangle)$ es un **espacio de Hilbert**. Por ejemplo, $\mathbb{K}^n$ con el producto interno natural $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ es un espacio de Hilbert. Similarmente, ℓ_2 con el producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ donde $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ y $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ son elementos de ℓ_2, también constituye un espacio de Hilbert. Sin embargo, $C[0,1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ no es un espacio de Hilbert.

Una desigualdad importante, conocida con el nombre de **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que en cualquier espacio producto interno $(X, \langle,\rangle)$ se cumple que

$$|\langle x,y\rangle| \ \leq \ \|x\|\,\|y\| \ \text{ para todo } x,y \in X.$$

1.6. Conjuntos de primera y segunda categoría

¿Cuán *grande*, en un sentido que debemos precisar, es el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función a valores reales definida sobre un espacio métrico? Pensemos, por un momento, sobre la función característica de los números racionales. *Medir* el tamaño de estos conjuntos nos conduce a la noción, definida por Baire, conocida como conjunto de *primera categoría*. La *pequeñez* de estos conjuntos quedará evidenciada al demostrarse, hecho conocido como el Teorema de Categoría de Baire, que ningún espacio métrico completo puede ser cubierto con uniones numerables de conjuntos de primera categoría.

Definición 1.6.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico Hausdorff y E un subconjunto de X. Diremos que E es* ***nunca denso*** *en X si* $\operatorname{int}\big(\overline{E}\big) = \varnothing$. *Si ocurre que* $\operatorname{int}\big(\overline{E}\big) \neq \varnothing$, *entonces se dice que E es* ***denso en alguna parte*** *de X.*

El término **conjunto raro** se usa, con cierta frecuencia, como un sinónimo de conjunto nunca-denso. Observe que un conjunto nunca-denso no puede ser entorno de ninguno de sus puntos, es decir, *$E \subseteq X$ es nunca-denso en X si cada subconjunto abierto no vacío U de X contiene un conjunto abierto no vacío V tal que $V \cap E = \varnothing$*. En efecto, suponga que existe un subconjunto abierto no vacío U de X con la propiedad de que cualquier subconjunto abierto no vacío de U intersecta a E. Esto, por supuesto, significa que $\overline{E}$ contiene a U lo que es imposible por ser E nunca-denso. Por otro lado, decir que *E no es nunca-denso significa que $\overline{E}$ contiene a algún abierto no vacío $U \subseteq X$, es decir, E es denso en alguna parte de X, o de modo equivalente, E es denso en algún abierto no vacío U de X*. Notemos también que E es nunca-denso en X si, y sólo si, $\overline{E}$ es nunca-denso en X y que cualquier subconjunto de un conjunto nunca-denso sigue siendo nunca-denso. La frontera de cualquier conjunto cerrado $E \subseteq X$ es nunca-denso en X. En efecto, suponga que U es un abierto no vacío incluido en $\operatorname{Fr}(E) = E \setminus \operatorname{int}(E)$. Entonces $U \subseteq E$, de donde se sigue que U está contenido en el interior de E lo cual es imposible.

Lema 1.6.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y suponga que $\mathcal{D} = \{D_1,\ldots,D_n\}$ es una colección finita de subconjuntos no vacíos de X tal que $D_1 \cup \ldots \cup D_n$ es denso en X. Entonces existe algún k en $\{1,2,\ldots,n\}$ tal que D_k es denso en alguna parte de X.*

Prueba. Sin perder generalidad, podemos asumir y, así lo haremos, que la colección finita $\mathcal{D} = \{D_1,\ldots,D_n\}$ cuya unión es densa en X es *minimal* en el siguiente sentido: si removemos algún D_i de dicha colección, la unión de lo que queda no es denso en X. Supongamos entonces que hemos removido, por ejemplo, a D_n de la colección minimal $\mathcal{D}$. Como $\overline{D_1 \cup \ldots \cup D_{n-1}} = \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_{n-1} \neq X$, resulta que en alguna parte de X habita algún conjunto abierto no vacío, digamos U, que no intersecta a esa clausura. Por supuesto, teniendo en cuenta que $D_1 \cup \ldots \cup D_n$ es denso en X, es decir, $\overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_{n-1} \cup \overline{D}_n = X$, el conjunto abierto U debe estar contenido en $\overline{D}_n$, lo cual significa que $\operatorname{int}\big(\overline{D}_n\big) \neq \varnothing$ y, por lo tanto, el conjunto D_n es denso en alguna parte de X. ■

La siguiente simple observación permitirá deducir algunas de las formas equivalentes que posee la noción de conjunto nunca-denso.

Teorema 1.6.1. *Para cualquier subconjunto B de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se cumple que*

$$X \setminus \operatorname{int}(B) = \overline{X \setminus B}. \tag{1.6.1}$$

En particular, $\operatorname{int}(B) = \varnothing$ *si, y sólo si,* $X \setminus B$ *es denso en* X.

Prueba. En efecto, como $\operatorname{int}(B) \subseteq B$, entonces $X \setminus B \subseteq X \setminus \operatorname{int}(B)$ y ya que $X \setminus \operatorname{int}(B)$ es cerrado en X, se concluye que $\overline{X \setminus B} \subseteq X \setminus \operatorname{int}(B)$. Por otro lado, supongamos que $x \in X$ pero $x \notin \overline{X \setminus B}$. Entonces existe una bola abierta $U(x,r)$ en X con centro x y radio $r > 0$ tal que $U(x,r) \cap (X \setminus B) = \varnothing$. Esto significa que $x \in U(x,r) \subseteq B$, lo cual quiere decir que $x \in \operatorname{int}(B)$ y, en consecuencia, $x \notin X \setminus \operatorname{int}(B)$. Esto nos dice que $X \setminus \operatorname{int}(B) \subseteq \overline{X \setminus B}$ y termina la prueba. ■

Observemos que, como consecuencia del teorema anterior, tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos nunca-densos.

Teorema 1.6.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff y sea B un subconjunto de X. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

(a) *B es nunca-denso en X.*

(b) *$X \setminus \overline{B}$ es denso en X.*

Prueba. Esto es consecuencia inmediata de (1.6.1). ■

Conviene, en este punto, reforzar el resultado anterior con algunas observaciones importantes.

Comentario Adicional 1.6.1 (1) En relación al apartado (b) del Teorema 1.6.2, debemos hacer notar que si un subconjunto de X, digamos A, es denso en X, entonces no es necesariamente cierto que su complemento, $X \setminus A$, es un subconjunto nunca-denso de X. En efecto, basta tomar $X = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{Q}$ para probar nuestra aseveración. Sin embargo, tenemos que

Si A es denso y, además, abierto en X, entonces $X \setminus A$ es nunca-denso en X.

Prueba. Supongamos que A es abierto y denso en X. Por el Teorema 1.6.2, basta probar que $X \setminus (\overline{X \setminus A})$ es denso en X. Por ser A abierto tenemos que $\overline{X \setminus A} = X \setminus A$ y así, de la igualdad

$$X \setminus (\overline{X \setminus A}) = X \setminus (X \setminus A) = A$$

se obtiene el resultado gracias a la densidad de A en X. ■

(2) Observemos que la intersección de dos conjuntos densos en un espacio topológico Hausdorff (X,τ) no es necesariamente denso. Basta considerar, por ejemplo, $A_1 = \mathbb{Q}$ y $A_2 = \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ como subconjuntos de $\mathbb{R}$, para darnos cuenta de ello. Sin embargo, si además de densos nuestros conjuntos son abiertos, entonces su intersección es densa. De hecho tenemos:

Si $G_1, G_2, \ldots, G_n$ es una colección finita de subconjuntos no vacíos, abiertos y densos en X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ es, además de abierto, denso en X.

Prueba. La prueba es suficiente hacerla para dos conjuntos. Supongamos entonces que G_1 y G_2 son abiertos y densos en X. Sea U un abierto no vacío de X. Como G_1 es abierto y denso en X, resulta que $U \cap G_1$ es un abierto no vacío. Ahora bien, puesto que G_2 es denso en X, entonces $(U \cap G_1) \cap G_2 = U \cap (G_1 \cap G_2) \neq \varnothing$. Esto prueba que $G_1 \cap G_2$ es denso y, por supuesto, abierto en X. ■

Es interesante observar que si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, entonces la colección τ_{ad} formada por el conjunto vacío más todos los subconjuntos $\tau-$abiertos y $\tau-$densos de X constituye una nueva topología para X la que, por supuesto, es más pequeña que τ. En efecto, claramente el conjunto vacío y X están en τ_{ad}. Similarmente, la unión de cualquier colección de elementos de τ_{ad} sigue viviendo en τ_{ad} y, finalmente, por (2), la intersección de cualquier colección finita de elementos de τ_{ad} se queda dentro de τ_{ad}.

Uno de los resultados importantes en análisis y cuyo estudio es el objetivo principal de estas notas, es el Teorema de Categoría de Baire, el cual establece que en ciertos espacios topológicos la intersección de cualquier colección numerable de subconjuntos abiertos densos de dicho espacio también es densa.

(3) *Toda unión finita de conjuntos nunca-densos es nunca-denso*. En efecto, si $A_1,\dots,A_n$ es una colección finita de conjuntos nunca-densos en X, entonces por el Teorema 1.6.2, $X\setminus\overline{A}_k$ es denso (y abierto) en X para $k=1,\dots,n$. Por el resultado anterior se sigue que

$$\bigcap_{k=1}^{n}(X\setminus\overline{A}_k)$$

es denso en X y, en consecuencia, como

$$\bigcap_{k=1}^{n}(X\setminus\overline{A}_k)=X\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k=X\setminus\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}$$

se concluye, usando de nuevo el Teorema 1.6.2, que $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ es nunca-denso en X.

(4) Si bien es cierto que la unión finita de conjuntos nunca-densos es nunca-denso, ella no se preserva por uniones numerables, es decir, si $\big(A_n\big)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión infinita de subconjuntos nunca-densos de X, entonces no es necesariamente cierto que su unión, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, sea nunca-denso en X. Basta considerar a $\mathbb{R}$ con la métrica usual como nuestro espacio ambiente y elegir una enumeración cualquiera de los racionales, digamos $(r_n)_{n=1}^{\infty}$. Cada conjunto $A_n=\{r_n\}$ es nunca-denso en $\mathbb{R}$, pero su unión es $\mathbb{Q}$ el cual es denso en $\mathbb{R}$. Así, $\operatorname{int}\big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}\big)=\operatorname{int}\big(\overline{\mathbb{Q}}\big)=\operatorname{int}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Aunque la noción de conjunto nunca-denso se transmite por inclusión, dicho concepto sigue siendo muy restrictivo debido esencialmente a su incapacidad para preservarse por uniones numerables. Sin embargo, la definición de conjunto de primera categoría subsana esa deficiencia. En el Capítulo 2 de su tesis, Baire introduce los conceptos de primera y segunda categoría, mientras que Denjoy es el responsable del término conjunto residual o genérico.

Definición 1.6.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y M un subconjunto de X. Diremos que*

*a) M es de **primera categoría** en X si existe una sucesión $\big(A_n\big)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X, cada uno de los cuales es nunca-denso en X tal que $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.*

*b) M es de **segunda categoría** en X si no es de primera categoría en X.*

Cuando X es de segunda categoría, entonces frecuentemente se dice que X es un **espacio de segunda categoría en sí mismo**. Observe que otro modo equivalente de formular la noción de espacio de segunda categoría es:

Observación (ESC). *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) es de segunda categoría si, y sólo si, cualquier intersección numerable de subconjuntos abiertos densos en X es no vacía.*

A los conjuntos de primera categoría también se les conoce con el nombre de conjuntos **magros** o **diseminados** y a los conjuntos de segunda categoría como conjuntos **no magros** o **co-magros**.

Conviene destacar que estas nociones de categoría son relativas, es decir, dependen del espacio ambiente. Por ejemplo, $\mathbb{R}$, visto como subconjunto de $\mathbb{C}$, es cerrado con interior vacío, por lo que resulta ser de primera categoría en $\mathbb{C}$, pero como veremos más adelante, $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo. Es claro que los conjuntos de primera categoría se conservan por uniones numerables. Si estos conjuntos, los de primera categoría, vivieran, por ejemplo, en un espacio métrico completo, esa condición nos indicaría que ellos son conjuntos topológicamente *pequeños* en el siguiente sentido: ninguno ellos y, más aun, ni siquiera alguna unión numerable de tales conjuntos, logran cubrir la totalidad de los puntos del espacio métrico completo. Esto es, en esencia, lo que probó Baire y que hoy en día se conoce como el *Teorema de Categoría de Baire*. Por otro lado, un conjunto de segunda categoría es, desde el punto de vista topológico y por ser opuesto a los conjuntos de primera categoría, un conjunto *grande*, tal vez demasiado grande. Una noción intermedia más adecuada, conocida como residualidad, será formulada un poco más abajo.

Antes de continuar recordaremos algunos conceptos y resultados conocidos que serán fundamentales en nuestro estudio. Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y sea F un subconjunto no vacío de X. Decimos que F es un $\mathbf{F}_\sigma$ si existe una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados en X tal que

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

El complemento de un conjunto F_σ se llama un conjunto $\mathbf{G}_\delta$; es decir, un conjunto G es un G_δ si existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos en X tal que

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Un conjunto que simultáneamente se puede representar tanto como un F_σ así como un G_δ será llamado **ambiguo**.

Ejemplo 1.6.1. (1) *$\mathbb{Q}$ es un F_σ, mientras que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, es un G_δ-denso.*

¿Es $\mathbb{Q}$ un conjunto ambiguo? Más adelante veremos, como consecuencia del Teorema de Categoría de Baire, que a $\mathbb{Q}$ le está negada la posibilidad de poder expresarse como un G_δ.

(2) *Si (X,d) es un espacio métrico y $F\subseteq X$ es cerrado, entonces F es un G_δ. En particular, F es ambiguo.*

Prueba. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea

$$G_n = \bigcup_{x\in F} U(x,1/n)$$

donde, como siempre, $U(x,1/n)$ es la bola abierta con centro x y radio $1/n$. Como cada G_n es abierto y teniendo en cuenta que $F\subseteq G_n$ para todo n, resulta que $F\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Para demostrar la otra inclusión, tomemos $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Entonces $y\in G_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Fijado un n, existe un $x\in F$ tal que $y\in U(x,1/n)$ lo cual dice que $y\in\overline{F}$ y como F es cerrado, entonces $y\in F=\overline{F}$. Esto prueba que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\subseteq F$ y termina la demostración de (2). ■

(3) *Cualquier conjunto abierto G en un espacio métrico (X,d) es un F_σ. En particular, G es ambiguo pues trivialmente es un G_δ.*

Existen varias formas equivalentes de definir lo que es un espacio de Baire. La siguiente es una de la más útiles y convenientes que existen. El término espacio de Baire fue introducido por N. Bourbaki [67] para describir aquellos espacios topológicos en los cuales cualquier conjunto abierto no vacío es de segunda categoría.

Definición 1.6.3. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se llama **espacio de Baire** si, para cualquier sucesión $(G_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos densos de X, su intersección, $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$, es denso en X.*

Lo primero que debemos destacar es que, por la Observación (ESC), *todo espacio de Baire es de segunda categoría*. Sin embargo, existen espacios de segunda categoría que no son espacios de Baire (véase la observación (1) del Comentario Adicional 1.7.3, página 42). Por otro lado, existen ciertas categorías de espacios topológicos en donde ambas nociones coinciden. Por ejemplo, todo espacio homogéneo de segunda categoría es un espacio de Baire (véase, por ejemplo, [208], Prop. 1.27). Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que es **homogéneo** si para cualquier par x,y de puntos distintos de X, existe un homeomorfismo $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(x) = y$.

Otra de las definiciones importantes que usaremos con mucha frecuencia en estas notas es la siguiente:

Definición 1.6.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Un subconjunto M de X se llama **residual** en X si $X \setminus M$ es de primera categoría en X.*

Una primera observación respecto a los conjuntos residuales es la siguiente: *M es un subconjunto residual de X si, y sólo si, M contiene la intersección de una familia numerable, digamos $(G_n)_{n=1}^\infty$, de subconjuntos abiertos densos en X*. En efecto, supongamos que M es residual en X. Entonces existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos nunca-densos de X tal que $X \setminus M = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Por el Teorema 1.6.2, cada conjunto abierto $G_n = X \setminus \overline{A}_n$ es denso en X y, en consecuencia,

$$M = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \overline{A}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

La otra implicación se deja como ejercicio al lector. Cuando (X,τ) es un espacio de Baire, se puede afirmar algo más contundente: todo subconjunto residual de X es denso en X, en particular, no vacío. Eso forma parte del contenido del próximo teorema.

Históricamente, los espacios métricos completos fueron los primeros espacios (como generalizaciones de la recta real $\mathbb{R}$) en donde se demostró que ellos satisfacen las condiciones equivalentes dadas en el próximo resultado.

Teorema 1.6.3 (Categoría de Baire). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X es un espacio de Baire.*

(b) *Cada conjunto de primera categoría en X tiene interior vacío.*

(c) *Cada subconjunto abierto no vacío G de X es de segunda categoría en X.*

(d) *Todo subconjunto residual de X es denso en X; es decir, si E es de primera categoría en X, entonces $X \setminus E$ es denso en X.*

Prueba. $(b) \Rightarrow (a)$. Sea (G_n) una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X. Entonces, por la observación (1) del Comentario Adicional 1.6.1, página 34, cada $X \setminus G_n$ es un subconjunto nunca-denso de X. Por (b), $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene interior vacío y así, gracias a (1.6.1),

$$X \setminus \left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

es denso en X.

$(a) \Rightarrow (c)$. Sea G un subconjunto no vacío y abierto de X y supongamos que G es de primera categoría en X. Entonces existe una sucesión (E_n) de subconjuntos nunca-densos de X tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. De aquí se sigue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{E}_n) \subseteq X \setminus G. \tag{1.6.2}$$

Por otro lado, como cada E_n es nunca-denso en X, entonces por el Teorema 1.6.2 resulta que cada subconjunto $X \setminus \overline{E}_n$ es abierto y denso en X y, así, de (a) obtenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{E}_n)$ es denso en X. En particular, por (1.6.2), $X \setminus G$ es denso en X. Pero siendo $X \setminus G$ cerrado y denso en X, tenemos que $X \setminus G = X$ y, por consiguiente, $G = \varnothing$. Esta contradicción establece que G es de segunda categoría en X.

$(c) \Rightarrow (d)$. Sea E un subconjunto que es de primera categoría en X. Entonces $\operatorname{int}(E)$ también es de primera categoría en X. Por (c), $\operatorname{int}(E) = \varnothing$ y por (1.6.1) concluimos que $X \setminus E$ es denso en X.

$(d) \Rightarrow (b)$. Sea E un subconjunto de primera categoría en X. Por (d) tenemos que $X \setminus E$ es denso en X y gracias a (1.6.1), se concluye que $\operatorname{int}(E) = \varnothing$. ■

1.7. El Teorema de Categoría de Baire

Estamos interesados en conocer qué tipos particulares de espacios topológicos satisfacen las condiciones equivalentes dadas en el Teorema 1.6.3. En esta sección vamos a demostrar que los espacios métricos completos así como los espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos las satisfacen. En general, veremos que todo espacio Čech-completo así como todo espacio Oxtoby-completo (más generales que los Čech-completos, véase la Sección 1.11) son también espacios de Baire.

Estamos ahora en posición de formular y probar el Teorema de Categoría de Baire para los espacios métricos completos y los espacios de Hausdorff localmente compactos. En 1897, William Fogg Osgood prueba que la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos densos de $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$. Dos años después, R. Baire observa que el mismo resultado sigue siendo verdadero en $\mathbb{R}^n$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas funciones de la primera clase de Baire). En 1914, F. Hausdorff extendió el resultado a los espacios completamente metrizables. Un poco más tarde, Stefan Banach observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire no sólo es cierto en $\mathbb{R}^n$ sino también, con la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico localmente compacto, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como El Teorema de Categoría de Baire para Espacios Métricos Completos y Espacios Topológicos Localmente Compactos.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos). *Si (X,d) es un espacio métrico **completo**, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Nuestra tarea es demostrar que $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Como G_1 es denso en X, entonces $U \cap G_1 \neq \varnothing$. Sea $x \in U \cap G_1$ y determinemos una bola abierta U_1 con centro en x y radio < 1 contenida en $U \cap G_1$ tal que $\overline{U}_1 \subseteq U \cap G_1$. Como U_1 es un abierto no vacío de X y G_2 es denso en X, entonces $U_1 \cap G_2 \neq \varnothing$. De nuevo, existe una bola abierta U_2 de radio $< 1/2$ contenida en $U_1 \cap G_2$ tal que $\overline{U}_2 \subseteq U_1 \cap G_2$. Notemos una vez más que $U_2 \cap G_3 \neq \varnothing$ por la densidad de G_3. Podemos, sin duda alguna, continuar con esta receta indefinidamente para obtener una sucesión de bolas abiertas $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo:

1. $\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots \supseteq \overline{U}_n \supseteq \cdots$ y
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{U}_n) = 0.$

Todo está preparado para invocar el Teorema de Encaje de Cantor y concluir que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \varnothing$. Observemos ahora que si definimos $U_0 = U$, obtenemos

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(U_{n-1} \cap G_n\Big) \subseteq U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Otras variantes del Teorema de Categoría de Baire se pueden obtener modificando el concepto de completitud. Algunas de ellas las discutiremos en la Sección 1.11, donde se estudian conceptos de completitud más complicados tales como: completitud de Čech, pseudo-completitud o completitud de Oxtoby, etc.

Comentario Adicional 1.7.2 Habíamos afirmado un poco más arriba que todo espacio métrico completo es de segunda categoría en sí mismo. Esto, por supuesto, es consecuencia inmediata del Teorema de Categoría de Baire más el hecho de que todo espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo. También es claro que cualquier conjunto residual viviendo en un espacio métrico completo es de segunda categoría.

El Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos posee, en principio, dos limitaciones importantes que debemos destacar.

(1) La primera tiene que ver con la *completitud* del espacio métrico (X,d). No existe ninguna garantía de un Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos no completos, es decir, la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos y densos en un espacio métrico no completo puede ser vacía. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}[t]$ el espacio vectorial de dimensión infinita de todos los polinomios con coeficientes reales. Para cada $p \in X$, donde $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, definimos su norma por

$$\|p\| = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Es fácil ver que $\|\cdot\|$ define una norma sobre X la que a su vez genera la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ bajo la cual (X,d) no es un espacio completo. En efecto, la sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

es de Cauchy en X, pues si $n < m$, entonces

$$d(p_m, p_n) = \|p_m - p_n\| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}$$

el cual se puede hacer tan pequeña como se quiera si n se escoge lo suficientemente grande. Por otro lado, la sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario, ya que si $m > n$, entonces

$$\begin{aligned} d(p_m, p) = \| p_m - p \| &= |a_0 - 1| + |a_1 - 1| + \left|a_2 - \frac{1}{2}\right| + \cdots + \left|a_n - \frac{1}{n!}\right| + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{m\to\infty} d(p_m, p) \ \geq \ \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ que se prefije. Pero como, $\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} > 0$ para cualquier entero positivo n, resulta que la sucesión $(p_m)_{m=1}^{\infty}$ no converge a ningún polinomio en X.

Veamos ahora que X es de primera categoría. En primer lugar observemos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n es el subespacio vectorial de X formado por todos los polinomios de grado menor o igual a n. Puesto que la dimensión de cada F_n es finita, entonces F_n es cerrado en X y, en consecuencia, tiene interior vacío (véase el Ejemplo (**B**-2), página 212). Esto prueba que X es de primera categoría en sí mismo. Finalmente, por el Teorema 1.6.2, cada uno de los conjuntos $G_n = X \setminus F_n$ es abierto y denso en X, pero claramente su intersección no es densa, pues $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$.

(2) La segunda observación es la exigencia de la *numerabilidad* en la colección de los conjuntos abiertos que son densos en el espacio X. Si se elige una colección no numerable de tales abiertos densos en dicho espacio es posible que la conclusión del Teorema de Categoría de Baire no se cumpla. Por ejemplo, trabajando con $X = \mathbb{R}$ y si, para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos $G_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, resulta que cada G_x es abierto y denso en X, pero sin embargo, su intersección es vacía:

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} G_x = \varnothing.$$

(3) Ya hemos observado que *las nociones de categoría son relativas, es decir, dependen del espacio ambiente*. Considere, por ejemplo, a $\mathbb{Z}$ dotado de la métrica inducida por la métrica estándar de $\mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo y, por el Teorema de Categoría de Baire, es de segunda categoría en sí mismo lo que, en principio, pudiera ser contradictorio al hecho de que $\mathbb{Z}$ es la unión de una colección numerable de puntos. Sin embargo, en este espacio, cada punto es un conjunto abierto y, por consiguiente, no es nunca-denso, es decir, $\mathbb{Z}$ no es de primera categoría. Por otro lado, si $\mathbb{Z}$ es visto como un subconjunto de $\mathbb{R}$ y no como un espacio en sí mismo, entonces $\mathbb{Z}$, efectivamente, es un conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}$.

(4) La demostración de Cantor de *la no numerabilidad de* $\mathbb{R}$ *es consecuencia inmediata del Teorema de Categoría de Baire* dado anteriormente. En efecto, si $\mathbb{R}$ fuese numerable, entonces existiría una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$. Definiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $G_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$, resulta que ellos son abiertos y densos en $\mathbb{R}$, por lo que el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $\mathbb{R}$, lo cual es imposible ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} = \varnothing$.

(5) Ser un espacio de Baire es una *propiedad topológica*; es decir, se preserva bajo homeomorfismos, por lo tanto, *todo espacio topológico homeomorfo a un espacio métrico completo es un espacio de Baire*.

Otra clase importante de espacios topológicos que pertenecen a la familia de los espacios de Baire son los espacios de Hausdorff localmente compactos. Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) es **localmente compacto** *si cada $x \in X$ posee un entorno abierto U_x cuya clausura es compacta.*

La demostración del próximo resultado, el cual es la versión del Teorema de Categoría de Baire para espacios localmente compactos, es muy similar a la del Teorema 1.7.1.

Teorema 1.7.2 (Teorema de Categoría de Baire para espacios localmente compactos). *Si (X,τ) es un espacio de Hausdorff* ***localmente compacto****, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X. Para demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, sea G un subconjunto abierto no vacío de X y veamos que G intersecta a $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Puesto que G_1 es denso en X, tenemos que $G \cap G_1 \neq \varnothing$. Sea $x \in G \cap G_1$. Como $K = \{x\}$ es compacto y $G \cap G_1$ es abierto conteniendo a K, existe, por el Teorema 1.4.16, un abierto no vacío $O_1 \subseteq X$ tal que $\overline{O}_1$ es compacto y $O_1 \subseteq \overline{O}_1 \subseteq G \cap G_1$. De nuevo, como G_2 es denso en X, el conjunto abierto $O_1 \cap G_2$ es no vacío, y por lo tanto, usando de nuevo el Teorema 1.4.16, podemos obtener un abierto no vacío O_2 en X tal que $\overline{O}_2$ es compacto y $O_2 \subseteq \overline{O}_2 \subseteq O_1 \cap G_2$. Continuando inductivamente con este proceso podemos encontrar una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{O}_n$ es compacto y $O_n \subseteq \overline{O}_n \subseteq O_{n-1} \cap G_n$. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{O}_k = \overline{O}_n$$

resulta que la sucesión $(\overline{O}_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de intersección finita y así, por el Teorema 1.4.11 aplicado al compacto $\overline{O}_1$, se tiene que

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{O}_n \subseteq G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Esto termina la prueba. ■

En particular, cualquier espacio de Hausdorff compacto, por ser un espacio localmente compacto, es un espacio de Baire. Ya hemos visto, échele una miradita al Teorema 1.6.3, que cualquier conjunto abierto viviendo en un espacio de Baire es de segunda categoría. El siguiente resultado dice algo más: los subconjuntos abiertos no vacíos de un espacio de Baire retienen esa propiedad.

Teorema 1.7.3. *Todo subconjunto* ***abierto*** *no vacío de un espacio de Baire es, en su topología relativa, un espacio de Baire.*

Prueba. Sea O un subconjunto abierto no vacío de un espacio de Baire (X,τ) y sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos densos en O. Entonces cada G_n es abierto en X y, en consecuencia, los conjuntos $H_n = G_n \cup (X \setminus \overline{O})$, $n = 1, 2, \ldots$ son abiertos y densos en X. En efecto, cada H_n es abierto por ser unión de dos conjuntos abiertos, mientras que la densidad es consecuencia de las siguientes dos observaciones: primero, siendo G_n es denso en O, resulta entonces que $O \subseteq \overline{G}_n$, y segundo, $\overline{H}_n = \overline{G}_n \cup \left(\overline{X \setminus \overline{O}}\right) \supseteq \overline{O} \cup (X \setminus \overline{O}) = X$. Puesto que X es un espacio de Baire, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ es denso en X, en particular, no vacío. Finalmente, como

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(G_n \cup (X \setminus \overline{O})\Big) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \cup (X \setminus \overline{O}),$$

se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en O. ■

El resultado anterior nos garantiza que todo subconjunto abierto no vacío de un espacio de Baire es, en su topología relativa, un espacio de Baire. ¿Qué ocurre con los subconjuntos cerrados? Sabemos que si X

es un espacio métrico completo o un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, entonces todo subconjunto cerrado de X preserva esa propiedad y, por consiguiente, resulta ser, en su topología relativa, un espacio de Baire; sin embargo, si X es un espacio de Baire arbitrario y F es un subconjunto cerrado de X, entonces no siempre es cierto que F, en su topología relativa, sea un espacio de Baire. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.7.1. Un subconjunto cerrado de un espacio de Baire que no es un espacio de Baire. Consideremos el espacio

$$X_0 \;=\; \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big\}.$$

Veamos que X_0 es un espacio de Baire. Para probar esto, considere el conjunto $Y = \{(x,y) \in X_0 : y \neq 0\}$. Entonces Y es claramente abierto y denso en X_0 y, además, es un espacio de Baire por ser localmente compacto. Sea ahora $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X_0 y observe que $G_n \cap Y$ es, para cada $n \in \mathbb{N}$, un abierto denso en Y y, gracias al hecho de que Y es un espacio de Baire, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap Y) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap Y$ es denso en Y, de donde se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X_0. Esto prueba que X_0 es un espacio de Baire. Finalmente, el subconjunto $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$ es claramente cerrado en X_0 pero, obviamente, de primera categoría.

El ejemplo anterior permite la justificación de la siguiente definición:

Definición 1.7.1. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que es **hereditariamente de Baire** si cada subconjunto cerrado de X es un espacio de Baire con respecto a la topología relativa.*

Observe que todo espacio hereditariamente de Baire es un espacio de Baire. En virtud de lo expresado anteriormente se puede afirmar, con toda propiedad, que los espacios completamente metrizables y los espacios localmente compactos son hereditariamente de Baire. Nótese que nuestro espacio X_0, en el ejemplo anterior, no es ni localmente compacto ni completamente metrizable.

Una manera sencilla de caracterizar los espacios hereditariamente de Baire es por medio del siguiente teorema, el cual es muy similar a las equivalencias (a) y (c) del Teorema 1.6.3 cambiando Baire por hereditariamente de Baire y abierto por cerrado.

Teorema 1.7.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es hereditariamente de Baire.*

(2) *Todo subconjunto cerrado de X es de segunda categoría en sí mismo.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$ es inmediata por el hecho de que todo espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo. Para demostrar la otra implicación suponga, para llegar a una contradicción, que (2) se cumple pero no (1). Entonces existe un subconjunto cerrado F de X que no es de Baire. Esto implica la existencia de un abierto relativo V de F que es de primera categoría. Escribamos a V en la forma $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es un cerrado de F que es nunca-denso en V. Como cada F_n sigue siendo nunca-denso en $\overline{V}$ y ya que

$$\overline{V} \;=\; \big(\overline{V} \setminus V\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

tenemos que el conjunto cerrado $\overline{V}$ es de primera categoría en sí mismo. Esta contradicción da por terminada la prueba. ■

Comentario Adicional 1.7.3 (1) **No todo espacio de segunda categoría es un espacio de Baire**. Aunque ya hemos visto que todo espacio métrico completo es de segunda categoría en sí mismo, existen espacios métricos de segunda categoría en sí mismo que no son espacios de Baire. Por ejemplo, si

$$A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad B = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}, y \neq 0\},$$

entonces el espacio $X = A \cup B$, con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$, es de segunda categoría en sí mismo. En efecto, sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X. Para ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$, podemos proceder del modo siguiente: teniendo en cuenta que $G_n \cap (0,\infty)$ es abierto y denso en $(0,\infty)$ por ser $(0,\infty)$ abierto en X, resulta que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap (0,\infty)$ es denso en $(0,\infty)$ pues $(0,\infty)$ es un espacio de Baire (él es localmente compacto), de donde se concluye que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Esto prueba que X es de segunda categoría en sí mismo. Por otro lado, X no es un espacio de Baire ya que B es un conjunto abierto de X que es unión numerable de conjuntos nunca-densos.

Es fácil ver que la patología anterior desaparece si X es un espacio vectorial topológico: **Un espacio vectorial topológico es de Baire si, y sólo si, es de segunda categoría en sí mismo**. En efecto, si X es un espacio vectorial topológico de segunda categoría en sí mismo, entonces todo entorno abierto V de 0 es de segunda categoría en X, pues $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$. Por la invariancia de las traslaciones, cualquier entorno de cualquier punto es de segunda categoría en X y, en consecuencia, todo abierto es de segunda categoría en X. Se sigue ahora del Teorema 1.6.3 (c) que X es un espacio de Baire.

(2) **No todo espacio normado es un espacio de Baire**. La observación (1) del Comentario Adicional 1.7.2 es un ejemplo de un espacio normado que es de primera categoría en sí mismo. Otro ejemplo es el siguiente: sea $X = C([0,1])$ el espacio normado formado por todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ provisto de la norma $\|\cdot\|_1$ definida por

$$\| f \| = \int_0^1 f(x)\, dx$$

para toda $f \in C([0,1])$. Es un hecho ya establecido que $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado no completo. Consideremos el conjunto $B = \{ f \in X : \| f \|_\infty \leq 1\}$, donde la norma $\|\cdot\|_\infty$ viene dada por $\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, para cada $f \in X$. Como B es equilibrado, convexo y absorbente, resulta que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB.$$

Nos proponemos demostrar que B es un conjunto $\|\cdot\|_1$-cerrado en X con interior vacío. Veamos esto. Si B tuviera interior no vacío, entonces $B - B = B + B = 2B$ sería un entorno del cero en X y, en consecuencia, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ serían equivalentes, lo cual es imposible. Para ver que B es $\|\cdot\|_1$-cerrado en X, tomemos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en B tal que $\| f_n - f \|_1 \to 0$ para alguna $f \in X$. Veamos que $f \in B$. Supongamos que ello no es cierto. Entonces $\| f \|_\infty > 1$ y, por consiguiente, existen un intervalo $J \subseteq [0,1]$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > 1 + \delta$ para todo $x \in J$. Pero entonces

$$\| f_n - f \|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \geq \int_J |f_n(x) - f(x)|\, dx > \delta \operatorname{long}(J)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo de esta forma el hecho de que $\| f_n - f \|_1 \to 0$. Esto prueba entonces que B es nunca-denso en $(X, \|\cdot\|_1)$ y, por lo tanto, que X es de primera categoría en sí mismo.

(3) **La recta de Sorgenfrey es un espacio de Baire**. Recordemos que la recta de Sorgenfrey, $\mathbb{S}$, no es otra cosa que $\mathbb{R}$ pero con la topología τ_s, la cual es generada por la base $\mathcal{B} = \big\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\big\}$. Observe que τ_s es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$.

Prueba de que $\mathbb{S}$ es de Baire. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en $\mathbb{S}$. Vamos a demostrar que $G = \bigcap_{n\geq 1} G_n$ es denso en $\mathbb{S}$. Para ello será suficiente tomar cualquier elemento en $\mathcal{B}$, digamos $[a,b) \in \mathcal{B}$, y demostrar que $[a,b) \cap G \neq \varnothing$. Puesto que $\mathcal{B}$ es una base para τ_s, cada G_n es unión de elementos de $\mathcal{B}$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto de índices J_n tal que

$$G_n \;=\; \bigcup_{\alpha\in J_n} \big[a_\alpha^n, b_\alpha^n\big).$$

La topología estándar de $\mathbb{R}$ (generada por los intervalos abiertos) la denotaremos por τ. Consideremos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, el τ-abierto U_n de $\mathbb{R}$ definido por

$$U_n \;=\; \bigcup_{\alpha\in J_n} \big(a_\alpha^n, b_\alpha^n\big).$$

Afirmamos que cada U_n es τ-denso en $\mathbb{R}$. En efecto, sea (u,v) un intervalo τ-abierto en $\mathbb{R}$ con $u < v$. Puesto que G_n es τ_s-denso en $\mathbb{S}$, tenemos que $[u,v) \cap G_n \neq \varnothing$. Por consiguiente, existe un $\alpha \in J_n$ para el cual $[u,v) \cap [a_\alpha^n, b_\alpha^n) \neq \varnothing$. De esto se sigue que $(u,v) \cap (a_\alpha^n, b_\alpha^n) \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $(u,v) \cap U_n \neq \varnothing$. Así, U_n es un abierto denso en $(\mathbb{R}, \tau)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$, con la topología usual, es un espacio espacio métrico completo, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es τ-denso en $\mathbb{R}$. Ahora bien, ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, resulta que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ también es τ-denso en $\mathbb{R}$, de donde obtenemos que

$$(a,b) \,\cap\, \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \neq \varnothing$$

cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Finalmente, en virtud de que

$$(a,b) \,\cap\, \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \;\subseteq\; [a,b) \,\cap\, \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big)$$

se concluye que

$$[a,b) \,\cap\, \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \neq \varnothing.$$

Esto termina la prueba de que $\mathbb{S}$ es un espacio de Baire. ■

(4) Otra forma de demostrar que un espacio topológico es un espacio de Baire, debido a G. Choquet, y similar en espíritu al Teorema de Encaje de Cantor, depende de la capacidad que poseen ciertos espacios en admitir una cierta relación de orden entre sus subconjuntos abiertos no vacíos de modo que se mantenga un fuerte lazo de contención entre ellos, y que además, las sucesiones "decrecientes", en el "orden" establecido, aún produzcan intersecciones no vacías. En el siguiente resultado usaremos $\tau_* = \tau \setminus \{\varnothing\}$, donde (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff.

Teorema de Choquet. *Un espacio topológico de Hausdorff* (X,τ) *es un espacio de Baire si existe una relación* $<$ *entre los elementos de* τ_* *tal que,*

(a) *si* $A < B$, *entonces* $A \subseteq B$, *cualesquiera sean* $A, B \in \tau_*$,

(b) *para cualquier subconjunto abierto no vacío* B, *existe un* $A \in \tau_*$ *tal que* $A < B$,

(c) *si* $A \subseteq B < C \subseteq D$, *entonces* $A < D$, *donde* $A, B, C, D \in \tau_*$ *y*

(d) *si* $A_n > A_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$, *donde* $A_n \in \tau_*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Prueba. Vale la pena añadir que, por (a) y (c), la relación $<$ es transitiva, es decir, un orden parcial. Supongamos que X no es un espacio de Baire. Por el Teorema 1.6.3, existe un conjunto abierto no vacío G que es de primera categoría en X. Escojamos ahora una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos cerrados nunca-densos en X tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Vamos ahora a construir una sucesión $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X con $O_n \subseteq G$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$O_n > O_{n+1} \qquad \text{y} \qquad O_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \varnothing$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\operatorname{int}(F_n) = \varnothing$, entonces $G \nsubseteq F_1$, y así, $G \cap (X \setminus F_1)$ es un subconjunto abierto no vacío de G que no intersecta a F_1. Por (b), existe un subconjunto abierto no vacío O_1 tal que $O_1 < G \cap (X \setminus F_1)$. Por (a), $O_1 \subseteq G \cap (X \setminus F_1)$, es decir, $O_1 \subseteq G$ y $O_1 \cap F_1 = \varnothing$. Por (c), $O_1 < G$, lo cual finaliza la construcción de O_1.
Para construir O_2, notemos de nuevo que la condición $\operatorname{int}(F_1 \cup F_2) = \varnothing$, garantiza que $O_1 \nsubseteq (F_1 \cup F_2)$ y, como antes, esto determina que el conjunto $O_1 \cap (X \setminus (F_1 \cup F_2))$ es un abierto no vacío que no intersecta a $F_1 \cup F_2$. La condición (b) nos provee de la existencia de un conjunto abierto no vacío O_2 tal que $O_2 < O_1 \cap (X \setminus (F_1 \cup F_2))$. Un llamado a (c) nos dice que $O_2 < O_1$, mientras que de (a) se sigue que $O_2 \subseteq O_1 \cap (X \setminus (F_1 \cup F_2))$ y, en consecuencia, $O_2 \cap (F_1 \cup F_2) = \varnothing$. Continuando de este modo obtenemos la sucesión buscada $(O_n)_{n=1}^{\infty}$. Una vez en posesión de la sucesión $(O_n)_{n=1}^{\infty}$, tenemos que

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \varnothing$$

y, así,

$$\varnothing = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big) \cap G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n,$$

mientras que por (d),

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \varnothing.$$

Esta contradicción establece que X es un espacio de Baire. ■

Por ejemplo, si (X,τ) es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces uno define la relación $<$ sobre τ_*, la familia de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X, del modo siguiente:

$$A < B \quad \textit{si } A \textit{ es relativamente compacto } \textit{ y } \overline{A} \subseteq B$$

para todo $A, B \in \tau_*$. No es difícil ver que ésta relación cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior y, por consiguiente, X es un espacio de Baire.

Similarmente, si (X,d) es un espacio métrico completo, entonces podemos definir la relación $<$, entre los subconjuntos abiertos no vacíos de X, como sigue:

$$A < B \qquad \text{si} \quad \overline{A} \subseteq B \quad \text{y} \quad d(A) \leq \frac{d(B)}{2},$$

donde $d(E) = \text{mín}\{1, \text{diam}(E)\}$, para cualquier $E \subseteq X$, y $\text{diam}(E)$ es el d-diámetro de E. Esta relación satisface las condiciones impuestas en el teorema anterior y, entonces, (X,d) es un espacio de Baire (véase, por ejemplo, [336], p. 263-265).

(5) Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X *tiene la* **propiedad de Moore** *si ningún conjunto cerrado $F \subseteq X$ es la unión de una sucesión de conjuntos cerrados $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, cualquier punto de F_n es un punto límite de $X \setminus F_n$.*

No es difícil ver que cualquier espacio métrico completo, así como cualquier espacio compacto posee la propiedad de Moore. La primera aparición de este resultado, demostrado para el caso en que $X = \mathbb{R}$, proviene de [318], Theorem 53, p. 21. El hecho interesante es el siguiente debido a J. T. Astin [22]:

Teorema de Astin. *Si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff con la propiedad de Moore, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $F_n = X \setminus G_n$. Puesto que cada F_n es cerrado y todo punto de F_n es un punto límite de $X \setminus F_n = G_n$, se sigue de nuestra hipótesis que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ no es un conjunto cerrado y, por consiguiente,

$$\varnothing \neq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Suponga, para obtener una contradicción, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ no es denso en X. Esto significa que existe un conjunto abierto U de X tal que $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$, de donde se sigue que todo punto de U está en $H_n = U \setminus G_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Sin mucha dificultad se prueba que

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} H_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{H}_n \cup \big(\overline{U} \setminus U\big),$$

lo que nos dice que el conjunto cerrado $\overline{U}$ es una unión numerable de conjuntos cerrados. Nuestra tarea ahora a demostrar, para obtener una contradicción con nuestra hipótesis, que cada punto de esos conjuntos cerrados es un punto límite de su complemento en $\overline{U}$. En efecto, es claro que cualquier punto del conjunto cerrado $H_0 = \overline{U} \setminus U$ es un punto límite de $\overline{U} \setminus \big(\overline{U} \setminus U\big) = U$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que cada punto de $\overline{H}_n$ es un punto límite de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$. Notemos, en primer lugar, que si $x \in \overline{H}_n$, entonces $x \in U$ y, por consiguiente, es un punto límite de $U \setminus H_n$, y así, un punto límite de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$. Finalmente, sea $y \in \overline{H}_n$. Si $y \in H_n$, entonces por lo acabado de probar, x es un punto límite de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$. Suponga que $x \in \overline{H}_n \setminus H_n$ y sea V un conjunto abierto conteniendo a y. Entonces V contiene un punto $z \in H_n$ y, por lo visto anteriormente, z es un punto límite de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$. Esto prueba que V contiene puntos de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$ y, por lo tanto, y es un punto límite de $\overline{U} \setminus \overline{H}_n$. Esta contradicción establece que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X y termina la prueba. ■

El recíproco del resultado de Astin es, en general, falso.

Finalizamos estas observaciones con el siguiente interesante resultado.

Teorema ([146], pág. 76). *Si K es un subconjunto convexo compacto de un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo X, entonces $(\text{ext}\,K,\omega)$ es un espacio de Baire, donde $\text{ext}\,K$ es el conjunto de los puntos extremales de K y ω es la topología débil de X restringida a $\text{ext}\,K$.*

1.8. Algunas formas equivalentes de los espacios de Baire

Esta sección está dedicada fundamentalmente a presentar algunos resultados que son equivalentes a un espacio de Baire y otros que se obtienen como consecuencia directa del Teorema de Categoría de Baire.

El Teorema de Categoría de Baire se puede generalizar a familias numerables de conjuntos G_δ-densos tal como se muestra a continuación.

Teorema 1.8.1. *Sea $(G_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de un espacio de Baire (X,τ). Si cada G_n es un G_δ-denso en X, entonces $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ es un G_δ-denso en X.*

Prueba. Como cada G_n es un G_δ, existe una sucesión $(G_{nk})_{k=1}^\infty$ de conjuntos abiertos de X tal que $G_n = \bigcap_{k=1}^\infty G_{nk}$. Teniendo en cuenta que $G_n \subseteq G_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la densidad de cada G_n nos garantiza la de cada G_{nk}, $n,k = 1,2,\ldots$. Puesto que la colección $\{G_{nk} : n,k = 1,2,\ldots\}$ es numerable, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{k=1}^\infty G_{nk}$ es un G_δ-denso en X. ■

Del resultado anterior se concluye que $\mathbb{Q}$ no puede ser un G_δ. En efecto, si fuese $\mathbb{Q}$ un G_δ, entonces $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ ambos serían G_δ-densos y por el resultado anterior tendríamos que $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \varnothing$ es un G_δ-denso. El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de los conjuntos residuales en espacios de Baire.

Teorema 1.8.2. *Sea (X,τ) un espacio de Baire y sea M un subconjunto no vacío de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es residual en X.*

(b) *M contiene un subconjunto G_δ-denso en X.*

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que M es residual. Entonces su complemento $X \setminus M$ es de primera categoría en X; es decir, $X \setminus M = \bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \overline{E}_n$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto E_n es nunca-denso en X. Tomando complementos a ambos lados de la inclusión anterior obtenemos $M \supseteq \bigcap_{n=1}^\infty \big(X \setminus \overline{E}_n\big) = G$. Por el Teorema 1.6.2, el conjunto $X \setminus \overline{E}_n$ es, para cada $n \in \mathbb{N}$, abierto y denso en X, de donde resulta que G es un G_δ, y además, denso en X, por nuestra hipótesis.

$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que M contiene un subconjunto G_δ-denso en X. Esto quiere decir que existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos de X tal $G := \bigcap_{n=1}^\infty G_n \subseteq M$ es denso en X. Puesto que $G \subseteq G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que cada G_n es denso en X. Por esto $X \setminus M \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \big(X \setminus G_n\big)$, y ya que cada $X \setminus G_n$ es, por el Teorema 1.6.2 nunca-denso en X, resulta que $X \setminus M$ está incluido en un conjunto de primera categoría en X y en consecuencia él mismo es de primera categoría en X. Esto termina la prueba. ■

De los dos resultados anteriores se sigue que:

Si (X,τ) es un espacio de Baire, entonces la familia $\mathfrak{R}_{\mathrm{RES}}(X)$, formada por todos los subconjuntos residuales en X, es estable bajo intersecciones numerables, vale decir, intersecciones numerables de conjuntos residuales preservan la residualidad.

Este es el argumento fundamental por el cual los conjuntos G_δ-densos que viven en un espacio de Baire son considerados, desde el punto de vista topológico, "más numerosos" que los conjuntos que son sólamente densos en dicho espacio: en efecto, en cualquier espacio de Baire, como sabemos, la intersección de una cantidad finita de conjuntos densos puede ser vacía (por supuesto, no todos pueden ser G_δ-densos), pero la intersección de cualquier cantidad numerable de conjuntos residuales no sólo se intersectan, sino que, además, dicha intersección siempre es densa. Por consiguiente, los conjuntos residuales viviendo en un espacio de Baire abarcan casi todo el espacio, es decir, se les puede pensar como "muy grandes" o "muy abundantes". Es por esta razón que una *propiedad* $\mathrm{P}(x)$ la cual se cumple para todos los puntos x de un conjunto residual residenciado en algún espacio de Baire se llama **abundante**, **genérica**, o **típica** y a tales conjuntos residuales se les dice que son **abundantes**, **típicos** o **genéricos**.

El siguiente hecho lo usaremos más adelante.

Lema 1.8.1. *Sean (X,τ) un espacio de Baire y (O_n) una sucesión de subconjuntos abiertos en X tal que $\bigcup_{n=1}^\infty O_n$ es denso en X. Si G es un subconjunto de X tal que $G\cap O_n$ es residual en O_n para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces G es residual en X.*

Prueba. Definamos la sucesión de conjuntos $(W_n)_{n=1}^\infty$ del modo siguiente:

$$W_1 = O_1, \qquad \text{y} \qquad W_n = O_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{O_j} \qquad \text{para } n = 2,3,\ldots$$

Claramente esos conjuntos son abiertos y disjuntos dos a dos. Sea $W=\bigcup_{n=1}^\infty W_n$ y observemos que W es denso en X. En efecto, sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis, $\bigcup_{n=1}^\infty O_n$ es denso en X de modo que $\bigcup_{n=1}^\infty \big(U\cap O_n\big) = U\cap\bigcup_{n=1}^\infty O_n \neq \varnothing$. Sea n_0 el primer entero positivo para el cual $U\cap O_{n_0}\neq\varnothing$. Esa elección de n_0 significa, por supuesto, que $U\cap\bigcup_{k=1}^{n_0-1} O_k=\varnothing$ y, por consiguiente, $U\cap W_{n_0}\neq\varnothing$. Por esto, $U\cap W\neq\varnothing$ con lo cual queda demostrada la densidad de W. Por otro lado, como $G\cap O_n$ es, por hipótesis, residual en el espacio de Baire O_n (en su topología relativa), el Teorema 1.8.2 nos dice que $G\cap O_n$ contiene un subconjunto G_δ-denso en O_n, es decir, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una sucesión $(U_{nj})_{j=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos y densos en O_n tales que

$$U_{nj}\subseteq O_n\subseteq \overline{U}_{nj} \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{j=1}^\infty U_{nj}\subseteq G\cap O_n, \quad n,j=1,2,\ldots$$

Es claro que cada $U_{nj}\cap W_n$ es abierto y denso en W_n y, por lo tanto, $\bigcap_{j=1}^\infty \big(U_{nj}\cap W_n\big)\subseteq G\cap W_n$. Definiendo $G_j=\bigcup_{n=1}^\infty\big(U_{nj}\cap W_n\big)$ para cada $j\in\mathbb{N}$, vemos que los G_j son abiertos y densos en X. Además, teniendo en cuenta que $W_n\cap W_m=\varnothing$ siempre que $n\neq m$, resulta entonces que

$$\bigcap_{j=1}^\infty G_j \;=\; \bigcup_{n=1}^\infty \Big(W_n\cap\bigcap_{j=1}^\infty U_{nj}\Big) \;=\; \bigcup_{n=1}^\infty \Big(\bigcap_{j=1}^\infty U_{nj}\cap W_n\Big) \;\subseteq\; \bigcup_{n=1}^\infty \big(G\cap W_n\big)\subseteq G.$$

Un llamado al Teorema 1.6.3 nos revela que el conjunto G es residual en X. ■

Es un hecho interesante tener en cuenta el siguiente resultado.

Teorema 1.8.3. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y G un subespacio denso en X. Si (G,τ) es un espacio de Baire, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n \cap G$ es un abierto denso en G y como G es un espacio de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap G) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap G$ es denso en G. De esto se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Como G es denso en X, $V \cap G$ es un abierto no vacío en G. Usemos ahora el hecho de que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap G$ es denso en G para verificar que $(V \cap G) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap G = (V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)) \cap G$ es no vacío. Esto prueba que $V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$ es no vacío, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. ■

Observe que *todo espacio métrico de Baire es residual en su completación*. Contrario a la conclusión del teorema anterior, *un subespacio denso de un espacio de Baire no necesita ser de Baire*. En efecto, basta tomar a $\mathbb{R}$ como nuestro espacio de Baire y mirar a $\mathbb{Q}$ como el subespacio denso que, como hemos visto, no es de Baire. Sin embargo, si a la densidad de un subespacio viviendo en un espacio de Baire se le impone la condición de que dicho conjunto también sea un G_δ, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.8.4. *Sea (X, τ) un espacio de Baire. Si G es un subconjunto G_δ-denso de X, entonces (G, τ) es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de G. Para ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso en G, notemos en primer lugar que por ser G un G_δ-denso de X, existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos y denso de X tal que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de X tal que $O_n = G \cap U_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Claramente cada U_n es denso en G y, más aun, ellos también son densos en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Entonces $V \cap G$ es un abierto no vacío de G y como U_n es denso en G, resulta que $(V \cap G) \cap U_n = (V \cap U_n) \cap G \neq \varnothing$. Esto prueba que $V \cap U_n \neq \varnothing$ y, por lo tanto, U_n es denso en X. Puesto que X es un espacio de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X y así, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en G. ■

Resulta interesante observar, como consecuencia del resultado anterior, que los conjuntos G_δ que no son densos pero tienen su residencia en un espacio hereditariamente de Baire también heredan la propiedad de Baire, vale decir:

Corolario 1.8.1. *Sea (X, τ) un espacio hereditariamente de Baire. Si G es un subconjunto G_δ de X, entonces G, en su topología relativa, es un espacio de Baire.*

Prueba. Si G es un G_δ de X, entonces se tiene, en particular, que G es residual en $\overline{G}$ el cual, por hipótesis, es un espacio de Baire. Se sigue del Teorema 1.8.4 que G es un espacio de Baire. ■

Ya hemos visto que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire, sin embargo, *existen espacios métricos de Baire que no son completos*. Para ver esto último, notemos que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, por ser un G_δ-denso de $\mathbb{R}$ es, por el resultado anterior, un espacio métrico de Baire que, como sabemos, no es completo.

Si bien es cierto que los conjuntos de primera categoría en un espacio de Baire poseen, gracias al Teorema 1.6.3, interior vacío, ellos no tienen porque ser nunca-densos, es decir, una unión numerable de conjuntos nunca-densos no es, en general, nunca-denso como se puede ver, por ejemplo, tomando a $\mathbb{Q}$ que, como sabemos, es de primera categoría en $\mathbb{R}$ pero no es nunca-denso en dicho espacio. Que ello ocurra así se debe fundamentalmente a que $\mathbb{Q}$ es un F_σ pero no un G_δ como veremos más abajo. Una pregunta natural que se sustenta sobre la observación anterior es la siguiente: ¿cuál es el estatus de los conjuntos de primera categoría que pueden ser representados como conjuntos G_δ en un espacio de Baire? Una respuesta un poco sorprendente fue establecida por Kuratowski en su libro [274], Theorem 2, p. 417, del modo siguiente: *si X es un espacio métrico completo y A es un subconjunto de X que es un G_δ de primera categoría, entonces A es nunca-denso*. El resultado anterior de Kuratowski fue generalizado para espacios de Baire por Dragan Jankovic, Maximillian Ganster e Ivan Reilly [231] del modo siguiente.

Teorema 1.8.5 (Kuratowski). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Baire.*

(2) *Cada subconjunto G_δ de X que es de primera categoría en X es nunca-denso en X.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que X es un espacio de Baire y sea A un subconjunto G_δ de primera categoría en X. Como A es un G_δ, entonces $X \setminus A$ es un F_σ y, por lo tanto, $\overline{A} \cap (X \setminus A) = \overline{A} \setminus A$ también es un F_σ por ser la intersección de un cerrado con un F_σ. Sea $\overline{A} \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ una representación de $\overline{A} \setminus A$ por medio de una unión numerable de conjuntos cerrados de X. Puesto que la frontera de A, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$, es nunca-denso, resulta que $\overline{A} \setminus A \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ también tiene interior vacío. Por esto, cada F_n tiene interior vacío, de donde se sigue que $\overline{A} \setminus A$ es de primera categoría. Por consiguiente, $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \setminus A)$ es de primera categoría por ser la unión de dos conjuntos de primera categoría. Finalmente, como X es un espacio de Baire, el Teorema 1.6.3 nos garantiza que $\overline{A}$ tiene interior vacío, es decir, A es nunca-denso.

$(2) \Rightarrow (1)$. Suponga ahora que cada conjunto G_δ de primera categoría en X es nunca-denso, pero que X no es un espacio de Baire. Por el Teorema 1.6.3 esto significa que existe un conjunto abierto U de X que es de primera categoría. Puesto que cualquier conjunto abierto es claramente un G_δ, resulta que U es un G_δ de primera categoría con interior no vacío y, en consecuencia, no puede ser nunca-denso. Esta contradicción establece que X es un espacio de Baire. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que $\mathbb{Q}$ no puede ser un G_δ. Este resultado también se puede deducir del Teorema 1.8.8 dado más abajo.

Teorema 1.8.6. *Sean (X,τ) un espacio de Baire y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces*

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(F_n)$$

es abierto y denso en X.

Prueba. Observemos que H es abierto por ser unión de conjuntos abiertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $H_n = \mathrm{int}(F_n)$ y definamos $G_n = H_n \cup (X \setminus F_n)$. Nuestro objetivo es probar que cada G_n es abierto y denso en X. En efecto, cada G_n es abierto por ser unión de dos conjuntos abiertos. Para ver que G_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos cualquier subconjunto abierto no vacío U de X. Ocurre entonces que o bien $U \subseteq F_n$, en cuyo caso

$$U \subseteq H_n \subseteq G_n, \quad \text{es decir,} \quad U \cap G_n \neq \varnothing,$$

o bien $U \nsubseteq F_n$, de donde se obtiene que $U \cap (X \setminus F_n) \neq \varnothing$, y por consiguiente $U \cap G_n \neq \varnothing$. Esto prueba nuestra afirmación. Puesto que X es un espacio de Baire, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Afirmamos que $E \subseteq H$. En efecto, suponga que $x \in E \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_{n_0}$. Por otro lado, $x \in G_{n_0}$ pues $x \in E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, y así, $x \in H_{n_0} \subseteq H$; es decir, $x \in H$ y por lo tanto $E \subseteq H$. De aquí se sigue que H es denso en X y concluye la prueba. ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 1.8.2. *Sea (X,τ) un espacio de Baire y sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X cuya unión cubre a X, es decir, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$.*

Prueba. Si ocurriera que $\mathrm{int}(F_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 1.8.6 tendríamos que el conjunto vacío $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(F_n) = \varnothing$ sería denso en X. Esta contradicción establece que $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. ■

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff ha sido definido como $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto si él es localmente compacto y σ-compacto. Si uno suprime la condición de compacidad local, entonces se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.8.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff que es un σ-compacto. Son equivalentes:*

(1) *X es de Baire.*

(2) *X posee un subconjunto denso localmente compacto.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea $(K_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Como cada K_n es cerrado, se sigue del Teorema 1.8.6 que $G = \bigcup_{n=1}^\infty \operatorname{int}(K_n)$ es denso en X. Es claro que G es localmente compacto.

$(2) \Rightarrow (1)$ Suponga que G es un subconjunto denso y localmente compacto en X. Siendo G un subespacio localmente compacto, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que él es un subespacio de Baire y entonces el resultado sigue del Teorema 1.8.3. ■

Recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$, donde X es un espacio topológico de Hausdorff, se dice que es **inferiormente semicontinua** si, para cada $k \in \mathbb{R}$, el conjunto $F_k = \{x \in X : f(x) \leq k\}$ es cerrado en X. El siguiente resultado sigue del corolario anterior.

Corolario 1.8.4. *Sea (X,τ) un espacio de Baire y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua. Entonces, cada abierto no vacío U de X contiene un abierto no vacío V sobre el cual f está acotada superiormente.*

Prueba. Sea U un abierto no vacío de X. Por el Teorema 1.7.3, U es un espacio de Baire. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$F_n = \big\{x \in U : f(x) \leq n\big\}.$$

Por ser f inferiormente semicontinua el conjunto F_n es cerrado en X, en particular, cerrado en U en la topología relativa y, además, $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = U$. Se sigue del Corolario 1.8.2 que existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}\big(F_{n_0}\big) \neq \varnothing$. Definiendo $V = \operatorname{int}\big(F_{n_0}\big)$ se termina la prueba. ■

Teorema 1.8.7. *Sea (X,τ) un espacio de Baire. Si $(G_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de subconjuntos abiertos de X con $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \varnothing$, entonces $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{G}_n$ es nunca-denso en X.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $H_n = G_n \cup (X \setminus \overline{G}_n)$. Entonces cada H_n es abierto y denso en X. En efecto, G_n es abierto por ser unión de (dos) abiertos, mientras que su densidad se sustenta por el hecho siguiente:

$$\overline{H}_n = \overline{G}_n \cup \left(\overline{X \setminus \overline{G}_n}\right) \supseteq \overline{G}_n \cup (X \setminus \overline{G}_n) = X.$$

Por ser X un espacio de Baire, $\bigcap_{n=1}^\infty H_n$ es denso en X.

Supongamos que $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{G}_n$ no es nunca-denso en X. Entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que $U \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty \overline{G}_n$. Observemos también que $U \cap \bigcap_{n=1}^\infty H_n \neq \varnothing$ gracias a la densidad de $\bigcap_{n=1}^\infty H_n$ en X. Sea $x \in U \cap \bigcap_{n=1}^\infty H_n$. Puesto que $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \varnothing$, existe al menos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin G_{n_0}$, y como $x \in H_{n_0} = G_{n_0} \cup (X \setminus \overline{G}_{n_0})$, resulta que $x \in X \setminus \overline{G}_{n_0}$. Esta conclusión, sin embargo, contradice el hecho de que al estar $x \in U \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty \overline{G}_n$, entonces $x \in \overline{G}_{n_0}$. Por esto, $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{G}_n$ es nunca-denso en X. ■

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Recordemos que un punto $x \in X$ es un **punto aislado** si $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X. Observe que si (X,d) es un espacio métrico, entonces x es un punto aislado si existe $r > 0$ tal que $U(x,r) = \{x\}$.

Teorema 1.8.8. *Sea (X,τ) un espacio de Baire sin puntos aislados. Si $G \subseteq X$ es un G_δ-denso en X, entonces G es no numerable. En particular, X es no numerable.*

Prueba. Daremos dos demostraciones de este resultado. La primera, usando el Teorema 1.8.5. Suponga que $G = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es numerable. Puesto que X no posee puntos aislados, cada conjunto $\{x_n\}$ es cerrado y nunca-denso, por lo que G resulta ser un G_δ de primera categoría y, así, por el Teorema 1.8.5, G es nunca-denso. Esto, por supuesto, contradice el hecho de que G es denso en X.

Segunda prueba. Sea G un subconjunto de X que es un G_δ-denso en X. Entonces $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde cada G_n es abierto en X. Puesto que G es denso en X y $G \subseteq G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que cada G_n también es denso en X. Supongamos que G fuese numerable, digamos, $G = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideremos los complementos $U_n = X \setminus \{x_n\}$ de cada conjunto $\{x_n\}$. Cada U_n es abierto, pues $\{x_n\}$ es cerrado y, además, denso en X ya que ningún $\{x_n\}$ es aislado. Como X es un espacio de Baire, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X y teniendo en cuenta que la intersección de dos conjuntos G_δ-denso es no vacío se llega a la siguiente contradicción:

$$\varnothing = G \cap (X \setminus G) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \neq \varnothing$$

Por esto, G no puede ser numerable. ■

El resultado que sigue nos muestra otra manera de verificar que $\mathbb{Q}$ nunca es un G_δ.

Corolario 1.8.5. *Si (X,d) es un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces ningún subconjunto denso numerable de X se puede expresar como un G_δ. En particular, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un F_σ que nunca se puede expresar como un G_δ en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Esto es consecuencia inmediata del Teorema 1.8.8. ■

Algunas otras consecuencias interesantes también se derivan inmediatamente del Teorema 1.8.8. En efecto:

1) *Si (X,τ) es un espacio de Baire* ***infinito numerable****, entonces X contiene infinitos puntos aislados*. En efecto, como X es un espacio de Baire numerable, el Teorema 1.8.8 no asegura que X posee al menos un punto aislado. ¿Puede el conjunto X contener sólo un número finito de puntos aislados? La respuesta es ¡No! y he aquí el por qué ello es así. Supongamos que $x_1, \ldots, x_n$ son todos los puntos aislados de X y sea $G = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Siendo G un subconjunto abierto no vacío de X, el Teorema 1.7.3 nos dice que G, en su topología relativa, es un espacio de Baire y, por supuesto, infinito numerable. Ahora, el Teorema 1.8.8 nos revela que G contiene al menos un punto aislado que, por supuesto, también es aislado en X y no es ninguno de los x_i's. Esta contradicción establece que X contiene infinitos puntos aislados. Como consecuencia de lo anterior tenemos que: *todo subconjunto cerrado infinito numerable del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ posee una infinidad de puntos aislados*. Lo que acabamos de probar también implica que $\mathbb{Q}$, como subconjunto de $\mathbb{R}$, **no puede, nunca, ser un espacio de Baire** pues dicho conjunto es infinito numerable sin puntos aislados. En particular, *la topología natural de $\mathbb{Q}$ no puede ser definida por una métrica bajo la cual $\mathbb{Q}$ sea un espacio métrico completo.*

2) El bien conocido método de diagonalización de Cantor se usa con frecuencia para demostrar que $\mathbb{R}$ *es no numerable*; sin embargo, puesto que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo sin puntos aislados, el Teorema 1.8.8 nos provee de otra vía para probar que $\mathbb{R}$ es no numerable.

3) Recuerde que si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, un subconjunto F de X se llama **perfecto** *si él es cerrado y no contiene puntos aislados*. Observe que: *si (X,d) es un espacio métrico completo, o si (X,τ) es un espacio hereditariamente de Baire, entonces cualquier subconjunto perfecto F de X es no numerable*. En efecto, en este caso F es un espacio de Baire sin puntos aislados y el resultado sigue del Teorema 1.8.8. Este resultado nos facilita otra demostración de que el conjunto ternario de Cantor Γ es no numerable, pues Γ es un subconjunto perfecto de $[0,1]$ el cual es un espacio métrico completo (véase la próxima sección para recordar la definición de Γ).

4) Entre los espacios metrizables los espacios hereditariamente de Baire se pueden caracterizar por medio del siguiente resultado de W. Hurewicz [225].

   Teorema de Hurewicz. *Un espacio topológico metrizable X es hereditariamente de Baire si, y sólo si, cualquier subconjunto perfecto no vacío F de X es no numerable.*

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado que también es de utilidad.

Lema 1.8.2. *Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos completos y suponga que $f: X \to Y$ es una función continua y abierta. Si D es un subconjunto G_δ-denso de Y, entonces $f^{-1}(D)$ es un G_δ-denso en X.*

Prueba. Sea V un subconjunto abierto y denso en Y. Vamos a demostrar en primer lugar que $f^{-1}(V)$ es abierto y denso en X. En efecto, por continuidad, $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Para ver que dicho conjunto es denso en X, sea U es un subconjunto abierto no vacío de X. Supongamos, por un momento, que $U \cap f^{-1}(V) = \varnothing$. Puesto que $f\big(U \cap f^{-1}(V)\big) = f(U) \cap V$, resulta que $f(U) \cap V = \varnothing$ lo cual es imposible pues, al ser f una aplicación abierta, $f(U)$ es un abierto no vacío y, gracias a la densidad de V, $f(U) \cap V \neq \varnothing$. Esto muestra que $f^{-1}(V)$ abierto y denso en X. Supongamos ahora que D es un G_δ-denso de Y. Entonces $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, donde cada V_n es abierto y denso en Y y, por consiguiente,

$$f^{-1}(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(V_n)$$

es, por la primera parte y el Teorema de Categoría de Baire, un G_δ-denso en X. ■

1.9. Primeras consecuencias del Teorema de Categoría de Baire

Es un hecho conocido que todo subconjunto abierto no vacío G de $\mathbb{R}$ se puede escribir como una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos. Como una consecuencia del Teorema de Categoría de Baire, obtenemos:

Teorema 1.9.1. *Ningún intervalo cerrado y acotado J de $\mathbb{R}$ se puede escribir como una unión numerable de intervalos cerrados y disjuntos dos a dos.*

Prueba. Supongamos que existe una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de intervalos cerrados y disjuntos dos a dos en $\mathbb{R}$ tal que $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Puesto que cada $F_n = \operatorname{int}(F_n) \cup \operatorname{Fr}(F_n)$, resulta que

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_n) \,\cup\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Fr}(F_n),$$

y, en consecuencia,

$$J \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Fr}(F_n)$$

es un subconjunto cerrado en el espacio métrico completo $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, también es completo. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos revela que al menos un $\mathrm{Fr}(F_n)$ debe tener interior no vacío, lo cual es imposible pues ya sabemos que la frontera de cualquier intervalo cerrado es nunca-denso en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 1.9.2. *Sea* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ *para cada* $x \in [0,\infty)$. *Entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Prueba. Nuestro primer paso es demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_n \;=\; \bigcap_{m=n}^{\infty} \Big\{ x \in [0,\infty) : |f(mx)| \leq \varepsilon \Big\}.$$

Como f es continua, cada F_n es cerrado en el espacio métrico completo $[0,\infty)$. Por otro lado, dado $x \in [0,\infty)$, se sigue de nuestra hipótesis que $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ y, en consecuencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(nx)| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Esto prueba que $[0,\infty) \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ y entonces el Teorema de Categoría de Baire nos dice que $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Seleccionemos un intervalo abierto, digamos (a,b), dentro de $\mathrm{int}(F_{n_0})$. Por nuestra definición de F_{n_0}, tenemos que

$$f(mx) \;\leq\; \varepsilon \quad \text{para todo } m \geq n_0 \quad \text{y} \quad \text{todo } x \in (a,b).$$

Observemos que si m es suficientemente grande, entonces

$$\begin{aligned} (m\cdot a,\, m\cdot b) \,\cap\, \big((m+1)a,\,(m+1)b\big) &\neq \varnothing, \\ \big((m+1)a,\,(m+1)b\big) \,\cap\, \big((m+2)a,\,(m+2)b\big) &\neq \varnothing, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En efecto, por el principio de Arquímedes, seleccionemos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a < m(b-a)$. Si ahora tomamos cualquier $m \geq \max\{n_0, a/(b-a)\}$, tendremos que

$$(m\cdot a, \infty) \;=\; \bigcup_{k=m}^{\infty} \big(ka,\, kb\big) \cap \big((k+1)a,\,(k+1)b\big).$$

y, en consecuencia,

$$f(x) \;\leq\; \varepsilon \quad \text{para todo } x \in (m\cdot a, \infty).$$

De esto se concluye que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y es 0. ■

El siguiente ejemplo está relacionado con el proceso de integración repetida. Vamos a precisar. Supongamos que $f \in C[0,1]$ y definamos

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt, \quad \cdots \quad , \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$$

Si alguna de las f_k es idénticamente nula, entonces $f \equiv 0$. Esto se prueba de manera inmediata haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, diferenciado a f_k repetidamente k-veces, se tiene que $f \equiv 0$. El siguiente resultado, que es una generalización de lo anterior, se obtiene como una aplicación del Teorema de Categoría de Baire.

Teorema 1.9.3. *Sea* $f \in C[0,1]$ *y defina, como antes,*

$$f_k(x) \ = \ \int_0^x f_{k-1}(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

para cada $k \geq 1$, *donde* $f_0 = f$. *Si para cada* $x \in [0,1]$, *existe un entero* $k = k(x)$ *tal que* $f_k(x) = 0$, *entonces* $f \equiv 0$.

Prueba. Supongamos que $f \neq 0$ sobre $[0,1]$. Entonces existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Por la continuidad de f existe un intervalo abierto $U \subseteq [0,1]$ conteniendo a x_0 tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Sea J un intervalo cerrado contenido en U. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$E_k = \big\{x \in [0,1] : f_k(x) = 0\big\}.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos garantiza que, de nuevo por continuidad de f, que cada f_k también es continua y, en consecuencia, cada E_k es cerrado. Además, como por hipótesis, cualquier $x \in [0,1]$ está en algún E_k, tenemos que,

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

En particular,

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} (J \cap E_k)$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, existe algún k tal que $J \cap E_k$ contiene un intervalo abierto, digamos I_k, sobre el cual $f_k \equiv 0$. Derivando se llega a que $f(x) = 0$ para todo $x \in I_k$ lo cual está en contradicción con nuestra suposición. Por esto, $f \equiv 0$ y termina la prueba. ■

Es un hecho bien conocido que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞, esto es, su n-ésima derivada $f^{(n)}$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la **Fórmula de Taylor** establece que si $a \in [0,1]$, entonces para cualquier $x \in [0,1]$ se cumple que

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \ + \ \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}\,(x-a)^n, \tag{FT}$$

donde x_1 es un cierto punto comprendido entre x y a. Por consiguiente, una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$ converja hacia $f(x)$ es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}\,(x-a)^n = 0.$$

Observe que si la n-ésima derivada de f es 0, entonces (FT) nos revela que f coincide sobre $[0,1]$ con un polinomio de grado a lo sumo $n-1$. Una generalización de éste resultado, que se resuelve por una aplicación del Teorema de Categoría de Baire, fue formulado por E. Landis en la revista *Mathematical Eeducation* en 1960 del modo siguiente:

Teorema 1.9.4. *Sea* $f \in C^\infty[0,1]$. *Si para cada* $x \in [0,1]$, *existe un entero* $n(x) \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{(n(x))}(x) = 0$, *entonces* f *coincide con un polinomio.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea
$$E_n \;=\; \left\{x \in [0,1] \;:\; f^{(n)}(x) = 0\right\}.$$
Como cada $f^{(n)}$ es continua, el conjunto correspondiente E_n es cerrado. Por otro lado, dado cualquier punto $x \in [0,1]$ vemos, usando nuestra hipótesis, que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$, lo cual nos dice que $x \in E_n$ y, en consecuencia,
$$[0,1] \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$
Se sigue del Teorema de Categoría de Baire, Teorema 1.8.6, que $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(E_n)$ es abierto y denso en $[0,1]$. Sea $\sigma = \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{int}(E_n) \neq \varnothing\}$. Ahora bien, como todo subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos, resulta que para cada $n \in \sigma$, existe una colección numerable $(I_k^n)_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos tal que
$$\mathrm{int}(E_n) \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n.$$
Pongamos $\mathcal{J} = \left\{I_k^n \;:\; k, n \in \mathbb{N}\right\}$. Entonces
$$G \;=\; \bigcup_{I_k^n \in \mathcal{J}} I_k^n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n.$$
Sea $n_0 = \text{mín}\, \sigma$. Nos proponemos demostrar que $\mathrm{int}(E_{n_0}) = [0,1]$. Suponga, para obtener una contradicción, que
$$\mathrm{int}(E_{n_0}) \neq [0,1]. \tag{1}$$
Tal contradicción la lograremos en tres actos:

(1^{o}). $G \neq [0,1]$. En efecto, consideremos cualquier intervalo $I_k^{n_0}$ de los que cubren a $\mathrm{int}(E_{n_0})$. Por (1), tenemos que $I_k^{n_0} \neq [0,1]$. Esto garantiza que uno de los dos puntos extremos de $I_k^{n_0}$, llamémoslo α, satisface $0 < \alpha < 1$. Suponga que $\alpha \in G$. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n$, entonces para algún $n_1 > n_0$ y algún j, debe ocurrir que $\alpha \in I_j^{n_1}$. Tenemos así que α está en el interior de $\alpha \in I_j^{n_1}$ y en la clausura de $\alpha \in I_k^{n_0}$. Sea J_1 cualquier intervalo abierto tal que $\alpha \in J_1 \subseteq I_j^{n_1}$. Como α está en la clausura de $I_k^{n_0}$, entonces se cumple que $J_1 \cap I_k^{n_0} \neq \varnothing$. En particular,
$$I_j^{n_1} \cap I_k^{n_0} \;\neq\; \varnothing. \tag{2}$$
Sea J un intervalo abierto no vacío contenido en $I_j^{n_1} \cap I_k^{n_0}$. Sabemos que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $I_j^{n_1}$ y también que $f^{(n_0)} = 0$ sobre J. Se sigue de la Fórmula de Taylor que f coincide con un polinomio de grado menor que n_0 sobre $I_j^{n_1}$, y en consecuencia,
$$I_j^{n_1} \;\subseteq\; \mathrm{int}(E_{n_0}).$$
Por otro lado, como cualesquiera dos intervalos de los que cubren a $\mathrm{int}(E_{n_0})$ son iguales o disjuntos, se sigue de (2) que
$$I_j^{n_1} \;=\; I_k^{n_0}.$$
Esta igualdad es la que genera la contradicción pues α es un punto interior de $I_j^{n_1}$ y a la vez un extremo del mismo conjunto $I_k^{n_0} = I_j^{n_1}$. Por esto $\alpha \notin G$ y, así, $G \neq [0,1]$.

(2^{o}). Definamos $H = [0,1] \setminus G$. Queremos demostrar que H es un conjunto perfecto. Puesto que G es abierto, denso y distinto de $[0,1]$, tenemos que H es no vacío, cerrado y nunca-denso en $[0,1]$. Suponga que H no es perfecto. Entonces H contiene algún punto aislado, digamos y. Como $y \notin G$, resulta que dicho punto es un extremo común a dos de los intervalos disjuntos que cubren a G, digamos I_i^n y I_j^m. Suponga que $m > n$. Se sigue de la continuidad de $f^{(n)}$ que $f^{(n)}(y) = 0$ y como f coincide con un polinomio de grado menor que n sobre I_j^m, entonces $f^{(n)} = 0$ sobre el intervalo abierto $I_i^n \cup \{y\} \cup I_j^m$. Esto nos dice que $y \in \operatorname{int}(E_{n_0}) \subseteq G$ y, por consiguiente, $y \notin H$. Esta contradicción establece que H es perfecto.

(3^o). Veamos finalmente que (1) no puede ocurrir. En efecto, por el acto anterior sabemos que H es no vacío y cerrado en $[0,1]$ y, por consiguiente, él es completo. Además, como

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap H),$$

el Teorema de Categoría de Baire es el responsable de garantizarnos la existencia de un n_1, que mantendremos fijo, tal que $\operatorname{int}(E_{n_1} \cap H)$ es no vacío. Sea U un conjunto abierto no vacío contenido en $E_{n_1} \cap H$. Entonces U es de la forma $U = H \cap V$, para algún abierto no vacío $V \subseteq [0,1]$. Ahora bien, puesto que $U \subseteq E_{n_1}$, tenemos que $f^{(n_1)} = 0$ sobre U y se sigue de la definición de derivada que, para cualquier $x \in U$,

$$f^{(n_1+1)}(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} \frac{f^{(n_1)}(y) - f^{(n_1)}(x)}{y - x} = 0.$$

Observe que dicho límite existe para cualquier $x \in U \subseteq H$ gracias a que H es perfecto. Lo anterior permite concluir que $f^{(m)}(x) = 0$ para todo $x \in U$ y todo $m \geq n_1$.

Puesto que G es denso en $[0,1]$ y V es un abierto no vacío de $[0,1]$, entonces $G \cap V \neq \varnothing$. De esto se sigue que alguno de los intervalos abiertos que cubren a G intersecta a V. Designemos a un tal intervalo por K. Entonces $K \subseteq E_{m_1}$ para algún m_1 y así, $f^{(m_1)}(x) = 0$ para cualquier $x \in K$. En particular, $f^{(m_1)} = 0$ sobre $K \cap V$. Comparemos ahora a m_1 con n_1.

(a) Si $m_1 \leq n_1$, entonces derivando a $f^{(m_1)}$, $n_1 - m_1$ veces, conseguimos que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $K \cap V$.

(b) Si $m_1 > n_1$, entonces cualquiera de los puntos extremos de K pertenece a H y, por lo tanto, cualquier punto en la frontera de $K \cap V$ está en $H \cap V = U$. Si α es un tal punto, entonces

$$f^{(n_1)}(\alpha) = f^{(n_1+1)}(\alpha) = \cdots = f^{(m_1-1)}(\alpha) = f^{(m_1)}(\alpha) = 0.$$

Puesto que $f^{(m_1)} = 0$ sobre $K \cap V$, podemos calcular la integral desde α a cualquier punto arbitrario $x \in K \cap V$ para obtener

$$0 = \int_{\alpha}^{x} f^{(m_1)}(t) = f^{(m_1-1)}(x) - f^{(m_1-1)}(\alpha) = f^{(m_1-1)}(x).$$

Esto prueba que $f^{(m_1-1)} = 0$ sobre $K \cap V$. Si el argumento anterior se repite $m_1 - n_1$ veces, se llega a que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $K \cap V$. Pongamos $\mathfrak{I}_0 = \left\{ I_k^n \in \mathfrak{I} : I_k^n \cap V \neq \varnothing \right\}$ y sea

$$G_0 = \bigcup_{I_k^n \in \mathfrak{I}_0} I_k^n.$$

Lo que acabamos de demostrar nos dice que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $I_k^n \cap V$ para cualquier intervalo $I_k^n \in \mathfrak{I}_0$. Pero además, como todo intervalo $I_k^n \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{I}_0$ cumple que $I_k^n \cap V = \varnothing$, se sigue del Corolario 1.4.1, que $\overline{G_0 \cap V} = \overline{G \cap V} = \overline{V}$. De esto y, la continuidad de $f^{(n_1)}$, se concluye que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $\overline{V}$. En particular, $f^{(n_1)} = 0$ sobre V. Esto último nos indica que ningún punto de H puede pertenecer a V lo que contradice el hecho de que $H \cap V = U \neq \varnothing$.

Se concluye de esta forma que la suposición (1) no es viable por lo que $\mathrm{int}(E_{n_0}) = [0,1]$. Sin embargo, como la familia de intervalos abiertos $\{I_k^{n_0} : k = 1,2,\ldots\}$ que cubre a $\mathrm{int}(E_{n_0})$ es disjunta, entonces ella debe reducirse a un único intervalo, es decir, existe un k_0 tal que $I_{k_0}^{n_0} = [0,1]$ y, en consecuencia, $f^{(n_0)} = 0$ sobre $[0,1]$. Se sigue de la Fórmula de Taylor (FT) que f es un polinomio de grado a lo sumo $n_0 - 1$. ■

Finalizamos esta sección con otro resultado interesante el cual también hace uso del Teorema de Categoría de Baire. Si bien es cierto que tanto $\mathbb{R}$ así como $\mathbb{R}^2$ tienen la misma cardinalidad, es decir, existe una biyección entre ellos, resulta que ninguna biyección entre tales espacios puede ser continua.

Teorema 1.9.5. *Ninguna función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ puede ser continua.*

Prueba. En primer lugar vamos a demostrar que:

> *Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una función continua e inyectiva, entonces $g([a,b])$ es un subconjunto cerrado nunca-denso de $\mathbb{R}^2$.*

En efecto, para comenzar, observemos que como g es continua y $[a,b]$ es compacto, el conjunto $g([a,b])$ es compacto, en particular, cerrado en $\mathbb{R}^2$. Además, como g es inyectiva resulta que $g : [a,b] \to g([a,b])$ es un homeomorfismo. Esto implica, en particular, que $g([a,b])$ es conexo. Afirmamos que $g([a,b])$ es nunca-denso en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $g([a,b])$ tiene algún punto interior, digamos x. Entonces $g([a,b])$ contiene alguna bola abierta, digamos $U(x,\varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$. Trasladando y reduciendo un poco (si fuera necesario) la bola $U(x,\varepsilon)$, podemos suponer que $x \neq g(a), g(b)$. Afirmamos que $g([a,b]) \setminus \{x\}$ es conexo. Para ver esto último supongamos, por contradicción, que existen abiertos O_1 y O_2 no vacíos y disjuntos en $g([a,b]) \setminus \{x\}$ tal que $g([a,b]) \setminus \{x\} = O_1 \cup O_2$. Puesto que $U(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$ es conexo dicho conjunto debe estar contenido en O_1 o bien en O_2. Supongamos que $U(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \subseteq O_1$ y pongamos $O_1^1 := O_1 \cup \{x\} = O_1 \cup U(x,\varepsilon)$. Es un ejercicio sencillo verificar que O_1^1 y O_2 son abiertos en $g([a,b])$ y, además se cumple que

$$g([a,b]) \ = \ O_1^1 \cup O_2 \qquad \text{y} \qquad O_1^1 \cap O_1 = \varnothing.$$

Esto, evidentemente, contradice el hecho de que $g([a,b])$ es conexo.

Una vez establecido que $g([a,b]) \setminus \{x\}$ es conexo, la continuidad de $g^{-1} : g([a,b]) \to [a,b]$ implica que el conjunto $g^{-1}\big(g([a,b]) \setminus \{x\}\big)$ también es conexo en $[a,b]$, lo cual es imposible pues, al ser x un punto interior de $g([a,b])$ (recuerde que estamos suponiendo que $x \neq g(a), g(b)$), resulta que $c := g^{-1}(x) \in (a,b)$ es un punto interior de $[a,b]$ y, por lo tanto,

$$g^{-1}\big(g([a,b]) \setminus \{x\}\big) = [a,b] \setminus \{c\}$$

sería conexo. Esta contradicción establece que $g([a,b])$ es nunca-denso en $\mathbb{R}^2$.

Supongamos ahora que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es biyectiva y continua. Escribamos a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]$. Puesto que f es biyectiva tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([-n,n]).$$

Por lo probado anteriormente, resulta que cada conjunto cerrado $f([-n,n])$ tiene interior vacío y como $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f([-n,n]) \neq \mathbb{R}^2.$$

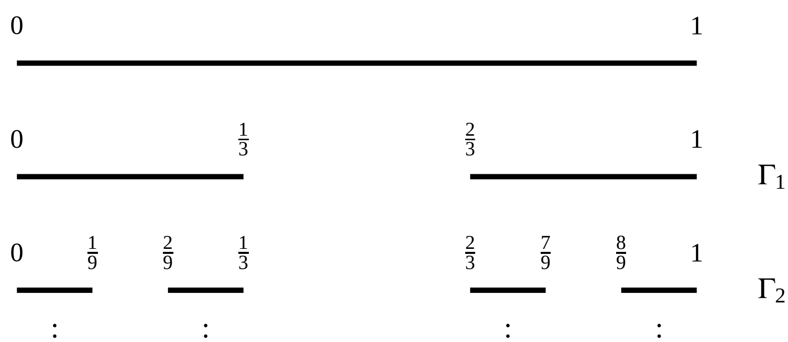
Esta contradicción prueba que f no puede ser una biyección continua. ■

1.10. Conjuntos tipo-Cantor que sólo poseen números irracionales

El conjunto ternario de Cantor Γ es un subconjunto de $[0,1]$ que desde su descubrimiento se ha convertido en una caja de sorpresas: aparte de poseer una propiedades sorprendentes y extraordinarias, lo que le confiere un estatus de privilegio y una fuente casi inagotable de contraejemplos, también es de mucha utilidad en Topología, Teoría de la Medida, Sistemas Dinámicos, etc. Dicho conjunto se construye recursivamente del modo siguiente: el primer paso consiste en divider el intervalo $[0,1]$ en tres subintervalos todos de igual longitud y luego eliminar el subintervalo abierto J que se encuentra ubicado en el centro, es decir, se elimina el intervalo $J=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, conservándose los otros dos intervalos cerrados $F_0=[0,\frac{1}{3}]$ y $F_1=[\frac{2}{3},1]$. En el segundo paso se divide cada uno de los dos intervalos cerrados anteriores en tres partes iguales eliminándose, como antes, los intervalos abiertos centrales $J_0=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ y $J_1=(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, respectivamente, reteniéndose los 2^2 intervalos cerrados restantes $F_{00}=[0,\frac{1}{9}]$, $F_{01}=[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $F_{10}=[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$ y $F_{11}=[\frac{8}{9},1]$. Si se continúa de este modo indefinidamente, se obtiene, para cada $n\in\mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $F_{i_1\cdots i_n}$ donde, para cada $k=1,\dots,n$, i_k es 0 ó 1 y cada uno de los 2^n intervalos cerrados anteriores se subdivide en tres partes iguales, conservándose los dos intervalos cerrados $F_{i_1\cdots i_n 0}$ y $F_{i_1\cdots i_n 1}$ que se encuentran a ambos extremos de cada subdivisión y removiendo cada intervalo abierto central $J_{i_1\cdots i_n}$. El conjunto que sobrevive después de todas estas remociones es lo que se llama el **conjunto ternario de Cantor**, esto es, si para cada $n\in\mathbb{N}$, el conjunto Γ_n se toma como la unión de los 2^n intervalos cerrados $F_{i_1\cdots i_n}$ y si definimos

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma_n.$$

entonces Γ es el conjunto ternario de Cantor.



El conjunto ternario de Cantor Γ posee, entre otras, las siguientes propiedades (véase, por ejemplo, [412], pág. 57-58): es compacto, perfecto, nunca-denso, no numerable, totalmente disconexo, posee medida de Lebesgue nula, es simétrico, esto es, $\Gamma=1-\Gamma$, cada punto $x\in\Gamma$ posee una representación ternaria única expresada en la forma $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n3^{-n}=(0.a_1a_2a_3\cdots)_3$, donde $a_n\in\{0,2\}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, cualquier espacio métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo es homeomorfo a Γ, etc.

En Γ existen dos categorías de puntos: los visibles y los ocultos. Los visibles son los extremos de los intervalos retenidos en cada paso de su construcción, es decir,

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{7}{27},\frac{8}{27},\frac{19}{27},\frac{20}{27},\frac{25}{27},\frac{26}{27},\frac{1}{81},\frac{2}{81},\dots.$$

Los ocultos, como su nombre lo indica, no están a la vista y, por consiguiente, no son fáciles de detectar. Por ejemplo, en esta categoría están todas las fracciones del tipo $\frac{1}{3^n+1}$, para todo $n\in\mathbb{N}$ (véase [312]). En efecto, teniendo en cuenta que todo punto $x \in \Gamma$ posee una representación ternaria única expresada en la forma $x = (0.a_1a_2a_3\cdots)_3$, donde $a_n \in \{0,2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
(0.\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}\ldots)_3 &= \left(\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+2}}+\cdots+\frac{2}{3^{2n}}\right)+\left(\frac{2}{3^{3n+1}}+\frac{2}{3^{3n+2}}+\cdots+\frac{2}{3^{4n}}\right)+\cdots\\
&= \left(\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+2}}+\cdots+\frac{2}{3^{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{3^{6n}}\cdots\right)\\
&= \frac{3^n-1}{3^{2n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^{2n}}} = \frac{3^n-1}{3^{2n}-1} = \frac{3^n-1}{(3^n+1)(3^n-1)}\\
&= \frac{1}{3^n+1} \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Además, como Γ es simétrico, los siguientes números también forman parte de Γ: $1-\frac{1}{3^n+1} = \frac{3^n}{3^n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para $n=1$ uno obtiene que $\frac{1}{4}$ y su numerosa familia

$$\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{3\cdot4},\frac{11}{3\cdot4},\frac{1}{3^2\cdot4},\frac{11}{3^2\cdot4},\frac{25}{3^2\cdot4},\frac{35}{3^2\cdot4},\frac{1}{3^3\cdot4},\frac{11}{3^3\cdot4},\frac{25}{3^3\cdot4},\frac{35}{3^3\cdot4},\frac{73}{3^3\cdot4},\frac{83}{3^3\cdot4},\frac{97}{3^3\cdot4},\frac{107}{3^3\cdot4},\ldots$$

todos están en Γ. En realidad, existen muchos otros racionales ocultos en Γ que no son fáciles de visualizar, como por ejemplo, todas las fracciones del tipo $\frac{2}{3^n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que

$$\begin{aligned}
(0.\underbrace{0\ldots02}_{n}\underbrace{0\ldots02}_{n}\cdots)_3 &= \frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^{2n}}+\frac{2}{3^{3n}}+\cdots\\
&= \frac{2}{3^n}\left[1+\frac{1}{3^n}+\left(\frac{1}{3^n}\right)^2+\left(\frac{1}{3^n}\right)^3+\cdots\right]\\
&= \frac{2}{3^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}\\
&= \frac{2}{3^n-1} \in \Gamma,
\end{aligned}$$

y por simetría, $1-\frac{2}{3^n-1} \in \Gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero además, por el hecho de poseer Γ la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, hay una cantidad infinita no numerable de números irracionales ocultos. Determinar los números irracionales de $[0,1]$ que habitan en Γ es una tarea harto difícil. Sin embargo, el número de Liouville $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n!}}$ y su simétrico $1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n!}}$, (véase la página 199 para la definición de número de Liouville), son de los pocos irracionales que se conocen pertenecen a Γ. Ahora bien, si consideramos todos los trasladados de Γ, es decir, conjuntos de la forma $x+\Gamma$ para $x \in \mathbb{R}$, resulta claro, por el hecho de que $0 \in \Gamma$, que $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}(x+\Gamma)$ y que una cantidad no numerable de tales trasladados son distintos (observe que gracias al Teorema de Categoría de Baire no es posible que exista sólo una cantidad numerable de tales traslados distintos dos a dos). Más aun, una cantidad no numerable de tales trasladados son, necesariamente, disjuntos dos a dos. De esto se deduce que al menos uno de esos trasladados no contiene ningún número irracional (de hecho, existen muchos de ellos). El siguiente resultado (véase, [449], Theorem 18, p. 52-53) establece que el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que el trasladado $x+\Gamma$ consta únicamente de números irracionales es, por una aplicación del Teorema de Categoría de Baire, residual en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.10.1 (Scheeffer). *Sea* Γ *el conjunto ternario de Cantor. Entonces existe un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x+\Gamma$ *consta sólo de números irracionales, es decir,*

$$x+\Gamma := \{x+\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Más aun, el conjunto $G_\Gamma := \{x \in \mathbb{R} : x+\Gamma \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ *es residual en* $\mathbb{R}$.

Prueba. Sea $(q_n)_{n=1}^\infty$ una enumeración de los números racionales y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto $\Gamma_n = q_n - \Gamma$. Observe que como $0 \in \Gamma$, entonces $q_n \in \Gamma_n$ por lo que $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n$. Por otro lado, como Γ es un subconjunto cerrado nunca-denso de $[0,1]$, resulta que Γ_n también es un cerrado nunca-denso de $\mathbb{R}$ y se sigue del Teorema de Categoría de Baire que

$$\bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n \neq \mathbb{R}.$$

Nos proponemos demostrar que $x+\Gamma \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n$. Entonces $x \notin \bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n \supseteq \mathbb{Q}$, de donde se sigue que $x \notin \mathbb{Q}$. Suponga por un momento que $(x+\Gamma)\cap\mathbb{Q} \neq \varnothing$. Entonces se pueden elegir un $\gamma \in \Gamma$ y algún $q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ de modo tal que $x+\gamma = q_{n_0}$ y, en consecuencia, nuestro x se puede escribir en la forma $x = q_{n_0} - \gamma \in q_{n_0} - \Gamma = \Gamma_{n_0}$ lo que contradice el hecho de que $x \notin \bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n$. Por otro lado, como cada Γ_n es un conjunto cerrado nunca-denso de $\mathbb{R}$, resulta que $\mathbb{R}\setminus\Gamma_n$ es un abierto denso de $\mathbb{R}$ por lo que, una nueva aplicación del Teorema de Categoría de Baire, nos garantiza que

$$G := \mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n = \bigcap_{n=1}^\infty (\mathbb{R}\setminus\Gamma_n),$$

es un G_δ-denso en $\mathbb{R}$. Finalmente, como $G \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x+\Gamma \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ resulta que $\{x \in \mathbb{R} : x+\Gamma \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ es residual en $\mathbb{R}$. ■

En general, el resultado de Scheeffer es válido, no sólo para el conjunto de Cantor Γ, sino para cualquier conjunto perfecto y nunca-denso de $\mathbb{R}$. Un poco más tarde, F. Bagemihl [27] debilita la hipótesis del resultado anterior demostrando que:

Teorema 1.10.2 (Bagemihl). . *Si* $F \subseteq \mathbb{R}$ *es de primera categoría y* N *es un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *a lo más numerable, entonces existe un conjunto residual* $G \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $(x+N)\cap F = \varnothing$ *para todo* $x \in G$.

Prueba. Suponga que $N = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $G_n = \{x \in \mathbb{R} : x_n + x \notin F\}$. Observe que, por el Teorema 1.6.3, $\mathbb{R}\setminus F$ es residual ya que F es de primera categoría y, así,

$$G_n = -x_n + (\mathbb{R}\setminus F)$$

también es un conjunto residual en $\mathbb{R}$. Si ahora definimos $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, entonces G es residual en $\mathbb{R}$ y, para todo $x \in G$, se cumple que $(x+N)\cap F = \varnothing$. ■

Otros conjuntos tipo Cantor que constan sólo de números irracionales fueron obtenidos por Boes, Darst y Erdös en [57] al demostrar que

> **Teorema de Boes-Darst-Erdös**. *Existe un conjunto residual* $G \subseteq [0,1]$ *tal que, para cada* $\alpha \in G$*, el conjunto* $(0,1)\cap\Gamma_\alpha$ *consta sólo de números irracionales.*

En el resultado anterior, para cada $\alpha \in (0,1]$, Γ_α es el conjunto tipo-Cantor que se construye sobre $[0,1]$ del modo siguiente: remueva del centro de $[0,1]$ un intervalo abierto de longitud $\alpha/3$. De los dos intervalos cerrados que quedaron remueva del centro de cada uno de ellos un intervalo abierto de longitud $\alpha/3^2$. Ahora quedan 2^2 subintervalos cerrados y se repite la operación anterior removiendo del centro de cada uno de ellos un intervalo abierto de longitud $\alpha/3^3$, reteniéndose los 2^3 intervalos cerrados restantes. Continuando indefinidamente con este procedimiento se construye, con los intervalos cerrados que se retienen en cada etapa del mismo, el conjunto tipo-Cantor Γ_α, es decir, $\Gamma_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, donde cada Γ_n es la reunión de los 2^n intervalos cerrados retenidos en cada paso. Pongamos $\Gamma_0 = [0,1]$ y observe que $\Gamma := \Gamma_1$ es nuestro usual conjunto ternario de Cantor.

1.11. Espacios completamente metrizables y Čech-completos

La familia $\mathfrak{B}a$, formada por todos los espacios de Baire, constituye, sin duda alguna, una clase muy interesante de espacios topológicos con amplias e importantes aplicaciones en Análisis Real, Análisis Funcional, Topología y muchas otras ramas de las matemáticas. Sin embargo, una de las grandes deficiencias que se le atribuye a los espacios de Baire es su incapacidad para preservarse por productos, ni aun por productos finitos. En efecto, Oxtoby [347] fue el primero en construir un espacio de Baire cuyo cuadrado no es un espacio de Baire. Similarmente, un subespacio (cerrado o no) de un espacio de Baire no necesita ser un espacio de Baire. Estas carencias obliga a intentar la búsqueda de ciertas subclases de $\mathfrak{B}a$ que se preserven tanto por productos así como por subespacios cerrados. En esta sección mostraremos algunas subclases de $\mathfrak{B}a$ que poseen propiedades especiales que no son compartidas, en general, por los miembros de $\mathfrak{B}a$. Por ejemplo, la colección de los espacios métricos completos forman una subclase de $\mathfrak{B}a$ que, además de ser numerablemente productiva (el producto de cualquier familia numerable de espacios métricos completos es completo), sus subespacios cerrados heredan la completitud de la métrica. Propiedades un tanto similares la tiene la subfamilia de $\mathfrak{B}a$ formada por los espacios localmente compactos.

Como hemos mencionado anteriormente, existen otras variantes del Teorema de Categoría de Baire que se obtienen modificando el concepto de completitud. Algunas de esas variantes son la completitud de Čech, la completitud numerable de Čech, la completitud de Oxtoby, etc. Tales categorías de espacios fueron inventadas a partir de 1950 con el propósito de preservar el producto de espacios de Baire. El estudio de algunos de estos tipos de espacios serán analizados en esta sección, evitando penetrar en sus propiedades más relevantes por lo que sólo se abordan ciertos resultados que nos son de utilidad en esta notas. Fundamentalmente se demuestra que cada uno de esos espacios forman parte del exclusivo clan de los espacios de Baire.

1.11.1. || ► Espacios completamente metrizables

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se llama **completamente metrizable** si existe una métrica completa d sobre X tal que la topología τ_d, generada por d, coincide con τ. En este caso también se dice que la topología generada por d es *compatible* con τ. El hecho de que (X,τ) sea completamente metrizable es equivalente a la existencia de un espacio métrico completo (Y,ρ) y un homeomorfismo de (X,τ) sobre (Y,ρ).

Fijemos ahora un espacio métrico completo (X,d). Sabemos que los únicos subespacios completos de X son los subespacios cerrados. Sin embargo, si nos preguntáramos por los subespacios de X que son *completamente metrizables*, entonces la respuesta sería muy diferente; por ejemplo, el conjunto de los números irracionales no es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, no puede ser completo, sin embargo, es un subespacio completamente metrizable como se puede ver usando el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, Teorema 1.11.3, demostrado un poco más abajo. Lo mismo es cierto para cualquier conjunto abierto no vacío que resida en un espacio métrico completo. De inmediato veremos que la familia de los espacios topológicos completamente metrizables es una subclase de $\mathfrak{B}a$.

Teorema 1.11.1. *Si (X,τ) es un espacio topológico completamente metrizable, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Este resultado es inmediato si se tiene en cuenta que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire y que los espacio de Baire se preservan bajo homeomorfismos. He aquí otra prueba menos directa. Sea ρ una métrica con respecto a la cual X es completo. Vamos a demostrar que si A es un subconjunto de primera categoría de X, entonces $X \setminus A$ es denso en X e invocar el Teorema 1.6.3, para concluir que X es un espacio de Baire.

Supongamos entonces que A es un subconjunto de primera categoría de X y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Escojamos una sucesión de subconjuntos cerrados nunca-densos $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_{n-1} \setminus F_n \neq \varnothing$, donde U_n es cualquier conjunto ρ-abierto en X. Pongamos $U_0 := U$ y seleccionemos cualquier sucesión encajada $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ de bolas ρ-abiertas en X con centro en $x_n \in U_{n-1} \setminus F_n$ y de radio $< 1/2^n$ tal que

$$\overline{U}_n \subseteq U_{n-1} \setminus F_n \quad n = 1, 2, \ldots$$

Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es ρ-Cauchy. En efecto, para todo $i, j \geq n$

$$\rho(x_i, x_j) \leq \rho(x_i, x_n) + \rho(x_n, x_j) < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Puesto que (X,ρ) es un espacio métrico completo, existe un $z_0 \in X$ tal que $\rho(x_n, z_0) \to 0$. Por otro lado, como $x_i \in \overline{U}_n$ para todo $i \geq n$, se sigue

$$z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq U_0 \setminus A = U \setminus A.$$

Esto prueba que $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $X \setminus A$ es denso en X. Un llamado al Teorema 1.6.3 concluye la prueba. ■

Los conjuntos abiertos, viviendo en un espacio métrico completo, que no son al mismo tiempo cerrados, *nunca son completos* con la métrica heredada, sin embargo, ellos son completamente metrizables.

Teorema 1.11.2. *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Si U es un subconjunto abierto no vacío de X, entonces U es completamente metrizable.*

Prueba. Definamos la métrica ρ sobre U por

$$\rho(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right|$$

para cada $x, y \in U$. Es realmente un ejercicio sencillo establecer que ρ es una métrica y que la condición $d(x_n, x_m) \to 0$ si, sólo si, $\rho(x_n, x_m) \to 0$ para todo $x_n, x_m \in U$ es equivalente a que la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (U,\rho) \to (U,d)$ es un homeomorfismo. Puesto que para todo $x, y \in U$ se cumple que $d(x,y) \leq \rho(x,y)$, se sigue de lo anterior que cualquier sucesión ρ-Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en U será automáticamente d-Cauchy en U y, así, por la d-completitud de X tendrá un d-límite, digamos $x_0 \in X$. Notemos ahora que x_0 no puede estar en $X \setminus U$. En efecto, si ese fuera el caso tendríamos que $\lim_{n\to} d(x_n, X \setminus U) = 0$ y, en consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) = \infty$ para cada $m \in \mathbb{N}$, lo cual implicaría que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no es ρ-Cauchy. Esta contradicción obliga a que x_0 quede fuera de $X \setminus U$, es decir, $x_0 \in U$. Finalmente, la continuidad de las aplicaciones $d(x, X \setminus U)$ y $\lambda \to 1/\lambda$ nos garantizan que $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ y, por lo tanto, (U,ρ) es completo. ■

Un resultado mucho más general que el anterior y una de las tantas razones que justifican el por qué los conjuntos G_δ son importantes lo constituye el siguiente resultado de Alexandroff y Hausdorff. La implicación $(1) \Rightarrow (2)$ fue demostrada por P. Alexandroff para el caso de un espacio métrico completo separable y generalizada a espacios metrizables arbitrarios por F. Hausdorff (véase, por ejemplo, [155], p. 345). Es interesante observar que J. Dugundji le atribuye a S. Mazurkievicz la autoría de ese resultado (véase, [141], Theorem 8.3, p.308).

Teorema 1.11.3 (Alexandroff-Hausdorff). *Sean (X,d) un espacio métrico completo y G un subconjunto no vacío de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *G es un G_δ en X.*

(2) *G es completamente metrizable.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que G es un subconjunto G_δ de X. Entonces existe una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos $(U_k)_{k=1}^\infty$ de X tal que $G = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$. Por el Teorema 1.11.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una métrica completa d_n sobre U_n compatible con la topología relativa de U_n. Definamos ahora $\rho : G \times G \to \mathbb{R}$ por

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \min\{1, d_n(x,y)\}$$

para todo $x,y \in G$. Es rutina verificar que, en realidad, ρ es una métrica sobre G y que la aplicación identidad $\mathrm{id} : (G,d) \to (G,\rho)$ es un homeomorfismo. Si $(x_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión ρ-Cauchy en G, entonces ella es d_n-Cauchy en U_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y así, por completitud, posee un d-límite en $G = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Por supuesto, ese d-límite es el ρ-límite de la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ y, en consecuencia, (G,ρ) es completo.

$(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que G es completamente metrizable. Entonces G es homeomorfo a un espacio métrico completo (Y,ρ). Sea f un homeomorfismo de G sobre Y. Por la continuidad de f, para cada $x \in G$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número positivo $\delta(x,n)$ tal que

$$\rho\big(f(x), f(x')\big) < \frac{1}{n} \quad \text{siempre que} \quad d(x,x') < \delta(x,n) \quad \text{y} \quad x' \in G. \tag{1.11.1}$$

Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\delta(x,n) < 1/n$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y definamos el conjunto

$$G_n = \bigcup_{x \in G} U(x, r_n(x)), \tag{1.11.2}$$

donde $r_n(x) = \delta(x,n)/2$. Como cada G_n es abierto en G, entonces todo lo que tenemos que probar es que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. En primer lugar es claro que $G \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Sea $z \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Entonces, por (1.11.2), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in G$ tal que $d(z,x_n) < r_n(x_n) = \delta(x,n)/2$. Puesto que $\delta(x,n) < 1/n$ se sigue que $x_n \to z$. También, para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, tenemos que

$$d(x_n,x_m) \le d(z,x_n) + d(z,x_m) < \frac{\delta(x_n,n)}{2} + \frac{\delta(x_m,m)}{2} \le \delta(x_n,n) + \delta(x_m,m). \tag{1.11.3}$$

Podemos distinguir dos casos: (1°) Si $\delta(x_n,n) \le \delta(x_m,m)$, se sigue de (1.11.1) que $d(x_n,x_m) < \delta(x_m,m)$ y por consiguiente,

$$\rho\big(f(x_m), f(x_n)\big) < \frac{1}{m}. \tag{1.11.4}$$

(2°) Si $\delta(x_m, m) \leq \delta(x_n, n)$, se sigue de (1.11.3) que $d(x_n, x_m) < \delta(x_n, n)$ y gracias a (1.11.1) se concluye que

$$\rho\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \frac{1}{n}. \tag{1.11.5}$$

Observe que (1.11.4) y (1.11.5) implican, en ambos casos, que $\rho\big(f(x_n, x_m)\big) < 1/n$ para todo $m > n$ y, entonces, la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es de Cauchy en el espacio métrico completo (Y, ρ). Así, existe un $y \in Y$ tal que $\rho(y_n, y) \to 0$. Pongamos $x = f^{-1}(y)$. Entonces $x \in G$ y por la continuidad de f^{-1} resulta que $d(x_n, x) \to 0$, pero como también $d(x_n, z) \to 0$ concluimos que $z = x$. Por esto $z \in G$, con lo cual hemos demostrado que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Esto prueba que G es un G_δ en X. ■

Corolario 1.11.1. *El conjunto de los números irracionales, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, con la métrica heredada de $\mathbb{R}$, es completamente metrizable. En particular, $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable.*

Prueba. Sabemos que $\mathbb{I}$ no es un espacio métrico completo, sin embargo, como dicho conjunto es un G_δ, el Teorema 1.11.3 nos dice que $\mathbb{I}$ es completamente metrizable. ■

El Teorema 1.11.2 o, en su defecto, el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, combinado con el Lema 1.4.2 permite demostrar el siguiente corolario.

Corolario 1.11.2. *Sea (X, τ) un espacio metrizable localmente compacto. Entonces X es completamente metrizable.*

Prueba. Sea d una métrica compatible con τ y suponga que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es la completación de X. Como X es denso en $\widehat{X}$, se sigue del Lema 1.4.2 que X es un subconjunto abierto de $\widehat{X}$. El Teorema 1.11.2 completa la prueba. Otra manera es ver esto es observar que como X es abierto en $\widehat{X}$, entonces X es un G_δ en $\widehat{X}$. Se sigue ahora del Teorema de Alexandroff-Hausdorff que X es completamente metrizable. ■

1.11.2. ‖ ► Espacios Čech-completos

Existen familias interesantes de espacios topológicos de Hausdorff que incluyen a todos los espacios que son localmente compactos así como a todos los espacios métricos completos y donde, además, cada miembro de la familia es un espacio de Baire. Por ejemplo, la familia formada por todos los espacios numerablemente Čech-completos es una de ellas. Antes de describir tales espacios será conveniente recordar la definición de algunas nociones de espacios topológicos que usaremos en estas notas.

Definición 1.11.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff.*

(*a*) *X se llama **regular** si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X con $x \notin F$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

(*b*) *X se llama **normal** si para cada par F y G de conjuntos cerrados y disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.*

(*c*) *X se llama **completamente regular** si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X con $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = 0$.*

Recordemos que todo espacio métrico, así como todo espacio de Hausdorff compacto, son normales. Similarmente, todo espacio localmente compacto es completamente regular.

Uno de los resultados interesante en análisis es el irrenunciable y hermoso Lema de Urysohn el cual garantiza la existencia de ciertas funciones continuas a valores reales definidas sobre un espacio normal. A través de él se pueden probar otros resultados importantes como son: el Teorema de Metrización de Urysohn, el Teorema de Extensión de Tietze y muchos otros (véase, por ejemplo, [141]).

Teorema 1.11.4 (Lema de Urysohn). *Sea (X,τ) un espacio normal y sean F y K subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(F) = \{1\}$ y $f(K) = \{0\}$.*

Es claro, por el Lema de Urysohn, que todo espacio normal es completamente regular y que todo espacio completamente regular es regular. Una de las ventajas que poseen los espacios completamente regulares es que ellos tienen un buen comportamiento con respecto a subespacios y productos, es decir, *cualquier subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular y cualquier producto de espacios completamente regulares es completamente regular*. Otra buena propiedad encontrada en los espacios regulares es la siguiente:

Teorema 1.11.5. *(X,τ) es un espacio regular si, y sólo si, para todo $x \in X$ y cualquier entorno abierto U de x, existe un entorno abierto V de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Prueba. En efecto, sea $x \in X$ y sea U un entorno abierto de x. Definamos $F = X \setminus U$. Entonces F es un conjunto cerrado de X que no contiene a x. Como X es regular, existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y a F respectivamente. Observemos ahora que $\overline{V}$ es disjunto de F, ya que si $y \in F \cap \overline{V}$, el conjunto W sería un entorno de y intersectando a V. Esta contradicción establece que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. El recíproco se deja como ejercicio al lector. ■

Definición 1.11.2. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se llama **cuasi-regular** si para cada conjunto abierto no vacío U de X, existe un conjunto abierto no vacío V de X tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Por lo probado anteriormente tenemos que: *todo espacio regular es cuasi-regular*. En particular, *todos los espacios métricos, así como todos los espacios localmente compactos, son cuasi-regulares*.

Teorema 1.11.6. *Si (X,τ) es un espacio de Hausdorff cuasi-regular y si G es un subconjunto denso de X, entonces G también es cuasi-regular.*

Prueba. Miremos a G como un subespacio topológico de X con su topología inducida τ_G y sea U cualquier subconjunto abierto no vacío de G. Entonces existe un conjunto abierto no vacío W de X tal que $U = W \cap G$. Como X es cuasi-regular, existe un abierto no vacío V de X tal que $\overline{V}^{\tau} \subseteq W$. Notemos que $V \cap G$ es un abierto no vacío de G y que

$$\overline{V \cap G}^{\tau_G} \subseteq \left(\overline{V}^{\tau}\right) \cap G \subseteq W \cap X = U.$$

Esto termina la prueba. ■

Definición 1.11.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una **compactificación** de X es un par $(\alpha X, \alpha)$ donde αX es un espacio de Hausdorff compacto y α es un homeomorfismo de X sobre un subespacio denso de αX.*

En la práctica siempre identificaremos a X con su imagen $\alpha(X) \subseteq \alpha X$ y diremos simplemente que αX es una compactificación de X. Al conjunto $\alpha X \setminus X$ se le llama el *resto* de αX. Puesto que cualquier subespacio de un espacio de Hausdorff compacto es completamente regular, resulta que los únicos espacios que pueden ser compactificados son los completamente regulares. El teorema clásico fundamental que garantiza la existencia de compactificaciones para espacios completamente regulares es el siguiente (véase, por ejemplo, [141]).

Teorema 1.11.7 (Stone-Čech). *Sea (X,τ) un espacio completamente regular. Entonces existe una compactificación βX de X con la siguiente propiedad: toda función continua y acotada $f : X \to \mathbb{R}$ se puede extender a una única función continua y acotada $\widehat{f} : \beta X \to \mathbb{R}$.*

La compactificación obtenida en el teorema anterior, que será denotada siempre por βX, se le llama la **compactificación de Stone-Čech**. Tal compactificación posee algunas propiedades especiales:

(1) La compactificación de Stone-Čech es *única* en el sentido de que cualquier otra compactificación satisfaciendo la propiedad dada en el Teorema de Stone-Čech es homeomorfa a βX.

(2) βX es la compactificación "*más larga*" de X en el sentido de que cualquier otra compactificación de X, digamos αX, existe una aplicación continua $f : \beta X \to \alpha X$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Entre los espacios completamente regulares, los localmente compactos se caracterizan por el siguiente resultado.

Teorema 1.11.8 (Alexandroff). *Cualquier espacio de Hausdorff (X,τ) localmente compacto (no compacto) admite una compactificación αX tal que $\alpha X \setminus X$ consta de un único punto.*

Prueba. (Bosquejo). Sea x_∞ un objeto que está fuera de X y defina $\alpha X = X \cup \{x_\infty\}$. Considere ahora la familia τ_ω definida del modo siguiente:

$$\tau_\infty \;=\; \tau \cup \big\{(X \setminus K) \cup \{x_\infty\} : \; K \subseteq X \text{ es compacto}\big\}.$$

No es difícil, aunque bastante tedioso, verificar que τ_ω es una topología para αX (los detalles se pueden ver, por ejemplo, en Munkres [324]) que además es Hausdorff. Veamos que $(\alpha X, \tau_\infty)$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U} = \big\{U_i : i \in I\big\}$ un cubrimiento abierto de αX. Puesto que $x_\infty \in \alpha X$, debe existir algún U_{i_0} que contenga a x_∞ y, en consecuencia, U_{i_0} debe ser de la forma $U_{i_0} = (X \setminus K_0) \cup \{x_\infty\}$ para algún compacto $K_0 \subseteq X$. Construyamos la familia $\mathcal{V} = \big\{V_i : i \in I\big\}$ declarando que

$$\begin{aligned} V_i &= U_i, \quad \text{si} \quad U_i \in \tau, \\ V_i &= X \setminus K, \quad \text{si} \quad U_i = (X \setminus K) \cup \{x_\infty\}, \end{aligned}$$

para algún compacto $K \subseteq X$. Observe que como cada K es compacto, entonces él es cerrado en X (véase el Teorema 1.4.4) y, en consecuencia, $X \setminus K$ es abierto en X. Esto nos dice que cada V_i es abierto en X. Más aun, la familia $\big\{V_i : i \in I \setminus \{i_0\}\big\}$ es un cubrimiento abierto del compacto K_0 del que se puede extraer su subcubrimiento finito, digamos $\big\{V_1, \ldots, V_n\big\}$. Es claro que $\big\{U_0, U_1, \ldots, U_n\big\}$ es un subcubrimiento finito de αX.

Resta por ver que X es τ_∞-denso en αX. En efecto, como X no es compacto, cualquier subconjunto compacto no vacío K de X cumple que $X \setminus K$ es un abierto no vacío y, entonces, para cualquier abierto $U = (X \setminus K) \cup \{x_\infty\}$ conteniendo a x_∞, se tiene que $U \cap X \neq \varnothing$. Esto muestra que $x_\infty \in \overline{X}^{\tau_\infty} = \alpha X$. ■

La compactificación obtenida en el teorema anterior se le llama la **compactificación de Alexandroff** o **compactificación por un punto** y será denotada siempre por αX. Nótese que x_∞ es el único punto en $\alpha X \setminus X$ para el cual $\alpha X \setminus X = \{x_\infty\}$.

Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ). Un subconjunto F de X se dice que es $\mathcal{U}$-**pequeño** si F está contenido en algún miembro de $\mathcal{U}$. En general, una familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X se dice que es $\mathcal{U}$-**pequeña** si existen $F \in \mathfrak{F}$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$.

Definición 1.11.4. *Un espacio completamente regular (X,τ) se llama **numerablemente Čech-completo** si existe una colección numerable $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos de X satisfaciendo la siguiente propiedad: para cualquier familia numerable y decreciente $\mathfrak{F} = (F_k)_{k=1}^\infty$ de subconjuntos cerrados de X que es $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$\bigcap_{k=1}^\infty F_k \neq \varnothing.$$

Es un ejercicio sencillo establecer, por ejemplo, que *todo espacio métrico completo* (X,d) *es numerablemente Čech-completo*. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_n = \{U(x,1/n) : x \in X\}$ formado por todas las bolas abiertas de radio $1/n$ y observar que si $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ es una familia numerable y decreciente de subconjuntos cerrados de X tal que $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ es $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces el Teorema de Encaje de Cantor nos garantiza que $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$. Similarmente, *todo espacio localmente compacto es numerablemente Čech-completo*. Para demostrar esa afirmación es suficiente elegir, para cada $n \in \mathbb{N}$, el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_n$ formado por todos los conjuntos abiertos que son relativamente compactos en dicho espacio y proceder como en el ejemplo anterior. Lo que nos interesa aquí es demostrar que los espacios numerablemente Čech-completos también son espacios de Baire.

Teorema 1.11.9 (Teorema de Categoría de Baire para espacios Čech-completos). *Si* (X,τ) *es un espacio topológico de Hausdorff que es numerablemente Čech-completo, entonces* X *es un espacio de Baire.*

Prueba. Suponga que X es un espacio numerablemente Čech-completo. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos en X y consideremos $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Probemos que G es denso en X; es decir, $G \cap V \neq \varnothing$ para cualquier subconjunto abierto no vacío V de X.

Sean entonces V subconjunto abierto no vacío de X y $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de cubrimientos abiertos de X con las propiedades establecidas en la definición de numerablemente Čech-completo. Ahora se procede como en la demostración del Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos con una pequeña variación: hacer uso del hecho de que X es cuasi-regular. En efecto, como $\mathcal{U}_1$ es un cubrimiento abierto de X, podemos encontrar un $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que $V \cap U_1 \neq \varnothing$. Por ser G_1 denso en X y el conjunto $V \cap U_1$ abierto, se sigue que $\big(V \cap U_1\big) \cap G_1 \neq \varnothing$ y ahora, por la cuasi regularidad de X, podemos encontrar un abierto V_1 de X tal que $\overline{V}_1 \subseteq V \cap U_1 \cap G_1$. De esto se sigue que

$$\overline{V}_1 \subseteq V \cap G_1 \quad \text{y} \quad \overline{V}_1 \subseteq U_1 \quad \text{para algún} \quad U_1 \in \mathcal{U}_1.$$

Repitamos el proceso anterior al conjunto abierto no vacío $V_1 \cap G_2$ pero trabajando ahora con $\mathcal{U}_2$, es decir, teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_2$ es un cubrimiento abierto de X se obtiene, usando de nuevo el hecho de que X es cuasi-regular, un conjunto abierto V_2 de X tal que

$$\overline{V}_2 \subseteq V_1 \cap G_2 \quad \text{y} \quad \overline{V}_2 \subseteq U_2 \quad \text{para algún} \quad U_2 \in \mathcal{U}_2.$$

Continuando indefinidamente con este proceso se obtienen una sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos de X y una sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X que cumplen

$$V \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots, \quad \overline{V}_n \subseteq G_n \quad \text{y} \quad \overline{V}_n \subseteq U_n \quad \text{para algún} \quad U_n \in \mathcal{U}_n.$$

Tomando $\mathfrak{F} = \{\overline{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$, vemos que dicha colección es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados donde cada $\overline{V}_n$ es $\mathcal{U}_n$-pequeña, $n = 1,2,\ldots$. Como X es numerablemente Čech-completo, resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \neq \varnothing,$$

de donde se deduce que $G \cap V \neq \varnothing$. ■

Una noción más restrictiva que la de espacio numerablemente Čech-completo es la siguiente:

Definición 1.11.5. *Sea* (X,τ) *un espacio completamente regular. Diremos que* X *es* ***Čech-completo*** *si existe una colección numerable* $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ *de cubrimientos abiertos de* X *con la propiedad de que cualquier familia* $\mathfrak{F}$ *de subconjuntos cerrados de* X *con la propiedad de intersección finita y* $\mathcal{U}_n$*-pequeña para cada* $n \in \mathbb{N}$*, se cumple que* $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \varnothing$.

Es claro que todo espacio Čech-completo es numerablemente Čech-completo y, por consiguiente, es un espacio de Baire. Igualmente, todo subespacio cerrado de un espacio Čech-completo sigue siendo Čech-completo. En algunos casos es conveniente disponer de la siguiente condición equivalente para los espacios Čech-completos (véase, por ejemplo, [155], p. 251-252).

Teorema 1.11.10. *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff completamente regular. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es Čech-completo.*

(2) *X es un G_δ en βX.*

(3) *X es un G_δ en cualquier compactificación αX de X.*

Si, además, X es un espacio métrico, las condiciones precedentes son equivalentes a

(4) *X es completamente metrizable.*

Prueba. $(1)\Rightarrow(2)$. Supongamos que X es Čech-completo y sea $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de cubrimientos abiertos de X tal que para cualquier familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n\in\mathbb{N}$, se cumple que $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}F\neq\varnothing$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, pongamos $\mathcal{U}_n=\{U_{s,n}\}_{s\in S_n}$, donde S_n es un conjunto de índices con la misma cardinalidad que la de $\mathcal{U}_n$. Puesto que $X\subseteq\beta X$, existen conjuntos abiertos $V_{s,n}$ en βX tal que $U_{s,n}=X\cap V_{s,n}$ para cada $s\in S_n$ y $n=1,2,\ldots$ Claramente

$$X\ \subseteq\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{s\in S_n}V_{s,n}.$$

Para demostrar que X es un G_δ en βX es suficiente demostrar la otra inclusión.

Tomemos un punto $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{s\in S_n}V_{s,n}$ y sea $\mathcal{B}(x)$ la familia de todos los entornos abiertos de x en βX. Entonces la familia $\mathfrak{F}=\{X\cap\overline{V}:V\in\mathcal{B}(x)\}$, donde $\overline{V}$ denota la clausura de V en βX, consiste de subconjuntos cerrados del espacio X con la propiedad de intersección finita. Por otro lado, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe un $s\in S_n$ tal que $x\in V_{s,n}$ y se sigue de la regularidad de βX (βX es un espacio de Hausdorff compacto) que existe un $V\in\mathcal{B}(x)$ tal que $\overline{V}\subseteq V_{s,n}$, por lo que $X\cap\overline{V}\subseteq X\cap V_{s,n}=U_{s,n}$. Esto prueba que la familia $\mathfrak{F}$ es $\mathcal{U}_n$-pequeña. Por esto,

$$X\cap\bigcap_{V\in\mathcal{B}(x)}\overline{V}\neq\varnothing,$$

y como βX es un espacio de Hausdorff,

$$\bigcap_{V\in\mathcal{B}(x)}\overline{V}\ =\ \{x\},$$

de donde resulta que $x\in X$. Esto prueba que X es un G_δ en βX.

$(1)\Rightarrow(3)$ es idéntica a la implicación anterior cambiando sólo βX por αX.

$(2)\Rightarrow(1)$. Supongamos que X es un G_δ en βX y sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de βX tal que $X=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$. Por la regularidad de βX podemos escoger, para cualquier $x\in X$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$, un conjunto abierto no vacío $V_{x,n}\subseteq\beta X$ tal que $x\in V_{x,n}\subseteq\overline{V}_{x,n}\subseteq G_n$. Sea

$$\mathcal{U}_n\ =\ \left\{X\cap V_{x,n}:x\in X\right\},\quad n=1,2,\ldots$$

Es claro que la familia $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una colección numerable de cubrimientos abiertos de X. Considere ahora $\mathfrak{F}=\{F_s:s\in S\}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n\in\mathbb{N}$. Como βX es compacto y la familia $\overline{\mathfrak{F}}=\{\overline{F}_s:s\in S\}$ (clausura tomada en βX)

consiste de subconjuntos cerrados en βX con la propiedad de intersección finita, resulta que $\bigcap_{s\in S}\overline{F}_s \neq \varnothing$. Sea $x \in \bigcap_{s\in S}\overline{F}_s$. Para ver que $x \in \bigcap_{s\in S} F_s$ será suficiente demostrar que $x \in X$. Veamos esto último. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ es $\mathcal{U}_n$-pequeña, escojamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un $s_n \in S$ tal que $F_{s_n} \subseteq U_n$ para algún $U_n \in \mathcal{U}_n$ y, además, un $x_n \in X$ para el cual se cumpla que $U_n = X \cap V_{x_n,n}$. Entonces

$$F_{s_n} \subseteq X \cap V_{x_n,n}.$$

Como

$$x \in \overline{F}_{s_n} \subseteq \overline{X \cap V_{x_n,n}} \subseteq \overline{V}_{x_n,n} \subseteq G_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X.$$

La prueba de $(3) \Rightarrow (1)$ también vale, como en la implicación $(2) \Rightarrow (1)$, para αX en lugar de βX.

Hemos demostrado hasta ahora que: $(1) \Leftrightarrow (2)$ y $(1) \Leftrightarrow (3)$, de donde se sigue que $(2) \Leftrightarrow (3)$. Veamos ahora que $(1) \Leftrightarrow (4)$, si X es un espacio métrico.

$(1) \Rightarrow (4)$. Sea X un espacio métrico que es Čech-completo y suponga que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es una completación de X. La prueba de la implicación $(1) \Rightarrow (2)$ sigue siendo válida si reemplazamos βX por $\widehat{X}$, por lo que X resulta ser un G_δ en $\widehat{X}$. Se sigue ahora del Teorema de Alexandroff-Hausdorff, Teorema 1.11.3, que X es completamente metrizable.

$(4) \Rightarrow (1)$. Suponga que X es completamente metrizable y sea ρ una métrica completa sobre X que genera su topología. Para demostrar que X es Čech-completo, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_n$ de X formado por todas las bolas abiertas de ρ-radio $< 1/n$ y sea $\mathfrak{F}$ cualquier familia de subconjuntos ρ-cerrados de X con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $F_n \in \mathfrak{F}$ tales que $\rho - \operatorname{diam}(F_n) < 2/n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Escojamos $x_n \in F_n$. Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X, ρ). La propiedad de intersección finita de $\mathfrak{F}$ garantiza que $F_n \cap F_m \neq \varnothing$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Fijemos un $z \in F_n \cap F_m$. Se sigue entonces que

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, z) + \rho(z, x_m) < \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

el cual puede hacerse tan pequeño como se quiera si n y m se eligen lo suficientemente grande. Esto prueba que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio métrico completo (X, ρ) y, en consecuencia, existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Observe, en particular, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x, x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \frac{2}{n}.$$

Queda por demostrar que $x \in \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F$. Fijemos $F \in \mathfrak{F}$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $y \in F \cap F_n$ (el cual es no vacío ya que $\mathfrak{F}$ posee la PIF), se tiene que

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{4}{n},$$

de donde se concluye que $\rho(x, y) = 0$, pues $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario. Por esto, $\rho(x, F) = 0$ lo cual es equivalente a decir que $x \in F$. ■

Los espacios Čech-completos poseen el especial encanto de ser numerablemente productivos, vale decir, si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de espacios Čech-completos, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio Čech-completo ([155], Theorem 3.9.8, p. 255). La hipótesis sobre la numerabilidad de la familia $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de espacios Čech-completos es esencial en el resultado anterior. En efecto, en 1961, Oxtoby demuestra que si $(X_\alpha)_{\alpha\in D}$ es una familia de espacios Čech-completos, entonces $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ es un espacio de Baire que no es necesariamente Čech-completo. Por ejemplo, el espacio producto $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ es, por el resultado anterior, un espacio de Baire que no es Čech-completo (véase, [155], Exercise 3.9.C, p. 256). Lo extraordinario del resultado de Oxtoby es que no hay restricción sobre la cardinalidad del conjunto de índices D. En particular, si cada X_α es localmente compacto o completamente metrizable, entonces $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ es un espacio de Baire.

1.11.3. ‖ ► Espacios Oxtoby-completos

La siguiente categoría de espacios topológicos originalmente creada por Frolík [165] bajo el nombre de *espacios casi-completos* y llamados *espacios casi Čech-completos* por Aarts y Lutzer en [1] también pertenecen a la clase de los espacios de Baire con propiedades muy interesantes.

Definición 1.11.6. *Un espacio completamente regular (X,τ) se llama **casi Čech-completo** si existe un subconjunto G_δ-denso G de X que es Čech-completo.*

Más adelante veremos, Corolario 1.11.3, que todo espacio casi Čech-completo es un espacio de Baire. En la búsqueda de espacios topológicos más generales que los espacios Čech-completos, J. M. Aarts y D. J. Lutzer [2] se preguntan:

> *¿Existe una clase "natural" de espacios topológicos que contenga a los espacios completamente metrizables y a los espacios localmente compactos pero que, además, cada uno de sus miembros satisfaga la conclusión del Teorema de Categoría de Baire*?

En [427], Aaron R. Todd usando la noción de espacio pseudo-completo introducida por Oxtoby en [347] (a los que llamaremos espacio de Oxtoby), profundiza los resultados de Oxtoby y demuestra que esa clase de espacios es una apropiada e interesante respuesta a la pregunta formulada por Aarts y Luster.

Definición 1.11.7. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X se llama una **pseudo-base** de τ si para cualquier conjunto abierto no vacío U de X, existe $V\in\mathcal{B}$ tal que $V\subseteq U$. El espacio X se llama **Oxtoby-completo** si X es cuasi-regular y posee una sucesión de pseudo-bases $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ con la siguiente propiedad:*

$$\textit{siempre que}\quad V_n\in\mathcal{B}_n \quad \textit{y} \quad \overline{V}_{n+1}\subseteq V_n \quad \textit{para cada } n\in\mathbb{N}, \quad \textit{entonces} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing.$$

Los espacios Oxtoby-completos son los comúnmente llamados **espacios pseudo-completos** definidos por Oxtoby en [347]. Esta noción difiere ligeramente de la definida en [212]. En la literatura sobre el tema, a una pseudo-base también se le llama *π-base*. *Cualquier espacio métrico completo es un espacio Oxtoby-completo*. En efecto, basta tomar la sucesión de pseudo-bases $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$, donde cada $\mathcal{B}_n$ consiste de todas las bolas abiertas de radio $<1/n$. Similarmente, *cada espacio localmente compacto es un espacio Oxtoby-completo*. En general, vale el siguiente resultado:

Teorema 1.11.11. *Si (X,τ) es un espacio Čech-completo, entonces X es un espacio Oxtoby-completo.*

Prueba. Sea X un espacio Čech-completo. Por el Teorema 1.11.10, X es un G_δ en βX. Puesto que βX es un espacio cuasi-regular, entonces X, siendo denso en βX, también es cuasi-regular. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de βX tal que $X=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{B}_n=\left\{H\cap X : H \text{ es abierto en } \beta X \ \text{ y } \ \overline{H}\subseteq G_n\right\}.$$

Afirmamos que cada $\mathcal{B}_n$ es una pseudo-base de X. En efecto, sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Sea G un subconjunto abierto no vacío de βX tal que $U = G\cap X$. Entonces $G\cap G_n$, es un abierto no vacío en βX y como βX es cuasi-regular, existe un abierto no vacío $H\subseteq \beta X$ tal que $\overline{H}\subseteq G\cap G_n$. Por esto $H\cap X\in \mathcal{B}_n$ y $H\cap X\subseteq G\cap X = U$. Esto prueba nuestra afirmación.

Supongamos ahora que $U_n\in\mathcal{B}_n$ y que $U_n\supseteq \overline{U}_{n+1}\cap X$ (= la clausura de U_{n+1} relativo a X), para cada $n\in\mathbb{N}$. Por definición, $U_n = H_n\cap X$, donde H_n es un abierto no vacío de βX y $\overline{H}_n\subseteq G_n$. Puesto que $U_n\supseteq U_{n+1}$, la sucesión decreciente de cerrados $(\overline{U}_n)_{n=1}^\infty$ en el compacto βX cumple con $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{U}_n\neq\varnothing$. Por otro lado, como $\overline{H}_n\subseteq G_n$, entonces $\overline{U}_n\subseteq G_n$ y, en consecuencia,

$$\bigcap_{n=1}^\infty \overline{U}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty G_n = X.$$

Por esto,

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n \supseteq \bigcap_{n=1}^\infty \left(\overline{U}_{n+1}\cap X\right) = \left(\bigcap_{n=1}^\infty \overline{U}_{n+1}\right)\cap X = \bigcap_{n=1}^\infty \overline{U}_n \neq \varnothing,$$

y, así, X es un espacio Oxtoby-completo. ■

En la búsqueda de familias de espacios de Baire con propiedades agradables tenemos el siguiente resultado demostrado por Oxtoby en [347]. Más adelante abordaremos otra demostración de dicho resultado usando juegos topológicos (Teorema 2.2.77, página 339).

Teorema 1.11.12 (Oxtoby). *Si (X,τ) es un espacio Oxtoby-completo, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea X un espacio Oxtoby-completo y sea $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de pseudo-bases satisfaciendo la condición impuesta por la definición. Sea ahora $(G_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X y pongamos $G=\bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Para demostrar que G es denso en X, tomemos un abierto no vacío arbitrario U de X. Hagamos $U_0 := U$. Como G_1 es denso, $U\cap G_1$ es un conjunto abierto no vacío y por ser $\mathcal{B}_1$ una pseudo-base podemos elegir $V_1\in\mathcal{B}_1$ tal que $V_1\subseteq U\cap G_1$. Usemos ahora la cuasi-regularidad de X para obtener un conjunto U_1 en $\mathcal{B}_1$ tal que

$$\overline{U}_1\subseteq V_1\subseteq U\cap G_1.$$

La densidad de G_2 nos dice que $U_1\cap G_2$ es un conjunto abierto no vacío y argumentando como antes, existe un abierto no vacío $U_2\in\mathcal{B}_2$ tal que

$$\overline{U}_2\subseteq U_1\cap G_2.$$

Continuando de este modo se logra producir una sucesión $(U_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos no vacíos tal que $U_n\in\mathcal{B}_n$ y

$$\overline{U}_n\subseteq U_{n-1}\cap G_n$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Es claro que $\overline{U}_{n+1}\subseteq U_n$ y, entonces, por hipótesis $\bigcap_{n=1}^\infty U_n\neq\varnothing$. De esto se sigue que $G\cap U\neq\varnothing$ y termina la prueba. ■

Los siguientes resultados nos serán de utilidad en lo que sigue.

Teorema 1.11.13. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff cuasi-regular.*

(1) *Si X posee una pseudo-base $\mathcal{B}$ tal que la clausura de cada uno de sus miembros es numerablemente compacto, entonces cualquier subespacio G_δ-denso Y de X es Oxtoby-completo.*

(2) *Si Y es un subespacio denso Oxtoby-completo de X, entonces X es Oxtoby-completo.*

Prueba. (1). En primer lugar, por el Teorema 1.11.6, Y es cuasi-regular por ser un subespacio denso de un espacio cuasi-regular. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de X tal que $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{B}_n = \left\{H \cap Y : H \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad \overline{H} \subseteq G_n\right\}.$$

Evidentemente $\mathcal{B}_n$ es una clase de conjuntos relativamente abiertos no vacíos de Y. Cualquier conjunto relativamente abierto no vacío de Y es de la forma $G \cap Y$, donde G, y entonces $G \cap G_n$, es no vacío y abierto en X. Puesto que X es cuasi-regular, existe un conjunto $H \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{H} \subseteq G \cap G_n$. Por esto, $H \cap Y \in \mathcal{B}_n$ y $H \cap Y \subseteq G \cap Y$. Esto prueba que $\mathcal{B}_n$ es una pseudo-base en Y para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos un $U_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $U_n \supseteq \overline{U}_{n+1} \cap Y$ (= la clausura de U_{n+1} en la topología relativa de Y). Por definición, existe $H_n \in \mathcal{B}$ tal que $U_n = H_n \cap Y$ y $\overline{H}_n \subseteq G_n$. Puesto que $U_n \supseteq U_{n+1}$, resulta que $(\overline{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos todos incluidos en el conjunto numerablemente compacto $\overline{H}_1$. Por consiguiente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \varnothing$. Ya que $\overline{H}_n \subseteq G_n$, tenemos que $\overline{U}_n \subseteq G_n$, y de allí que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = Y.$$

Finalmente se obtiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{U}_{n+1} \cap Y\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_{n+1}\right) \cap Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \varnothing$$

lo cual prueba que X es Oxtoby-completo.

(2). Para demostrar que X es Oxtoby-completo, sea $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de pseudo-bases de X tal que para cada $U_n \in \mathcal{B}_n$ se cumpla que $U_n \supseteq \overline{U}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Queremos demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$. Notemos que, por la densidad de Y, cada abierto no vacío U de X intersecta a Y. Por esto, la familia $(\mathcal{B}'_n)_{n=1}^{\infty}$, donde cada $\mathcal{B}'_n$ viene dada por

$$\mathcal{B}'{}_n = \left\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}_n\right\}$$

es una sucesión de pseudo-bases de Y con la propiedad de que para cada $U'_n \in \mathcal{B}'_n$, $U'_n \supseteq \overline{U}'{}_{n+1}$. Como Y es Oxtoby-completo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U'_n \neq \varnothing$ y, por lo tanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(U_n \cap Y\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U'_n \neq \varnothing.$$

La prueba es completa. ■

Como una consecuencia del resultado anterior tenemos que la clase de los espacios Oxtoby-completos contiene a la de los espacios casi Čech-completos.

Corolario 1.11.3. *Si (X, τ) es un espacio casi Čech-completo, entonces X es Oxtoby-completo. En particular, X es un espacio de Baire.*

Prueba. Supongamos que X es un espacio casi Čech-completo y sea Y un subespacio denso Čech-completo de X. Por el Teorema 1.11.11, Y es Oxtoby-completo y gracias al Teorema 1.11.13 resulta que X es Oxtoby-completo. ■

En [2], Aarts y Lutzer construyen un espacio Oxtoby-completo que no es casi Čech-completo demostrando, de este modo, que la noción de espacio Oxtoby-completo es más general que la de ser casi Čech-completo.

Comentario Adicional 1.11.4 Recordemos que es a R. Baire a quien se le atribuye la demostración del Teorema de Categoría de Baire para $\mathbb{R}^n$ 1899. En 1914, F. Hausdorff extendió el resultado a los espacios completamente metrizables. Veintitrés años después, E. Čech estableció que un espacio es completamente metrizable si, y sólo si, es metrizable y un G_δ en alguna de sus compactificaciones. Los espacios que son G_δ en alguna de sus compactificaciones son conocidos como espacios Čech-completos (Teorema 1.11.10); en tales espacios (los Čech-completos) se satisface el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.11.9). Oxtoby extiende, en [347], algunos resultados válidos para espacios Čech-completos creando los espacio Oxtoby-completos y demostrando que ellos también pertenecen a la clase de los espacios de Baire. Además, cualquier espacio Čech-completo está incluido en la clase de los espacios Oxtoby-completos.

1.11.4. ‖ ► Espacios topológicos con un subespacio denso completamente metrizable

Los espacios topológicos de Hausdorff conteniendo un subespacio denso completamente metrizable poseen propiedades tan interesantes como las estudiadas anteriormente en esta sección. Tales espacios son de Baire (véase el Teorema 2.2.112, página 389) y cuando ellos son metrizables coinciden con los espacios Oxtoby-completos.

Sea $\mathcal{U} = (U_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. $\mathcal{U}$ se llama **localmente finita** si, para cualquier punto $x \in X$, existe un entorno abierto U de x tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap U_s \neq \varnothing\}$ es finito. Si $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, donde cada $\mathcal{U}_n$ es una familia localmente finita, entonces se dice que la familia $\mathcal{U}$ es **σ-localmente finita**. Recordemos que una familia $\mathcal{U}$ se dice que es un cubrimiento de X si $X = \bigcup_{s\in S} U_s$. Si todos los U_s son abiertos (respectivamente, cerrados), entonces se dice que $\mathcal{U}$ es un **cubrimiento abierto** (respectivamente, **cerrado**). Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X se llama **exhaustivo** si cualquier conjunto no vacío $S \subseteq X$ posee un subconjunto relativamente abierto de la forma $U \cap S$ con $U \in \mathcal{U}$. La familia $\mathcal{U}$ es un **cuasi-cubrimiento abierto** de X si cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto y su unión, $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, es denso en X. Observe que cualquier pseudo-base de X es un cuasi-cubrimiento abierto de X.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos colecciones de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{U}$ si, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$. Si los elementos de $\mathcal{V}$ son conjuntos abiertos (respectivamente, cerrados) de X llamamos a $\mathcal{V}$ un **refinamiento abierto** (respectivamente, **refinamiento cerrado**) de $\mathcal{U}$. Similarmente, diremos que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento fuerte** de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y para cada elemento $V \in \mathcal{V}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. La colección $\mathcal{V}$ se dice que es una **familia disjunta** si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{V}$ tienen intersección vacía. Finalmente, decimos que $\mathcal{V}$ es una **familia σ-disjunta** si $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, donde cada $\mathcal{V}_n$ es una familia disjunta.

Comencemos por recordar el siguiente resultado (véase, por ejemplo, [324], Lema 39.2, p. 280) cuya prueba daremos sólo para entender la técnica para construir familias disjuntas con ciertas propiedades a partir de una familia dada.

Teorema 1.11.14. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X tal que:*

(1) *$\mathcal{V}$ es una familia σ-disjunta,*

(2) *$\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, y*

(3) *$\mathcal{V}$ es σ-localmente finita.*

Prueba. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\mathcal{U} = (U_s)_{s\in S}$, donde S es un conjunto bien ordenado (de índices) por la relación $<$. Fijemos ahora un $n \in \mathbb{N}$ y para cada $U_s \in \mathcal{U}$ definamos

$$S_n(U_s) = \{x \in X : U(x, 1/n) \subseteq U_s\},$$

donde $U(x,r)$ es la bola abierta en X con centro x y radio r. Usemos ahora el buen ordenamiento de S para definir el conjunto

$$T_n(U_s) = S_n(U_s) \setminus \bigcup_{t<s} U_t.$$

Afirmamos que $(T_n(U_s))_{s\in S}$ es una familia disjunta. En efecto, sean U_s, U_t elementos distintos de $\mathcal{U}$ con $s<t$ y sean $x \in T_n(U_s)$ y $y \in T_n(U_t)$. Dado que $x \in T_n(U_s)$, entonces $x \in S_n(U_s)$ y, por lo tanto, $U(x,1/n) \subseteq U_s$. Por otro lado, como $s<t$ y $y \in T_n(U_t) = S_n(U_t) \setminus \bigcup_{r<t} U_r$, resulta que $y \notin U_s$ y así, $y \notin U(x,1/n)$. Esto prueba que

$$d(x,y) \geq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } x \in T_n(U_s) \quad \text{y} \quad \text{todo } y \in T_n(U_t).$$

De lo anterior se sigue nuestra afirmación. Los conjuntos $T_n(U_s)$ no son todavía los que realmente andamos buscando; sin embargo, dilatando a cada uno de ellos ligeramente podemos lograr lo que queremos. Sea entonces

$$E_n(U_s) = \bigcup_{x\in T_n(U_s)} U(x,1/3n).$$

Notemos que los conjuntos $(E_n(U_s))_{s\in S}$ son abiertos, disjuntos dos a dos y $E_n(U_s) \subseteq U_s$ para todo $s \in S$. Si ahora definimos

$$\mathcal{V}_n = \{E_n(U_s) : s \in S\}$$

resulta que la familia $\mathcal{V}_n$ es disjunta y refina a $\mathcal{U}$ ya que $E_n(U_s) \subseteq U_s$ para todo $s \in S$. Para ver que $\mathcal{V}_n$ es localmente finita, sea $x \in X$. Entonces la bola abierta $U(x,1/6n)$ intersecta a lo sumo un elemento de $\mathcal{V}_n$.

Finalmente, definiendo

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

tenemos que dicha familia es σ-disjunta, refina a $\mathcal{U}$ y es σ-localmente finita. Falta por verificar que ella también cubre a X. En efecto, sea $x \in X$. Puesto que $X = \bigcup_{s\in S} U_s$, existe un $s \in S$ tal que $x \in U_s$. Por ser S un conjunto bien ordenado, podemos elegir a s como el primer elemento en S para el cual $x \in U_s$. Como U_s es un conjunto abierto, podemos escoger un $n \in \mathbb{N}$ tal que bola abierta $U(x,1/n)$ esté contenida en U_s. Por definición, $x \in S_n(U_s)$ y como s es el primer elemento de S tal que $x \in U_s$, resulta que $x \in T_n(U_s)$. Esto prueba que $x \in E_n(U_s) \in \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}$. ■

Ya hemos visto que en todo espacio métrico (X,d), cada subconjunto cerrado es un G_δ. En espacios topológicos no métricos el resultado anterior no es, en general, cierto. Sin embargo, si nuestro espacio topológico X es regular con una base σ-localmente finita, entonces dicho resultado se cumple puesto que, gracias al Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov, X resulta ser metrizable (véase, [324], Lema 40.3, p. 285).

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.11.8. *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de un espacio topológico de Hausdorff X:*

(1) *Diremos que $\mathcal{F}$ es un **filtro base** sobre X si*

  (a) *$F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$, y*

  (b) *si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq F_1 \cap F_2$.*

(2) *$\mathcal{F}$ se dice **controlado** por una sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq U_n$.*

Observemos que, por definición, todo filtro base sobre X tiene la propiedad de intersección finita y que si $\mathcal{F}$ es un filtro base sobre X controlado por una sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X, entonces dicha sucesión también posee la propiedad de intersección finita.

Definición 1.11.9. *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff completamente regular. Una sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X se dice **completa** si, para cualquier filtro base $\mathcal{F}$ sobre X controlado por $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, se cumple que*

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \neq \varnothing.$$

Si en la definición anterior la familia $\mathcal{F}$ se toma numerable, entonces se dice que la sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es **numerablemente completa**. Una sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de familias de subconjuntos de X se dice **completa** (respectivamente, **numerablemente completa**) si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión completa (respectivamente, numerablemente completa) siempre que $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En lo que sigue, asumiremos que todos nuestros espacios topológicos son espacios de Hausdorff completamente regulares. Los espacios casi Čech-completos se pueden caracterizar por medio de sucesiones completas del modo siguiente (véase, [311], Proposition 4.2, p. 118):

> **Teorema** $(\checkmark)$. *Un espacio topológico de Hausdorff completamente regular (X,τ) es casi Čech-completo si, y sólo si, X posee una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos tal que cada $\mathcal{U}_n$ es una familia disjunta, $n \geq 1$.*

Lema 1.11.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

(1) *Si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión completa de subconjuntos de X y si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $V_n \subseteq U_n$, entonces $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión completa.*

(2) *Si $(U_s)_{s\in S}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X, entonces para cada $s \in S$, existe un abierto $V_s \subseteq U_s$ tal que la familia $(V_s)_{s\in S}$ es disjunta y $\bigcup_{s\in S} V_s$ es denso en $\bigcup_{s\in S} U_s$.*

Prueba. (1) es inmediata. Para demostrar (2), suponga que $<$ es un buen-orden para S, y para cada $s \in S$ defina $V_s = U_s \setminus \overline{\bigcup_{t<s} U_t}$. Entonces la familia $(V_s)_{s\in S}$ satisface las condiciones establecidas. ■

Lema 1.11.2. *Si el espacio topológico (X,τ) posee una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos, entonces existe una una sucesión completa $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

(1) *$\mathcal{V}_n$ es una familia disjunta, y*

(2) *$\mathcal{V}_{n+1}$ es refinamiento fuerte de $\mathcal{V}_n$.*

Prueba. Sea $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión completa de cuasi-cubrimientos abiertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer que $\mathcal{U}_n = (U_{ns})_{s\in S_n}$, donde el conjunto de índices S_n está bien-ordenado. Sea

$$\mathcal{V}_1 = (V_{1s})_{s\in S_1}, \quad \text{donde} \quad V_{1s} = U_{1s} \setminus \overline{\bigcup_{t<s} U_{1t}}.$$

Supongamos que hemos construido $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ satisfaciendo las propiedades (1) y (2). Sea

$$\mathcal{W} = \big\{W : W \text{ es abierto en } X \text{ y } \overline{W} \subseteq U_{n+1} \cap V_n \text{ para algún } U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1} \text{ y } V_n \in \mathcal{V}_n\big\}.$$

Puesto que X es regular y ya que tanto $\mathcal{U}_{n+1}$, así como $\mathcal{V}_n$, son cuasi-cubrimientos abiertos de X, resulta que $\mathcal{W}$ también es un cuasi-cubrimiento abierto de X. Por el Lema 1.11.1 (2), existe un un cuasi-cubrimiento abierto disjunto $\mathcal{V}_{n+1}$ de X tal que cada $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ es un subconjunto de algún $W \in \mathcal{W}$. De esto se sigue que $\mathcal{V}_{n+1}$ es un refinamiento fuerte de $\mathcal{V}_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ y termina la prueba. ■

La siguiente caracterización de los espacios completamente regulares que contienen un subespacio denso completamente metrizable se debe fundamental a Michael [311] y Nagamizu [327].

Teorema 1.11.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X contiene un subespacio G_δ-denso completamente metrizable.*

(2) *X contiene un subespacio denso completamente metrizable.*

(3) *X posee una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos con la siguiente propiedad: para cada sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad de intersección finita, donde $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \{x_0\}, \quad \textit{para algún } x_0 \in X.$$

(4) *X posee una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos tal que:*

  (a) *$\mathcal{U}_n$ es disjunta para todo $n \in \mathbb{N}$,*

  (b) *$\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento fuerte de $\mathcal{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y*

  (c) *para cada sucesión decreciente $\{U_n : U_n \in \mathcal{U}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, se cumple que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \{x_0\}, \quad \textit{para algún } x_0 \in X.$$

Prueba. Claramente $(1) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Supongamos que X tiene un subespacio denso completamente metrizable Y y sea ρ una métrica completa generando la topología relativa de Y. Siendo (Y, ρ) un espacio Čech-completo y puesto que βX es una compactificación de Y, el Teorema 1.11.10 nos garantiza que Y es un G_δ en βX. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de βX tal que $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Observe que como X es denso en βX, $U \cap \beta X \neq \varnothing$ para cada abierto no vacío $U \subseteq \beta X$, lo cual permite, para cada $n \in \mathbb{N}$, definir la familia
$$\mathcal{U}_n := \Big\{ U \cap X : U \subseteq \beta X \text{ es abierto}, \ \overline{U}^{\beta X} \subseteq G_n, \ \operatorname{diam}(U \cap Y) < 1/n \Big\}.$$

Se sigue de la regularidad de βX que $\mathcal{U}_n$ es un cuasi-cubrimiento de X.

Observemos en primer lugar que la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface la conclusión de (3). En efecto, sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión con la PIF, donde $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando la definición de U_n, elijamos un abierto V_n en βX tal que $U_n = V_n \cap X$, $\overline{V_n}^{\beta X} \subseteq G_n$, y $\operatorname{diam}(V_n \cap Y) < 1/n$. Sea $x_n \in V_n \cap Y$, $(n = 1, 2 \ldots)$. Puesto que $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene la PIF, resulta que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y y entonces $x_n \longrightarrow x_0 \in Y$. Por esto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n \cap Y}^{Y} = \{x_0\}$ ya que $\operatorname{diam}(\overline{V_n \cap Y}^{Y}) < 1/n$. Además,
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n^{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n \cap X}^{X} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n^{\beta X} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = Y,$$

de donde se obtiene que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n^{\,X} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n \cap Y}^{\,Y} \;=\; \{x_0\}. \tag{1.11.6}$$
Veamos finalmente que la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ es completa. De nuevo, sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión con $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathfrak{F}$ un filtro base sobre X controlado por $(U_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos un $F_n \in \mathfrak{F}$ tal que $F_n \subseteq U_n$. Como antes, sea $x_n \in V_n \cap Y$, $(n = 1,2\ldots)$. Por ser $\mathfrak{F}$ un filtro base sobre X controlado por $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, tenemos que la sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ posee la PIF y, entonces, por lo demostrado anteriormente vemos que (1.11.6) se cumple.

Notemos a continuación que
$$\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F}^{\,X} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,X} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n^{\,X} \;=\; \{x_0\} \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,\beta X} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \;=\; Y,$$
de modo que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,\beta X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,X}$, y como βX es compacto, $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F}^{\,\beta X} \neq \varnothing$. Por esto,
$$\varnothing \;\neq\; \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F}^{\,\beta X} \;\subseteq\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,\beta X} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^{\,X} \;\subseteq\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n^{\,X} \;=\; \{x_0\},$$
de donde se sigue que
$$\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F}^{\,\beta X} \;=\; \{x_0\}$$
y puesto que $x_0 \in Y \subseteq X$, concluimos que $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F}^{\,X} \;=\; \{x_0\}$. Esto prueba que $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ es completa.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión completa de cuasi-cubrimientos abiertos de X satisfaciendo (3). Por el Lema 1.11.2, existe una sucesión completa $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos de X tal que $\mathcal{V}_n$ es una familia disjunta y $\mathcal{V}_{n+1}$ es un refinamiento fuerte de $\mathcal{V}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente, donde $V_n \in \mathcal{V}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la construcción de los $\mathcal{V}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ tal que $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n \cap U_{n+1}$. Puesto que $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, entonces ella resulta ser un filtro base controlado por la sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, de donde se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \neq \varnothing$. Por otro lado, como $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$ y ya que, por hipótesis, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$, se concluye que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \{x_0\}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que (4) se cumple. Entonces, por el Teorema ($\checkmark$), X es casi Čech-completo, y gracias al Corolario 1.11.3, un espacio de Baire. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} U$. Entonces G_n es un subconjunto abierto denso en X y, en consecuencia, por el Teorema de Categoría de Baire, $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso en X.

Notemos que por la condición (c), si $x,y \in Y$, con $x \neq y$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_n$ separa a tales puntos; es decir, existen diferentes elementos U_x y U_y en $\mathcal{U}_n$ tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$. Esto nos permite definir la siguiente métrica ρ sobre Y del modo siguiente:
$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ \big(\text{mín}\,\{n : \mathcal{U}_n \text{ separa a } x \text{ y a } y\}\big)^{-1}, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$
Usando las condiciones (b) y (c) se puede demostrar, sin mucha dificultad, que ρ es una métrica completa sobre Y. Más aun, para cada $U_n \in \mathcal{U}_n$ y $x \in U_n \cap Y$, el conjunto $U_n \cap Y$ es una bola abierta con centro en x y radio $1/n$ de modo que la topología original de Y, $\tau|_Y$, es más fuerte que la ρ-topología. Para demostrar que la ρ-topología es más fuerte que $\tau|_Y$, necesitaremos probar el siguiente hecho:

Afirmación: *Sean F un subconjunto cerrado de Y y suponga que $x \in Y \setminus F$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ y un $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap F = \varnothing$.*

Prueba de la Afirmación. Suponga que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in U_n$ pero que $U_n \cap F \neq \varnothing$. El Axioma de Elección nos permite escoger en cada $U_n \cap F$, un punto, digamos x_n. Pongamos

$$F_n = \overline{\{x_m : m \geq n+1\}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la condición (b), la sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, y por (c), $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \{x\}$. De aquí se sigue

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \{x\}$$

y, en consecuencia, $x \in F$. Esta contradicción establece nuestra afirmación. □

Por lo acabado de probar, resulta que la ρ-topología es más fuerte que la topología original $\tau|_Y$ de Y, y entonces Y es un subespacio G_δ-denso completamente metrizable de X. ■

El siguiente lema es más fuerte que la equivalencia $(1) \Leftrightarrow (2)$ del Teorema 1.11.15.

Lema 1.11.3. *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff completamente regular y sea Y un subespacio denso completamente metrizable de X. Entonces Y es un G_δ en X.*

Prueba. Según el Teorema 1.11.10, Y es Čech-completo, de modo que, por el mismo teorema, Y es un G_δ en cualquier compactificación υY. En particular, si tomamos $\upsilon Y = \beta X$, se sigue que Y es un G_δ en βX, y en consecuencia, también en X. ■

Una de las caracterizaciones interesantes de los espacios métricos que contienen un subespacio denso completamente metrizable es la siguiente (véase, por ejemplo, [2]).

Teorema 1.11.16. *Sea (X,d) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es casi Čech-completo.*

(2) *X es Oxtoby-completo.*

(3) *X contiene un subespacio denso completamente metrizable.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$ es el Corolario 1.11.3.

$(2) \Rightarrow (3)$. Suponga que (2) se cumple y sea $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de pseudo-bases de X con respecto a la cual X es Oxtoby-completo. Nuestro objetivo inmediato es construir, inductivamente, una sucesión $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ de familias de subconjuntos abiertos de X satisfaciendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{B}_n$,

(b) $\mathcal{V}_n$ es un cuasi-cubrimiento abierto de X, sus miembros son disjuntos dos a dos y cada elemento de $\mathcal{V}_n$ tiene diámetro $< 1/n$.

(c) $\mathcal{V}_{n+1}$ refina a $\mathcal{V}_n$, y

(d) $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$ siempre que $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ y $V_n \in \mathcal{V}_n$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Para construir $\mathcal{V}_n$, consideremos todas las familias $\mathcal{V}$ de subconjuntos abiertos de X tales que

(1) $\mathcal{V}$ es disjunta,

(2) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_n$, $\mathcal{V}$ es un cuasi-cubrimiento abierto de X y

(3) $\operatorname{diam}(V) < 1/n$, para todo $V \in \mathcal{V}$.

La relación
$$\mathcal{V}' \preceq \mathcal{V}'' \quad \text{si, y sólo si,} \quad \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}''$$
es un orden parcial. Es un ejercicio sencillo verificar que todo conjunto totalmente ordenado (= a una cadena) admite una cota superior y, en consecuencia, el Lema de Zorn nos provee de una familia, denotada por $\mathcal{V}_n$, que es maximal, es decir, que no puede ser extendida. Observe ahora que la maximalidad de $\mathcal{V}_n$ garantiza que
$$\overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V} \supseteq \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} U. \tag{1.11.7}$$
En efecto, si $W := \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} U \setminus \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V} \neq \varnothing$, entonces como W es abierto en X, existe una bola abierta U_n en W con diámetro menor que $1/n$. Ahora, por ser $\mathcal{B}_n$ una pseudo-base, existe $V \in \mathcal{B}_n$, $V \neq \varnothing$, con $V \subset U_n \subseteq W$. Por esto, $\operatorname{diam}(V) < 1/n$ y, por lo tanto, $\mathcal{V}' := \mathcal{V}_n \cup \{V\}$, es una nueva familia contiendo estrictamente a $\mathcal{V}_n$ lo que, evidentemente, viola la maximalidad de $\mathcal{V}_n$. Esto prueba (1.11.7). Puesto que $\mathcal{B}_n$ es un cuasi-cubrimiento abierto de X se sigue de (1.11.7) que
$$\overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V} = X,$$
de modo que $\mathcal{V}_n$ también es un cuasi-cubrimiento de X. Uno puede, con un poco de cuidado, arreglar las cosas para que $\mathcal{V}_{n+1}$ sea un refinamiento (fuerte) de $\mathcal{V}_n$ (véase la prueba del Lema 1.11.2). Si ahora $V_n \in \mathcal{V}_n$ y la sucesión $(V_n)_{n=1}^\infty$ es decreciente, entonces $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de modo que $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \varnothing$ por ser X Oxtoby-completo. Además, como $\operatorname{diam}(V_n) < 1/n$, resulta que $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{V}_n = \{x_0\}$, para algún $x_0 \in X$. Notemos también que, evidentemente, $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión completa. La conclusión deseada sigue ahora de la implicación $(4) \Rightarrow (1)$ del Teorema 1.11.15.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sea Y un subespacio denso completamente metrizable de X. Sea ρ una métrica completa sobre Y compatible con su topología relativa. Entonces (Y, ρ) es un espacio métrico completo y, por consiguiente, un espacio Čech-completo denso en X. Se sigue del Lema 1.11.3 que Y es un espacio Čech-completo que es G_δ-denso en X, es decir, X es casi Čech-completo. ■

Comentario Adicional 1.11.5 Los espacios completamente metrizables juegan un papel importante en muchas ramas del quehacer matemático y por esa razón han sido objeto de un estudio amplio y profundo de sus propiedades. Además del Teorema de Alexandroff-Hausdorff, las siguientes caracterizaciones de tales espacios constituyen una muestra de algunas de las investigaciones en esa área (véase, por ejemplo, [310]).

Teorema 1.11.17. *Sea (X, τ) un espacio metrizable. Son equivalentes:*

(1) *X es completamente metrizable.*

(2) *X es un G_δ de algún espacio métrico completo.*

(3) *X tiene una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos.*

(4) *X tiene una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos exhaustivos.*

(5) *X tiene una criba abierta completa $(\{U_\alpha : \alpha \in A_n\}, \pi_n)_{n=1}^\infty$.*

(6) *X tiene una criba exhaustiva completa* $(\{U_\alpha : \alpha \in A_n\}, \pi_n)_{n=1}^{\infty}$.

(7) *X tiene una criba estrictamente exhaustiva pseudo-completa* $(\{U_\alpha : \alpha \in A_n\}, \pi_n)_{n=1}^{\infty}$.

(8) *El jugador* II *posee una estrategia estacionaria ganadora para* $G(X)$.

(9) *El jugador* II *posee una estrategia ganadora para* $G(X)$.

(10) *El jugador* II *posee una estrategia estacionaria ganadora para* $G^*(X)$.

(11) *El jugador* II *posee una estrategia ganadora para* $G^*(X)$.

Todas las nociones no definidas que aparecen en el teorema anterior se pueden leer, por ejemplo, en el artículo de E. Michael [310]. En el mismo artículo, Michael obtiene, para los espacios casi Čech-completos, las siguientes caracterizaciones.

Teorema 1.11.18. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff completamente regular. Son equivalentes:*

(1) *X es casi Čech-completo.*

(2) *X tiene una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos, donde cada $\mathcal{U}_n$ es disjunta, $n \geq 1$.*

(3) *X tiene una cuasi-criba abierta completa disjunta* $(\{U_\alpha : \alpha \in A_n\}, \pi_n)_{n=1}^{\infty}$.

(4) *X tiene una sucesión completa $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cuasi-cubrimientos abiertos.*

(5) *X tiene una cuasi-criba abierta completa* $(\{U_\alpha : \alpha \in A_n\}, \pi_n)_{n=1}^{\infty}$.

(6) *El conjunto* $GT = \{f \in C(X) : (X, f)$ es Tykhonov bien-formulado generalizado$\}$ *es residual en* $C(X)$.

Una demostración de la última caracterización del resultado anterior se puede ver en el artículo de Čoban, Kenderov y Revalski ([100], Theorem 6.2, p. 546).

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff X es de *tipo numerable* si cualquier compacto K de X está contenido en un subconjunto compacto $F \subseteq X$ que tiene una base numerable de entornos abiertos en X. Todos los espacios métricos y así como todos los espacios localmente compactos son de tipo numerable. En [14], Arhangel'skiĭ se formula la siguiente pregunta:

¿Cuándo, un espacio completamente regular X, admite una compactificación bX tal que $bX \setminus X$ pertenece a una clase dada de espacios topológicos?

Un resultado clásico, pero no trivial es esta dirección, es el siguiente teorema de M. Henriksen y J. Isbell [211]:

Teorema de Henriksen-Isbell. *Un espacio de Hausdorff completamente regular (X, τ) es de tipo numerable si, y sólo si, el resto en cualquier (o alguna) compactificación de X es de Lindelöf.*

Se sigue del Teorema de Henriksen-Isbell que cualquier resto de un espacio metrizable es un espacio de Lindelöf y, en consecuencia, paracompacto.

Es Arhangel'skiĭ, en [14], quien introduce la siguiente definición con el objetivo de estudiar propiedades generalizadas de metrizabilidad de restos de compactificaciones, poniendo especial atención en los grupos topológicos:

Definición 1.11.10. *Un espacio de Hausdorff completamente regular (X,τ) se llama **Ohio-completo** si en cualquier compactificación bX de X, existe un subconjunto $Z \subseteq bX$ que es un G_δ tal que $X \subseteq Z$ y para cualquier $x \in Z \setminus X$ existe un subconjunto $S \subseteq bX$, que también es un G_δ, tal que $x \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.*

En dicho artículo, Arhangel'skiĭ demuestra que si X es un espacio Čech-completo, Lindelöf, p-espacio, o posee una G_δ-diagonal, entonces X es Ohio-completo.

Una de las grandes deficiencias que posee la clase $\mathfrak{B}a$ de los espacios de Baire, es que ella no es productiva; es decir, el producto de espacios de Baire no es necesariamente un espacio de Baire. El **problema de unificación de Baire** consiste en encontrar subclases de $\mathfrak{B}a$ que sean productiva y tengan algunas otras "buenas" propiedades.

Clase perfecta de compactos. *Una familia $\mathfrak{C}$ de subconjuntos compactos se llama **perfecta** si ella es estable bajo imágenes continuas, productos numerables y subconjuntos cerrados*. (Mercourakis-Negrepontis [307], p. 529)

Ejemplos de clases perfectas son: la clase de los compactos de Eberlein, la clase de los compactos de Talagrand, la clase de los compactos de Gul'ko, la clase de los compactos de Corson, la clase de los compactos fragmentables, la clase de los compactos de Stegall, etc. Detalles y propiedades de los espacios antes mencionados se pueden ver en el artículo de Negrepontis [337], en el de Mercourakis-Negrepontis [307] y en el libro de Fabian [157].

Para otros ejemplos y caracterizaciones interesantes de espacios de Baire el lector puede consultar la excelente monografía de Haworth-Mccoy [208].

1.12. Puntos de continuidad

Uno de los aspectos importantes cuando se trabaja con funciones a valores reales o complejos definidas sobre un espacio topológico arbitrario es determinar el conjunto de puntos donde ella es, o bien continua, o bien discontinua. En esta sección abordaremos brevemente el estudio de funciones a valores reales definidas sobre un espacio métrico completo X. El resultado central es el teorema de Baire-Kuratowski el cual establece que cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$ que es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas a valores reales definidas sobre X, el conjunto de sus puntos de continuidad constituye un G_δ-denso.

Definición 1.12.1. *Sean (X,τ) y (Y,ς) espacios topológicos de Hausdorff y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. El conjunto*

$$\mathrm{PC}(f) = \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}$$

*se llama el conjunto de los **puntos de continuidad** de f, mientras que $\mathrm{Disc}(f) = X \setminus \mathrm{PC}(f)$ denota el conjunto de los **puntos de discontinuidad** de f.*

Una de las características fundamentales del conjunto $\mathrm{PC}(f)$, para cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$ donde (X,d) es un espacio métrico, viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 1.12.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Entonces $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ en X.*

Prueba. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$G_k = \bigcup \big\{ U \subseteq X \, : \, U \text{ es abierto}, |f(x) - f(y)| < 1/k \; \text{ para todo } x, y \in H \big\}$$

y pongamos $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Puesto que cada G_k es un conjunto abierto, G es un G_δ. Vamos a demostrar que $G = \mathrm{PC}(f)$.

(1) $\mathrm{PC}(f) \subseteq G$. Sea $x_0 \in \mathrm{PC}(f)$. Entonces f es continua en x_0 y, en consecuencia, para cada entero $k \geq 1$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2k}$ siempre que $d(x, x_0) < \delta$. Hagamos $U := U(x_0, \delta)$, donde $U(x_0, \delta)$ es la bola abierta de centro x_0 y radio δ. Entonces, para cualquier par de elementos $x, y \in U$, se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

con lo cual se establece que $x_0 \in G$.

(2) $G \subseteq \mathrm{PC}(f)$. Sea $x_0 \in G$ y sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Como $x_0 \in G$, resulta que $x_0 \in G_k$ y, en consecuencia, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{k}$ para todo $x, y \in U$. Pero siendo U abierto, existe un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $U(x_0, \delta) \subseteq U$. De aquí se sigue que si $x \in U(x_0, \delta)$; es decir, si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $x, x_0 \in U$ y, por lo tanto, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Esto prueba que f es continua en x_0 y termina la prueba. ■

El siguiente teorema puede ser pensado como una especie de opuesto al resultado anterior para el caso en que $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Teorema 1.12.2. *Si G es un conjunto G_δ no vacío de $\mathbb{R}$, entonces existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{PC}(f) = G$.*

Prueba. Sea $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente con $V_1 = \mathbb{R}$, pues en caso contrario la sucesión $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $U_1 = \mathbb{R}$, y para $n \geq 2$, $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, es decreciente y su intersección es igual a G.

Definamos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in G \\ 1/n & \text{si} \quad x \in V_n \setminus V_{n+1}, \; x \in \mathbb{Q} \\ -1/n & \text{si} \quad x \in V_n \setminus V_{n+1}, \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Veamos que $G = \mathrm{PC}(f)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in G$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Puesto que $x \in V_{n_0}$ y como V_{n_0} es abierto, existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq V_{n_0}$ y, en consecuencia,

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = |f(y)| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

lo cual prueba que f es continua en x, es decir, $x \in \mathrm{PC}(f)$.

Para demostrar la otra inclusión, supongamos que $x \in \mathrm{PC}(f)$ pero que $x \notin G$. Entonces existe al menos un n tal que $x \in V_n$ (por ejemplo, $x \in V_1$). Sea n el único entero positivo tal que $x \in V_n \setminus V_{n+1}$. En este caso $f(x) = \pm 1/n$ dependiendo si x es racional o irracional. Existen dos casos a considerar:

- $x \notin \overline{V}_{n+1}$. Puesto que $x \in V_n \setminus V_{n+1}$, existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq V_n \setminus V_{n+1}$. Si $y \in (x - \delta, x + \delta)$ es irracional, entonces

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2}{n} > \frac{1}{n} > \varepsilon.$$

Esto dice que f no es continua en x, lo cual es contrario a nuestra hipótesis.

- $x \in \overline{V}_{n+1}$. En este caso, existe una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en V_{n+1} tal que $x_k \to x$. Puesto que $|f(x_k)| \leq 1/(n+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $|f(x)| = 1/n$ tenemos que $f(x_k) \not\to f(x)$ y, por consiguiente, $x \notin \mathrm{PC}(f)$.

Por lo tanto, la suposición de que x está en $\mathrm{PC}(f)$ pero no en G, conduce a una contradicción. Esto termina la prueba. ■

En general, el conjunto de los puntos de continuidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$, donde (X,d) es un espacio métrico, no necesita ser denso en dicho espacio. Esto justifica la siguiente definición (véase también la página 474.

Definición 1.12.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es* ***puntualmente discontinua*** *si $\mathrm{PC}(f)$ es denso en X.*

En vista del Teorema 1.12.1 tenemos que:

Corolario 1.12.1. *Si (X,d) es un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función puntualmente discontinua, entonces $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso en X.*

Denotemos por $\mathrm{pDC}(X)$ el conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son puntualmente discontinuas, donde (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff. En la Sección 1.12.4 veremos que si (X,d) es un espacio métrico completo, entonces cualquier función inferiormente semicontinua (respectivamente, superiormente semicontinua) $f : X \to \mathbb{R}$ es puntualmente discontinua. Del siguiente resultado se deduce que $\mathrm{pDC}(X)$ es, en realidad, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 1.12.3. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sean $f,g : X \to \mathbb{R}$ funciones puntualmente discontinuas. Entonces $f+g$ es una función puntualmente discontinua.*

Prueba. Notemos que, por hipótesis, los conjuntos $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{PC}(g)$ son G_δ-densos en X. Se sigue ahora del Teorema 1.8.1 que $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g)$ es denso en X y como $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g) \subseteq \mathrm{PC}(f+g)$, obtenemos el resultado. ■

Una pregunta que podemos formularnos con interés es la siguiente: Si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, ¿qué tan complicado es el conjunto de los puntos de continuidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$? ¿Cuándo $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso? ¿Qué papel juega la completitud si nos restringimos a un espacio métrico?

Como se sabe, uno puede, dado un subconjunto infinito numerable F de puntos de $\mathbb{R}$, construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Disc}(f) = F$. En efecto, si $F = \{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$f(x) = \sum_{n \in N_x} \frac{1}{2^n}$$

donde, para cada $x \in \mathbb{R}$, $N_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$. No es difícil establecer que f es monótona creciente y discontinua únicamente en los puntos de F. En general, en la definición de f, uno puede tomar cualquier sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos con $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n < \infty$, en lugar de la sucesión $(1/2^n)_{n=1}^{\infty}$.

Aunque, como muestra el ejemplo que sigue a continuación, existen funciones a valores reales que son continuas en los irracionales y discontinuas en los racionales, lo sorprendente es que lo contrario es imposible que ocurra; es decir, no existe función alguna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua únicamente en los racionales, es decir, tal que $\mathrm{PC}(f) = \mathbb{Q}$. Vito Volterra demostró tal afirmación sin apelar al Teorema de Categoría de Baire, pues la hace dos décadas antes de la aparición del teorema de Baire en su tesis de 1899. Sin embargo, con ésta herramienta, es decir, con el Teorema de Categoría de Baire, la prueba es muy sencilla.

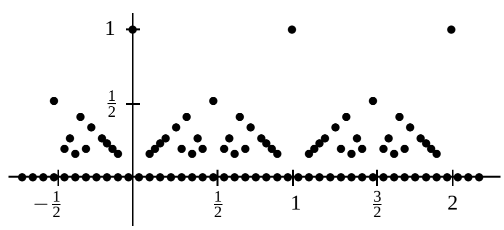
Respondiendo a la pregunta: ¿cuándo $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso en su dominio?, un resultado parcial se obtiene si X es un espacio métrico completo y f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas a valores reales definidas sobre X. Antes de probar esto, veamos el siguiente ejemplo construido por K. J. Thomae en 1875.

Teorema 1.12.4 (Función de Thomae). *. Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función definida por*

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x=0,\\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1], \quad \text{con} \quad m.c.d(p,q)=1\ ,\\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}\cap[0,1],\end{cases}$$

y extienda a g a todo $\mathbb{R}$ declarando que $g(x)=g(x+n)$ para cada $n\in\mathbb{Z}$ y todo $x\in[0,1]$. Entonces g es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. En particular, g es puntualmente discontinua.

Prueba. Veamos, en primer lugar, que g es discontinua sobre $\mathbb{Q}$. Sea $x=p/q$ un número racional con $\mathrm{m.c.d}(p,q)=1$. Como el conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$, podemos elegir una sucesión de números irracionales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n\to x$ cuando $n\to\infty$. Por definición, $g(x_n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, mientras que $g(x)=1/q\neq 0$, es decir, $\lim_{n\to\infty}g(x_n)\neq g(x)$. Esto prueba la discontinuidad de g en $x\in\mathbb{Q}$ y como x es arbitrario, concluimos que g es discontinua sobre $\mathbb{Q}$.



Para probar que g es continua sobre los irracionales, será suficiente, por la periodicidad de g, demostrarla en lo irracionales del intervalo $(0,1)$. Tomemos cualquier $x_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ y sea $0<\varepsilon<1$. Elijamos un $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Nuestro objetivo es determinar un intervalo abierto con centro en x_0, digamos J, que no contenga ningún racional en forma reducida de la siguiente lista

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5},\quad \ldots,\quad \frac{N-1}{N}. \tag{1.12.1}$$

¿Por qué la elección de J es la adecuada? Pues bien, supongamos que hemos obtenido el intervalo J y tomemos cualquier $x\in J$. Notemos ahora que:

- si x es irracional, entonces $g(x)=g(x_0)=0$ y, en consecuencia,
$$|g(x)-g(x_0)|=0<\varepsilon.$$
- si x es racional, entonces dicho número no es ninguno de los que aparecen en (1.12.1) y, por consiguiente, su denominador debe ser mayor que N, es decir, x es de la forma $\dfrac{p}{q}$ con $q>N$ y, por lo tanto,
$$|g(x)-g(x_0)|=|g(x)|=\frac{1}{q}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

Esto demuestra la continuidad de g en x_0 y la prueba finalizará una vez hallamos construido el intervalo J. El procedimiento para obtener el intervalo abierto J es muy sencillo: en efecto, sea

$$S_N = \big\{ p/q \in (0,1): \ p, q \text{ son primos relativos con } q \leq N \big\}$$

Es claro que S_N es un conjunto finito y sus elementos son los puntos que aparecen en la lista (1.12.1). Ahora bien, como S_N es finito, podemos hallar un $\delta > 0$ tal que $J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (0,1)$ y $S_N \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \varnothing$. Esto termina la prueba. ■

Si bien es cierto que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida anteriormente es continua únicamente en los irracionales, el siguiente resultado nos muestra que es imposible construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua sólamente en los racionales.

Teorema 1.12.5 (Volterra). *No existe función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{PC}(f) = \mathbb{Q}$.

Prueba. Supongamos que una tal f existe. Por el Teorema 1.12.1 sabemos que $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ, mientras que, por hipótesis, $\mathrm{PC}(f) = \mathbb{Q}$. La combinación de estos hechos nos dice que $\mathbb{Q}$ es un G_δ-denso lo cual contradice el Corolario 1.8.5. ■

Como ya habíamos mencionado, la primera demostración del resultado anterior, sin usar el trivialmente profundo Teorema de Categoría de Baire, fue dada por la mente brillante del matemático italiano Vito Volterra cuando aún era un estudiante (a penas contaba con 19 años) y dos décadas antes de la aparición del resultado de Baire. Volterra usó la función de Thomae g para tal propósito. ¿Quieres ver cómo lo hizo?.

Prueba del Teorema 1.12.5 al estilo Volterra. Supongamos que una existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua únicamente en los racionales y sea g la función de Thomae ya definida. Tomemos un número racional cualquiera x_0 en $(0,1)$. Como f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (0,1)$ y

$$|f(x) - f(x_0)| < 1/2 \qquad \text{siempre que } |x - x_0| < \delta.$$

Escojamos ahora a_1 y b_1 de modo que $[a_1, b_1] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Entonces, para todo $x, y \in [a_1, b_1]$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

El siguiente paso es elegir arbitrariamente un número irracional $y_0 \in (a_1, b_1)$ y usar la continuidad de g en y_0 para obtener, como en el paso anterior, puntos a_2 y b_2 tales que $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ y $|g(x) - g(y)| < 1$ para todo $x, y \in [a_2, b_2]$. En particular,

$$|f(x) - f(y)| < 1 \qquad \text{y} \qquad |g(x) - g(y)| < 1$$

para todo $x, y \in [a_2, b_2]$. Repitiendo el argumento anterior pero ahora trabajando con el intervalo (a_2, b_2) en lugar de $(0,1)$, podemos construir un intervalo $[a_3, b_3] \subseteq (a_2, b_2)$ tal que las desigualdades

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - g(y)| < \frac{1}{2}.$$

se cumplan para todo $x, y \in [a_3, b_3]$. Continuando con este proceso indefinidamente, se construye una sucesión $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ de intervalos cerrados tal que

(1) $(0,1) \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$,

(2) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \text{longitud}([a_n, b_n]) = 0$, y

(4) $|f(x) - f(y)| < 1/2^n$ y $|g(x) - g(y)| < 1/2^n$ para todo $x, y \in [a_n, b_n]$.

Observe que las condiciones (1) y (3) permiten invocar el Teorema de Encaje de Cantor para obtener un único punto z_0 tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{z_0\}$. Por otro lado, usando (2), vemos que $a_n < z_0 < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se sigue de (4) que f y g son ambas continuas en ese punto. Pues bien, esto último es lo que no está bien: hemos construido un punto z_0 que a todas luces resulta ser un monstruo: dicho punto es, al mismo tiempo, un número racional por ser f continua en z_0, pero también es un número irracional por ser g continua en ese punto. Esta contradicción revela que la susodicha función f no puede existir. ■

Como consecuencia del anterior resultado de Volterra en combinación con la función de Thomae, Volterra de nuevo nos sorprende cuando deduce que:

Corolario 1.12.2 (Volterra). *No existe función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es irracional para cualquier número racional x y $f(y)$ es racional para cualquier número irracional y.*

Prueba. Suponga que una tal función continua f existe y defina la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$G(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde g es la función de Thomae. Bajo esta suposición, una contradicción con el Teorema 1.12.5 se obtendrá al demostrarse que G es continua en los racionales. En efecto, suponga que x es un número racional. Entonces $f(x)$ es irracional y como g es continua en los irracionales resulta de la continuidad de f en x que G es continua en x. Para terminar la prueba debemos mostrar que G es discontinua en los irracionales. Para ver esto, sea y un número irracional. Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, escojamos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}$ convergiendo a y. Por la continuidad de f tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$. Como $f(x_n)$ es irracional para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta, de la definición de g, que $G(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que $0 = \lim_{n\to\infty} G(x_n) \neq G(y) = g(f(y))$ ya que $f(y)$, por ser racional, implica que $g(f(y)) \neq 0$. ■

Un resultado más general que el corolario anterior fue obtenido de nuevo por Volterra en 1881 quien aun no cumplía los 20 años (véase el artículo de W. Dunham [143]) al demostrar que

Teorema 1.12.6 (Volterra). *Sea (X, τ) un espacio de Baire. No existen funciones puntualmente discontinuas $f, g : X \to \mathbb{R}$ para las cuales los puntos de continuidad de una de ellas sean los puntos de discontinuidad de la otra y viceversa.*

La prueba de esto último se obtendrá como consecuencia de un resultado de Gauld y Piotrowski [195] que generaliza considerablemente el Teorema de Volterra. Para formular y demostrar lo expresado por Gauld y Piotrowski es preciso revisar algunos hechos simples de topología.

Recordemos que si (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff, A es un subconjunto de X y $\mathcal{G}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces

$$\text{st}(A, \mathcal{G}) := \bigcup \{U \in \mathcal{G} : U \cap A \neq \varnothing\}.$$

Si $A = \{x\}$, escribiremos $\text{st}(x, \mathcal{G})$ en lugar de $\text{st}(\{x\}, \mathcal{G})$. En este caso, $\text{st}(x, \mathcal{G}) = \bigcup \{U \in \mathcal{G} : x \in U\}$.

Una sucesión $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cubrimientos abiertos de X se llama un **desarrollo** de X si, para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{B}_x := \{\text{st}(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base en x, lo cual significa que, para cada conjunto abierto U

conteniendo a x, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) \subseteq U$. Un espacio topológico que posee un desarrollo se llama **espacio desarrollable**. Es fácil ver que cualquier espacio métrico (X,d) posee un desarrollo. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el cubrimiento abierto $\mathcal{G}_n = \{U(x, 1/n) : x \in X\}$ de todas las bolas abiertas con centro en x y radio $1/n$ y ahora observe que $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo de X. La clase de espacios desarrollables constituyen una de los más naturales y útiles generalizaciones de los espacios metrizables.

Sean X,Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función y sea $\mathcal{G}$ un cubrimiento abierto de Y. Considere el conjunto

$$\Omega(f, \mathcal{G}) = \{x \in X : \text{ existe un abierto } U \text{ conteniendo a } x \text{ y existe un abierto } V \in \mathcal{G} \text{ tal que } f(U) \subseteq V\}.$$

Observe que $\Omega(f, \mathcal{G})$ es un conjunto abierto por ser unión de conjuntos abiertos. Además, es claro que, $\mathrm{PC}(f) \subseteq \Omega(f, \mathcal{G})$. Más aun, si $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cubrimientos abiertos de X y si se define

$$\Omega(f, (\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f, \mathcal{G}_n),$$

entonces $\Omega(f, (\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty})$ es un G_δ en X.

Teorema 1.12.7. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff, Y un espacio desarrollable con desarrollo $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ de la forma*

$$\mathrm{PC}(f) \ = \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f, \mathcal{G}_n).$$

Prueba. Puesto que $\mathrm{PC}(f) \subseteq \Omega(f, \mathcal{G}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es suficiente demostrar la otra inclusión. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f, \mathcal{G}_n)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un entorno abierto U_n de x y un $V_n \in \mathcal{G}_n$ tal que $f(U_n) \subseteq V_n$. Puesto que $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo, resulta que la colección $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base en $f(x)$. Suponga ahora que $W \subseteq Y$ es un conjunto abierto conteniendo a $f(x)$. Entonces existe un conjunto V_n con $V_n \subseteq W$, de donde se sigue que $f(U_n) \subseteq V_n \subseteq W$. Esto prueba que f es continua en x y, así, $x \in \mathrm{PC}(f)$. ■

Definición 1.12.3. *Sean (X, τ) y (Y, ς) espacios topológicos de Hausdorff. Una función $f : X \to Y$ tal que $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{Disc}(f)$ son ambos densos en X es llamada una **función de Volterra**. Una función de Volterra $f : X \to Y$ se dice que es **exclusivamente discontinua** si no existe función alguna $g : X \to Y$ tal que*

$$\mathrm{PC}(f) \ = \ \mathrm{Disc}(g) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{PC}(g) \ = \ \mathrm{Disc}(f).$$

La función de Thomae es un ejemplo de una función de Volterra que es exclusivamente discontinua. Observe que la condición de densidad de los conjuntos $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{Disc}(f)$ no se puede omitir en la definición de función exclusivamente discontinua. En efecto, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \ = \ \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Entonces $\mathrm{PC}(f) = \{0\}$, y $\mathrm{Disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ahora, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Claramente, $\mathrm{PC}(f) = \mathrm{Disc}(g)$ y $\mathrm{PC}(g) \ = \ \mathrm{Disc}(f)$.

Teorema 1.12.8 (Gauld-Piotrowski). *Sean X un espacio de Baire y Y un espacio desarrollable. Entonces cualquier cualquier función de Volterra $f : X \to Y$ es exclusivamente discontinua.*

Prueba. Suponga que existe una función de Volterra $f : X \to Y$ que no es exclusivamente discontinua. Esto significa que existe una función $g : X \to Y$ tal que

$$\mathrm{PC}(f) = \mathrm{Disc}(g) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{PC}(g) = \mathrm{Disc}(f).$$

Puesto que, por definición, $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{Disc}(f) = \varnothing$, usando el hecho de que $\mathrm{PC}(g) = \mathrm{Disc}(f)$, tenemos que

$$\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g) = \varnothing.$$

Veamos ahora que lo anterior no puede ocurrir. En efecto, siendo f una función de Volterra se cumple que $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{Disc}(f)$ son densos en X, y como $\mathrm{PC}(g) = \mathrm{Disc}(f)$, resulta que $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{PC}(g)$ son densos en X. Por el Teorema 1.12.7, ambos conjuntos son G_δ-densos, y puesto que X es un espacio de Baire, el Teorema 1.8.1 nos garantiza que $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g)$ es un G_δ-denso en X y, en consecuencia, no vacío. Esta contradicción establece que cualquier función de Volterra es exclusivamente discontinua. ■

Prueba del Teorema de Volterra. Suponga que existen funciones puntualmente discontinuas $f, g : X \to \mathbb{R}$ tales que los puntos de continuidad de una de ellas sean los puntos de discontinuidad de la otra y viceversa. Entonces $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{Disc}(f)$ son ambos densos en X puesto que $\mathrm{PC}(f)$ y $\mathrm{PC}(g) = \mathrm{Disc}(f)$ lo son por hipótesis. Esto prueba, en particular, que f es una función de Volterra y, en consecuencia, por el Teorema 1.12.8, f es exclusivamente discontinua, lo cual significa que una tal g no puede existir. De modo enteramente similar se prueba que una tal f tampoco puede existir. ■

Comentario Adicional 1.12.6 Los resultados de Volterra le permitieron a D. B. Gauld y Z. Piotrowski [195] formular las siguientes definiciones, pero reformuladas un poco más tarde por Gauld, Greenwood y Piotrowski en [173].

Definición 1.12.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff (X, τ).*

(a) *X se dice que es un **espacio débil de Volterra** si, para cada par de funciones puntualmente discontinuas $f, g : X \to \mathbb{R}$, se cumple que $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g) \neq \varnothing$.*

(b) *X se dice que es un **espacio de Volterra** si, para cada par de funciones puntualmente discontinuas $f, g : X \to \mathbb{R}$, se cumple que $\mathrm{PC}(f) \cap \mathrm{PC}(g)$ es denso en X.*

Es claro que todo espacio de Volterra es un espacio débil de Volterra, pero ¿cuál es la relación de éstos espacios con los de Baire? Aunque la definición de espacios de Volterra están formulados en términos de funciones, la siguiente equivalencia "interna" permite hacer transparente la relación entre ellos. En efecto, Gauld, Greenwood y Piotrowski en [173] prueban que:

Teorema 1.12.9 (Gauld-Greenwood-Piotrowski). *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Volterra (respectivamente, un espacio débil de Volterra).*

(2) *La intersección de cualesquiera par de conjuntos G_δ-densos en X, es densa en X (respectivamente, es no vacía).*

Resulta entonces claro que todo espacio de Baire (respectivamente, todo espacio de segunda categoría) es un espacio de Volterra (respectivamente, es un espacio débil de Volterra). Estas cuatro categoría de espacios son todas distintas (véase [174] para algunos ejemplos). En [81] se pueden ver las demostraciones de las siguientes caracterizaciones. Recuerde que un espacio topológico de Hausdorff X se dice que es un espacio **homogéneo** si para cualquier par x, y de puntos distintos de X, existe un homeomorfismo $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(x) = y$.

Teorema 1.12.10 (Cao-Gauld). *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff.*

(1) *Si X contiene un subespacio denso metrizable, entonces X es un espacio de Baire (respectivamente, un espacio de segunda categoría) si, y sólo si, X es un espacio de Volterra (respectivamente, un espacio débil de Volterra).*

(2) *Si X es un espacio homogéneo, entonces X es un espacio de Volterra si, y sólo si, X es un espacio débil de Volterra.*

1.12.1. ‖ ► El Teorema genérico de Baire-Kuratowski

Un siguiente teorema es un resultado excepcionalmente importante por sus muchas aplicaciones y que se debe fundamentalmente a René Baire en el caso real, pero generalizado a espacios métricos completos por K. Kuratowski. Algunos autores se lo atribuyen a Baire y a Osgood (véase, [84], p. 183). Este resultado establece que ciertas funciones definidas sobre un espacio métrico completo y a valores reales poseen abundantes puntos de continuidad. Como siempre, $C(X)$ denotará el espacio métrico completo formado por todas las funciones continuas acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ con la métrica del supremo, es decir, $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ con $f, g \in C(X)$.

Teorema 1.12.11 (Teorema Genérico de Baire-Kuratowski). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Suponga que existe una sucesión de funciones en $C(X)$, digamos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para cada $x \in X$. Entonces el conjunto de los puntos de continuidad de f, $\mathrm{PC}(f)$, es un G_δ-denso en X. En particular, si X no posee puntos aislados, entonces $\mathrm{PC}(f)$ es no numerable.*

Prueba. $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ gracias al Teorema 1.12.1. Veamos que él es denso en X. Para $k, m, n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_{kmn} = \left\{ x \in X : \left| f_m(x) - f_n(x) \right| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Siendo f_m, f_n funciones continuas, también lo es $|f_m - f_n|$ y, en consecuencia, cada F_{kmn} es cerrado en X. Fijando $k, m \in \mathbb{N}$ y definiendo

$$F_{km} = \bigcap_{n=m}^{\infty} F_{kmn},$$

resulta que cada F_{km} también es cerrado en X. Afirmamos que $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{km}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $x \in X$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\left| f_n(x) - f(x) \right| \leq 1/(2k)$ para todo $n \geq m$. Ahora bien, si $n \geq m$, entonces

$$\left| f_m(x) - f_n(x) \right| \leq \left| f_m(x) - f(x) \right| + \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

lo que prueba que $x \in F_{kmn}$ para todo $n \geq m$ y, por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} F_{kmn} = F_{km} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ki}$$

Esto prueba nuestra afirmación. Por el Teorema 1.8.6, cada $G_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_{km})$ es abierto y denso en X. Se sigue del Teorema de Categoría de Baire que $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ es denso en X.

Nos proponemos demostrar que $E \subseteq \mathrm{PC}(f)$. En efecto, sean $x_0 \in E$ y $\varepsilon > 0$. Elijamos un $k \in \mathbb{N}$ de modo tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $x_0 \in G_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_{km})$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in \operatorname{int}(F_{km})$. Siendo $\operatorname{int}(F_{km})$ abierto, podemos elegir un $\delta_0 > 0$ de modo que la bola abierta $U(x_0, \delta_0) \subseteq \operatorname{int}(F_{km})$. Observemos ahora que si $d(x, x_0) < \delta_0$, entonces $x \in \operatorname{int}(F_{km}) \subseteq F_{km}$ y así, $\left| f_m(x) - f_n(x) \right| \leq 1/k$ para cualquier $n \geq m$. Usando la continuidad del valor absoluto, se obtiene que

$$\left| f_m(x) - f(x) \right| = \left| f_m(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| f_m(x) - f_n(x) \right| \leq \frac{1}{k}.$$

En particular, $\left| f_m(x_0) - f(x_0) \right| \leq 1/k$. Por otro lado, como f_m continua en x_0, podemos hallar un δ_1 tal que $\left| f_m(x) - f_m(x_0) \right| \leq \varepsilon/3$ siempre que $x \in U(x_0, \delta_1)$. Sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$. Si $d(x, x_0) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(x_0) \right| &\leq \left| f(x) - f_m(x) \right| + \left| f_m(x) - f_m(x_0) \right| + \left| f_m(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua en x_0 y, en consecuencia, $E \subseteq \mathrm{PC}(f)$. De aquí se sigue que $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso en X. Finalmente, si X no posee puntos aislados, entonces el Teorema 1.8.8 es el responsable de que $\mathrm{PC}(f)$ sea no numerable. ■

Existen dos aspectos importantes referentes al Teorema Genérico de Baire-Kuratowski que debemos destacar. El primero es que dicho teorema sigue siendo válido si reemplazamos a $\mathbb{R}$, el rango de las funciones f_n, por cualquier otro espacio métrico (Y, d) (que, por comodidad, pudiéramos pensar como completo y separable, aunque es importante resaltar que tales condiciones no son necesarias). El otro aspecto está relacionado con el hecho de que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es *equicontinua* sobre E y que, además, gracias al Teorema de Arzela-Ascoli, ella converge uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto de E (véase, por ejemplo, [397], Theorem 20.8, p. 545).

El siguiente resultado puede ser pensado como un "casi recíproco" del Teorema Genérico de Baire-Kuratowski [439].

Teorema 1.12.12 (Wayment). *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $G \subseteq X$ es un G_δ-denso, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ tal que f es continua sobre G y discontinua sobre $X \setminus G$.*

Prueba. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la función $f_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = 0$ si $x \in G_n$ y $f_n(x) = 1/2^n$ si $x \in X \setminus G_n$. Entonces la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ cumple con lo establecido. En efecto, si $x \in G$, entonces $f(x) = 0$, mientras que si $x \notin G$, entonces $f(x) > 0$. Para ver que f es discontinua sobre $X \setminus G$, tome un $x \in X \setminus G$ y suponga que por algún milagro oculto f es continua en x. Entonces, como $\overline{G} = X$, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en G tal que $x_n \to x$ y, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, lo que produce el fatídico, $0 = 1$. Por otro lado, si $x_0 \in G$ y $\varepsilon > 0$, entonces podemos seleccionar un $N \in \mathbb{N}$ de modo tal que $\sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon$. Escojamos ahora un conjunto abierto $U \subseteq \bigcap_{n=1}^{N-1} G_n$ con $x_0 \in U$. Entonces, si $x \in U$ se tiene que

$$0 \ < \ f(x) - f(x_0) \ = \ f(x) \ < \ \sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n \ < \ \varepsilon$$

y así, f es continua en x_0. Como x_0 era arbitrario se concluye que f es continua sobre G. ■

Como una aplicación curiosa del Teorema Genérico de Baire-Kuratowski vamos a demostrar un resultado sobre sumabilidad debido a H. Steinhaus el cual establece que "*una matriz regular no puede sumar todas las sucesiones de* 0*'s y* 1*'s*. La demostración de esto requiere ciertas definiciones y un resultado de Silverman-Toeplitz que se enuncia un poco más abajo.

En lo que sigue supondremos que $s = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ denota el espacio vectorial, con las operaciones usuales, de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complejos. Sean ℓ_∞ y c los subespacios vectoriales de s formados por todas las sucesiones acotadas y todas las sucesiones convergentes, respectivamente. Notemos que $c \subseteq \ell_\infty \subseteq s$.

Es bien conocido que toda matriz compleja infinita, digamos $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$, define una transformación lineal $\Phi_A : \ell_\infty \to s$ dada por

$$\Phi_A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\, x_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\, x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k, \ldots \right),$$

para todo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ en ℓ_∞. Si la aplicación Φ_A transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes y, además, preserva límites; es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ implica que $\lim_{n\to\infty} (\Phi_A x)_n = L$, donde $(\Phi_A x)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k$, entonces diremos que Φ_A es un **método de sumabilidad regular** y a la matriz A la llamaremos una **matriz regular**

Las matrices regulares están caracterizadas por el siguiente resultado, cuya prueba puede verse, por ejemplo, en [106] o [360].

Teorema de Silverman-Toeplitz. *Una matriz $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ es regular si, y sólo si,*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ converge para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$,

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, y

(3) *existe una constante $M > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Notemos que (3) implica que $\Phi_A x \in \ell_\infty$ para cada $x \in \ell_\infty$, o sea, que $\Phi_A(\ell_\infty) \subseteq \ell_\infty$. Sea A una matriz regular. Se dice que una sucesión $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ es A-**sumable** o que A **suma a** x si Φ_A transforma a x en una sucesión convergente; es decir, si $\Phi_A x \in c$. Un problema interesante en la teoría de sumabilidad es ver si una matriz regular puede sumar sucesiones de $\ell_\infty \setminus c_0$. El próximo resultado da una respuesta parcial a dicha pregunta.

Denotemos por $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el espacio de todas las sucesiones de 0's y 1's dotado de la métrica d dada por

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

para todo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y todo $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Ω. Es un hecho fácil de comprobar que (Ω, d) es un espacio métrico completo. Estamos ahora en posesión de las herramientas necesarias para demostrar el resultado ya mencionado de Steinhaus, cuya prueba es tomada de [103].

Teorema 1.12.13 (Steinhaus). *Una matriz regular no puede sumar todas las sucesiones de Ω.*

Prueba. Sea $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ una matriz regular. Por la condición (3) del Teorema de Silverman-Toeplitz, tenemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$ es convergente para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual permite definir, sin ambigüedad, la función f_n dada por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ para todo $x \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que cada f_n es continua sobre

Ω. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Si elegimos $j \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que $\sum_{k=j}^{\infty} \left|a_{nk}\right| < \varepsilon$, tendremos que para todo $x, y \in \Omega$:

$$d(x,y) < 2^{-j} \quad \Rightarrow \quad x_k = y_k \quad \text{siempre que} \quad k < j \quad \Rightarrow \quad \left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leq \sum_{k=j}^{\infty} |a_{nk}| < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que A suma todas las sucesiones de Ω. Esto, lo que quiere decir, es que la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ está definida para todo $x \in \Omega$. De inmediato vamos a demostrar que f es discontinua en cualquier punto de Ω. Sea $x \in \Omega$ arbitrario y considere cualquier bola abierta $U(x,r)$ con centro en x y radio $r > 0$. Entonces existen dos puntos, digamos $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ y $w = (w_n)_{n=1}^{\infty}$ en $U(x,r)$, tal que a partir de un cierto n, todos los z_n son igual a 1 y a partir de otro n, todos los w_n son iguales a cero. En efecto, puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - 1| \cdot 2^{-n}$ converge, existe un k lo suficientemente grande de modo que $\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n - 1| \cdot 2^{-n} < r$. Defina ahora $z, w \in \Omega$ por

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \leq k \\ 1 & \text{si } n > k \end{cases} \qquad \text{y} \qquad w_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Ahora bien, como A es regular y $z, w \in c$, resulta que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} z_n = 1 \qquad \text{y} \qquad f(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w) = \lim_{n\to\infty} w_n = 0,$$

de donde se sigue que $|f(z) - f(w)| = 1$. Esto prueba la discontinuidad de f en cualquier punto de Ω. Por otro lado, como f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas, el Teorema Genérico de Baire-Kuratowski nos garantiza que el conjuntos de los puntos de continuidad de f es un G_δ-denso. Esta contradicción establece el resultado. ■

1.12.2. ‖ ► Funciones cuyos puntos de continuidad es nunca-denso

Nos ocuparemos ahora de recordar la definición de la oscilación de una función $f : X \to \mathbb{R}$, donde (X,d) es un espacio métrico. Baire introduce este concepto en su tesis para "medir" *cuánto salta* una función en una discontinuidad. Recordemos que si (X,d) es un espacio métrico:

> *Un punto $x_0 \in X$ es un punto de discontinuidad de f si, y sólo si, existe un $\varepsilon > 0$ tal que, dado cualquier $\delta > 0$, se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ para algún $x \in X$ con $d(x,x_0) < \delta$.*
> Lo anterior se puede expresar en la forma: *Una función f es discontinua en $x_0 \in X$ si, para cualquier intervalo abierto y acotado I conteniendo a x_0, siempre se tiene que*
>
> $$\operatorname{diam}\big(f(I)\big) \;=\; \sup\big\{|f(x) - f(y)| \,:\, x,y \in I\big\} \;\geq\; \varepsilon.$$

La siguiente definición permitirá describir a $\operatorname{Disc}(f)$ en términos de estos supremos

Definición 1.12.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Para cada subconjunto F de X, definimos la* ***oscilación de f en*** *F como*

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}(f,F) &= \sup\big\{|f(x) - f(y)| \,:\, x,y \in F\big\} \\ &= \operatorname{diam}\big(f(F)\big). \end{aligned}$$

Observe que si f es acotada sobre F, entonces $0 \leq \operatorname{osc}(f,F) \leq 2\sup\{|f(x)| : x \in F\} < \infty$. Por supuesto, si f no es acotada sobre F, pondremos $\operatorname{osc}(f,F) = \infty$. En general, si $x \in X$ la **oscilación de f en x** se define como

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}(f,x) &= \inf_{\delta>0} \operatorname{osc}\big(f,U(x,\delta)\big)\\ &= \inf_{\delta>0} \operatorname{diam}\big(f(U(x,\delta))\big)\\ &= \inf_{\delta>0} \sup\big\{|f(y)-f(z)| : y,z \in U(x,\delta)\big\}.\end{aligned}$$

Notemos que si $\delta < \delta'$, entonces $\operatorname{osc}(f,U(x,\delta)) \leq \operatorname{osc}(f,U(x,\delta'))$, por lo que

$$\operatorname{osc}(f,x) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{osc}\big(f,U(x,\delta)\big)$$

siempre que $\operatorname{osc}(f,U(x,\delta)) < \infty$ para algún $\delta > 0$.

Queremos, finalmente, hacer la observación de que la definición de oscilación en un punto se puede llevar a cabo, en términos generales, si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, (Y,d) es un espacio métrico y $f : X \to Y$ es una función. En efecto, en este caso, la oscilación de f en $x_0 \in X$ se define como

$$\operatorname{osc}(f,x_0) \;=\; \inf_{U\in\mathfrak{N}(x_0)} \sup\big\{d(f(x),f(y)) : x,y \in U\big\},$$

donde $\mathfrak{N}(x_0)$ representa a la familia de todos los entornos abiertos de x_0 en X.

El siguiente resultado caracteriza la continuidad de una función en términos de su oscilación en un punto.

Teorema 1.12.14. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

(1) $\operatorname{PC}(f) \;=\; \{x \in X : \operatorname{osc}(f,x) = 0\}$.

(2) *Para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $O_f(\varepsilon) \;=\; \big\{x \in X : \operatorname{osc}(f,x) < \varepsilon\big\}$ es abierto en X.*

Prueba. (1) Sea $x \in \operatorname{PC}(f)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe, por la continuidad de f en x, un $\delta > 0$ para el cual se cumple que $f(U(x,\delta)) \subseteq \big(f(x)-\varepsilon/2, f(x)+\varepsilon/2\big)$. De aquí se sigue $\operatorname{osc}(f,x) \leq \varepsilon$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\operatorname{osc}(f,x) = 0$. Esto prueba que $\operatorname{PC}(f) \subseteq \{x \in X : \operatorname{osc}(f,x) = 0\}$.

Para demostrar la otra inclusión, sea $x \in X$ tal que $\operatorname{osc}(f,x) = 0$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $y,z \in U(x,\delta)$. En particular, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in U(x,\delta)$. Con esto hemos demostrado que $x \in \operatorname{PC}(f)$ y con ello la primera parte del teorema.

(2) Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in O_f(\varepsilon)$. Entonces $\operatorname{osc}(f,x) = \inf_{\delta>0} \operatorname{osc}(f,U(x,\delta)) < \varepsilon$ y, por lo tanto, existe un $\delta_0 > 0$ tal que $\operatorname{osc}(f,U(x,\delta_0)) < \varepsilon$. Sea $\delta = \delta_0/2$ y veamos que

$$U(x,\delta) \subseteq O_f(\varepsilon).$$

En efecto, sea $y \in U(x,\delta)$. Si $d(z,y) < \delta$, entonces $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + \delta = \delta_0$ y, por consiguiente, se cumple que $U(y,\delta) \subseteq U(x,\delta_0)$. Por esto,

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad z,z' \in U(y,\delta),$$

es decir, $\operatorname{osc}(f,B(y,\delta)) < \varepsilon$ y así, $\operatorname{osc}(f,y) < \varepsilon$. Como $y \in U(x,\delta)$ es arbitrario, resulta entonces que $U(x,\delta) \subseteq O_f(\varepsilon)$. Esto termina la prueba. ■

Observemos que el Teorema 1.12.14 nos dice que si F es un subconjunto cerrado de X y $f : X \to \mathbb{R}$ no posee puntos de continuidad en F, entonces $\operatorname{osc}(f,x) > 0$ para todo $x \in F$. Por otro lado, puesto que el conjunto

$$D_\varepsilon(f) \;=\; \big\{x \in X : \operatorname{osc}(f,x) \geq \varepsilon\big\} \;=\; X \setminus O_f(\varepsilon)$$

es cerrado en X para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Disc}(f)$, el conjunto de todos los puntos de X donde f es discontinua, se puede representar en la forma

$$\operatorname{Disc}(f) \;=\; X \setminus \operatorname{PC}(f) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in X : \operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n}\Big\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(f), \qquad (Df)$$

de donde se obtiene que $\operatorname{Disc}(f)$ es siempre un F_σ.

Queremos hacer resaltar que el Teorema 1.12.14 sigue siendo válido para cualquier función $f : X \to Y$, donde (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff y (Y,d) es un espacio métrico.

Kostyrko and Šalát [272] demostraron que si un espacio lineal de funciones acotadas posee un elemento que es discontinuo casi-siempre, entonces en dicho espacio existe un conjunto residual de funciones con la misma propiedad. Más específicamente,

Teorema de Kostyrko-Šalát. *Si $\mathcal{F}$ es un subespacio lineal del espacio de Banach $\big(\mathcal{B}_\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ tal que*

$$\operatorname{ínf}\big\{\lambda\big(\operatorname{PC}(f)\big) : f \in \mathcal{F}\big\} \;=\; 0,$$

entonces el conjunto

$$\mathcal{R} \;=\; \big\{f \in \mathcal{F} : \lambda\big(\operatorname{PC}(f)\big) = 0\big\}$$

es residual en $\mathcal{F}$, donde λ es la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$.

Observe que la hipótesis del teorema claramente se satisface si existe una $f \in \mathcal{F}$ para la cual $\lambda\big(\operatorname{PC}(f)\big) = 0$. También debemos notar que si el subespacio lineal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ no es norma-cerrado, entonces el conjunto residual $\mathcal{R}$ en la conclusión del teorema anterior puede ser vacío.

En [393], S. Saito obtiene la siguiente versión topológica del Teorema de Kostyrko-Šalát.

Teorema 1.12.15 (Saito). *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio lineal del espacio de Banach $\big(\mathcal{B}_\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ tal que, para cada subconjunto abierto no vacío U de $[0,1]$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{PC}(f)$ no es residual en U. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{R} \;=\; \big\{f \in \mathcal{F} : \operatorname{PC}(f) \textit{ es nunca-denso}\big\}$$

es un G_δ-denso en $\mathcal{F}$.

Prueba. Para cada subintervalo cerrado no degenerado y con extremos racionales I de $[0,1]$, pongamos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(I) \;&=\; \big\{f \in \mathcal{F} : \operatorname{PC}(f) \text{ no es residual en } I\big\}\\ &=\; \big\{f \in \mathcal{F} : \operatorname{Disc}(f) \text{ es de segunda categoría en } I\big\}\end{aligned}$$

Afirmamos que cada $\mathcal{F}(I)$ es un abierto denso de $\mathcal{F}$. Antes de abordar la demostración nuestra afirmación vamos a probar el siguiente resultado auxiliar:

(1) Si $f,g \in \mathcal{F}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$D_t(f) \;\subseteq\; D_{t-2\|f-g\|_\infty}(g).$$

Sea $x \in D_t(f)$. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada bola abierta U con centro en x, tenemos que

$$\operatorname{diam}\big(f(U)\big) \ \geq\ \operatorname{osc}(f,x)\ \geq\ t\ >\ t-\varepsilon,$$

lo cual implica que existen $x_1, x_2 \in U$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| > t - \varepsilon$. Se sigue de esto que

$$\operatorname{diam}\big(g(U)\big)\ \geq\ |g(x_1) - g(x_2)|\ \geq\ |f(x_1) - f(x_2)| - 2\,\|f-g\|_\infty\ >\ t - 2\,\|f-g\|_\infty - \varepsilon.$$

Tomando el ínfimo sobre todas las bolas abiertas U con centro en x, obtenemos que

$$\operatorname{osc}(g,x)\ \geq\ t - 2\,\|f-g\|_\infty - \varepsilon.$$

Como ε era arbitrario, concluimos que $\operatorname{osc}(g,x)\ \geq\ t - 2\,\|f-g\|_\infty$, es decir, $x \in D_{t-2\|f-g\|_\infty}(g)$.

(2) $\mathcal{F}(I)$ *es abierto*. En efecto, sea $f \in \mathcal{F}(I)$. Puesto que

$$\operatorname{Disc}(f)\ =\ \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X:\ \operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n}\right\}\ =\ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(f)$$

es de segunda categoría en I, existe algún $n \in \mathbb{N}$ y un subintervalo abierto $J \subseteq I$ tal que $J \subseteq D_{1/n}(f)$. Si $g \in \mathcal{F}$ satisface $\|f-g\|_\infty < 1/2n$, entonces por la primera parte tenemos que

$$J\ \subseteq\ D_t(f)\ \subseteq\ D_{t-2\|f-g\|_\infty}(g)\ \subseteq\ D_t(g)$$

lo cual prueba que $g \in \mathcal{F}_I$.

(3) $\mathcal{F}(I)$ *es denso*. Dado $\varepsilon > 0$ considere cualquier bola abierta $U := U(f,\varepsilon)$ en $\mathcal{F}$. Veamos que $U \cap \mathcal{F}(I) \neq \varnothing$, lo que es equivalente a encontrar un $h \in \mathcal{F}(I)$ tal que $\|f-h\| < \varepsilon$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $f \notin \mathcal{F}(I)$, es decir, que $\operatorname{PC}(f)$ es residual en I. Por nuestra hipótesis sobre $\mathcal{F}$, existe una $g \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{PC}(g)$ no es residual en $\operatorname{int}(I)$. Escojamos un escalar $c > 0$ lo suficientemente pequeño de modo tal que $c\,\|g\|_\infty < \varepsilon$, y definamos $h = f + cg$. Resulta que $h \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un espacio lineal y puesto que $\operatorname{PC}(f) \cap \operatorname{PC}(h) \subseteq \operatorname{PC}(g)$, el conjunto $\operatorname{PC}(h)$ no puede ser residual en I. Como $\|f-h\| < \varepsilon$ tenemos que $h \in \mathcal{F}(I)$ y termina la prueba de la densidad de $\mathcal{F}(I)$.

Para terminar la prueba observe que

$$\mathcal{R}\ =\ \bigcap_{I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})} \mathcal{F}(I),$$

donde $\mathfrak{I}(\mathbb{Q})$ es la colección numerable de todos los subintervalos cerrados no degenerados con extremos racionales de $[0,1]$. En efecto, si $f \in \mathcal{R}$, entonces $\operatorname{PC}(f)$ es nunca-denso y, por consiguiente, en ningún subintervalo $I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})$ dicho conjunto es denso, lo cual significa que $\operatorname{PC}(f)$ no es residual en I. Esto prueba que $f \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})} \mathcal{F}(I)$. Recíprocamente, suponga que $f \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})} \mathcal{F}(I)$. Entonces $\operatorname{PC}(f)$ no es residual en I para cualquier $I \in I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})$. Si $\operatorname{PC}(f)$ no es nunca-denso en $[0,1]$, entonces en algún subintervalo $I \in \mathfrak{I}(\mathbb{Q})$ el conjunto $\operatorname{PC}(f)$ (que es un G_δ) sería denso en I y, en consecuencia, residual en I. Esta contradicción establece que $f \in \mathcal{R}$. ■

Corolario 1.12.3. *Si A es un subconjunto G_δ-nunca-denso de $[0,1]$, entonces la familia*

$$\mathcal{F}\ =\ \big\{f \in \mathcal{B}_\infty[0,1]:\ A \subseteq \operatorname{PC}(f)\big\}$$

satisface la hipótesis del Teorema 1.12.15.

Prueba. Por el Teorema 1.12.2, $A = \mathrm{PC}(f)$ para alguna $f \in \mathcal{B}_\infty[0,1]$. Observe que $\mathcal{F}$ es un subespacio norma-cerrado pues si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{F}$ convergiendo uniformemente a f, entonces

$$\mathrm{PC}(f) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{PC}(f_n) \supseteq A.$$

Como comentario final, nótese que si $\mathcal{F} = \mathfrak{B}_1[0,1]$, entonces por el Teorema de Baire-Kuratowski, $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso (en particular, residual en $[0,1]$) para cualquier $f \in \mathcal{F}$, de modo que la hipótesis del Teorema de Saito no se satisface. Si ahora se considera $\mathcal{F} = \mathfrak{B}_2[0,1]$ y tomamos la función característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, entonces f es una función nunca continua perteneciente a la clase $\mathfrak{B}_2[0,1]$. El Teorema de Saito nos dice entonces que $\mathfrak{B}_2[0,1]$ posee un conjunto residual $\mathcal{R}$ con la propiedad de que para cualquier $f \in \mathcal{R}$, el conjunto $\mathrm{PC}(f)$ es nunca-denso.

1.12.3. ‖ ► Espacios de Baire y funciones exclusivas

Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y (Y,d) un espacio métrico. Una función $f : X \to Y$ se dice que es **exclusiva** (en inglés, **cliquish**) en un punto $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada entorno abierto $U(x_0)$ de x_0, existe un conjunto abierto no vacío $U \subseteq U(x_0)$ (U no necesariamente contiene a x_0) tal que, para todo $x,y \in U$,

$$d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{Exc}(f)$ el conjunto de todos los puntos de exclusividad de f, es decir,

$$\mathrm{Exc}(f) = \big\{x \in X : f \text{ es exclusiva en } x\big\}.$$

Si ocurre que $\mathrm{Exc}(f) = X$, entonces a f se le llama una **función exclusiva**.

Es claro que toda función que es continua en un punto es exclusiva en dicho punto, pero el recíproco no siempre se cumple. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\big(1/x\big) & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es exclusiva en $x = 0$, pero claramente no es continua en dicho punto. Una función exclusiva puede tener "muchos puntos de continuidad". En efecto, la función de Thomae $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x = p/q, \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son primos relativos}, \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

como sabemos, es continua en todos los irracionales de $(0,1)$, pero es exclusiva en todo punto de $(0,1)$. Es consecuencia de la definición de función exclusiva que la suma de dos funciones exclusivas es de nuevo exclusiva. Similarmente, el límite uniforme de una sucesión de funciones exclusivas retiene la exclusividad. También es claro que:

Observación FCE. *Si (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y A es un subconjunto nunca-denso de X, entonces la función característica de A, $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, es exclusiva en todo punto de X.*

En efecto, tomemos cualquier $x_0 \in X$. Sean $\varepsilon > 0$ y $U(x_0)$ un entorno abierto de x_0. Como A es nunca-denso en X, existe un conjunto abierto no vacío $V \subseteq U(x_0)$ tal que $V \cap A = \varnothing$. Es claro que, cualesquiera sean $x,y \in V$, $0 = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, lo cual nos dice que χ_A es exclusiva en x_0.

Observe que

$$\mathrm{PC}(f) \subseteq \mathrm{Exc}(f) \qquad \text{o, de modo equivalente,} \qquad X \setminus \mathrm{Exc}(f) \subseteq \mathrm{Disc}(f).$$

En el siguiente resultado, (1) fue demostrado por J. S. Lipiński y T. Šalát [294], mientras que (2) y (3) se debe a A. Neubrunnová [339]

Teorema 1.12.16 (Lipiński-Šalát-Neubrunnová). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y suponga que $f : X \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Entonces se cumple que:*

(1) $\mathrm{Exc}(f)$ *es cerrado en* X*.*

(2) $\mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{PC}(f)$ *es de primera categoría en* X*.*

(3) *Si* $\mathrm{Exc}(f)$ *es denso en* X*, entonces* f *es exclusiva. En particular,* $\mathrm{Disc}(f)$ *es de primera categoría en* X*.*

Prueba. (1) Sea $y_0 \in \overline{\mathrm{Exc}(f)}$ y sea $U(y_0)$ un entorno abierto de y_0. Como $\mathrm{Exc}(f) \cap U(x_0) \neq \varnothing$, podemos elegir un $x_0 \in \mathrm{Exc}(f) \cap U(x_0)$. Siendo $U(y_0)$ un entorno abierto de x_0 y ya que $x_0 \in \mathrm{Exc}(f)$, se sigue de la exclusividad de f en x_0 que existe, para cada $\varepsilon > 0$, un conjunto abierto no vacío $U \subseteq U(x_0)$ tal que, para todo $x, y \in U$,

$$\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Esto prueba que f es exclusiva en y_0, por lo que $y_0 \in \mathrm{Exc}(f)$. Hemos demostrado que $\overline{\mathrm{Exc}(f)} = \mathrm{Exc}(f)$ por lo que $\mathrm{Exc}(f)$ es cerrado en X.

(2) Observe que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{PC}(f) &= \mathrm{Exc}(f) \cap \mathrm{Disc}(f) \\
&= \mathrm{Exc}(f) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{x \in X : \mathrm{osc}(f,x) \geq 1/n\big\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Exc}(f) \cap \big\{x \in X : \mathrm{osc}(f,x) \geq 1/n\big\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,
\end{aligned}$$

donde $F_n = \mathrm{Exc}(f) \cap \big\{x \in X : \mathrm{osc}(f,x) \geq 1/n\big\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que cada F_n es nunca-denso en X. En efecto, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in X$. Sea U cualquier entorno abierto de x. Si $x \notin \mathrm{Exc}(f)$, entonces $\big(X \setminus \mathrm{Exc}(f)\big) \cap U \subseteq U$ y claramente $V := \big(X \setminus \mathrm{Exc}(f)\big) \cap U$ es, por la primera parte, un abierto no vacío que no intersecta a F_n, esto es, $V \cap F_n = \varnothing$, por lo que F_n es nunca-denso en X. Por otro lado, si $x \in \mathrm{Exc}(f)$, se sigue de la exclusividad de f en x que existe, para el n fijado y el entorno abierto dado U de x, un conjunto abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que, para todo $y_1, y_2 \in V$, se cumple que $|f(y_1) - f(y_2)| < 1/2n$. Esta última desigualdad implica que $\mathrm{osc}(f,y) \leq 1/2n < 1/n$ para todo $y \in V$. Esto prueba que $V \cap F_n = \varnothing$ y, en consecuencia, F_n es, también en este caso, nunca-denso en X. Lo acabado de demostrar confirma que $\mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{PC}(f)$ es de primera categoría en X.

(3) Suponga que $\mathrm{Exc}(f)$ es denso en X. Se sigue de (1) que $\mathrm{Exc}(f) = \overline{\mathrm{Exc}(f)} = X$, lo cual prueba que f es exclusiva. Ahora, usando (2), vemos que

$$\mathrm{Disc}(f) = X \setminus \mathrm{PC}(f) = \mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{PC}(f)$$

es de primera categoría en X. ■

Del resultado anterior se sigue que: *si* (X,τ) *es un espacio topológico de Hausdorff arbitrario y la función* $f : X \to \mathbb{R}$ *es exclusiva, entonces* $\mathrm{Disc}(f)$ *es de primera categoría en* X. En efecto, como f es exclusiva, resulta que $\mathrm{Exc}(f) = X$ y como, obviamente, $\mathrm{Exc}(f)$ es denso en X, se deduce del resultado anterior que $\mathrm{Disc}(f)$ es de primera categoría en X.

Denotemos por $\mathrm{Exc}(X)$ el conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son exclusivas.

Corolario 1.12.4. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff. Entonces* $\mathrm{pDC}(X) \subseteq \mathrm{Exc}(X)$*, es decir, toda función* $f : X \to \mathbb{R}$ *puntualmente discontinua es exclusiva.*

Prueba. En efecto, si f es puntualmente discontinua, entonces $\mathrm{PC}(f)$ es denso en X y como $\mathrm{PC}(f) \subseteq \mathrm{Exc}(f)$, resulta que $\mathrm{Exc}(f)$ es denso en X y la conclusión sigue del Teorema 1.12.16. ■

Aunque el recíproco de este último resultado no siempre es válido, ocurre que si al espacio X se le impone el requerimiento de que sea un espacio de Baire se obtiene la siguiente caracterización de las funciones exclusivas, véase [133].

Teorema 1.12.17 (Doboš-Šalát). *Sean* (X,τ) *un espacio de Baire y* $f : X \to \mathbb{R}$ *una función arbitraria. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f *es exclusiva.*

(2) f *es puntualmente discontinua.*

(3) $\mathrm{PC}(f)$ *es un* G_δ*-denso en* X *o, equivalentemente,* $\mathrm{Disc}(f)$ *es de primera categoría en* X.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Si f es exclusiva sobre X, entonces $\mathrm{Disc}(f)$ es de primera categoría en X y como X es un espacio de Baire, $\mathrm{PC}(f) = X \setminus \mathrm{Disc}(f)$ es un G_δ-denso en X. Esto prueba que f es puntualmente discontinua.

$(2) \Rightarrow (3)$. Es inmediato.

$(3) \Rightarrow (1)$. Suponga que $\mathrm{Disc}(f)$ es de primera categoría en X, pero que $X \neq \mathrm{Exc}(f)$. Puesto que $\varnothing \neq X \setminus \mathrm{Exc}(f) \subseteq \mathrm{Disc}(f)$, el conjunto $X \setminus \mathrm{Exc}(f)$ también es de primera categoría en X. Por el Teorema de Lipiński-Šalát-Neubrunnová, $\mathrm{Exc}(f)$ es cerrado y, en consecuencia, $X \setminus \mathrm{Exc}(f)$ es un abierto no vacío de X. Pero como todo conjunto abierto viviendo en un espacio de Baire es, según el Teorema 1.7.3, un espacio de Baire en su topología relativa y, en particular, de segunda categoría, resulta que el conjunto no vacío $X \setminus \mathrm{Exc}(f)$ es, al mismo tiempo, de primera y de segunda categoría en X. Esta contradicción establece que $X = \mathrm{Exc}(f)$ y así, f es exclusiva. ■

Finalizamos esta sección con la siguiente caracterización de los espacios de Baire, (véase [375], Proposition 5.3, p. 55).

Teorema 1.12.18 (Neubrunnová-Richter). *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X *es un espacio de Baire.*

(2) $\mathrm{PC}(f)$ *es denso en* X *para cualquier función exclusiva* $f : X \to \mathbb{R}$.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$ sigue del Teorema 1.12.17.
$(2) \Rightarrow (1)$. Es suficiente demostrar, por una aplicación del Teorema 1.6.3, que si $A \subseteq X$ es de primera categoría, entonces $X \setminus A$ es denso en X. Sea A un subconjunto de primera categoría en X. Entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

donde cada A_n es un subconjunto nunca-denso de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n = \chi_{A_n}$ es, por la **Observación FCE**, una función exclusiva y, en consecuencia, la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} f_n$ también es exclusiva gracias al M-test para la convergencia uniforme de Weierstrass. Por hipótesis, $\mathrm{PC}(f) = X \setminus \mathrm{Disc}(f)$ es denso en X, por lo que será suficiente demostrar que:

$$A \subseteq \mathrm{Disc}(f).$$

Sea $x_0 \in A$. Entonces $x_0 \in A_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente, $f(x_0) \geq 3^{-n_0}$. Fijemos ahora un entorno abierto arbitrario U de x_0. Como $\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$ es nunca-denso y U es abierto, resulta que $U \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \neq \varnothing$ de modo que podemos elegir un $y_0 \in U \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$. De esto se sigue que $f_n(y_0) = 0$ para cualquier $n \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ y, en consecuencia,

$$f(y_0) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 3^{-n} f_n(y_0) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n_0}.$$

Usando el hecho de que $f(x_0) \geq 3^{-n_0}$ y la desigualdad anterior, se obtiene que

$$f(x_0) - f(y_0) \geq 3^{-n_0} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-n_0} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n_0},$$

lo cual demuestra, por la arbitrariedad de U, que f es discontinua en x_0 y, por lo tanto, $A \subseteq \mathrm{Disc}(f)$. Finalmente, puesto que $\mathrm{PC}(f) = X \setminus \mathrm{Disc}(f)$ es denso en X, entonces $\mathrm{PC}(f) \subseteq X \setminus A$ lo que hace que dicho conjunto también sea denso en X y termina la prueba. ■

1.12.4. || ► Funciones que son continuas sobre un conjunto G_δ-denso

En vista de los resultados de la sección anterior, estamos obligados a preguntarnos: ¿Qué clase, o familia, de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ tienen la propiedad de que el conjunto de sus puntos de continuidad, $\mathrm{PC}(f)$, es denso en X? El objetivo central de esta sección es mostrar algunas familias especiales de funciones cuyos puntos de continuidad son muy abundantes, es decir, constituyen un conjunto G_δ-denso de su dominio. Primero recordaremos la siguiente definición.

Definición 1.12.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama **superiormente semicontinua** (resp. **inferiormente semicontinua**) si para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$G_a = \{x \in X : f(x) < a\} \qquad (\textit{resp.}\ G_a = \{x \in X : f(x) > a\})$$

es abierto en X.

Puesto que el complemento de un conjunto abierto es cerrado, tenemos que *f es superiormente semicontinua si, y sólo si, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $F_a = \{x \in X : f(x) \geq a\}$ es cerrado en X*. Similarmente, *f es inferiormente semicontinua si, y sólo si, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $F_a = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es cerrado en X.*

Comenzaremos de inmediato con los ejemplos.

Ejemplo 1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es superiormente semicontinua (resp. inferiormente semicontinua), entonces $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso en X.*

Prueba. Sólo haremos la prueba para el caso en que f es superiormente semicontinua . Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$H_n = G_n \cup (X \setminus \overline{G}_n),$$

donde $G_n = \{x \in X : f(x) < r_n\}$ es, por hipótesis, abierto en X. Observemos en primer lugar que cada H_n es abierto en X y, además, denso en X ya que

$$\overline{H}_n = \overline{G}_n \cup (\overline{X \setminus \overline{G}_n}) \supseteq \overline{G}_n \cup (X \setminus \overline{G}_n) = X.$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ es un G_δ-denso en X.

Afirmamos que $G \subseteq PC(f)$. En efecto, sean $x \in G$ y $\varepsilon > 0$. Como $f(x) - \varepsilon < f(x)$, podemos elegir un número racional r_n tal que $f(x) - \varepsilon < r_n < f(x)$. Puesto que $x \in H_n$ y $x \notin G_n = \{x \in X : f(x) < r_n\}$, entonces $x \in X \setminus \overline{G}_n$ y, en consecuencia, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $U(x, \delta_1) \cap G_n = \varnothing$; es decir, para cualquier $y \in U(x, \delta_1)$, se cumple que $f(x) - \varepsilon < r_n < f(y)$.

Por otro lado, siendo $G_{f(x)+\varepsilon}$ un conjunto abierto conteniendo a x, existe un número real $\delta_2 > 0$ tal que $U(x, \delta_2) \subseteq G_{f(x)+\varepsilon}$. Por esto, $f(y) < f(x) + \varepsilon$ para cualquier $y \in U(x, \delta_2)$. Si ahora definimos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que si $y \in U(x, \delta)$, entonces $d(x, y) < \delta$ y, en consecuencia, $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ lo cual nos asegura que f es continua en x, esto es, $x \in \mathrm{PC}(f)$. Siendo $x \in G$ arbitrario, concluimos que $G \subseteq \mathrm{PC}(f)$. Esto prueba que $\mathrm{PC}(f)$ es un G_δ-denso en X. ∎

Ejemplo 2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$, entonces $\mathrm{PC}(f')$ es un G_δ-denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = n\Big(f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como cada f_n es continua sobre el espacio métrico completo $\mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, la conclusión de que $\mathrm{PC}(f')$ es un G_δ-denso en $\mathbb{R}$ sigue del Teorema 1.12.11. ∎

El resultado anterior también es válido si f está definida en cualquier subconjunto cerrado (o abierto) de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3. *Sea F un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo (X, d). Entonces $\mathrm{PC}(\chi_F)$ es un G_δ-denso en X.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : X \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n\, d(x, F)}$$

para cada $x \in X$. Puesto que la aplicación $x \mapsto d(x, F)$ es continua, cada f_n también lo es. Observe que si $x \in F$, entonces $d(x, F) = 0$ y, en consecuencia, $f_n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; mientras que si $x \notin F$, entonces $d(x, F) > 0$ y así, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Esto prueba que, para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_F(x)$ y, por lo tanto, gracias al Teorema 1.12.11, $\mathrm{PC}(\chi_F)$ es un G_δ-denso en X. ∎

Un resultado más general que el anterior se cumple, pero se requiere que recordemos el siguiente caso particular del lema de Uryshon:

Lema de Urysohn. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si E y F son subconjuntos cerrados y disjuntos de X, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que:*

(1) $0 \leq f(x) \leq 1$ *para todo* $x \in X$,

(2) $f(x) = 0$ *para todo* $x \in E$, y

(3) $f(x) = 1$ *para todo* $x \in F$.

En efecto, la función

$$f(x) = \frac{d(x,E)}{d(x,E)+d(x,F)} \qquad (x \in X)$$

donde $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ para cualquier $A \subseteq X$, cumple $(1),(2)$ y (3). ■

Ejemplo 4. *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Si $F \subseteq X$ es ambiguo; es decir, F es tanto un G_δ así como un F_σ, entonces $\mathrm{PC}(\chi_F)$ es un G_δ-denso en X.*

Prueba. Como F es tanto un G_δ como un F_σ, podemos escribir

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \qquad \text{y} \qquad X \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

donde tanto los F_n así como los B_n son subconjuntos cerrados de X y ambas sucesiones son crecientes. Por el Lema de Urysohn, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función continua $f_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n = 1$ sobre F_n y $f_n = 0$ sobre B_n. De esto se sigue que $\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_F$ y así, por el Teorema 1.12.11, $\mathrm{PC}(\chi_F)$ es un G_δ-denso en X. ■

Otra consecuencia inmediata que se deriva del Teorema 1.12.11 es el siguiente:

Ejemplo 5. *No existe ninguna sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

Este ejemplo expresa, en la terminología del Capítulo 3, que $\chi_{\mathbb{Q}} \notin \mathfrak{B}_1(\mathbb{R})$, es decir, $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es una función de la primera clase de Baire.

El próximo resultado, que se obtiene como consecuencia del ejemplo anterior, establece que sobre $\mathcal{B}_\infty[0,1]$, el espacio vectorial de todas las funciones acotadas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la convergencia puntual no es generada por ninguna métrica definida sobre dicho espacio.

Ejemplo 6. *No existe ninguna métrica d sobre el conjunto $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \textit{para cada } x \in [0,1].$$

Prueba. Sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = r_j, \quad j = 1,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \quad \text{para cada } x \in [0,1].$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos construir una sucesión $(g_{nk})_{k=1}^{\infty}$ de funciones continuas convergiendo puntualmente a f_n en $[0,1]$. En efecto, basta considerar funciones cuyos gráficos están formados por triángulos isósceles tales que sus vértices sean los puntos $(r_1,1),\ldots,(r_n,1)$ y cuyas bases, cada vez menores, estén en el eje de las abscisas. Supongamos ahora que existe una métrica d sobre $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ bajo la cual la d-convergencia sea la misma que la convergencia puntual. Tendríamos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}) = 0.$$

Por construcción, sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} d(g_{nk}, f_n) = 0$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, y escojamos ahora un $k_n \in \mathbb{N}$ de modo tal que $d(g_{nk_n}, f_n) < 1/n$. Entonces

$$d(g_{nk_n}, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}) \le d(g_{nk_n}, f_n) + d(f_n, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}) < \frac{1}{n} + d(f_n, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}),$$

de donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} d(g_{nk_n}, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}) = 0$, lo cual significa que la sucesión de funciones continuas $(g_{nk_n})_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, lo que resulta imposible por el **Ejemplo 5**. ■

1.13. El Teorema de Categoría de Baire y el Axioma de Elección

Recordemos que en la demostración del Teorema de Categoría de Baire para Espacios Métricos Completos uno elige, para cada natural n, una bola abierta $U_n := U(x_n, r_n)$ con $r_n < 1/2^{n-1}$ tal que

$$\overline{U}(x_n, r_n) \subseteq U(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n,$$

obteniéndose de este modo una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que resulta ser de Cauchy en X y, en consecuencia, converge a un $x \in X$. Este punto x pertenece, por supuesto, a todos los $\overline{U}(x_n, r_n)$ y, por lo tanto, a todos los G_n como se deseaba. El hecho fundamental que hay que destacar en dicha demostración es que, cada par (x_n, r_n) se escoge de un conjunto de pares posibles los cuales dependen del par anterior (x_{n-1}, r_{n-1}), es decir, que en dicha prueba se hace uso de una forma muy especial del Axioma de Elección (**AC**) denominada el Axioma de Elecciones Multiples. Formas más débiles del Axioma de Elección han sido propuestos para excluir resultados tales como la paradoja de Banach-Tarski. Uno de ellos es el siguiente:

> **Axioma de Elección Numerable** ($\mathbf{AC}_\omega$). *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos tal que X_n es no vacío para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe al menos una función $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que $f(n) \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

El modelo **ZF** + $\mathbf{AC}_\omega$, es decir, la Teoría de Conjuntos derivada de los Axiomas de Zermelo-Frankel (sin el Axioma de Elección) al que se le ha añadido el Axioma de Elección Numerable, es particularmente útil para el desarrollo del análisis. Por ejemplo, $\mathbf{AC}_\omega$ es suficiente para demostrar que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Similarmente, es suficiente para demostrar el Teorema de Encaje de Cantor, probar que cualquier punto de acumulación de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es el límite de alguna sucesión de $A \setminus \{x\}$ y muchos otros resultados importantes en matemáticas. Varios formas equivalentes del Axioma de Elección Numerable se pueden ver, por ejemplo, en [215].

El Axioma de Elección con frecuencia se usa para demostrar la existencia de conjuntos en $\mathbb{R}$ que son no medibles según Lebesgue, la existencia de un conjunto de números reales sin la propiedad de Baire, o la paradoja de Banach-Tarski, etc. A diferencia del Axioma de Elección, el siguiente axioma, intermedio entre el Axioma de Elección y el Axioma de Elección Numerable, aunque no es suficiente para demostrar los resultados que acabamos de mencionar, sin embargo su uso es mucha utilidad.

Sea X un conjunto no vacío. Recordemos que una relación binaria sobre X es un subconjunto $\mathrm{R} \subseteq X \times X$. Escribiremos $x\,\mathrm{R}\,y$ en lugar de $(x,y) \in \mathrm{R}$. El Axioma de Elecciones Múltiples puede ser establecido del modo siguiente:

Axioma de Elecciones Múltiples (DC). *Sean X un conjunto no vacío, $a \in X$ y R una relación binaria sobre X tal que:*

$$\textit{para cada } x \in X, \textit{ existe } y \in X \textit{ satisfaciendo } x\,\mathrm{R}\,y. \tag{DC-1}$$

Entonces existe una función $f : \mathbb{N}_0 \to X$, es decir, una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en X tal que

$$x_0 = a \quad \text{y} \quad x_n\,\mathrm{R}\,x_{n+1} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.13.1. AC $\Rightarrow$ DC $\Rightarrow$ AC$_\omega$.

Prueba. AC $\Rightarrow$ DC. Sea R una relación binaria sobre un conjunto no vacío X verificando (DC-1) y sea $a \in X$. Si para cada $x \in X$, definimos

$$Y_x = \Big\{y \in X : x\,\mathrm{R}\,y\Big\},$$

entonces por $(DC-1)$, cada Y_x es no vacío y, en consecuencia, por el Axioma de Elección existe una función $f : X \to \bigcup_{x\in X} Y_x \subseteq X$ tal que $f(x) \in Y_x$ para todo $x \in X$, es decir, $x\,\mathrm{R}\,f(x)$ para todo $x \in X$. Definiendo inductivamente los x_n, $n = 0,1,2,\dots$ por

$$x_0 = a, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \cdots \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \cdots$$

entonces $x_0 = a$ y $x_n\,\mathrm{R}\,x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, estableciéndose de este modo **DC**.

DC $\Rightarrow$ AC$_\omega$. Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos no vacíos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$Y_n = \prod_{m=1}^{n} X_m \qquad \text{y} \qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Sobre Y considere la relación binaria R dada por

$$(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{R}\,(z_1,\dots,z_m) \qquad \Leftrightarrow \qquad m = n+1 \quad \text{y} \quad x_i = z_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Observe que Y claramente satisface (DC-1) y, así, por hipótesis, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n\,\mathrm{R}\,y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $y_1 = (x_1)$. Entonces, cada y_n tiene la forma $(x_1^n,\dots,x_n^n) \in \prod_{m=1}^{n} X_m$ y, por consiguiente,

$$(x_n^n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Esto termina la prueba. ■

Observe que el Axioma de Elecciones Multiples justifica sólamente una sucesión de elecciones, donde, por supuesto, cada una de ellas depende de la anterior. Dicho axioma no implica el Axioma de Elección aunque, matemáticamente, es un axioma muy útil. El modelo o sistema **ZF** + **DC** es importante, fundamentalmente, por el hecho de que casi todos los resultados de interés en la Teoría de la Medida clásica, así como muchos de los resultados importantes del Análisis Funcional elemental, con la excepción del Teorema de Hahn-Banach y algunos otros que son consecuencias del Axioma de Elección, son demostrables en **ZF** + **DC**. Por ejemplo, como veremos de inmediato, el Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos es demostrable en **ZF** + **DC**.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 1.13.2. *Son equivalentes:*

(1) **DC**.

(2) *Cualquier espacio métrico completo es de Baire.*

(3) *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un espacio discreto, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio de Baire.*

(4) *Si X es un espacio discreto, entonces $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Baire.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X. Para demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, tomemos un subconjunto abierto no vacío arbitrario V de X y veamos que $V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Ya hemos visto que para cualquier entero $m \geq 1$, $\bigcap_{n=1}^{m} G_n$ es abierto y denso en X (observación (2) del Comentario Adicional 1.6.1, página 34) por lo que el conjunto $V \cap \bigcap_{n=1}^{m} G_n$ es un abierto no vacío. Esto permite definir el conjunto

$$Y = \left\{ (n,x,r) \in \mathbb{N} \times X \times \mathbb{R} \,:\, 0 < r < 2^{-n} \ \text{ y } \ B(x,r) \subseteq V \cap \bigcap_{n=1}^{m} G_n \right\}.$$

Sobre el conjunto Y definamos la siguiente relación binaria R declarando que

$$(n,x,r) \ \mathrm{R} \ (n',x',r') \qquad \Leftrightarrow \qquad B(x',r') \subseteq U(x,r).$$

Se sigue fácilmente de la definición de Y que, para cada $y \in Y$, existe y' para el cual $y \,\mathrm{R}\, y'$. Usando ahora el hecho de que **DC** se cumple, se garantiza la existencia de una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \,\mathrm{R}\, y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si hacemos $y_n = (m_n, x_n, r_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultará que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X la cual converge, gracias a la completitud de X, a un $x \in X$. Por construcción, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \subseteq V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Si sobre el conjunto $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definimos la métrica d por

$$d\big((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\big) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x_n = y_n \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ 2^{-\min\{n \in \mathbb{N}:\, x_n \neq y_n\}}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces (X,d) es un espacio métrico completo el cual resulta ser de Baire por la hipótesis.

$(3) \Rightarrow (4)$. Es inmediata.

$(4) \Rightarrow (1)$. Sea X un conjunto no vacío y suponga que R es una relación binaria sobre X que cumple (DC-1). Sea $a \in X$. Considere a X con la topología discreta. Por (4), el espacio producto $Y := X^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Baire. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$G_m = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in Y : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ con } x_m R x_n \right\}.$$

Sabiendo que R satisface (DC-1), tenemos que G_m es no vacío. Además, como X es un espacio discreto, cualquier conjunto de la forma $\{x_m\} \times \prod_{n \neq m} X_n$, donde $X_n = X$ para todo $n \neq m$, es un abierto en la topología producto, por lo que cada G_m resulta ser abierto y, además, denso en Y. Por ser Y un espacio de Baire, se tiene que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \neq \varnothing.$$

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. Por construcción, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \,\mathrm{R}\, x_m$. Definamos, vía recursión, la sucesión $(\overline{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ por

$$\overline{x}_0 = a, \qquad \overline{x}_{n+1} = x_{\min\{m \in \mathbb{N}:\, \overline{x}_n R x_m\}}.$$

Entonces $\overline{x}_n \,\mathrm{R}\, \overline{x}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La prueba es completa. ■

En el teorema anterior muchas otras equivalencias se pueden agregar, véase [215]. Más aun, en el ámbito de nuestro interés, se puede agregar la siguiente: **DC** *es equivalente a: cualquier espacio Čech-completo es un espacio de Baire* (véase la Sección 1.10.2 para la definición de espacios Čech-completos y [189] para esa y otras equivalencias a **DC**).

Hubiese sido altamente deseable contar con una demostración del Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos sin apelar al Axioma de Elecciones Dependientes, pero como vimos en el teorema anterior, ello no es posible. Sin embargo, en el sistema **ZF**, sin ningún axioma adicional, se puede obtener el siguiente resultado:

Teorema 1.13.3. *En el sistema* **ZF***, todo espacio métrico completo separable es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea (X, d) un espacio métrico completo separable y sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión densa en X. Tomemos cualquier sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X, digamos $(G_n)_{n=1}^{\infty}$, y veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Como G_1 es denso en X, el conjunto $V \cap G_1$ es un abierto no vacío y ya que D es denso en X, resulta que $D \cap \big(V \cap G_1\big)$ es no vacío. Sea entonces

$$n_1 = \min\big\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \in V \cap G_1\big\}$$

y defina $y_1 = x_{n_1}$. Hagamos ahora $m_1 = \min\big\{m \in \mathbb{N} :\ U(y_1, m) \subseteq V \cap G_1\big\}$ y pongamos $r_1 = 1/m_1$. Como $U(y_1, r_1)$ es una bola abierta abierta contenida en $V \cap G_1$, entonces $U(y_1, r_1) \cap G_2$ es un abierto no vacío y por la densidad de D, el conjunto $D \cap \big(U(y_1, r_1) \cap G_2\big)$ es no vacío. Como antes defina y_2 y r_2. En general, para todo entero $n \geq 1$, haciendo

$$y_{n+1} = x_{\min\left\{m \in \mathbb{N}:\, x_m \in U(x_n, r_n) \cap G_{n+1}\right\}}$$

$$r_{n+1} = \min\left\{\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{\min\big\{m \in \mathbb{N} :\ B(y_{n+1}, m) \subseteq U(x_n, r_n) \cap G_{n+1}\big\}}\right\},$$

resultará entonces que la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y, por lo tanto, converge a un $y \in V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Esto termina la prueba. ■

Del resultado anterior se traduce que en **ZF** pueden existir espacios métricos completos (por supuesto, no separables) que no son espacios de Baire. De igual forma existen espacios de Hausdorff compacto que no son espacios de Baire. Esto no ocurre en **ZF** + **DC**.

Teorema 1.13.4. *En* **ZF** + **DC** *cualquier espacio de Hausdorff compacto es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff compacto y sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X. Para demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, tomemos un subconjunto abierto no vacío arbitrario V de X y veamos que $V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Sabemos que para cualquier entero $m \geq 1$, $\bigcap_{n=1}^{m} G_n$ es abierto y denso en X, por lo que $V \cap \bigcap_{n=1}^{m} G_n$ es un conjunto abierto no vacío. Sea

$$Y = \left\{ (n,U) \in \mathbb{N} \times \tau_* : \overline{U} \subseteq V \cap \bigcap_{n=1}^{m} G_n \right\},$$

donde $\tau_* = \tau \setminus \{\varnothing\}$. Sobre Y defina la siguiente relación binaria R:

$$(n,U) \mathrel{\mathrm{R}} (m,W) \qquad \Leftrightarrow \qquad n < m \quad \text{y} \quad \overline{W} \subseteq U.$$

Se sigue que R cumple (DC-1) y, por lo tanto, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \mathrel{\mathrm{R}} y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que, para $y_n = (m_n, U_n)$, tengamos la siguiente relación de inclusión decreciente:

$$\overline{U}_{n+1} \supseteq U_n \supseteq \cdots \supseteq \overline{U}_2 \supseteq U_1.$$

Puesto que la familia de compactos $(\overline{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ posee la propiedad de intersección finita, se sigue que existe al menos un $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. ■

AC$_\omega$ es estrictamente más débil que **DC** y éste último es estrictamente más débil que **AC**. Ya hemos visto que la afirmación: todo espacio métrico completo es un espacio de Baire, es equivalente al Axioma de Elecciones Múltiples, sin embargo, la afirmación: todo espacio de Hausdorff compacto es un espacio de Baire no se sabe si implica el Axioma de Elecciones Múltiples. Lo que si se conoce es que si a la afirmación anterior se le añade que todo producto numerable de espacios de Hausdorff compactos es compacto, entonces se cumple **DC** (véase, [215], p. 105).

1.14. El Teorema de Categoría de Baire y el Axioma de Martin

Si se asume la Hipótesis del Continuo, entonces se puede construir una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos y densos de $\mathbb{R}$ cuya cardinalidad es $2^{\aleph_0}$ y tal que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ no es denso en $\mathbb{R}$. En efecto, basta con tomar $\mathcal{C} = \{G_x : x \in G\}$ para comprobar que $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} G_x = \varnothing$, donde cada $G_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Es decir, bajo el imperio de la Hipótesis del Continuo sólo es posible tomar colecciones a lo sumo numerables de subconjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$ para que su intersección sea densa. Esto conduce a la pregunta: si la Hipótesis de Continuo no es verdadera, es decir, si se acepta que existen cardinales entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$, ¿se puede obtener un Teorema de Categoría de Baire para $\mathbb{R}$ para cualquier colección de subconjuntos abiertos y densos de cardinalidad κ, donde $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$? La respuesta es sí si al sistema **ZFC** se le añade un nuevo axioma denominado el Axioma de Martin. El llamado Axioma de Martin (AM) es un enunciado de tipo combinatorio que afirma que para cualquier cardinal κ con $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$ y para cualquier familia teniendo a lo sumo κ subconjuntos "densos" en un conjunto X con un orden parcial que posee una propiedad llamada ccc, existe un subconjunto del conjunto X que es genérico en el sentido de intersectar a todos esos subconjuntos densos. Para abordar la presentación del Axioma de Martin debemos definir lo que es: ccc, subconjunto denso en un conjunto parcialmente ordenado y filtro genérico.

Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

(1) Una **anticadena** en X es un subconjunto $A \subseteq X$ tal que cualesquiera que sean $p,q \in A$ con $p \neq q$, ellos son incompatibles, es decir, no existe $r \in X$ para el cual $r \preccurlyeq p$ y $r \preccurlyeq q$. El orden parcial $(X, \preccurlyeq)$ cumple la **condición de cadena numerable**, abreviado **ccc**, si toda anticadena en X es numerable.

(2) Un subconjunto D de X es **denso en** X si, para cada $p \in X$, existe un $q \in D$ tal que $q \preccurlyeq p$.

(3) Un **filtro sobre** X es un conjunto $G \subseteq X$ tal que:

a) Para cualesquiera $p, q \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \preccurlyeq p$ y $r \preccurlyeq q$ (todo par de elementos en G son compatibles en G).

b) Para todo $p \in G$ y para todo $q \in X$ $(p \preccurlyeq q \ \Rightarrow \ q \in G)$ (G se "traga" todo lo que está arriba de cualquier elemento suyo).

Sea κ un número cardinal. El **Axioma de Martin MA**(κ) es el enunciado: *Si* $(X, \preccurlyeq)$ *es un conjunto (no vacío) parcialmente ordenado que satisface la* ccc *y si* $\mathcal{D}$ *es una colección conteniendo a lo sumo* κ *subconjuntos densos en* X*, entonces existe un filtro* $\mathcal{D}$***-genérico*** G *sobre* X*, esto es,* G *es un filtro sobre* X *tal que* $G \cap D \neq \varnothing$ *para todo* $D \in \mathcal{D}$.

El siguiente teorema, el cual generaliza el Teorema de Categoría de Baire para $\mathbb{R}$, es el resultado principal de esta sección (véase, T. Jech [240], p. 277).

Teorema 1.14.1 (κ-Teorema de Categoría de Baire). *Sea* κ *un numero cardinal. Si* **MA**(κ) *es verdadero, entonces la intersección de cualquier colección* $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *de subconjuntos abiertos y densos en* $\mathbb{R}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Prueba. Sea κ un cardinal y suponga que **MA**(κ) es verdadero. Para cada $\alpha < \kappa$, sea U_α un subconjunto abierto y denso en $\mathbb{R}$. Vamos a demostrar que $\left(\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha\right) \cap I \neq \varnothing$ para cualquier intervalo abierto y acotado $I \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto (no vacío)

$$X \ = \ \left\{p \subseteq \mathbb{R} \ : \ p \text{ es no vacío, abierto y con } \ \overline{p} \subseteq I\right\},$$

y dotémoslo del siguiente orden parcial: para cada $p, q \in X$

$$p \ \preccurlyeq \ q \quad \text{si, y sólo si,} \quad p \ \subseteq \ q.$$

Veamos que $(X, \preccurlyeq)$ satisface la ccc. En efecto, sea $\mathcal{C}$ una anticadena en X y observe que cualquier par de elementos en $\mathcal{C}$ son disjuntos. En efecto, sean $p, q \in \mathcal{C}$ y suponga que $p \cap q \neq \varnothing$. Definiendo $r = p \cap q$ tendríamos que $r \in X$ y se cumpliría que $r \preccurlyeq p$ y $r \preccurlyeq q$ lo que violaría la definición de anticadena. Por otro lado, como cada intervalo abierto de $\mathcal{C}$ contiene un racional y como dicha familia es disjunta, resulta que ella es numerable. Por esto, X satisface la ccc. Definamos ahora la colección $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde

$$D_\alpha \ = \ \left\{p \in X \ : \ \overline{p} \subseteq U_\alpha\right\}$$

para cada $\alpha < \kappa$. Afirmamos que cada D_α es denso en X. En efecto, sea $p \in X$. Como U_α es denso en $\mathbb{R}$, resulta que $p \cap U_\alpha \neq \varnothing$ y como $\overline{p} \subseteq I$, entonces del hecho de que U_α también es abierto, nos permite escoger un abierto no vacío $p_1 \subseteq p$ tal que $p_1 \subseteq U_\alpha$. Esto finaliza la prueba de que D_α es denso en X. Sea G el filtro $\mathcal{D}$-**genérico** obtenido usando el Axioma de Martin. Puesto que G es un filtro, tenemos que $\bigcap\{\overline{p} : p \in G\}$ es no vacío, y está contenido en cada U_α puesto que $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$. Esto termina la prueba del teorema. ■

¿Cuán grande debe ser el cardinal κ para el cual **MA**(κ) sea verdadero? El resultado anterior permite concluir que κ no puede sobrepasar a $2^{\aleph_0}$ tal como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 1.14.1. *Si* κ *es un cardinal par el cual* **MA**(κ) *es verdadero, entonces* $\kappa < 2^{\aleph_0}$*. En particular,* **MA**$(\aleph_1)$ *implica que* $2^{\aleph_0} > \aleph_1$*, la negación de la Hipótesis del Continuo.*

Prueba. Para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $G_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Si ocurriera que $2^{\aleph_0} \leq \kappa$, entonces $\mathcal{O} = \{G_x : x \in \mathbb{R}\}$ sería una colección de subconjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$ con $\text{card}(\mathcal{O}) \leq \kappa$ cuya intersección es vacía, lo que, por supuesto, contradice el Teorema 1.14.1. ■

El corolario anterior justifica plenamente la siguiente definición.

Definición 1.14.1. *El **Axioma de Martin** ($\mathbf{MA}$) es el enunciado: $\mathbf{MA}(\kappa)$ es verdadero para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$.*

Sea $\kappa < 2^{\aleph_0}$. El **κ-Teorema de Categoría de Baire para** $\mathbb{R}$ es la afirmación: *la intersección de cualquier colección $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de subconjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$*. El Teorema 1.14.1 nos dice entonces que:

Corolario 1.14.2. $\mathbf{MA}$ *implica el κ-Teorema de Categoría de Baire para $\mathbb{R}$, para cualquier $\kappa < 2^{\aleph_0}$.*

Teorema 1.14.2. *La Hipótesis del Continuo implica el Axioma de Martin* $\mathbf{MA}$.

Prueba. Sea $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$. Asumiendo que la Hipótesis del Continuo es verdadera, resulta que $\kappa = \aleph_0$. Suponga entonces que $(X, \preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de subconjuntos densos en X. Mostraremos ahora la existencia de un filtro $\mathcal{D}$-genérico G sobre X. En efecto, sea $p_0 \in X$. Como D_1 es denso en X, existe un $q \in D_1$ tal que $p \preccurlyeq p_0$. Defina $G_1 = \{q \in X : q \preccurlyeq p_0 \text{ y } q \in D_1\}$. Como $G_1 \neq \varnothing$, seleccione $p_1 \in G_1$ y use la densidad de D_2 para hallar un $q \in D_2$ tal que $q \preccurlyeq p_1$. Defina, como antes, $G_2 = \{q \in X : q \preccurlyeq p_1 \text{ y } q \in D_2\}$. De nuevo, como G_2 es no vacío, escoja $p_2 \in G_2$. Continuando con esta receta, se obtiene una sucesión $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ en X tal que $p_0 \succcurlyeq p_1 \succcurlyeq p_2 \succcurlyeq \cdots$. Sea G el filtro generado por $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, es decir,

$$G = \big\{q \in X : p_n \preccurlyeq q \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\big\}.$$

Es fácil verificar que G es un filtro y como, por construcción, $G \cap D_n \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que G es $\mathcal{D}$-genérico G sobre X y termina la prueba. ■

Hay que hacer notar que la demostración del resultado anterior no utiliza la hipótesis de que el conjunto parcialmente ordenado $(X, \preccurlyeq)$ cumpla la ccc. Esta hipótesis, aunque no es necesaria en el caso numerable, si lo es para cualquier otro caso donde $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$.

Corolario 1.14.3 (Rasiowa-Sikorski). $\mathbf{MA}(\aleph_0)$ *es verdadero.*

Algunos hechos importantes que nos interesa destacar referente al Axioma de Martin son los siguientes:

(a) El Axioma de Martin es consistente con la negación de la Hipótesis del Continuo, es decir, si **ZFC** es consistente, entonces también lo es $\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Esto fue demostrado por Solovay y Tennenbaum en 1971 (véase, [240]). Por este motivo, **MA** puede ser pensado como una generalización de la Hipótesis del Continuo.

(b) Otra de las versiones conocidas del Axioma de Martin es la siguiente. **MA** es equivalente a la afirmación: "*ningún espacio de Hausdorff compacto con la* ccc *puede ser cubierto por una colección de conjuntos nunca-densos cuya cardinalidad sea menor que* $2^{\aleph_0}$".

Si uno se pregunta por qué en la definición del Axioma de Martin no se incluye a $2^{\aleph_0}$, la respuesta es que $\mathbf{MA}(2^{\aleph_0})$ es falsa. En efecto, si $\mathbf{MA}(2^{\aleph_0})$ fuese verdadera, entonces podemos considerar al espacio de Hausdorff compacto $X = [0, 1]$, el cual es separable y, por consiguiente, satisface la ccc. Como X no posee puntos aislados, todos sus puntos son nunca-densos y así, X es la unión de $2^{\aleph_0}$ puntos, lo que es imposible por (b). La demostración de (b) se puede ver, por ejemplo, en [179].

Para finalizar, debemos decir que el Axioma de Martin posee importantes e interesantes consecuencias, véase [240]. Por ejemplo:

Para cada $\kappa < 2^{\aleph_0}$, $\mathbf{MA}(\kappa)$ implica que la σ-álgebra Σ de los subconjuntos medibles-Lebesgue de $\mathbb{R}$ es κ-completa y la medida de Lebesgue λ es κ-aditiva, es decir, si $\{E_\alpha \in \Sigma : \alpha < \kappa\}$ es una familia disjunta dos a dos, entonces

$$\lambda\Big(\bigcup_{\alpha<\kappa} E_\alpha\Big) = \sum_{\alpha<\kappa} \lambda(E_\alpha).$$

1.15. El Teorema de Categoría de Baire y conjuntos de Luzin

Los conjuntos de Luzin al igual que los conjuntos de Bernstein son, en efecto, conjuntos muy raros. Se trata de conjuntos que son ambos no numerables pero los de Luzin tienen la propiedad que al ser intersectado con cualquier conjunto de primera categoría se obtiene un conjunto a lo más numerable. Su existencia fue establecida por primera vez por P. Mahlo en 1913. Un año después, N. Luzin obtiene el mismo resultado pero con un desarrollo mucho más amplio siendo esa, tal vez, la razón por la cual a tales conjuntos se le llama conjuntos de Luzin. Su existencia se prueba añadiéndole la Hipótesis del Continuo (**CH**) a la usual Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel aderezada con el Axioma de Elección, **ZFC** más el Teorema de Categoría de Baire.

Recordemos que ω_1 denota el primer ordinal no numerable cuya cardinalidad es $\aleph_1$ (= el primer cardinal no numerable). Como se sabe, Cantor había demostrado que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, donde $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad de $\mathbb{R}$ y que $\mathfrak{c} > \aleph_0$. El contenido de la Hipótesis del Continuo, proclamada por Cantor, consiste en afirmar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Definición 1.15.1. *Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se llama **conjunto de Luzin** si*

(a) *X es no numerable, y*

(b) *para cualquier conjunto de primera categoría $A \subseteq \mathbb{R}$,* $\operatorname{card}(X \cap A) \leq \aleph_0$.

Veamos ahora por qué la existencia de conjuntos de Luzin se sustenta sobre la Hipótesis del Continuo en combinación con el Teorema de Categoría de Baire.

Teorema 1.15.1 (Mahlo-Luzin). *La Hipótesis del Continuo implica la existencia de un conjunto de Luzin.*

Prueba. Sea $\mathcal{N}_d$ la familia de todos los conjuntos no vacíos, cerrados y nunca-densos en $\mathbb{R}$. Observe que, si denotamos por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$ las familias de todos los subconjuntos cerrados y todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, respectivamente, entonces

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}(\mathcal{O}) = \operatorname{card}(\mathcal{U}_\infty) \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

donde $\mathcal{U}_\infty$ consiste de todas las uniones numerables de intervalos abiertos con extremos racionales. De esto se sigue que $\operatorname{card}(\mathcal{N}_d) \leq \mathfrak{c}$. Por otro lado, puesto que para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x\}$ pertenece a $\mathcal{N}_d$, entonces $\operatorname{card}(\mathcal{N}_d) > \aleph_0$ y, así, la Hipótesis del Continuo nos garantiza que $\operatorname{card}(\mathcal{N}_d) = \mathfrak{c} = \aleph_1$. Esto permite escribir a $\mathcal{N}_d$ en la forma $\mathcal{N}_d = \{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Puesto que $F_\alpha \neq \mathbb{R}$ para todo $\alpha < \omega_1$, uno comienza eligiendo, arbitrariamente, un $F_1 \in \mathcal{N}_d$ y un $x_1 \notin F_1$. Vamos usar inducción transfinita para construir nuestro conjunto. En efecto, sea $\xi < \omega_1$ y supongamos que hemos elegido x_β para $\beta < \xi$ de tal manera que para cualesquiera $\beta < \alpha < \xi$ se tenga que $x_\beta \notin F_\alpha$. Veamos cómo obtenemos x_ξ. Consideremos el conjunto

$$X_\xi = \Big(\bigcup_{\alpha<\xi} F_\alpha\Big) \cup \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$$

y observemos que por ser X_ξ de primera categoría en $\mathbb{R}$, el Teorema de Categoría de Baire no garantiza que $X_\xi \neq \mathbb{R}$ y, entonces, lo que hacemos es elegir un $x_\xi \in \mathbb{R} \setminus X_\xi$. Esto finaliza la construcción de $(x_\xi)_{\xi<\omega_1}$. Definamos ahora

$$X = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}.$$

Afirmamos que X es un conjunto de Luzin. En efecto:

(a) X es no numerable, pues si $\alpha < \xi < \omega_1$, entonces $x_\alpha \neq x_\xi$ y, en consecuencia, $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$.

(b) Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ un conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}$, donde cada A_n es cerrado y nunca-denso. Puesto que $\mathcal{N}_d$ es la familia de todos los conjuntos cerrados nunca-densos de $\mathbb{R}$, resulta que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $F_\alpha \in \mathcal{N}_d$ tal que $A_n = F_\alpha$. Por construcción, sabemos que

$$X \cap A_n \;=\; X \cap F_\alpha \;\subseteq\; \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$$

y como éste último conjunto es numerable, entonces tenemos que $X \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \cap A_n$ es numerable.

Esto termina la prueba. ■

Comentario Adicional 1.15.7 (1) La existencia de un conjunto de Luzin implica la existencia de un conjunto de Luzin denso en $\mathbb{R}$. En efecto, si X es un conjunto de Luzin en $\mathbb{R}$, entonces $X \cup \mathbb{Q}$ también es un conjunto de Luzin en $\mathbb{R}$ el cual es denso en $\mathbb{R}$. Esta observación combinada con el Teorema 2.2.38 permite concluir que *la Hipótesis del Continuo combinada con el Teorema de Categoría de Baire implican la existencia de un conjunto de Luzin denso en* $\mathbb{R}$.

(2) Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se llama **conjunto de Sierpiński** si X es no numerable y su intersección con cualquier conjunto de medida de Lebesgue cero es a lo más numerable. Similar al caso de la existencia de conjuntos de Luzin, la existencia de conjuntos de Sierpiński también se demuestra asumiendo la Hipótesis del Continuo. Como un caso particularmente interesante se demuestra que tales conjuntos son no-medibles según Lebesgue. De hecho, ningún subconjunto no numerable de un conjunto de Sierpiński puede ser medible Lebesgue. ([253], Theorem 5, p. 169).

(3) Es imposible probar la existencia de conjuntos de Luzin en la teoría **ZFC**, (véase, por ejemplo, [253], p. 159-160). Más aun, aceptar el Axioma de Martin más la negación de la Hipótesis del Continuo (**MA +** $\sim$ **CH**) implica la no existencia de conjuntos de Luzin (así como la no existencia de conjuntos de Sierpiński) en $\mathbb{R}$. Esto se debe fundamentalmente al hecho de que bajo el Axioma de Martin cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ cuya cardinalidad es menor que $\mathfrak{c}$ es tanto de primera categoría así como de medida de Lebesgue cero (véase, [313], p. 205).

(4) Si pensamos a $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, que denotaremos por $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$, resulta que en este caso $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ es de dimensión infinita. Veamos esto. Si la dimensión de $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ fuese finita, digamos n, entonces $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ sería isomorfo a $\mathbb{Q}^n$: en efecto, si $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$, entonces asociando a cada $x \in \mathbb{R}_\mathbb{Q}$ la única n-upla $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ bajo la cual $x = q_1 r_1 + \cdots + q_n r_n$ se establece el isomorfismo de $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Q}^n$, de donde se sigue que la cardinalidad de $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ es la misma que la de $\mathbb{Q}^n$, lo cual no es posible porque el cardinal de $\mathbb{Q}^n$ es el mismo que el de $\mathbb{Q}$ (igual a $\aleph_0$) que es estrictamente inferior al de $\mathbb{R}$. Otra forma de ver que la dimensión de $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ es infinita es considerar las raíces de los enteros primos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ que constituyen un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$. Un hecho curioso e interesante, demostrado por R. B. Darst en [109], es la existencia de una base de Hamel en $\mathbb{R}$ (como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$) que es un conjunto de Luzin.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CATEGORÍA DE BAIRE

Hemos dividido las aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire en dos grandes bloques: el primer bloque abarca sólo la existencia de ciertas clases de funciones en un espacio de Baire específico y de otros objetos que pudiéramos pensar como muy raros por el hecho de que ellos son difíciles de visualizar y, por lo general, también muy difíciles de construir pero que, a pesar de esa naturaleza un tanto exótica, ellos constituyen "casi todos" los elementos en el espacio de Baire bajo consideración. En el segundo bloque nos deleitaremos al presentar ciertas aplicaciones en el ámbito de los espacios de Banach incluyendo algunas de las aplicaciones que son consideradas clásicas tales como los Teoremas de Acotación Uniforme, de la Aplicación Abierta, el de Vitali-Hahn-Saks, etc., así como otras de data más recientes como son el Teorema Grande de Namioka, los juegos de Banach-Mazur y de Choquet, operadores hipercíclicos, etc.

2.1. Galería de monstruos: funciones y otros objetos raros pero abundantes

Puede acontecer que en algún momento, en el transcurso de una investigación, uno se encuentra con un problema que, a primera vista, parece no tener solución y sin embargo, suele existir un conjunto increíblemente abundante de soluciones a dicho problema. En algunos casos, esos conjuntos que podemos llamarlos conjuntos extraños, pueden o no tener una estructura lineal e interesa saber si es posible que dentro de ellos exista algún subespacio vectorial (de alguna dimensión). En la penúltima sección de este capítulo expondremos algunos fantásticos resultados (sin demostración) que han sido obtenidos en esa dirección. Artículos recientes tales como [17, 18, 196, 32] y las referencias allí citadas, exhiben, además de los ejemplos que aquí presentamos, otros tipos de conjuntos de funciones extrañas que poseen subespacios vectoriales. Por lo pronto, en esta sección mostraremos algunos ejemplos de, no sólo de la existencia de ciertos monstruos que se exhiben en nuestra galería, sino de una propliferación increíble de ellos. Algunos tipos de conjuntos de funciones con propiedades muy particulares, y que son muy difíciles de visualizar, constituirán fundamentalmente los elementos de nuestra galería.

En lo que sigue, $C[a,b]$ denotará el espacio métrico completo de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son continuas en el intervalo $[a,b]$, dotado de la métrica del supremo d_∞, esto es,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x) - g(x)\big|, \quad \text{para todo } f,g \in C[a,b].$$

$C[a,b]$ resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar. Con mucha frecuencia $C[a,b]$ también será pensado como un espacio Banach con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|, \quad f \in C[a,b].$$

El espacio $(C[a,b],d_\infty)$ posee una estructura tan rica que con ella es posible producir resultados tan impresionantes que han asombrado a propios y a extraños. Comencemos por recordar dos maravillosos e importantes teoremas obtenidos por K. Weierstrass sobre la densidad de los polinomios algebraicos y los polinomios trigonométricos en $C[a,b]$ y $\widetilde{C}[0,2\pi]$ respectivamente, quien, para ese momento contaba con 70 años de edad. En lo que sigue $P[a,b]$ denotará el conjunto (de hecho, un subespacio vectorial) de todos los *polinomios algebraicos* en $C[a,b]$, es decir,

$$P[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n[a,b],$$

donde $P_n[a,b]$ es el subespacio lineal (de dimensión finita) generado por $\{1,x,\dots,x^n\}$. Observemos que $p \in P[a,b]$ si, y sólo si, existen un $n \in \mathbb{N}$ y escalares $a_0,a_1,\dots,a_n$ tal que $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Decimos que el *grado* de p, $\text{grado}(p)$, es n si $a_n \neq 0$ en la representación anterior. Una consecuencia inmediata del siguiente resultado es que $P[a,b]$, siendo un subespacio lineal de dimensión infinita de $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$, nunca es norma-cerrado en $C[a,b]$.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Aproximación de Weierstrass (A)). *Sea $f \in C[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio algebraico p en $P[a,b]$ tal que*

$$\big|f(x) - p(x)\big| < \varepsilon$$

para todo $x \in [a,b]$, esto es, $\| f - p \|_\infty < \varepsilon$.

Casi cualquier libro sobre "Análisis Real" en una variable contiene una demostración del resultado de Weierstrass. Sin embargo, una detallada y agradable exposición del Teorema de Aproximación de Weierstrass y algunas de sus variantes se puede leer, por ejemplo, en el artículo [353] escrito por A. Pinkus.

Consideremos el subespacio de $C[0,2\pi]$ definido por

$$\widetilde{C}[0,2\pi] = \big\{ f \in C[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi)\big\}.$$

Este espacio puede ser pensado, y de hecho así lo consideraremos, como la restricción al intervalo $[0,2\pi]$ de todas las funciones 2π-periódicas en $C(\mathbb{R})$. Denotemos por $T_n[0,2\pi]$ el subespacio vectorial de dimensión finita de todos los *polinomios trigonométricos* generado por $\{1,\text{sen}(x),\cos(x),\dots,\text{sen}(nx),\cos(nx)\}$. Como antes,

$$\mathcal{P}_T[0,2\pi] = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n[0,2\pi]$$

designa el subespacio vectorial de $\widetilde{C}[0,2\pi]$ formado por todos los polinomios trigonométricos en $\widetilde{C}[0,2\pi]$.

Teorema 2.1.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass (T)). *Sea $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico t en $\mathcal{P}_T[0,2\pi]$ tal que*

$$\big| f(x) - t(x) \big| < \varepsilon$$

para todo $x \in [0,2\pi]$, o lo que es lo mismo, $\| f - t \|_\infty < \varepsilon$.

Estos dos resultados resultan ser equivalentes tal como se demuestra en Pinkus [353], pág. 14-16.

2.1.1. ‖ ► Funciones continuas nunca diferenciables

El Teorema de Aproximación de Weierstrass establece que el conjunto $P[0,1]$, de todos los polinomios algebraicos en $[0,1]$, es norma-denso en $C[0,1]$. Esto nos dice que cualquier función $f \in C[0,1]$ se puede aproximar, en la norma, por un polinomio algebraico $p \in P[0,1]$ tanto como se desee, es decir, dado $\varepsilon > 0$ y cualquier $f \in C[0,1]$, existe $p \in P[0,1]$ tal que $\| f - p \|_\infty < \varepsilon$. Consideremos ahora $C^\infty[0,1]$, el espacio de todas las funciones continuas infinitamente diferenciables en $[0,1]$. Puesto que $P[0,1] \subsetneqq C^\infty[0,1] \subsetneqq C[0,1]$, resulta que $C^\infty[0,1]$ también es norma-denso en $C[0,1]$ y, por lo tanto, cualquier función en $C[0,1]$ se puede aproximar, en la norma, por una función en $C^\infty[0,1]$. Por supuesto, $C^\infty[0,1]$, al igual que $P[0,1]$, son subespacios lineales de $C[0,1]$ que nunca son cerrados en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Siguiendo en la misma dirección de aproximación en la norma, vamos a demostrar un poco más abajo una afirmación que es casi opuesta a la anterior, es decir, demostraremos que cualquier función en $C[0,1]$ también se puede aproximar, en la norma, por una función continua que no posee derivada en ningún punto de $[0,1]$. Recordemos que una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es *nunca diferenciable* en $[0,1]$ si en ningún punto de $[0,1]$ ella posee derivada finita. ¿Qué tan grande, en el sentido de categoría, es el conjunto de todas las funciones continuas nunca diferenciables en $[0,1]$?

En esta sección abordaremos, por medio del Teorema de Categoría de Baire, una solución al problema de la *existencia de abundantes funciones continuas nunca diferenciables*: los primeros monstruos en nuestra Galería. Debemos recordar que en los cursos de Cálculo elemental, la mayoría de las funciones continuas que usualmente se utilizan son, por lo general, diferenciables en casi todos los puntos de su dominio, salvo algunas excepciones donde los puntos en los cuales la función no lo es constituye un conjunto a lo más numerable. Cabe entonces concebir la idea, lo que es enteramente razonable, de que *si una función es continua, entonces el conjunto de puntos donde ella no es diferenciable es insignificante en algún sentido*. Si tal idea tuviera alguna posibilidad de ser cierta, podríamos intentar caracterizar el conjunto de los puntos donde una función continua es diferenciable. Con Bolzano, Weierstrass y otros matemáticos se sepultó definitivamente todas las esperanzas que había de caracterizar tales conjuntos. La primera demostración de la existencia de una función continua nunca diferenciable parece provenir del matemático checo Bernard Placidus Tohann Nepomuk Bolzano (1781-1848), un sacerdote contestatario que a pesar de haber enseñado por pocos años en la Universidad de Praga, le prohibieron seguir con sus enseñanzas por expresar puntos de vistas que no eran aceptables por las autoridades de ese momento. Su trabajo matemático pasó casi desapercibido y nunca recibió el reconocimiento que merecía salvo mucho tiempo después de su muerte. Bolzano era contemporáneo de Weierstrass. Además de dar definiciones similares de límite, derivada, continuidad y convergencia, también hizo valiosas contribuciones a la lógica y la teoría de conjuntos (véase, por ejemplo, [60]). Bolzano inventó, alrededor del año 1830, un procedimiento para la construcción de funciones continuas nunca diferenciables. De hecho, él solamente afirmaba la no existencia de la derivada en un conjunto denso de puntos. La historia detrás de ese ejemplo está acompañada de circunstancias desafortunadas. En efecto, el manuscrito de Bolzano con el nombre "*Functionenlehre*", escrito alrededor del año 1830 y que contenía la susodicha función, no fue publicado sino un siglo después, en 1930. La construcción de Bolzano es muy distinta a otras construcciones de funciones nunca diferenciables en el sentido que ella se hace a través de un procedimiento geométrico en lugar de usar series convergentes. La tesis de Johan Thim [424] contiene detalladamente la construcción de Bolzano así como el estudio de otras 17 funciones nunca diferenciables.

Es un hecho establecido que, dado cualquier conjunto numerable D de $\mathbb{R}$, se puede construir una función continua sobre $\mathbb{R}$ de modo tal que ella deja de ser diferenciable precisamente sobre dicho conjunto. En efecto, sea $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

Podemos tomar, por ejemplo, $x_n = 1/2^n$ para $n = 1, 2, \dots$ Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideremos la función $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n h_x(d_n)$$

es continua excepto en los puntos de D y entonces la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

es continua, acotada y, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, deja de ser diferenciable exactamente en los puntos de D.

Imaginarse la gráfica una función continua que no sea diferenciable en ningún punto de su dominio es una tarea extremadamente difícil. Lagrange, en 1777, era uno de los que creían que toda función continua era diferenciable excepto para ciertos valores particulares. Compartiendo la misma opinión de Lagrange sobre este punto de vista se encontraba, el también matemático, Ampere y algunos otros. Bernard Riemann, sin embargo, sostenía puntos de vista diferente para ciertas funciones continuas representadas por series. De hecho, en una conferencia en 1861, él afirmó, como conjetura, que la función R definida por

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$$

era continua pero nunca diferenciable. La continuidad es, por supuesto, una consecuencia fácil del M-test de Weierstrass, pero la no-diferenciabilidad, si tal cosa es posible, no es trivial. Riemann jamás presentó una prueba de su conjetura. Sin embargo, la afirmación de Riemann accionó la curiosidad y la duda de K. Weierstrass quien, en un intento por demostrarla, se encontró con su primer ejemplo de una función continua nunca diferenciable. Pero Weierstrass no era el único que dudaba de la afirmación de Riemann. En 1916 Hardy [206] demostró que R no era diferenciable en todos los múltiplos irracionales de π, pero que era diferenciable en algunos números racionales. Después de un poco más de cincuenta años, J. Gerver ([177], [178]) resolvió completamente el problema demostrando, en primer lugar, que R es efectivamente diferenciable en todos los múltiplos racionales de π de la forma $(2p+1)\pi/(2q+1)$, donde p y q son enteros y luego probando que R no es diferenciable en ningún punto de la forma $2p\pi/(2q+1)$ o $(2p+1)\pi/2q$.

Es un hecho aceptado hoy en día por la comunidad matemática que la función continua, pero nunca diferenciable, creada por K. Weierstrass, fue el primer ejemplo contundente de una tal función que apareció por primera vez publicada en una revista arbitrada de matemáticas (en el año de 1875), aunque algunos ya conocían de su existencia pues ella fue dada a conocer por el propio Weierstrass el 18 de Julio de 1872 en una conferencia impartida en la Academia Real de Ciencias en Berlin. Sin embargo, Allan Pinkus nos cuenta que Weierstrass dio a conocer su función en un salón de clases en 1861 (ver, Allan Pinkus, *Weierstrass and Approximation Theory*). En el Volumen 2 de su *Mathematische Werke*, publicado en 1895, aparece el artículo de Weierstrass donde demuestra que la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

es continua pero nunca diferenciable, siempre que $0 < a < 1$, $ab > 1 + (3\pi/2)$ y b es un entero impar > 1. Cincuenta y cinco años más tarde, en 1916, G. H. Hardy prueba que la función de Weierstrass W sigue siendo continua y nunca diferenciable si además de la condición $0 < a < 1$ se exige que $ab \geq 1$, con $b > 1$, pero sin pedirle que sea un entero impar.

El descubrimiento de funciones continuas nunca diferenciables conmocionó a la comunidad matemática de la época que incluso, matemático de la talla de Charles Hermite (1822-1901), en una carta dirigida a Stieltjes fechada el 20 de Mayo de 1893, le decía:

> "*Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des functions continue qui n'ont pas de dérivé*".

("Me alejo con horror y temor de esta plaga lamentable de las funciones continuas que no poseen derivadas").

Aunque hoy en día existen variados ejemplos de funciones continuas nunca diferenciables, (véase, por ejemplo, Johan Thim [424]), encontrar una de ellas es casi una proeza y, por supuesto, una curiosidad. Sin embargo, a primera vista pudiera pensarse que este tipo de funciones son excepcionales, que es algo patológico y, de hecho, hasta hace un poco más de cien años esa era la opinión expresada por la mayoría de los matemáticos de la época; pero resulta, y este es lo que fundamentalmente debemos resaltar, que la existencia de tales funciones constituye, desde el punto de vista topológico, la regla y no la excepción. En efecto, el conjunto de tales funciones es tan asombrosamente cuantioso que él constituye un conjunto de segunda categoría, pero, además, su conocimiento es crucial para entender la teoría de los movimientos Brownianos, la teoría de los fractales, la teoría del caos o la teoría de las ondas pequeñas (wavelets), sólo por mencionar algunas de las teorías que hacen uso de ese resultado.

En un artículo de 1929, Hugo Steinhauss [417] propuso el siguiente problema:

> ¿*De qué categoría es el conjunto de todas las funciones continuas nunca diferenciables en el espacio de todas las funciones continuas*?

La respuesta fue dada a conocer en dos artículos diferentes. El primero por Stefan Banach en 1931 [30] y el segundo por S. Mazurkiewicz en 1932 [304]. La prueba que aquí presentamos se debe a J. C. Oxtoby [345].

Denotaremos por $\mathcal{ND}[0,1]$ el conjunto formado por todas las funciones $f \in C[0,1]$ que son *nunca diferenciables*, es decir, que no poseen derivada finita en ningún punto de $[0,1]$. Por el resultado de Weierstrass, $\mathcal{ND}[0,1]$ es no vacío. Lo que resultó ser devastador a las pretensiones de Hermite y los que pensaban como él sobre este punto, fue el siguiente resultado de Banach y Mazurkiewicz.

Teorema 2.1.3 (Banach-Mazurkiewicz). *En el espacio de Banach* $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$, *el conjunto* $\mathcal{ND}[0,1]$ *es residual.*

La demostración del Teorema de Banach-Mazurkiewicz se facilita un poco si tenemos presente el siguiente lema el cual fue observado por primera vez por Lebesgue quien lo usó para dar una demostración más sencilla al primer teorema de aproximación de Weierstrass. Antes necesitaremos recordar la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *Una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es* ***lineal a trozo*** *si existe una partición de $[0,1]$, digamos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, tal que f es lineal en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Lema 2.1.1 (Lebesgue). *El conjunto $\mathrm{C_{LT}}[0,1]$ de todas las funciones continuas lineales a trozos en $[0,1]$ es denso en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.*

Prueba. Sea $f \in C[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada partición $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[0,1]$, donde siempre supondremos que $0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, definamos la función $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, asociada a P_n, por

$$h_n(x) \,=\, f(t_i) + \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}\big(f(t_{i+1}) - f(t_i)\big), \quad x \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Claramente $h_n \in \mathrm{CL}[0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$. Lo que queremos demostrar es la existencia de alguna partición P_n, tal que la función h_n, asociada a P_n, satisfaga $\| f - h_n \|_\infty < \varepsilon$. En efecto, como f es uniformemente continua sobre $[0,1]$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in [0,1]$,

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/4.$$

Escojamos una partición $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[0,1]$ de modo que $\text{máx}_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i) < \delta$. Sea $x \in [0,1]$ y fijemos $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in [t_i, t_{i+1}]$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - h_n(x)| &= |f(x) - f(t_i)| \;+\; |f(t_i) \;-\; h_n(t_i)| \;+\; |h_n(t_i) - h_n(x)| \\ &= |f(x) - f(t_i)| \;+\; 0 \;+\; |f(t_i) - h_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f(t_i)| \;+\; 0 \;+\; |f(t_i) - f(t_{i+1})| \\ &< \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Por esto,

$$\| f - h_n \|_\infty \leq \underset{i=0,\ldots,n-1}{\text{máx}} \left(\sup_{x \in [t_i - t_{i+1}]} |f(x) - h_n(x)| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y termina la prueba. ■

Estamos ahora preparado para dar la demostración del Teorema de Banach-Mazurkiewicz.

Prueba del Teorema de Banach-Mazurkiewicz. En primer lugar nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, si $x \in [0, 1 - 1/n]$, entonces $x \leq 1/2$. Si tomamos cualquier $h \in (0, 1 - x)$ para el cual $h \leq 1/2$, entonces el incremento $x + h \in [0,1]$ y, por lo tanto, el cociente

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

siempre está bien definido. Consideremos ahora, para cada entero $n \geq 2$, el conjunto

$$E_n \,=\, \Big\{ f \in C[0,1] : \text{ existe } x \in [0, 1 - 1/n] \text{ tal que, para todo } h \in (0, 1 - x),\ |f(x+h) - f(x)| \leq nh \Big\}.$$

Observe que cualquier función $f \in C[0,1]$ teniendo una derivada lateral a la derecha finita en algún punto de $[0,1)$ pertenece a E_n para algún $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la unión $\bigcup_{n=2}^{\infty} E_n$ contiene a todas las funciones $f \in C[0,1]$ que poseen una derivada lateral a la derecha finita en algún punto de $[0,1)$. Nuestro objetivo inmediato es demostrar que cada E_n es cerrado y nunca-denso en $C[0,1]$. Fijemos un $n \geq 2$.

(1) *E_n es cerrado*. Sea $f \in \overline{E}_n$. Entonces existe una sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ en E_n tal que $f_k \to f$ uniformemente, es decir, $\| f_k - f \|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$. Como cada $f_k \in E_n$,

$$\textit{existe un } x_k \in [0, 1-1/n] \quad \textit{tal que} \quad |f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh, \quad \textit{para todo } h \in (0, 1-x_k). \qquad (\bigstar)$$

Puesto que la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ vive en el compacto $[0,1-1/n]$, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos garantiza la existencia de una subsucesión $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ convergiendo a algún $x \in [0,1-1/n]$. Uno puede suponer que $x_{k_j} \leq x$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $(f_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ la correspondiente subsucesión de $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ satisfaciendo $(\bigstar)$. Entonces, para todo $h \in (0, 1-x)$, h fijo, se tiene que $h \in (0, 1-x_{k_j})$ para todo j, y así,

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x_{k_j}+h)| + |f(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j}+h)| + \\
&\quad + |f_{k_j}(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j})| + |f_{k_j}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| + |f(x_{k_j}) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f(x_{k_j}+h)| + \left\| f - f_{k_j} \right\|_\infty + nh + \left\| f_{k_j} - f \right\|_\infty + \\
&\quad + |f(x_{k_j}) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Observemos ahora que como f es continua tanto en x como en $x+h$ y ya que $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x$, resulta que

$$\lim_{j\to\infty} |f(x+h) - f(x_{k_j}+h)| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{j\to\infty} |f(x_{k_j}) - f(x)| = 0.$$

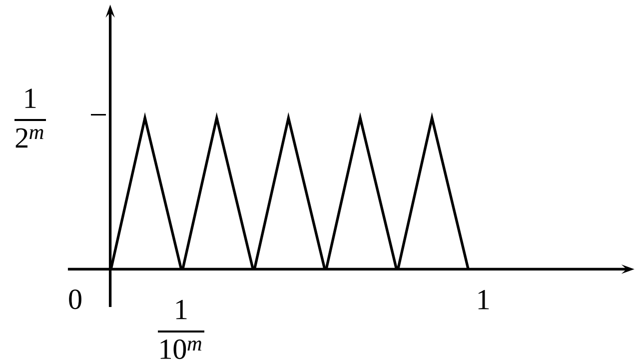
Similarmente, como $\lim_{j\to\infty} \left\| f_{k_j} - f \right\|_\infty \to 0$, se sigue de la desigualdad anterior que cuando $j \to \infty$, uno obtiene que $|f(x+h) - f(x)| \leq nh$. Esto prueba que $f \in E_n$ y así, E_n es cerrado.

(2) *E_n es nunca-denso en $C[0,1]$* o, de manera equivalente,

$$C[0,1] \setminus E_n = \Big\{ f \in C[0,1] : \text{ para todo } x \in [0,1-1/n], \text{ existe } h \in (0,1-x) \text{ tal que } |f(x+h) - f(x)| > nh \Big\}$$

es denso en $C[0,1]$. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea $g \in C[0,1] \setminus E_n$. Queremos demostrar que cualquier bola abierta $U(g,\varepsilon)$ con centro en g y radio ε intersecta a $C[0,1] \setminus E_n$. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, existe un polinomio algebraico $p \in P[0,1]$ tal que $\| g - p \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Construyamos ahora la función continua lineal a trozos $q \in \mathrm{C_{LT}}[0,1]$ del modo siguiente: sea m un entero positivo suficientemente grande de modo que $1/2^m < \varepsilon/2$ y $2 \cdot 5^m > n + \| p' \|_\infty$ y definamos

$$q(x) = \begin{cases} 2 \cdot 5^m x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2 \cdot 10^m} \\[2mm] \dfrac{2}{2^m} - 2 \cdot 5^m x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{2 \cdot 10^m} < x \leq \dfrac{1}{10^m} \\[2mm] q\left(x - \dfrac{k}{10^m} \right), & \text{si} \quad \dfrac{k}{10^m} < x \leq \dfrac{k+1}{10^m}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, 10^m - 1. \end{cases}$$



Entonces $\| q \|_\infty = \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ y para cada $x \in [0,1]$, existe h suficientemente pequeño (dependiendo de x) tal que

$$\left| \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \right| = 2 \cdot 5^m > n + \| p' \|_\infty .$$

Finalmente, definiendo la función $f = p + q$, vemos que $f \in C[0,1]$ y

$$\| g - f \|_\infty \leq \| g - p \|_\infty + \| q \|_\infty < \varepsilon.$$

De lo anterior podemos concluir que, para todo $x \in [0,1]$, existe $h \in (0, 1-x]$ tal que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \geq \left| \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \right| - \left| \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right| > n$$

lo cual significa que $f \in C[0,1] \setminus E_n$ y, por lo tanto, $f \in U(g, \varepsilon) \cap \big(C[0,1] \setminus E_n\big)$. Esto prueba que el conjunto $C[0,1] \setminus E_n$ es denso en $C[0,1]$.

De modo enteramente análogo se prueba que

$$H_n = \Big\{ f \in C[0,1] : \text{ existe } x \in [1/n, 1] \text{ tal que, para todo } h \in (0,x), \ |f(x-h) - f(x)| \leq nh \Big\}$$

es cerrado y que $C[0,1] \setminus H_n$ es denso en $C[0,1]$ para todo $n \geq 2$.

Definamos $F_n = E_n \cup H_n$, y notemos que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, el conjunto $C[0,1] \setminus F_n$ es abierto y denso en $C[0,1]$. Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto

$$G = C[0,1] \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=2}^{\infty} \big(C[0,1] \setminus F_n \big)$$

es un G_δ-denso en $C[0,1]$. Más aún,

$$G \subseteq \mathcal{ND}[0,1].$$

En efecto, una función $f \in C[0,1]$ con derivada finita en algún punto de $[0,1]$ pertenece o bien a algún E_n o algún H_n, es decir, $f \in \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n$. En consecuencia, si $f \in G$, entonces $f \notin \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n$ por lo que dicha función no puede tener derivada finita en ningún punto de $[0,1]$, es decir, $f \in \mathcal{ND}[0,1]$. Por esto, $\mathcal{ND}[0,1]$ resulta ser un conjunto residual en $C[0,1]$ y termina la prueba. ■

¿Qué es lo que realmente hay que destacar, en este caso específico, del Método de Categoría de Baire? Pues bien, uno de los aspectos más importantes y, por supuesto, altamente ilustrativo de lo contundente que resulta el Teorema de Categoría de Baire, es el hecho de que la aplicación de dicho método nos asegura la abundancia de funciones continuas nunca-diferenciables, a pesar de que no se muestra ningún ejemplo concreto de una función de ese tipo, tarea que puede resultar, con frecuencia, un poco arduo y a veces de muy difícil construcción. Sospecho que el lector podrá apreciar, una vez más, lo mágico que resulta dicho método y convencerse de la gran fortaleza del Teorema de Categoría de Baire. Otra prueba del Teorema de Banach-Mazurkiewicz, que posteriormente presentaremos, puede ser llevada a cabo usando un juego topológico muy especial conocido como el juego de Banach-Mazur-Oxtoby, véase el Teorema 2.2.83, página 351.

Recordemos que si $f \in C[0,1]$ y $a \in [0,1)$, entonces

$$D^+ f(a) = \limsup_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{y} \qquad D_+ f(a) = \liminf_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si $D^+ f(a) = D_+ f(a)$, dicho valor común será denotado por $f'_+(a)$. De forma similar se definen $D^- f(a)$, $D_- f(a)$ y $f'_-(a)$. Llamaremos a $D^\pm f(a)$ y $D_\pm f(a)$ las **derivadas de Dini** de f en a.

Es importante destacar que los conjuntos E_n y H_n, definidos en la demostración del Teorema de Banach-Mazurkiewicz, cumplen:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;=\; \Big\{ f \in C[0,1] : \text{ existe } x \in [0,1) \text{ tal que } -\infty \;<\; D_+ f(x) \;\leq\; D^+ f(x) \;<\; +\infty \Big\}$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \;=\; \Big\{ f \in C[0,1] : \text{ existe } x \in (0,1] \text{ tal que } -\infty \;<\; D_- f(x) \;\leq\; D^- f(x) \;<\; +\infty \Big\}.$$

Banach y Mazurkiewicz no probaron exactamente el mismo resultado. Lo que fundamentalmente demuestra Mazurkiewicz es que *el conjunto de las funciones continuas que poseen al menos una derivada lateral acotada en algún punto es de primera categoría*, mientras que Banach va más allá al demostrar un resultado más fuerte: *Las funciones continuas que tienen una derivada de Dini acotada en algún punto de su dominio es de primera categoría*.

Uno puede considerar las funciones en $C[0,1]$ que poseen, en algún punto de $[0,1]$, derivada infinita y seguir obteniendo residualidad en dicho espacio.

Teorema 2.1.4 (Banach). *Para cada $a \in [0,1)$, el conjunto*

$$G(a)^+ = \{ f \in C[0,1] : D^+ f(a) = \infty \},$$

es un G_δ-denso en $\big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$V_n = \Big\{ f \in C[0,1] : f(x) - f(a) > n(x-a) \text{ para algún } x \in (a, a+1/n) \cap [0,1] \Big\},$$

y notemos que $G(a)^+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Veamos que cada V_n es un abierto denso en $C[0,1]$.

• *V_n es abierto.* Fijemos cualquier $f \in V_n$. Por definición, podemos encontrar un punto x en el intervalo $(a, a+1/n) \cap [0,1]$ tal que $f(x) - f(a) > n(x-a)$, y entonces hallar un $\varepsilon > 0$ de modo que también se satisfaga la desigualdad $f(x) - f(a) > n(x-a) + 2\varepsilon$. Si ahora $g \in U(f,\varepsilon)$, tendremos que

$$g(x) - g(a) \geq f(x) - f(a) - 2\varepsilon > n(x-a),$$

lo cual prueba que $g \in V_n$. Esto demuestra que V_n es abierto.

• *V_n es denso*. Sea $g \in C[0,1] \setminus V_n$ de modo que $D^+g(a) < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Elijamos una función $h \in \mathcal{P}[0,1]$ satisfaciendo

$$\|h\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad h'(a) > n - D^+(g)(a).$$

Entonces $D^+(g+h)(a) = D^+(g)(a) + h'_+(a) > n$, por lo que $g+h \in V_n \cap U(g,\varepsilon)$. Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, resulta que V_n es denso en $C[0,1]$. Por el Teorema de Categoría de Baire, tenemos que $G(a)^+$ es un G_δ-denso en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Esto termina la prueba. ■

Similarmente se demuestra que el conjunto

$$G(a)_+ = \big\{ f \in C[0,1] : D_+ f(a) = \infty \big\},$$

es un G_δ-denso en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Comentario Adicional 2.1.1 (1) Un método diferente para obtener funciones en $C[0,1]$ que no poseen derivadas en ningún punto es utilizar el siguiente resultado:

Teorema. *Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, su gráfico*

$$\mathrm{Graf}(f) \;=\; \big\{ (x, f(x)) : x \in [0,1] \big\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Los detalles de la construcción de una $f \in \mathcal{ND}[0,1]$ se pueden ver, por ejemplo, en [163], p. 45-47.

(2) Puesto que $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio métrico completo sin puntos aislados, resulta que, por el Teorema 1.8.8, el conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$ es no numerable. Observe, por otro lado, que $\mathcal{ND}[0,1]$ no es un espacio vectorial por lo que la suma y el producto de dos funciones continuas nunca diferenciables puede que no sean funciones nunca diferenciables. Sin embargo, A. Wachowicz demuestra, en [436], el siguiente resultado:

Teorema de Wachowicz. *En $C[0,1] \times C[0,1]$ los siguientes conjuntos son residuales*:

(1) $\mathcal{ND}[0,1]^+_\pi \;=\; \Big\{ (f,g) \in C[0,1] \times C[0,1] : f+g \text{ es nunca diferenciable} \Big\}$.

(2) $\mathcal{ND}[0,1]^*_\pi \;=\; \Big\{ (f,g) \in C[0,1] \times C[0,1] : f \cdot g \text{ es nunca diferenciable} \Big\}$.

A pesar de no ser un espacio vectorial, ¿puede $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$ contener dentro de sí un subespacio vectorial de alguna dimensión? La pregunta surge a propósito del conocimiento que se tenía de los siguientes hechos: en 1940 B. Levine y D. Milman [293] habían demostrado que *cualquier subespacio norma-cerrado de $C[0,1]$ compuesto únicamente de funciones de variación acotada es de dimensión finita*. Similarmente, V. I. Gurariy [197] había demostrado en el año 1967 que *si X es un subespacio de $C[0,1]$ de dimensión infinita y cualquier función en X es diferenciable en cualquier punto de $(0,1]$, entonces X contiene una copia isomórfica de c_0*. Posteriormente, en 1991, el mismo Gurariy [199] *construyó, en $C[0,1]$, un subespacio de dimensión infinita conteniendo sólo funciones nunca diferenciables (excepto, por supuesto, la función idénticamente cero)*. Más aun, un resultado de Banach-Mazur (ver, [29]) establece que $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es *universal* para la clase de todos los espacios de Banach separables de dimensión infinita; es decir,

Teorema Universal de Banach-Mazur. *Dado cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ separable y de dimensión infinita X, existe un subespacio norma-cerrado Y de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ que es linealmente isométrico a X .*

Uno de los resultados más fascinante en esta dirección producto de la combinación de los trabajos de Gurariy y el Teorema Universal de Banach-Mazur se obtuvo en 1995, cuando Luis Rodríguez Piazza [377] demuestra que el subespacio Y de $C[0,1]$, en el Teorema Universal de Banach-Mazur, se puede elegir de modo que cada $f \in Y$, $f \neq 0$, sea nunca diferenciable.

Teorema de Rodríguez Piazza. *Cualquier espacio de Banach* ***separable*** *$(X, \|\cdot\|)$ es linealmente isométrico a un subespacio norma-cerrado Y de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ tal que cualquier función distinta de cero en Y es nunca diferenciable*.

(3) Recordemos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama de **variación acotada** si

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \;:\; P \in \mathcal{P} \right\} < \infty,$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las particiones $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ de $[a,b]$. Fijemos $R \in \mathbb{R}$ y denotemos por $\mathcal{BV}(R)$ el conjunto de todas las funciones en $C[0,1]$ con variación acotada a lo sumo R. Resulta que $\mathcal{BV}(R)$ es $\|\cdot\|_\infty$-cerrado en $C[0,1]$ y, por consiguiente, un espacio métrico completo. En [454] Tudor Zamfirescu demuestra el siguiente resultado.

Teorema de Zamfirescu. *El conjunto*

$$G \;=\; \{ f \in \mathcal{BV}(R) \mid f' = 0 \;\; \lambda\text{-c.s} \}$$

es residual en $(\mathcal{BV}(R), \|\cdot\|_\infty)$.

Sin embargo, si en lugar de $\mathcal{BV}(R)$ consideramos a $\mathcal{BV}[0,1]$, el conjunto de todas las funciones en $C[0,1]$ que son de variación acotada, entonces no se puede afirmar que el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{BV}[0,1]$ tales que $f' = 0$ λ-casi siempre sea un conjunto residual en $\mathcal{BV}[0,1]$ ya que, en este caso, $(\mathcal{BV}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ resulta ser un espacio de primera categoría en sí mismo pues

$$\mathcal{BV}[0,1] \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{BV}(n)$$

y cada $\mathcal{BV}(n)$ es nunca-denso en $\mathcal{BV}[0,1]$.

(4) Sabemos, gracias al Teorema de Banach-Mazurkiewicz, que $\mathcal{ND}[0,1]$ es un conjunto *abundante* en el espacio de Baire $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. En particular, $\mathcal{ND}[0,1]$ también es *denso* en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Esto nos dice que dada cualquier $f \in C[0,1]$ siempre existe una función $g \in \mathcal{ND}[0,1]$ y una función $h \in C^\infty[0,1]$ que están tan próxima a f (en el sentido de la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C[0,1]$) como se desee. Esto es lo que, en principio, parece paradójico. Lo interesante de ese resultado es que de él se desprende que lo *normal* o *típico* es que cuando metemos la mano en el saco de las funciones continuas en $[0,1]$ y elegimos arbitrariamente una función, resulta que dicha función es, casi con toda seguridad, una función nunca diferenciable. Pudiéramos, finalmente, intentar concluir lo siguiente: "*Desde el punto de vista de la categoría de Baire, abundan más funciones nunca diferenciables que las que son derivables en algún punto de* $[0,1]$".

(5) Johan Thim, en su Tesis publicada en 2003 y titulada: "*Continuous Nowhere Differentiable Functions*" da ejemplos explícitos de 18 funciones nunca diferenciables, comenzando con la de Bolzano (1830), siguiendo con la Callérier (1860), la de Riemann (1861), la de Weierstrass (1872), etc. y culminado con la de Wen (2002). Similarmente, el artículo de A. N. Sing de 1953 publicado en [217] contiene un desarrollo interesante sobre "*The theory and construction of non-differentiable functions*". La tesis de Ivan Bergman [49] también se ocupa de algunas de las aplicaciones clásicas del Teorema de Categoría de Baire.

(6) Si bien es cierto que $\mathcal{ND}[0,1]$ es un conjunto *abundante* desde la perspectiva de la categoría de Baire, dicho conjunto no es un boreliano; es decir, no pertenece a la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$. Este hecho fue probado por Mazurkiewicz en *Über die menge der differenzierbaren Funktionen*, Fun. Math. 27 (1936), 244-249.

(7) Finalmente queremos hacer mención del siguiente resultado demostrado por Bruckner, Ceder y Weiss [79] el cual establece, en términos generales, que cualquier función continua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es diferenciable cuando se restringe a cierto subconjunto de $[0,1]$:

Teorema de Bruckner, Ceder y Weiss. *Sea $f\in C[0,1]$. Dado cualquier subconjunto perfecto P en $[0,1]$, existe un conjunto perfecto $Q\subseteq P$ tal que $f|_Q$ es infinitamente diferenciable.*

2.1.2. ‖ ► Funciones continuas nunca rectificables

Otro conjunto de funciones de $C[0,1]$ que contiene a $\mathcal{ND}[0,1]$ lo constituye la familia de todas las funciones $f\in C[0,1]$ que nunca son rectificables. Recordemos su definición. Sea $f\in C[0,1]$ y sea $[a,b]$ un subintervalo arbitrario no degenerado de $[0,1]$, es decir, $a<b$. Para cada partición finita $P=\{t_0,t_1,\dots,t_k\}$ de $[a,b]$ defina

$$l(f,P)=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\big(t_i-t_{i-1}\big)^2+\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)^2}\qquad \text{y}\qquad L(f,[a,b])=\sup_{P\in\mathcal{P}_f[a,b]} l(f,P),$$

donde $\mathcal{P}_f[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones finitas de $[a,b]$. Si $L(f,[0,1])$ es finito, entonces decimos que el **grafo de f es rectificable**. Si $L(f,[a,b])=\infty$ para todo intervalo no degenerado $[a,b]\subseteq[0,1]$, entonces diremos que el **grafo de f es nunca rectificable**.

Denotemos por $\mathcal{NR}[0,1]$ el subconjunto de $C[0,1]$ formado por todas las funciones que poseen grafos nunca rectificables.

Corolario 2.1.1. $\mathcal{ND}[0,1]\subseteq\mathcal{NR}[0,1]$. *En particular,* $\mathcal{NR}[0,1]$ *es residual en* $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Suponga, por un momento, que hemos encontrado una función $f\in\mathcal{ND}[0,1]$ tal que $f\notin\mathcal{NR}[0,1]$. Esto significa que existe algún subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$ tal que $L(f,[a,b])<\infty$. Es bien conocido que toda función con grafo rectificable es de variación acotada ([13], Teorema 6.17, p. 162) y que toda función de variación acotada puede ser expresada como diferencia de dos funciones monótonas crecientes ([13], Teorema 6.13, p. 159). Por último, como toda función monótona creciente resulta ser derivable casi siempre (Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue, Teorema 2.1.4, página 130), se deduce entonces que f es diferenciable en algunos puntos de $[0,1]$ lo que constituye una contradicción pues habíamos supuesto que $f\in\mathcal{ND}[0,1]$. Esto prueba que $\mathcal{ND}[0,1]\subseteq\mathcal{NR}[0,1]$ y una aplicación del Teorema de Banach-Mazurkiewicz concluye la prueba de la segunda parte. ■

2.1.3. $\|$ ► Convolución de funciones continuas nunca diferenciables

Recordemos que $\widetilde{C}[0,2\pi] = \{f \in C[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y, por consiguiente, $(\widetilde{C}[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$ también es un espacio de Banach. Si $f,g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$, entonces, como ya hemos mencionado, tales funciones se identifican con sus extensiones periódicas (módulo 2π) en $\mathbb{R}$. La **convolución** de dos funciones $f,g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ se define por

$$(f*g)(t) = \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds.$$

Observemos que $f*g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ y se cumple, además, que

(1) $f*g = g*f$, para toda $f,g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$,

(2) $(f*g)*h = f*(g*h)$, para toda $f,g,h \in \widetilde{C}[0,2\pi]$,

(3) $f*(\alpha g+\beta h) = \alpha f*g+\beta f*h$, para toda $f,g,h \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ y todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

(4) $\|f*g\|_\infty \leq 2\pi\|f\|_\infty\|g\|_\infty$, para toda $f,g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$. Usando inducción vemos que

$$||\underbrace{f*\cdots*f}_{(n \text{ veces})}||_\infty \leq (2\pi)^{n-1}\|f\|_\infty^n \tag{Θ}$$

para cualquier $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

La condiciones anteriores nos dice, en particular, que la función $\Psi : \widetilde{C}[0,2\pi] \times \widetilde{C}[0,2\pi] \to \widetilde{C}[0,2\pi]$ definida por

$$\Psi(f,g) \;=\; f*g, \quad f,g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$$

es bilineal (=lineal en cada variable) y continua.

Si $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ es una función de Lipschitz, es decir, $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ para todo $x,y \in [0,2\pi]$, para alguna constante $M \geq 0$, entonces $L(f)$ denotará la menor de las constantes M que satisfacen la desigualdad anterior y que llamaremos la constante de Lipschitz de f. Recordemos que si f es continuamente diferenciable, entonces f es de Lipschitz y, en este caso, $L(f) = \|f'\|_\infty$. Además, si f es continuamente diferenciable, también lo es $f*g$ para todo $g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ y se cumple que

$$\big(f*g\big)' \;=\; f'*g.$$

En consecuencia, $f*g$ es de Lipschitz y

$$L(f*g) \;=\; \big\|f'*g\big\|_\infty \;\leq\; 2\pi\big\|f'\big\|_\infty\|g\|_\infty \;=\; 2\pi L(f)\|g\|_\infty.$$

En general, usando inducción, vemos que $f*g*\overset{n-1}{\smile}\!\!\!\!\cdots *g$ es de Lipschitz y

$$\begin{aligned} L(f*\overbrace{g*\cdots*g}^{(n-1 \text{ veces})}) \;&=\; \Big\|\big(f*g*\overset{n-1}{\cdots}*g\big)'\Big\|_\infty \;=\; \Big\|f'*g*\overset{n-1}{\cdots}*g\Big\|_\infty \\ &\leq\; 2\pi\big\|f'\big\|_\infty\Big\|g*\overset{n-1}{\cdots}*g\Big\|_\infty \;\leq\; 2\pi L(f)(2\pi)^{n-2}\|g\|_\infty^{n-1} \\ &=\; L(f)\big(2\pi\|g\|_\infty\big)^{n-1}. \end{aligned}$$

En la búsqueda de funciones extrañas pero abundantes, el próximo objeto que visualizaremos en nuestra Galería de Monstruos es la existencia de funciones continuas nunca diferenciables que son convoluciones. El siguiente resultado fue demostrado por Witold M. Bogdanowicz en [59].

Teorema 2.1.5 (Bogdanowicz). *El conjunto $\mathcal{CND}[0,2\pi]$ de todas las funciones f en $\widetilde{C}[0,2\pi]$ que satisfacen que cada una de las funciones*

$$f, \quad f*f, \quad f*f*f, \quad f*f*f*f, \ \ldots$$

es nunca diferenciable, es residual en $\big(\widetilde{C}[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty\big)$.

La demostración del Teorema de Bogdanowicz se basa en ciertas propiedades que posee la función $\Phi : \widetilde{C}[0,2\pi] \to [0,+\infty]$ definida por

$$\Phi(f) = \inf_{s\in[0,2\pi]} \sup\left\{ \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|} \ : \ t\in[0,2\pi],\ t\neq s \right\}, \qquad f\in\widetilde{C}[0,2\pi].$$

Notemos que, para cualquier $f\in\widetilde{C}[0,2\pi]$, $0\leq\Phi(f)\leq+\infty$ y $\Phi(af)=|a|\Phi(f)$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Lema 2.1.2. *La función Φ satisface las siguientes propiedades:*

(a) *Φ es inferiormente semicontinua .*

(b) *Si f es diferenciable en algún punto $s\in[0,2\pi]$, entonces $\Phi(f)<+\infty$.*

(c) *Si $g\in\widetilde{C}[0,2\pi]$ satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz $L(g)\geq 0$, es decir, si*

$$|g(t)-g(s)| \leq L(g)|t-s|, \quad \textit{para todo } t,s\in[0,2\pi],$$

entonces se cumple que $\Phi(f+g)\leq\Phi(f)+L(g)$ para toda $f\in\widetilde{C}[0,2\pi]$.

(d) *Sean $P=\big\{0=s_0<s_1<\cdots<s_m=2\pi\big\}$ una partición de $[0,2\pi]$ y f una función en $\widetilde{C}[0,2\pi]$ que es diferenciable en $[0,2\pi]$. Si*

$$M = \inf\left\{ \frac{|f(s_n)-f(s_{n-1})|}{|s_n-s_{n-1}|} \ : \ n=1,2,\ldots,m \right\},$$

entonces $\Phi(f)\geq M$.

Prueba. (a). Sea $a\in\mathbb{R}$. Vamos a demostrar que el conjunto $E_a(\Phi)=\big\{f\in\widetilde{C}[0,2\pi] : \Phi(f)\leq a\big\}$ es cerrado en $\widetilde{C}[0,2\pi]$. Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $E_a(\Phi)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente. Entonces $f\in\widetilde{C}[0,2\pi]$ y lo que queremos ver es que $\Phi(f)\leq a$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $\varepsilon_n>0$ de modo que $\varepsilon_n<1/n$. Puesto que $\Phi(f_n)\leq a$, podemos hallar un $s_n\in[0,2\pi]$ tal que

$$\sup\left\{ \frac{|f_n(t)-f_n(s_n)|}{|t-s_n|} \ : \ t\in[0,2\pi],\ t\neq s_n \right\} \leq a+\varepsilon_n.$$

De esto se sigue que

$$|f_n(t)-f_n(s_n)| \ \leq \ (a+\varepsilon_n)|t-s_n|, \quad \text{para todo} \ \ t\in[0,2\pi], \ \ \text{y} \ \ \text{todo} \ \ n=1,2,\ldots.$$

Siendo $(s_n)_{n01}^\infty$ una sucesión en el compacto $[0,2\pi]$, existe una subsucesión de ella (que seguiremos denotando del mismo modo) convergiendo a un punto $s_0\in[0,2\pi]$. De la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ hacia f sobre $[0,2\pi]$ tenemos que

$$|f(t)-f(s_0)| \ \leq \ a|t-s_0|, \quad \text{para todo} \ \ t\in[0,2\pi], \ \ \text{y} \ \ \text{todo} \ \ n=1,2,\ldots.$$

Esto prueba que $f \in E_a(\Phi)$.

(b). Si f es diferenciable en $s \in (0,2\pi)$, entonces la función

$$g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, \quad \text{para } t \in [0,2\pi], \quad t \neq s$$

es acotada lo cual implica que $\Phi(f)$ es finita.

(c). Supongamos que $g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz $L(g)$. Entonces

$$\frac{\big|(f(t)+g(t)) - (f(s)+g(s))\big|}{\big|t-s\big|} \leq \frac{\big|f(t)-f(s)\big|}{|t-s|} + L(g)$$

y de esta desigualdad se deduce que $\Phi(f+g) \leq \Phi(f) + L(g)$.

(d). Para demostrar esta última desigualdad debemos probar, antes, el siguiente:

> **Lema**. *Suponga que $g \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ es una función diferenciable satisfaciendo $g(s_0) = \cdots = g(s_m) = 0$. Fijemos $n \in \{1,2,\ldots,m\}$. Entonces, para cada $s \in [s_{n-1}, s_n]$, o existe un $t \in [s_{n-1}, s_n]$ diferente de s tal que $g(s) = g(t)$, o bien $g'(s) = 0$.*
>
> **Prueba.** Puesto que g continua en $[s_{n-1}, s_n]$, ella alcanza su máximo en un punto t_1 y su mínimo en un punto t_2. Sea s cualquier punto en $[s_{n-1}, s_n]$ y suponga que $g'(s) \neq 0$. Podemos asumir que $g(s) \neq 0$ (y en consecuencia $s \neq s_{n-1}$, $s \neq s_n$), pues en caso contrario la conclusión de la afirmación se cumple. Se sigue de $g'(s) \neq 0$ que $g(s) < g(t_1)$ y $g(s) > g(t_2)$. Ahora bien, como $g(s) \neq 0$, entonces $g(s) > 0$ o $g(s) < 0$. Sólamente consideraremos el primer caso pues el segundo caso trabaja de modo enteramente similar. Tenemos entonces que
>
> $$0 = g(s_n) = g(s_{n-1}) < g(s) < g(t_1).$$
>
> Existen sólo dos posibilidades para s: o bien s pertenece al intervalo (s_{n-1}, t_1) o bien al intervalo (t_1, s_n). Si s pertenece al intervalo (s_{n-1}, t_1), entonces podemos encontrar un punto t en el intervalo (t_1, s_n) tal que $g(s) = g(t)$. Un razonamiento similar permite la misma conclusión si s pertenece al intervalo (t_1, s_n). Esto termina la prueba de nuestra lema. $\square$

Consideremos ahora la función $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(s_{n-1}) - \frac{t - s_{n-1}}{s_n - s_{n-1}}\big(f(s_n) - f(s_{n-1})\big)$$

para todo $t \in [s_{n-1}, s_n]$, $n = 1,2,\ldots,m$. Esta función satisface las condiciones de nuestro lema. De allí que, para cada $n = 1,2,\ldots,m$ y cada $s \in [s_{n-1}, s_n]$, existe otro punto t, distinto de s, tal que $g(s) = g(t)$ o $g'(s) = 0$. En el primer caso tenemos que

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{f(s_n) - f(s_{n-1})}{s_n - s_{n-1}},$$

mientras que para el segundo se obtiene

$$f'(s) = \frac{f(s_n) - f(s_{n-1})}{s_n - s_{n-1}}.$$

Cualquiera de los dos casos que ocurra permite concluir que

$$\sup\left\{\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right| \,:\, t\in[0,2\pi],\ t\neq s\right\} \;\geq\; \left|\frac{f(s_n)-f(s_{n-1})}{s_n-s_{n-1}}\right|$$

para todo $s\in[s_n,s_{n-1}]$ y todo $n\in\{1,2,\ldots,m\}$. Tomando ínfimo a ambos lados de esta desigualdad sobre el conjunto $\{1,2,\ldots,m\}$ obtenemos lo que queríamos demostrar. ■

Estamos ahora en condiciones de demostrar el Teorema de Bogdanowicz

Prueba del Teorema de Bogdanowicz. Sea $F=\widetilde{C}[0,2\pi]\setminus\mathcal{CND}[0,2\pi]$. Nos proponemos demostrar que F es de primera categoría en $\big(\widetilde{C}[0,2\pi],\|\cdot\|_\infty\big)$. Para cada par de enteros no negativos m,n definamos

$$F_{mn} \;=\; \big\{f\in\widetilde{C}[0,2\pi] \,:\, \Phi(\underbrace{f*\cdots*f}_{(n\text{ veces})}) \;\leq\; m\big\}.$$

Notemos que si $f\in F$, entonces para algún $n\in\mathbb{N}$, $f*\overset{n}{\cdots}*f$ es diferenciable en algún punto de $[0,2\pi]$ y por (b) del Lema 2.1.2 tenemos que $\Phi(f*\overset{n}{\cdots}*f)$ es finito. Esto nos dice que f debe estar en algún F_{mn} para ciertos $m,n\in\mathbb{N}$, es decir,

$$F \;\subseteq\; \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{mn}.$$

Nos proponemos demostrar que cada conjunto F_{mn} es cerrado y nunca-denso en $\widetilde{C}[0,2\pi]$. Fijemos m,n en $\mathbb{N}$. Puesto que la aplicación $\varphi:\widetilde{C}[0,2\pi]\to\widetilde{C}[0,2\pi]$ dada por

$$\varphi(f) \;=\; \underbrace{f*\cdots*f}_{(n\text{ veces})}, \qquad \text{para toda } f\in\widetilde{C}[0,2\pi]$$

es continua (esto sigue de la desigualdad (Θ)), entonces la semicontinuidad inferior de la función Φ nos garantiza que F_{mn} es cerrado en $\widetilde{C}[0,2\pi]$. Nos queda por ver que F_{mn} es nunca-denso en $\widetilde{C}[0,2\pi]$. Esto lo haremos demostrando que la suposición contraria conlleva a una contradicción.

Lema. *Si F_{mn} tiene interior no vacío, entonces existe una constante $M\geq 0$ tal que*

$$\Phi(\underbrace{f*\cdots*f}_{(n\text{ veces})}) \;\leq\; M\,\|f\|_\infty^n \qquad \text{para toda } f\in\widetilde{C}[0,2\pi]. \tag{$(\Theta)_1$}$$

Prueba. Decir que F_{mn} tiene interior no vacío significa que existe una bola abierta, digamos $U(g,r)$, incluida en F_{mn} para alguna $g\in\widetilde{C}[0,2\pi]$ y algún $r>0$, donde como siempre $U(g,r)=\big\{f\in\widetilde{C}[0,2\pi]:\|f-g\|_\infty<r\big\}$. Puesto que el conjunto de las funciones en $\widetilde{C}[0,2\pi]$ con derivada continua es denso en dicho espacio, podemos suponer (y así lo haremos) que g posee una derivada continua y, en consecuencia, satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz $L(g)=\|g'\|_\infty$. Observemos que cualquiera que sea $f\in U(g,r)$, se cumple que

(1) $\Phi(f*\overset{n}{\cdots}*f) \;\leq\; m$,

(2) $\|f\|_\infty\leq\|g\|_\infty+\|f-g\|_\infty<\|g\|_\infty+r:=d$, y

(3) como hemos visto antes, el hecho de que g tiene una derivada continua, y por consiguiente satisface una condición de Lipschitz con $L(g) = \| g' \|_\infty$, ello implica que $g * f * \overset{n-1}{\cdots} * f$ también es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $\leq L(g)(2\pi d)^{n-1}$.

Fijemos $f \in U(g,r)$ y pongamos $h = f - g$. Entonces $h \in U(0,r)$ y gracias a (c) del Lema 2.1.2, tenemos la desigualdad

$$\Phi(h * \underbrace{f * \cdots * f}_{(n-1 \text{ veces})}) \;\leq\; \Phi(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})}) \;+\; L(-g * \underbrace{f * \cdots * f}_{(n-1 \text{ veces})}) \;\leq\; m \;+\; L(g)(2\pi)^{n-1}.$$

Lo acabado de probar nos revela que: *para cualquier* $h \in U(0,r)$, *con* $f = g + h$, *se tiene que*

$$\Phi(h * \underbrace{f * \cdots * f}_{(n-1 \text{ veces})}) \;\leq\; m \;+\; L(g)(2\pi d)^{n-1}.$$

De la conmutatividad de la convolución, la desigualdad anterior e inducción, se deduce la existencia de un número $K > 0$ tal que

$$\Phi(\underbrace{h * h * \cdots * h}_{(n \text{ veces})}) \;\leq\; K, \qquad \text{para todo } h \in U(0,r).$$

Sea $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ tal que $f \neq 0$. Entonces $h = (r/2\| f \|_\infty) f \in U(0,r)$ y usando el hecho de que la convolución es lineal en cada variable y que la aplicación Φ es homogénea obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{2\| f \|_\infty}\right)^n \Phi(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})}) \;&=\; \Phi\left(\left(\frac{r}{2\| f \|_\infty}\right)^n \underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})}\right) \\
&=\; \Phi\underbrace{\left(\frac{r}{2\| f \|_\infty} f * \frac{r}{2\| f \|_\infty} f * \cdots * \frac{r}{2\| f \|_\infty} f\right)}_{(n \text{ veces})} \\
&=\; \Phi(\underbrace{h * h * \cdots * h}_{(n \text{ veces})}) \;\leq\; K.
\end{aligned}$$

Finalmente, definiendo $M = (2/r)^n K$ resulta la desigualdad

$$\Phi(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})}) \;\leq\; M \| f \|_\infty^n.$$

la cual se cumple para todo $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$. Esto termina la demostración de nuestro lema. □

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, consideremos ahora la función $f \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ definida por $f(t) = \cos(kt)$. Puesto que $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikt} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ikt}$ se deduce fácilmente que $f * f = \pi f$, y por consiguiente,

$$\underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})} \;=\; \pi^{n-1} f.$$

De la propiedad (d) del Lema 2.1.2 vemos que si tomamos la partición $\{0, \pi/k, \ldots, 2k\pi/k\}$ se consigue la desigualdad

$$\Phi(f) \geq \frac{2k}{\pi}.$$

Por otro lado, usando la desigualdad $(\Theta)_1$ del lema anterior tendremos que

$$2\pi^{n-2}k \leq \Phi(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{(n \text{ veces})}) \leq M\| f \|_\infty^n = M$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdad es, por supuesto, imposible para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde se concluye que F_{mn} no puede tener interior no vacío y así F es de primera categoría. Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto $\mathcal{CND}[0,2\pi]$ es residual en $\widetilde{C}[0,2\pi]$. ■

Comentario Adicional 2.1.2 En el mismo artículo, Bogdanowicz (Witold M. Bogdanowicz posteriormente se cambió de nombre haciéndose llamar Victor M. Bogdan) considera el espacio de Fréchet (= espacio vectorial topológico completamente metrizable) $C[0,+\infty)$ de todas las funciones $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que son continuas cuya topología es generada por la familia de semi-normas

$$\| f \|_n = \sup\{|f(t)| : t \in [0,n]\}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Como antes, la convolución de dos funciones f,g en $C[0,+\infty)$ viene dada por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

Teorema (Bodganowicz). *El conjunto E, formado por todas las funciones $f \in C[0,+\infty)$ tal que las funciones*

$$f,\ f * f,\ f * f * f,\ \ldots$$

son nunca diferenciables en el intervalo $(0,+\infty)$, es residual en $C[0,+\infty)$.

2.1.4. ‖ ► Funciones diferenciables nunca monótonas

Como ya hemos visto, el Teorema de Categoría de Baire ha servido como un vehículo importante en la prueba de existencia de funciones que eran muy difíciles de construir y, por supuesto, también difíciles de visualizar. Tal es el caso, por ejemplo, de las funciones continuas nunca diferenciables. Nuestro objetivo es esta sección es probar, como en el caso anterior, la abundancia de funciones diferenciables nunca monótonas. Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que no es monótona en ningún subintervalo no degenerado de $[0,1]$ se llama **nunca monótona** o **siempre oscilante**. Que toda función continua nunca diferenciable es nunca monótona es consecuencia del siguiente resultado clásico, cuya prueba puede verse, por ejemplo, en [364], Theorem 3, p. 418, o también, [384], p. 96.

Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces F' existe λ-casi siempre.*

Por consiguiente, si $\mathcal{NM}[0,1]$ representa el subconjunto de $C[0,1]$ formado por todas las funciones continuas que son nunca monótonas, entonces $\mathcal{NM}[0,1]$ es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Este resultado lo volveremos a demostrar más adelante sin apelar al Teorema de Banach-Mazurkiewicz.

En el transcurso del siglo XVIII a los matemáticos les era totalmente imposible determinar si existían funciones que fueran siempre diferenciables pero nunca monótonas. Es importante destacar que para que exista una función diferenciable nunca monótona f debe ocurrir que los conjuntos

$$\{x : f'(x) > 0\} \qquad \text{y} \qquad \{x : f'(x) < 0\}$$

sean ambos densos en $\mathbb{R}$. Dini era uno de los que creían que tales funciones podían existir, mientras que P. du Bois-Reymond tenía la presunción de que las funciones nunca monótonas no podían ser diferenciables. En 1887, Köpcke a fuerza de coraje y perseverancia dio a conocer explícitamente, a través de una construcción increíblemente complicada, una función diferenciable nunca monótona. Esa construcción permitió que se unieran al clan con nuevas funciones de este tipo matemáticos como Denjoy, Pereno, Hobson, etc. Todas esas construcciones seguían siendo difíciles y largas (la más corta constaba de 10 páginas). Casi 100 años después, en 1974, Y. Katznelson y K. Stromberg [254] reviven la investigación al construir otra función diferenciable nunca monótona pero mucho más simple que la dada por Köpcke. Fundamentalmente lo que Katznelson y Stromberg probaron fue el siguiente resultado:

Teorema de Katznelson-Stromberg. *Existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que:*

(1) *f es siempre diferenciable sobre $\mathbb{R}$;*

(2) *f' es acotada sobre $\mathbb{R}$ y*

(3) *f no es monótona en ningún subintervalo de $\mathbb{R}$.*

Una exposición detallada del resultado anterior se puede leer en su fuente original o en el libro de A. B. Kharazishvili [253], pág. 69-77. La función f, construida por Katznelson y Stromberg, disfruta de algunas propiedades interesantes: por ejemplo, f', por ser acotada, implica que f es una función Lipschitziana. En particular, f es absolutamente continua, lo cual implica que f' es Lebesgue-integrable en cada subintervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$; en segundo lugar, f' no es Riemann-integrable en ningún subintervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Más aún, f' es una función de la primera clase de Baire; es decir, se puede representar como límite puntual de una sucesión de funciones continuas y, por consiguiente, el conjunto de puntos donde ella es continua es un G_δ-denso (Teorema Genérico de Baire-Kuratowski, página 90). Por último, los conjuntos $\{x: f'(x)>0\}$ y $\{x: f'(x)<0\}$, además de ser disjuntos, son medibles Lebesgue y, para cada subintervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $(a<b)$, se cumple que

$$\lambda\Big(\big(\{x: f'(x)>0\}\big)\cap[a,b]\Big)>0 \qquad \text{y} \qquad \lambda\Big(\big(\{x: f'(x)<0\}\big)\cap[a,b]\Big)>0.$$

Dos años más tarde de la aparición del resultado de Y. Katznelson y K. Stromberg, Clifford E. Weil [440], usando el Teorema de Categoría de Baire, prueba la existencia de abundantes funciones de ese tipo en apenas 2 páginas. Veamos ahora el procedimiento que Weil siguió para demostrar la abundancia de las funciones diferenciables nunca monótonas usando el Teorema de Categoría de Baire. Para probar lo que hizo Weil necesitaremos las siguientes nociones y herramientas:

Como siempre, $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ denota el conjunto de todas las funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que son acotadas dotado de la métrica uniforme

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|,$$

para todo $f,g\in\mathcal{B}_\infty[0,1]$. Como ya hemos afirmado, es bien conocido que $(\mathcal{B}_\infty[0,1],d_\infty)$ es un espacio métrico completo. Recordemos que una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una **derivada**, si existe al menos una función diferenciable $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[0,1]$ (por supuesto, en los puntos extremos 0 y 1, se requiere que las derivadas laterales a la derecha y a la izquierda, respectivamente, existan).

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{D}[0,1]$ formado por los elementos de $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ que son derivadas, es decir,

$$\mathcal{D}[0,1]=\Big\{f\in\mathcal{B}_\infty[0,1]\,:\,\textit{existe } F\in C[0,1] \textit{ tal que } F'=f\Big\}.$$

Observemos que $C[0,1] \subseteq \mathcal{D}[0,1]$ pues, si $f \in C[0,1]$, entonces la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \text{para todo } x \in [0,1]$$

es, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, una función diferenciable satisfaciendo $F' = f$. Además, $(\mathcal{D}[0,1], d_\infty)$ es cerrado en $\mathcal{B}_\infty[0,1]$ y, en consecuencia, un espacio métrico completo. Para ver esto último, sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ y sea $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $F_n' = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo uso del siguiente resultado conocido, (véase, por ejemplo, [386] Theorem 7.17, p. 152):

> **Teorema C^1.** *Si $(G_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{D}[0,1]$ convergiendo uniformemente a una función G, entonces la sucesión $(G_n'(x))_{n=1}^\infty$ converge uniformemente a una función $g(x)$ y, además, $G'(x) = g(x)$.*

se sigue que la sucesión $(F_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente a una función diferenciable F y F' es el límite uniforme de $(f_n)_{n=1}^\infty$; es decir, $F' = f \in \mathcal{D}[0,1]$. Esto prueba que $(\mathcal{D}[0,1], d_\infty)$ es cerrado en $\mathcal{B}_\infty[0,1]$.

Para cada $f \in \mathcal{D}[0,1]$ pongamos, como antes, $Z(f) = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ y definamos

$$\mathcal{D}_0[0,1] = \Big\{ f \in \mathcal{D}[0,1] \,:\, Z(f) \ \textit{es denso en } [0,1] \Big\}.$$

Notemos que si $f \in \mathcal{D}_0[0,1]$, entonces $Z(f)$ es, por el **Ejemplo 2**, página 101, un subconjunto G_δ-denso de $[0,1]$. Similar al argumento de la prueba del Teorema 2.1.8, vamos a demostrar que $\mathcal{D}_0[0,1]$ es cerrado en $\mathcal{D}[0,1]$. En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}_0[0,1]$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, donde $f \in \mathcal{D}[0,1]$. Como cada $Z(f_n)$ es un G_δ-denso de $[0,1]$, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que

$$Z = \bigcap_{n=1}^\infty Z(f_n)$$

es denso en $[0,1]$ y ya que $f_n \to f$ uniformemente, entonces $Z \subseteq Z(f)$, de donde se sigue que $f \in \mathcal{D}_0[0,1]$. Esto prueba que $(\mathcal{D}_0[0,1], d_\infty)$ es cerrado en $(\mathcal{D}[0,1], d_\infty)$ y, en consecuencia, un espacio métrico completo. Exactamente como en la demostración del Teorema 2.1.8 se verifica que $\mathcal{D}_0[0,1]$ es, en realidad, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Es sobre éste espacio que Clifford Weil, usando el Teorema de Categoría de Baire, prueba la abundancia de funciones diferenciables nunca monótonas. El espacio $\mathcal{D}_0[0,1]$ será interesante en la medida en que podamos demostrar que él, como espacio vectorial, es no trivial. Ese es el contenido de la siguiente:

Afirmación 1. $\mathcal{D}_0[0,1] \neq \{0\}$.

Prueba de la Afirmación 1. El Teorema de Katznelson-Stromberg nos garantiza la existencia de una función $0 \neq f \in \mathcal{D}_0[0,1]$. He aquí otra tal función obtenida explícitamente a la que llamaremos **función de Pompeiu**. Observemos, en primer lugar, que si d es cualquier número real, entonces la función $g_d(x) = (x-d)^{1/3}$ tiene derivada finita excepto en $x = d$, donde su derivada es infinita.

Sea $(d_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión densa en $[0,1]$ y para cada $x \in [0,1]$, definamos

$$F(x) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{(x-d_n)^{\frac{1}{3}}}{2^n} \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{g_n(x)}{2^n},$$

donde hemos puesto $g_n(x) = (x-d_n)^{1/3}$. Por el M-Test de Weierstrass, la serie converge uniformemente y, por lo tanto, F es una función continua sobre $[0,1]$. Pero además, como cada g_n es monótona creciente, F

es monótona creciente y entonces el Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue nos dice que su derivada F' existe λ-c.s., donde λ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ restringida a $[0,1]$. Observe que de la igualdad $a-b=\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)$, válida para todo $a,b\in\mathbb{R}$, se sigue que

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[(t-d_n)^{\frac{2}{3}}+(t-d_n)^{\frac{1}{3}}(x-d_n)^{\frac{1}{3}}+(x-d_n)^{\frac{2}{3}}\right]2^n}.$$

Definamos

$$K=\left\{x\in[0,1]:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(x-d_n)^{\frac{2}{3}}\,2^n}\quad \textit{converge}\right\},$$

y notemos que como $K\cap\{d_n:n\in\mathbb{N}\}=\varnothing$, entonces $[0,1]\setminus K$ es denso. Si usamos las siguientes desigualdades $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\leq a^2+ab+b^2\leq\frac{3}{2}(a^2+b^2)$, donde $a,b\in\mathbb{R}$, tendremos que

- si $x\in K$, entonces $F'(x)$ existe y $F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(x-d_n)^{\frac{2}{3}}\,2^n}>0$, y
- si $x\notin K$, entonces $F'(x)=\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\infty$.

Siendo F una función estrictamente creciente, $F[0,1]=[F(0),F(1)]$. Sea $G:[F(0),F(1)]\to[0,1]$ la inversa de la función F. Entonces G es monótona creciente y, gracias al Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue, G' es diferenciable λ-casi siempre. sobre $[F(0),F(1)]$, además se cumple que $G'(F(x))=1/F'(x)$ para casi todo x. Notemos que G' es acotada y que $G'(F(x))=0$ si, y sólo si, $x\notin K$. De esto se sigue que $G'=0$ sobre un subconjunto denso de $[F(0),F(1)]$. Finalmente, si sustituimos G por $G\circ\varphi$, donde φ es cualquier aplicación lineal de $[0,1]$ sobre $[F(0),F(1)]$, entonces resultará que $0\neq G\circ\varphi\in\mathcal{D}_0[0,1]$.

Afirmación 2. *El conjunto*

$$E=\left\{f\in\mathcal{D}_0[0,1]:\ \textit{existe un intervalo abierto } I\subseteq[0,1]\ \textit{tal que } f(I)\subseteq[0,+\infty)\ \text{ o }\ f(I)\subseteq(-\infty,0]\right\}$$

es de primera categoría en $\mathcal{D}_0[0,1]$.

Prueba de la Afirmación 2. Sea $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los subintervalos abiertos no vacíos de $[0,1]$ con extremos racionales distintos, y para cada $n\in\mathbb{N}$ pongamos

$$E_n=\left\{f\in\mathcal{D}_0[0,1]:f(I_n)\subseteq[0,+\infty)\right\}\qquad \text{y}\qquad F_n=\left\{f\in\mathcal{D}_0[0,1]:f(I_n)\subseteq(-\infty,0]\right\}.$$

Entonces

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cup F_n),$$

y es suficiente demostrar que tanto E_n así como F_n son cerrados y nunca-densos, para cada $n\in\mathbb{N}$. El argumento será llevado a cabo sólo para E_n ya que un procedimiento similar trabaja para F_n.

Que E_n es cerrado es inmediato. Para demostrar que E_n tiene interior vacío, supongamos que $f\in E_n$ y sea $\varepsilon>0$. Puesto que $f\in\mathcal{D}_0[0,1]$, entonces $Z(f)$ es denso en $[0,1]$ y por lo tanto $Z(f)\cap I_n\neq\varnothing$. Sea $x_0\in Z(f)\cap I_n$. Entonces $x_0\in I_n$ y $f(x_0)=0$. Sea $0\neq h\in\mathcal{D}_0[0,1]$ y suponga que $h(x_1)<0$ para algún

$x_1 \in [0,1]$. Defina ahora $g = h \circ \varphi$, donde φ es un difeomorfismo de $[0,1]$ sobre $[0,1]$ tal que $\varphi(x_0) = x_1$. Tenemos entonces que $g \in \mathcal{D}_0[0,1]$ satisface $g(x_0) < 0$. Sea $M > 0$ tal que

$$M > \sup\big\{\, |g(x)| : x \in [0,1]\big\}.$$

Entonces

$$d_\infty\Big(f, \frac{\varepsilon}{M} g + f\Big) < \varepsilon.$$

Como g y f están en el espacio vectorial $\mathcal{D}_0[0,1]$, resulta que $\frac{\varepsilon}{M} g + f \in \mathcal{D}_0[0,1]$. Observemos, sin embargo, que $\Big(\frac{\varepsilon}{M} g + f\Big)(x_0) < 0$, lo cual dice que $\frac{\varepsilon}{M} g + f$ no es un elemento de E_n. Esto prueba que E_n no puede contener ninguna bola abierta y, así, E_n es nunca-denso. ■

Teorema 2.1.6 (Weil). *El conjunto* $\mathcal{DNM}[0,1] = \big\{F' \in \mathcal{D}_0[0,1] :\ F \textit{ es nunca monótona}\big\}$ *es residual en* $(\mathcal{D}_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Sea E el conjunto definido en la Afirmación 2 del parágrafo anterior. Es claro que $\mathcal{D}_0[0,1] \setminus E \subseteq \mathcal{DNM}[0,1]$. Puesto que E es de primera categoría en $\mathcal{D}_0[0,1]$, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que $\mathcal{D}_0[0,1] \setminus E$ es un G_δ-denso y, por consiguiente, $\mathcal{DNM}[0,1]$ es residual en $(\mathcal{D}_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. ■

Del resultado de Weil se sigue, en particular, la existencia de abundantes funciones satisfaciendo las condiciones $(1), (2)$ y (3) del Teorema de Katznelson-Stromberg.

Teorema 2.1.7 (Cater, [88]). *Sea*

$$\mathcal{D}_{00} \;=\; \big\{f \in \mathcal{D}_0[0,1] \,:\, \lambda\big(Z(f)\big) = 0\big\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_{00}$ *es residual en* $(\mathcal{D}_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$G_n \;=\; \big\{f \in \mathcal{D}_0[0,1] \,:\, \lambda\big(Z(f)\big) \geq 1/n\big\}.$$

Veamos en primer lugar que cada G_n es cerrado en $\mathcal{D}_0[0,1]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos cualquier sucesión $(f_k)_{k=1}^\infty$ en G_n tal que $\lim_{k\to\infty} \| f_k - f\|_\infty = 0$ para alguna función $f \in \mathcal{D}_{00}$. Puesto que $f_k \in G_n$, tenemos que $\lambda\big(Z(f_k)\big) \geq 1/n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea

$$Z \;=\; \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{k=j}^\infty Z(f_k).$$

Resulta que para cualquier $x \in Z$, $f(x) = 0$, es decir, $Z = Z(f)$ y como $\lambda(Z) \geq \limsup_{k\to\infty} \lambda(Z(f_k)) \geq 1/n$, tenemos que $f \in G_n$. Esto prueba que G_n es cerrado.

Nuestro siguiente paso es demostrar que G_n es nunca-denso en $\mathcal{D}_0[0,1]$. En efecto, fijemos un $f \in G_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Escojamos ahora una función $g \in \mathcal{D}_{00}$ tal que $0 \leq g \leq 1$. Teniendo en cuenta que $f \in G_n$, resulta que

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] \,:\, |f(x)| > 0\}\big) \;=\; \lambda\big([0,1] \setminus Z(f)\big) \;<\; 1/n$$

y, en consecuencia, podemos determinar un $0 < c < \varepsilon$ de modo tal que $\lambda\big(\{x \in [0,1] : 0 < |f(x)| < c\}\big) < 1/n$. De esto se sigue que

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] \,:\, f(x) = -cg(x)\}\big) \;<\; 1/n,$$

y, por consiguiente,

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] \,:\, f(x) + cg(x) = 0\}\big) \;<\; 1/n.$$

Esto prueba que $f+cg \notin G_n$ y, como, $\| f+cg-f\|_\infty = \|cg\|_\infty \leq c < \varepsilon$, tenemos que G_n no puede contener ninguna bola abierta, es decir, G_n es nunca-denso.

Finalmente, puesto que $\mathcal{D}_{00} = \mathcal{D}_0[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que $\mathcal{D}_{00}$ es residual en $(\mathcal{D}_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. ■

Si se considera el espacio $\mathcal{D}_1[0,1]$, formado por todas las funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que poseen derivadas acotadas sobre $[0,1]$ con la norma

$$\| f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \| f\|_\infty + \| f'\|_\infty,$$

entonces $(\mathcal{D}_1[0,1], \|\cdot\|_1)$ resulta ser un espacio de Banach incluido en $C[0,1]$. Tibor Šalát [395], demuestra el siguiente:

Teorema 2.1.8 (Šalát). *El conjunto* $\mathcal{NM}_1[0,1]$*, formado por todas las funciones en* $\mathcal{D}_1[0,1]$ *que son nunca monótonas en* $[0,1]$*, es nunca-denso en* $(\mathcal{D}_1[0,1], \|\cdot\|_1)$.

Prueba. Si f es cualquier función a valores reales definida sobre $[0,1]$, denotaremos por $Z(f)$ el conjunto de los ceros de la función f, es decir, $Z(f) = \{x\in[0,1] : f(x) = 0\}$. Consideremos ahora el conjunto

$$D_0[0,1] = \left\{ f\in\mathcal{D}_1[0,1] : Z(f') \textit{ es denso en } [0,1]\right\}.$$

Notemos en primer lugar que si $f\in\mathcal{NM}_1[0,1]$, entonces se verifica que $Z(f')$ es denso en $[0,1]$. En efecto, puesto que f' cambia de signo en cada subintervalo de $[0,1]$ y como f' posee la propiedad de Darboux (esto significa que si $f'(a) < d < f'(b)$ para cualesquiera $a,b\in[0,1]$ con $a<b$, entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c) = d$), entonces $Z(f')$ es denso en $[0,1]$, de donde se sigue que

$$\mathcal{NM}_1[0,1] \subseteq D_0[0,1].$$

De inmediato probaremos que $D_0[0,1]$ es cerrado en $\mathcal{D}_1[0,1]$. Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $D_0[0,1]$ convergiendo a una función $f\in\mathcal{D}_1[0,1]$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f\|_1 = 0$. Se sigue de la definición de la norma $\|\cdot\|_1$ que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente a f y la sucesión de derivadas, $({f_n}')_{n=1}^\infty$, converge uniformemente a f'. Puesto que las derivadas ${f_n}'$ $(n=1,2,\ldots)$ pertenecen a la primera clase de Baire, $\mathfrak{B}_1[0,1]$, (véase, Ejemplo 7, página 493), cada uno de los conjuntos $Z({f_n}')$ $(n=1,2,\ldots)$ es un G_δ en $[0,1]$, y como además, $f_n\in D_0[0,1]$ $(n=1,2,\ldots)$, tales conjuntos resultan también ser densos en $[0,1]$. Se sigue del Teorema de Categoría de Baire que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z({f_n}')$$

es un G_δ-denso en $[0,1]$ y claramente dicho conjunto es un subconjunto de $Z(f')$. Esto prueba que $Z(f')$ es denso en $[0,1]$ y, por lo tanto, $f\in D_0[0,1]$. Con lo anterior hemos demostrado que $D_0[0,1]$ es cerrado en $\mathcal{D}_1[0,1]$. En realidad, $D_0[0,1]$ es un subespacio lineal cerrado propio del espacio $\mathcal{D}_1[0,1]$. En efecto, sean $f,g\in D_0[0,1]$. Por el Teorema de Categoría de Baire, $Z(f')\cap Z(g')$ es un G_δ-denso de $[0,1]$ y claramente $Z(f')\cap Z(g') \subseteq Z((f+g)')$, por lo que $f+g\in D_0[0,1]$. También es claro que si $f\in D_0[0,1]$ y $r\in\mathbb{R}$, entonces $rf\in D_0[0,1]$. Por el Ejemplo **B-2**, página 212, $D_0[0,1]$ es nunca-denso en $D_1[0,1]$ y, por consiguiente, también lo es $\mathcal{NM}_1[0,1]$. ■

Comentario Adicional 2.1.3 1) Otra demostración de la existencia de funciones diferenciables nunca monótonas se puede ver en un artículo recientemente publicado por R. Aron, V. I. Gurariy y J. B. Seoane ([18], Corollary 3.3).

2) Haciendo uso del siguiente resultado de Petruska y Laczkovich ([76], Theorem 2.1, p. 226)

Teorema de Petruska-Laczkovich. *Sea $J \subseteq [0,1]$. Para cualquier $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$, la restricción de f sobre J se puede extender a una derivada sobre $[0,1]$ si, y sólo si, $\mu(J) = 0$.*

se prueba sin mucha dificultad que la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es irreducible con } q \text{ par} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es irreducible con } q \text{ impar} \end{cases}$$

genera una función diferenciable nunca monótona. En efecto, es fácil verificar que f es continua en cada punto irracional de $[0,1]$ y, por lo tanto, $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$, donde $\mathfrak{B}_1[0,1]$ es el espacio de todas las funciones de la primera clase de Baire (el hecho de que $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$ se puede deducir del Teorema Grande de Baire (b), véase el Capítulo 3 para detalles). Puesto que los racionales en $[0,1]$ forman un conjunto J de medida (de Lebesgue) cero, la restricción de f a J puede, por el Teorema de Petruska-Laczkovich, ser extendida a una función derivada $\widehat{f}$ sobre todo $[0,1]$. Puesto que $\widehat{f} > 0$ sobre el conjunto denso $\mathbb{Q}_1 = \{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \,:\, p/q \textit{ es irreducible con } q \textit{ par}\}$ y $\widehat{f} < 0$ sobre el conjunto denso $\mathbb{Q}_2 = \{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \,:\, p/q \textit{ es irreducible con } q \textit{ impar}\}$, se sigue que si $F' = \widehat{f}$ sobre $[0,1]$, entonces F es una función diferenciable nunca monótona.

3) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Recordemos que el gráfico de f es el conjunto $\mathrm{Gra}(f)$ definido por $\mathrm{Gra}(f) = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$. Denotemos por $L(\alpha, c) = \{(x, \alpha x + c) : x \in \mathbb{R}\}$ una recta no vertical en $\mathbb{R}^2$ para algún $\alpha, c \in \mathbb{R}$. Un **conjunto de nivel** de f es un subconjunto E de $[0,1]$ tal que $\{(x, f(x)) : x \in E\}$ es la intersección de $\mathrm{Gra}(f)$ con alguna línea recta no vertical $L(\alpha, c)$. A todo conjunto de nivel lo denotaremos por $Z(f, E, \alpha, c) := \{(x, f(x)) : x \in E, f(x) = \alpha x + c\}$. En [80], A. M. Bruckner and K. M. Garg demostraron la existencia de un subconjunto residual G de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ tal que los conjuntos de nivel de cada miembro de G consisten de un conjunto perfecto o la unión de un conjunto perfecto con un de tipo I, donde un conjunto es de tipo I si éste contiene uno o, a lo sumo, dos puntos.

También es interesante mirar el trabajo de U. B. Darji y M. L. Morayne [112]. Un poco más tarde, F. S. Cater en [87] demuestra que:

Teorema 2.1.9 (Cater, [87]). *El conjunto*

$$G \;=\; \big\{ f \in C[0,1] \,:\, Z(f, E, \alpha, c) \text{ posee medida (lineal) cero} \big\}$$

es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Más aun, (compare con el Teorema 2.1.7),

Teorema 2.1.10 (Cater, [87]). *El conjunto*

$$G_0 \;=\; \big\{ f \in \mathcal{D}[0,1] \,:\, Z(f, E, \alpha, c) \text{ es nunca-denso y de medida (lineal) cero} \big\}$$

forma un subconjunto residual de $(\mathcal{D}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

2.1.5. ‖ ► Funciones continuas nunca Lipschitz

Con la aparición, en la galería de los monstruos, de funciones continuas nunca diferenciables se abrió una especie de caja de Pandora de funciones raras. Para algunos, la existencia de esos objetos extraños limitaba el análisis clásico, mientras que para otros, hurgar en sus propiedades constituía un reto fascinante. Pero, muy a pesar de las "plagas lamentables" y a las críticas adversas, esa disputa dio origen al estudio de nuevas disciplinas en el campo de las matemáticas y obligó a los matemáticos a mirar ciertos fenómenos con más detenimiento. Veremos ahora la abundancia de las funciones continuas que son nunca Lipschitziana y que, además, tales funciones son nunca diferenciables.

Definición 2.1.2. *Una función $f \in C[0,1]$ es llamada M-**Lipschitz** si existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ para todo $x,y \in [0,1]$. Diremos que f es **Lipschitz** o **Lipschitziana** si ella es M-Lipschitz para algún $M \geq 0$.*

*En general, dado $x \in [0,1]$, diremos que $f \in C[0,1]$ es M-**Lipschitz en** x si existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ para todo $y \in [0,1]$. Se dice que f es **Lipschitz en** x si ella es M-Lipschitz en x para algún $M \geq 0$.*

Denotemos por $\mathcal{NL}[0,1]$ el conjunto de todas las funciones $f \in C[0,1]$ tal que f *no es Lipschitz en ningún punto* $x \in [0,1]$. Cualquier función en $\mathcal{NL}[0,1]$ será llamada **nunca Lipschitz**.

Recordemos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si $\sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las particiones $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ de $[a,b]$. Es claro que toda función Lipschitz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada y como ésta última es la diferencia de dos funciones monótonas no-decrecientes (Teorema de descomposición de Jordan) resulta, por el Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue, que f diferenciable casi-siempre. En particular,

> **Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue II**. *Cualquier función Lipschitz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable λ-casi siempre.*

Teorema 2.1.11. *$\mathcal{NL}[0,1]$ es un G_δ-denso en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. En particular, $\mathcal{NL}[0,1] \subseteq \mathcal{ND}[0,1]$.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_n = \left\{ f \in C[0,1] : \ f \ \textit{es n-Lipschitz en algún } x \in [0,1] \right\}.$$

Afirmamos que F_n es un conjunto cerrado nunca-denso en $C[0,1]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y veamos que F_n es cerrado en $C[0,1]$. En efecto, sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en F_n convergiendo uniformemente a una función $f \in C[0,1]$. Por definición, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $x_k \in [0,1]$ tal que $|f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$ para todo $y \in$. Por la compacidad de $[0,1]$, la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ posee una subsucesión, que seguiremos denotando del mismo modo, que converge a algún un $x \in [0,1]$. Entonces la continuidad de cada f_k así como la convergencia uniforme de la sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ hacia f nos garantizan que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| \ + \ |f_k(x) - f_k(x_k)| \ + \ |f_k(x_k) - f_k(y)| \ + \ |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| \ + \ n|x_k - x)| \ + \ n|x_k - y| \ + \ |f_k(y) - f(y)| \ \ \to \ \ n|x-y| \end{aligned}$$

para cada $y \in [0,1]$. Esto prueba que $f \in F_n$, por lo que F_n es cerrado.

Para demostrar que F_n es nunca-denso en $C[0,1]$, tomemos cualquier conjunto abierto no vacío V en $C[0,1]$ y veamos que $V \nsubseteq F_n$. Puesto que el conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$, de todas las funciones continuas nunca diferenciables, es denso en $C[0,1]$, resulta que $V \cap \mathcal{ND}[0,1] \neq \varnothing$. Seleccionemos una función $g \in V \cap \mathcal{ND}[0,1]$.

Por el Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue II antes mencionado, tenemos que $F_n \cap \mathcal{ND}[0,1] = \varnothing$, por lo que $g \notin F_n$, es decir, $g \in V \setminus F_n$. Esto prueba que $V \nsubseteq F_n$ y como V era arbitrario, resulta que F_n es nunca-denso. Siendo el conjunto $G_n = C[0,1] \setminus F_n$ un abierto denso en $C[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el Teorema de Categoría de Baire, para concluir que $\mathcal{NL}[0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso en $C[0,1]$.

Para la última parte, sea $f \in \mathcal{NL}[0,1]$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquiera $x \in [0,1]$ se cumple que $|f(x) - f(y)| > n|x-y|$ para algún $y \in [0,1]$; es decir,

$$\sup_{y \neq x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = +\infty$$

para todo $x \in [0,1]$. Esto nos dice que f no tiene derivada en ningún punto de $[0,1]$ y, por lo tanto, la función $f \in \mathcal{ND}[0,1]$. ■

Definición 2.1.3. *Una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice que que* ***no satisface una condición de Lipschitz uniforme de orden** 1 **en cualquier intervalo de*** $[0,1]$ *si, para cualquier subintervalo J de $[0,1]$, se cumple que*

$$\sup_{\substack{x,y \in J \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = +\infty.$$

Para cada $f \in C[0,1]$, sea $Nd(f)$ el conjunto de todos los puntos x de $[0,1]$ donde f no es diferenciable. M. Hata [207] demuestra lo siguiente.

Teorema 2.1.12 (Hata). *Sea $f \in C[0,1]$ la cual no satisface una condición de Lipschitz uniforme de orden* 1 *en cualquier intervalo de* $[0,1]$. *Entonces $Nd(f)$ es residual en* $[0,1]$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$G_n = \left\{ x \in (0,1) \, : \, \sup_{x < y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{y - x} > n \right\}.$$

Es claro que que G_n es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que G_n es denso. Supongamos que $J \cap G_n = \varnothing$ para algún intervalo abierto no vacío J de $[0,1]$. Ahora bien, para todo $x, y \in J$, con $x < y$, tenemos que

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{y - x} \leq n$$

ya que $x \notin G_n$, es decir, f satisface una condición de Lipschitz uniforme de orden 1 en J lo cual viola nuestra hipótesis. Esto prueba de G_n es denso en $[0,1]$. Uno invoca el Teorema de Categoría de Baire para concluir que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso en $[0,1]$ y observar finalmente que

$$G = \left\{ x \in (0,1) \, : \, |D^+ f(x)| + |D_+ f(x)| = +\infty \right\} \subseteq Nd(f).$$

Esto termina la prueba. ■

2.1.6. ‖ ► Funciones continuas nunca monótonas

El próximo ejemplo en nuestra galería tiene que ver con la existencia de funciones continuas nunca monótonas, es decir, funciones continuas que siempre oscilan en cualquier subintervalo no degenerado que se piense. Recordemos que:

Definición 2.1.4. *Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice* ***nunca monótona*** *o* ***siempre oscilante*** *en $[0,1]$ si no existe subintervalo cerrado $[a,b]$ de $[0,1]$ con $a < b$, sobre el cual f es monótona.*

Construir una función siempre discontinua y nunca monótona es muy fácil. Por ejemplo, la función característica de $\mathbb{Q}$ en $[0,1]$, $f = \chi|_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, es una tal función. Observemos que una función nunca monótona en $[0,1]$ no debe confundirse con una función que no es monótona en $[0,1]$. ¿Existen funciones continuas nunca monótona? La respuesta, como ha de esperarse, es afirmativa. En efecto, teniendo en cuenta el Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue I a la mano, se sigue que toda función continua nunca diferenciable en $[0,1]$ es una función continua nunca monótona. En particular, la función continua nunca diferenciable de Weierstrass es nunca monótona. He aquí otro ejemplo tomado de [176], Example 21, p. 29.

Sea $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica con período 1 definida por

$$f_0(x) \;=\; |x| \quad \text{si} \quad |x| \leq 1/2,$$

y para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_0(x+n) \;=\; f_0(x) \quad \text{si} \quad |x| > 1/2.$$

Si para $n \geq 1$, definimos

$$f_n(x) \;=\; 4^{-n} f_0(4^n x),$$

resulta que f_n es una función periódica de período 4^{-n} cuyo valor máximo es $\frac{1}{2}4^{-n}$. Se sigue del M-Test de Weierstrass que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por,

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0(4^n x)}{4^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

es continua, y con un poquito de esfuerzo se puede probar que ella es nunca monótona. En efecto, sean $k \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$ y defínase $a := k4^{-m}$ y $h := 4^{-2m-1}$. Entonces

$$f_n(a) \;=\; 0, \text{ si } \; n \geq m, \qquad \text{y} \qquad f_n(a \pm h) \;=\; 0, \text{ si } \; n \geq 2m+1,$$

de donde se sigue que $f(a \pm h) - f(a) \geq h$. Finalmente, aproximando cualquier elemento arbitrario $x \in \mathbb{R}$, pero fijo, por $k4^{-m}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y algún $m \in \mathbb{N}$ y aplicando el razonamiento anterior, podemos garantizar que f es nunca monótona.

Denotemos por $\mathcal{NM}[0,1]$ el conjunto de todas las funciones $f \in C[0,1]$ que son nunca monótonas. Ya hemos visto, como consecuencia del Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue I, que $\mathcal{ND}[0,1] \subseteq \mathcal{NM}[0,1]$ de donde resulta, por la residualidad de $\mathcal{ND}[0,1]$ en $C[0,1]$, que $\mathcal{NM}[0,1]$ también es residual en $C[0,1]$. Vamos a demostrar, como en los casos anteriores, que efectivamente $\mathcal{NM}[0,1]$ es residual en $C[0,1]$ por una aplicación del Teorema de Categoría de Baire sin apelar al expediente de la residualidad de $\mathcal{ND}[0,1]$ en $C[0,1]$.

Teorema 2.1.13. *El conjunto $\mathcal{NM}[0,1]$ es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.*

Prueba. Sea $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los subintervalos cerrados de $[0,1]$ con extremos racionales distintos. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$C_n \;=\; \big\{ f \in C[0,1] \,:\, f \; \text{ es no decreciente en } I_n \big\}.$$

Afirmamos que C_n *es cerrado.* En efecto, sea $f \in \overline{C}_n$. Entonces existe una sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ en C_n tal que $f_k \to f$ uniformemente. Sean $x,y \in [0,1]$ con $x < y$. Como $f_k \in C_n$, entonces $f_k(x) \leq f_k(y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$

y así, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \leq \lim_{k\to\infty} f_k(y) = f(y)$, lo cual prueba que $f \in C_n$. Similarmente, definiendo $D_n = \{ f \in C[0,1] : f$ es no creciente en $I_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que D_n es cerrado. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, y sea

$$G_n \;=\; C[0,1] \smallsetminus (C_n \cup D_n) = \{ f \in C[0,1] \;:\; f \;\textit{no es monótona sobre}\; I_n \}.$$

Vamos a demostrar que G_n es abierto y denso en $C[0,1]$. Que G_n es abierto en $C[0,1]$ sigue inmediatamente por ser el complemento de un conjunto cerrado. Para ver que G_n es denso en $C[0,1]$, es suficiente demostrar que G_n es denso en $\mathrm{CL}[0,1]$, el conjunto de todas las funciones continuas lineales a trozos en $[0,1]$ que, como sabemos, es denso en $C[0,1]$ (Lema 2.1.1).

Sea $f \in \mathrm{CL}[0,1] \smallsetminus G_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que f es lineal a trozo así como monótona sobre I_n, podemos elegir un intervalo $[a,b] \subseteq I_n$ tal que $b-a$ sea lo suficientemente pequeño de modo que $|f(b) - f(a)| < \varepsilon/2$ y donde, además, f sea lineal y no decreciente sobre $[a,b]$. Definamos ahora h sobre $[0,1]$ por

$$h(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus (a,b) \\ f(b) + \dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{si} \quad x = \dfrac{a+b}{2} \\ \text{lineal sobre } \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \;\; \text{y} \;\; \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right], & \end{cases}$$

Puesto que h no es monótona sobre $[a,b]$ tenemos que $h \in G_n$ y

$$\| h - f \|_\infty \;=\; h\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq f(b) + \frac{\varepsilon}{2} - f(a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que G_n es denso en $\mathrm{CL}[0,1]$ y, en consecuencia, denso en $C[0,1]$. Puesto que cada elemento de la sucesión $(G_n)_{n=1}^\infty$ es abierto y denso en $C[0,1]$, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ es un G_δ-denso en $C[0,1]$. Observemos que si $f \in G$, entonces $f \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente, f no es monótona en ningún subintervalo de $[0,1]$ con extremos racionales. Sea ahora J cualquier intervalo en $[0,1]$. Entonces existe un subintervalo I con extremos racionales tal que $I \subseteq J$, pero como I es uno de la sucesión $(I_n)_{n=1}^\infty$ concluimos que f no es monótona en ningún subintervalo de $[0,1]$. Esto termina la prueba. ■

2.1.7. ‖ ► Funciones nunca monótonas de la 2ª especie y de tipo no monótonas

Una clase más pequeña que las funciones continuas nunca monótonas y que también constituye un conjunto residual en $C[0,1]$ son las funciones continuas nunca monótonas de la 2^a especie.

Definición 2.1.5. *Una función continua nunca monótona $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice* ***nunca monótona de la** 2^a **especie** *si la función $f_{+r}(x) := f(x) + rx$ es nunca monótona para todo $r \in \mathbb{R}$.*

La clase de todas las funciones continuas nunca monótonas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que son de la 2^a especie será denotada por $\mathcal{NM}_2[0,1]$. A estas funciones también se les conoce con el nombre de **funciones de tipo nunca monótonas** ([76], p. 210). Observe que si f es nunca monótona pero no es de la 2^a especie, entonces existe algún $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) + rx$ es monótona en algún subintervalo $I \subset [0,1]$.

Notemos que cualquier función $f \in C[0,1]$ nunca diferenciable es nunca monótona y, por consiguiente, para cualquier $r \in \mathbb{R}$, la función $f(x) + rx$ también es nunca monótona en $[0,1]$. En consecuencia, cualquier función nunca diferenciable f en $C[0,1]$ es una función nunca monótona de la 2^a especie; esto es:

‖ ► $\mathcal{ND}[0,1] \subseteq \mathcal{NM}_2[0,1]$.

Por otro lado, ninguna función diferenciable nunca monótona puede ser de la 2^a especie, es decir,

$\| \blacktriangleright$ $\mathcal{DNM}[0,1] \cap \mathcal{NM}_2[0,1] = \varnothing$.

Prueba. Sea $f \in \mathcal{NM}_2[0,1]$ y supongamos, por un momento, que $f \in \mathcal{DNM}[0,1]$. Por el Ejemplo 2, página 101, f' es continua sobre un subconjunto G_δ-denso de $[0,1]$; es decir, el conjunto $\mathrm{PC}(f') = \{x \in [0,1] : f' \textit{ es continua en } x\}$ es un G_δ-denso de $[0,1]$. Además, puesto que $Z(f') = \{x \in [0,1] : f'(x) = 0\}$ es un G_δ en $[0,1]$ y ya que $f \in \mathcal{NM}[0,1]$, entonces $Z(f')$ es también denso en $[0,1]$, de donde resulta, por el Teorema de Categoría de Baire, que el conjunto

$$D \;=\; \mathrm{Z}(f') \cap \mathrm{PC}(f') \;=\; \big\{x \in [0,1] : f'(x) = 0 \;\text{ y }\; f' \textit{ es continua en } x\big\}$$

es un G_δ-denso en $[0,1]$. Fijemos un número arbitrario $m > 0$ y sea x cualquier elemento de D. Puesto que $f'(x) = 0$, existe un entorno abierto N_x de x tal que $|f'(y)| < m/2$ para todo $y \in N_x$. Por otro lado, como f' es continua en x resulta que $f(y) + my$ es creciente sobre N_x, de donde se sigue que f no puede ser de la 2^a especie. Esta contradicción establece que $f \notin \mathcal{DNM}[0,1]$. ■

Observe, finalmente, que ninguna función en $\mathcal{NM}_2[0,1]$ puede estar en $\mathcal{DNM}[0,1]$, de donde se deduce la existencia de funciones en $\mathcal{NM}[0,1]$ que no están en $\mathcal{NM}_2[0,1]$.

Puesto que $\mathcal{ND}[0,1] \subseteq \mathcal{NM}_2[0,1]$ y $\mathcal{ND}[0,1]$ es residual en $C[0,1]$, resulta que $\mathcal{NM}_2[0,1]$ también es residual en $C[0,1]$. Volveremos a demostrar este hecho, pero sin apelar a la residualidad de $\mathcal{ND}[0,1]$.

Teorema 2.1.14. *El conjunto* $\mathcal{NM}_2[0,1]$ *es residual en* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Notemos que si $f \in C[0,1] \setminus \mathcal{NM}_2[0,1]$, entonces existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que f_{+r} es monótona sobre algún subintervalo de $[0,1]$. Para cada subintervalo arbitrario I de $[0,1]$, definamos

$$A_I \;=\; \Big\{ f \in C[0,1] : \textit{ existe } r \in \mathbb{R} \textit{ con } f_{+r} \textit{ no decreciente sobre } I \Big\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde, para cada entero $n \geq 1$,

$$A_n = \Big\{ f \in C[0,1] : \textit{ existe } r \in [-n,n] \textit{ con } f_{+r} \textit{ no decreciente sobre } I \Big\}.$$

Vamos a demostrar que cada A_n es cerrado y nunca-denso en $C[0,1]$.

• A_n *es cerrado*. Sea $(f_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión en A_n tal que $f_k \to f$ uniformemente. Entonces $f \in C[0,1]$. Para probar que $f \in A_n$, notemos que para cada $k \geq 1$, existe un $r_k \in [-n,n]$ tal que

$$f_k(x) + r_k x \;\geq\; f_k(y) + r_k y \qquad \text{si} \quad x \geq y \quad \text{con} \quad x, y \in I.$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(r_{k_i})_{i=1}^\infty$ de $(r_k)_{i=1}^\infty$ tal que $r_{k_i} \to r \in [-n,n]$. Por esto, $f(x) + rx \geq f(y) + ry$ siempre que $x \geq y$ con $x, y \in I$ y, así, $f \in A_n$.

• A_n *es nunca-denso*. Lo que queremos demostrar es que A_n no contiene ninguna bola abierta. Sea $U(f,\varepsilon)$ una bola abierta con centro f y radio $\varepsilon > 0$, donde $f \in A_n$ y $\varepsilon > 0$. Sea $g \in \mathcal{ND}[0,1]$ con $\|g\|_\infty \leq 1$. Afirmamos que $f + \varepsilon g \in U(f,\varepsilon) \setminus A_n$. Supongamos que $f + \varepsilon g \in A_n$. Entonces existe un $r_1 \in [-n,n]$ tal que

$$h(x) := f(x) + \varepsilon g(x) + r_1 x$$

es no decreciente sobre I y, en consecuencia, diferenciable λ-casi siempre sobre I gracias al Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue. Además, como $f \in A_n$, existe otro $r_2 \in [-n,n]$ tal que $f(x)+r_2x$ es no decreciente sobre I y, como antes, diferenciable λ-casi siempre sobre I. Notemos ahora que $h(x)-r_1x+r_2x = (f(x)+r_2x)+\varepsilon g(x)$, de donde se sigue

$$g(x) = \frac{h(x)-(f(x)+r_2x)-r_1x+r_2x}{\varepsilon}$$

es diferenciable λ-casi siempre sobre I, lo cual es imposible pues $g \in \mathcal{ND}[0,1]$. Esta contradicción establece que $f+\varepsilon g \notin A_n$ y, entonces, A_n es nunca-denso.

Por lo anterior, cada conjunto A_I es de primera categoría en $C[0,1]$. Lo mismo es cierto para el conjunto $B_I = \{f \in C[0,1] : -f \in A_I\}$. Sea $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ una enumeración del conjunto de todos los subintervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y definamos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{I_k}$ y $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{I_k}$. Entonces A y B son conjuntos de primera categoría y como $C[0,1] \setminus \mathcal{NM}_2[0,1] = A \cup B$ es de primera categoría, el Teorema de Categoría de Baire nos asegura que $\mathcal{NM}_2[0,1] = C[0,1] \setminus (A \cup B)$ es residual en $C[0,1]$. ∎

Denotemos por $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ el conjunto de todas las funciones $f \in C[0,1]$ que son 1-Lipschitz en $[0,1]$ con la métrica del supremo. Similar al anterior tenemos el siguiente resultado de Borwein y Wang [64].

Teorema 2.1.15 (Borwein-Wang). *En* $(\mathrm{Lip}_1[0,1], d_\infty)$*, el conjunto*

$$G = \Big\{ f \in Lip_1[0,1] : f(x) - rx \in \mathcal{NM}[0,1], \text{ para todo } |r| < 1 \Big\}$$

es residual.

Prueba. Sea I un intervalo abierto no vacío de $[0,1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$E_I^n = \left\{ f \in \mathrm{Lip}_1[0,1] : \textit{ existe } r \in \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \textit{ con } f(x)-rx \ \textit{ no decreciente sobre } I \right\}.$$

Procediendo como en la demostración del resultado anterior se prueba que cada conjunto E_I^n es cerrado. Veamos que también es nunca-denso. Sea $U(f, 5\varepsilon)$ una bola abierta en $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ donde $f \in E_I^n$ y $\varepsilon > 0$. Fijemos $x_0 \in (0,1)$ tal que $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq I$ y definamos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (x_0-\varepsilon, x_0] \\ 1 & \text{si } x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \\ f'(x) & \text{si } x \notin (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \quad \text{y siempre que } f'(x) \text{ exista.} \end{cases}$$

Si ahora definimos $f_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ declarando que

$$f_\varepsilon(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$$

para todo $x \in [0,1]$, resulta que $f_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_1[0,1]$ y

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = \left| \int_0^x (f'(t) - g(t)) \right| \le \int_0^1 |f'(t) - g(t)|\,dt = 4\varepsilon.$$

Observemos, sin embargo, que sobre I, la función $f_\varepsilon(x) - rx$ con cualquier $r \in [-1+1/n, 1-1/n]$ no es no decreciente, pues sobre el intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0)$ ella tiene derivada $-1-r \le -1/n$. Esto prueba que E_I^n es nunca-denso en $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ y, en consecuencia, el conjunto $E_I = \bigcup_{n=1}^\infty E_I^n$ es de primera categoría en $\mathrm{Lip}_1[0,1]$.

Similarmente, si definimos

$$F_I^n = \left\{ f \in \mathrm{Lip}_1[0,1] : \textit{ existe } r \in \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \textit{ con } f(x) - rx \textit{ no creciente sobre } I \right\},$$

y $F_I = \bigcup_{n=1}^\infty F_I^n$, entonces F_I es de primera categoría en $\mathrm{Lip}_1[0,1]$. Como antes, sea $(I_k)_{k=1}^\infty$ el conjunto de todos los subintervalos de $[0,1]$ con extremos racionales. Entonces, el conjunto $G = \mathrm{Lip}_1[0,1] \setminus (E \cup F)$ es residual en $\mathrm{Lip}_1[0,1]$, donde $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_{I_k}$ y $F = \bigcup_{k=1}^\infty F_{I_k}$. ■

Continuando con nuestra galería de monstruos demostraremos ahora que la familia de todas las funciones continuas que son de tipo no monótona (esta colección es, en el sentido de inclusión, más pequeña que las funciones continuas nunca monótonas de la 2^a especie) también es un G_δ-denso en $C[0,1]$.

Definición 2.1.6. *Sea $f \in C[0,1]$. Decimos que f es **no-decreciente en** $x \in [0,1]$ si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$f(t) \le f(x) \textit{ para todo } t \in (x-\delta, x) \cap [0,1] \quad y \quad f(t) \ge f(x) \textit{ para todo } t \in (x, x+\delta) \cap [0,1].$$

*La función f se dice **no-creciente en** $x \in [0,1]$ si $-f$ es no-decreciente en x. Diremos que f es **monótona en** $x \in [0,1]$ si f es no-decreciente o no-creciente en x. Si existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que la función $f_{+s}(x) := f(x) + sx$ es monótona en x, entonces decimos que f es de **tipo monótona en** x. Si f no es de tipo monótona en ningún punto de $[0,1]$, entonces se dice que f es de **tipo no-monótona**.*

Denotemos por $\mathcal{TNM}[0,1]$ el conjunto de todas las funciones en $C[0,1]$ que son de tipo no-monótona. Es un ejercicio sencillo demostrar que cualquier función f en $\mathcal{TNM}[0,1]$ pertenece a $\mathcal{NM}_2[0,1] \subseteq \mathcal{NM}[0,1]$. El siguiente resultado fue demostrado por A. M. Bruckner y K. M. Garg [80] en 1977.

Teorema 2.1.16 (Bruckner-Garg). *El conjunto $\mathcal{TNM}[0,1]$ es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.*

Prueba. Sea A el conjunto de todas las funciones en $f \in C[0,1]$ para la cual existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que f_{+s} es no-decreciente en algún punto de $[0,1]$ y notemos que $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n = \Big\{ & f \in C[0,1] : \textit{ existe } \ s \in [-n,n], \ y \ \textit{ algún } \ x \in [0,1], \ \textit{ tal que} \\ & f_{+s}(t) \le f_{+s}(x) \ \ si \ \ t \in (x-1/n, x) \cap [0,1] \ \ y \ \ f_{+s}(t) \ge f_{+s}(x) \ \ si \ \ t \in (x, x+1/n) \cap [0,1] \Big\}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar, en primer lugar, que cada uno de los conjuntos A_n es cerrado y, posteriormente, ver que ellos son nunca-densos en $C[0,1]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$.

- A_n *es cerrado*. Sea $(f_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión en A_n convergiendo uniformemente a una función $f \in C[0,1]$. Por definición, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $s_k \in [-n,n]$ y un $x_k \in [0,1]$ tal que $f_k(t) + s_k t \le f_k(x_k) + s_k x_k$ si $t \in (x_k - 1/n, x_k) \cap [0,1]$, mientras que $f_k(t) + s_k t \ge f_k(x_k) + s_k x_k$ si $t \in (x_k, x_k + 1/n) \cap [0,1]$. Por compacidad, existe una sucesión creciente $(k_i)_{i=1}^\infty$ de enteros positivos tal que $(s_{k_i})_{i=1}^\infty$ converge a algún $s \in [-n,n]$ y $(x_{k_i})_{i=1}^\infty$ converge a algún $x \in [0,1]$. Se sigue ahora de la convergencia uniforme de la sucesión $(f_k)_{k=1}^\infty$ que $f_{k_i}(x_{k_i}) \to f(x)$, de donde se obtiene que $f_{+s}(t) = f(t) + st \le f_{+s}(x) = f(x) + sx$ si $t \in (x-1/n, x) \cap [0,1]$, mientras que $f(t) + st \ge f(x) + sx$ si $t \in (x, x+1/n) \cap [0,1]$. Esto prueba que $f \in A_n$ y, por lo tanto, A_n es cerrado.
- A_n *es nunca-denso*. Sea V un subconjunto abierto no vacío de $C[0,1]$. Puesto que, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, el conjunto de los polinomios algebraicos $P[0,1]$ es denso en $C[0,1]$, resulta

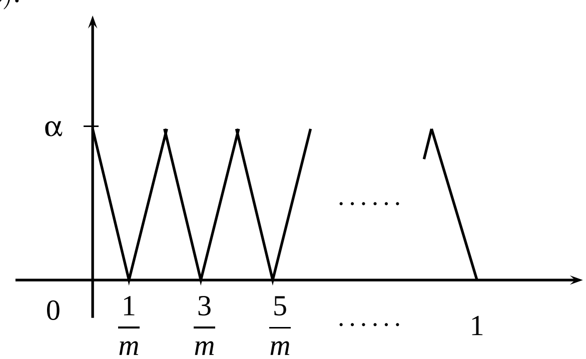
que $V\cap P[0,1]\neq\varnothing$. Sea $p\in V\cap P[0,1]$ y escojamos un $\varepsilon>0$ de modo que la bola abierta con centro en p y radio ε, $U(p,\varepsilon)$ esté totalmente incluida en V. Sean $0<\alpha<\varepsilon$, $\beta=\sup\big\{|p'(x)|:x\in[0,1]\big\}$ y elijamos un entero impar m de tal que $m>\text{máx}\{2n,3(\beta+n)/\alpha\}$. Para la partición $P=\big\{0,1/m,2/m,\ldots,(m-1)/m,1\big\}$, definamos la función $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ por

$$h\left(\frac{2i}{m}\right)=\alpha,\qquad h\left(\frac{2i+1}{m}\right)=0,\qquad i=0,1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}$$

y h es lineal en cada intervalo $[i/m,(i+1)/m]$, para $i=0,1,2,\ldots,m-1$, es decir,

$$h(x)=\mp\frac{\alpha}{1/m}\left(x-\frac{2i+1}{m}\right)$$

dependiendo si $x\in[2i/m,(2i+1)/m]$ o $x\in[(2i+1)/m,(2i+2)/m]$, respectivamente. Entonces $h\in C[0,1]$ y, además, $f=p+h\in U(p,\varepsilon)$.



Afirmamos que $f\notin A_n$. Observe que $f\notin A_n$ significa que: para todo $x\in[0,1]$ y todo $s\in[-n,n]$ al menos una de las siguientes dos desigualdades no se cumple

$$\begin{aligned} f_{+s}(t) &\le f_{+s}(x) \quad \text{si} \quad t\in(x-1/n,x)\cap[0,1]\\ f_{+s}(t) &\ge f_{+s}(x) \quad \text{si} \quad t\in(x,x+1/n)\cap[0,1]. \end{aligned}$$

Para ver que $f\notin A_n$, tomemos cualquier $x\in[0,1]$. Entonces existe un $0\le i\le(m-1)/2$ tal que

$$\frac{2i}{m}\le x<\frac{2i+2}{m}.$$

Existen tres casos a considerar según $x\in[2i/m,(2i+1)/m)$, $x\in[(2i+1)/m,(2i+3/2)/m)$ o x esté en $[(2i+3/2)/m,(2i+2)/m]$.

• Primer caso: Suponga que $2i/m\le x<(2i+1)/m$. Entonces $x<(2i+1)/m<x+1/n$ y se sigue del Teorema del Valor Medio para derivadas que existen ξ_1,ξ_2 en $(2i/m,(2i+1)/m)$ tal que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i+1}{m}\right)-f(x) &= p\left(\frac{2i+1}{m}\right)-p(x)+h\left(\frac{2i+1}{m}\right)-h(x)\\ &= p'(\xi_1)\left(\frac{2i+1}{m}-x\right)+h'(\xi_2)\left(\frac{2i+1}{m}-x\right)\\ &\le \beta\left(\frac{2i+1}{m}-x\right)-\frac{\alpha}{1/m}\left(\frac{2i+1}{m}-x\right)\\ &< -n\left(\frac{2i+1}{m}-x\right). \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$f\left(\frac{2i+1}{m}\right) + n\left(\frac{2i+1}{m}\right) < f(x) + nx, \quad \text{donde} \quad x < (2i+1)/m < x+1/n.$$

• Segundo caso: Suponga que $(2i+1)/m \leq x < (2i+3/2)/m$. Entonces $x-1/n < 2i/m < x$, y usando el hecho de que h es creciente en el intervalo $[(2i+1)/m, (2i+2)/m]$, resulta que $h(x) \leq h((2i+3/2)/m) = \alpha/2$. De nuevo, por el Teorema del Valor Medio para derivadas, tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i}{m}\right) - f(x) &= p\left(\frac{2i}{m}\right) - p(x) + h\left(\frac{2i}{m}\right) - h(x) \\ &= p'(\xi)\left(x - \frac{2i}{m}\right) + \alpha - h(x) \quad \text{(para algún } \xi) \\ &\geq \beta\left(\frac{2i}{m} - x\right) + \alpha - \frac{\alpha}{2} \\ &> \beta\left(\frac{2i}{m} - x\right) + \frac{3(\beta+n)}{2m} \\ &> -n\left(\frac{2i}{m} - x\right), \end{aligned}$$

es decir,

$$f\left(\frac{2i}{m}\right) + n\left(\frac{2i}{m}\right) > f(x) + nx, \quad \text{donde} \quad x-1/n < 2i/m < x$$

• Tercer caso: Suponga que $(2i+3/2)/m \leq x < (2i+2)/m$. Entonces $x < (2i+3)/m < x+1/n$ y, como antes,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i+3}{m}\right) - f(x) &= p\left(\frac{2i+3}{m}\right) - p(x) + h\left(\frac{2i+3}{m}\right) - h(x) \\ &= p'(\xi)\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) - h(x) \quad \text{(para algún } \xi) \\ &\leq \beta\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) - \frac{\alpha}{2} \\ &< \beta\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) + \frac{3(\beta+n)}{2m} \\ &< -n\left(\frac{2i+3}{m} - x\right), \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$f\left(\frac{2i+3}{m}\right) + n\left(\frac{2i+3}{m}\right) < f(x) + nx, \quad \text{donde} \quad x < (2i+3)/m < x+1/n.$$

Esto prueba que $f \notin A_n$ y, así, A_n es nunca-denso en $C[0,1]$. Por esto tenemos que A es un F_σ de primera categoría en $C[0,1]$. Denotemos, finalmente, por B el conjunto $\{-f : f \in A\}$. Entonces B es igualmente un F_σ de primera categoría en $C[0,1]$ y se sigue del Teorema de Categoría de Baire que el conjunto $\mathcal{TNM}[0,1] = C[0,1] \setminus (A \cup B)$ es un G_δ-denso en $C[0,1]$. ■

2.1.8. ‖ ► Funciones que no cruzan líneas

Uno puede modificar ligeramente la definición de función monótona en un punto $x \in [0,1]$ para obtener una nueva familia de funciones continuas cuyas gráficas no las "cruzan" ninguna línea recta. La idea intuitiva de esta noción parte del hecho de que la mayoría de las funciones continuas con las que uno se suele tropezar en un curso de cálculo diferencial tienen la propiedad de que en algún punto de su gráfica, digamos $(x_0, f(x_0))$, se puede encontrar una línea recta que pasa por dicho punto y que a la izquierda de x_0 un trozo de la recta (pero no toda la recta) está, digamos, por encima del gráfico de la función y a la derecha de x_0 otro trozo de la misma línea recta está por debajo de dicho gráfico. Para hacer precisa esta idea tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.7. *Sea $f \in C[a,b]$ y suponga que L es una línea recta en el plano $\mathbb{R}^2$, es decir, $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función lineal continua. Diremos que L **cruza a** f (o que f **cruza a** L) **localmente** en algún punto $x_0 \in (a,b)$, si $f(x_0) = L(x_0)$ y existe un $\delta > 0$ tal que*

(1) *$L(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0] \cap [a,b]$ y $L(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [x_0, x_0 + \delta] \cap [a,b]$,*

o bien,

(2) *$L(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0] \cap [a,b]$ y $L(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [x_0, x_0 + \delta] \cap [a,b]$.*

Diremos que L **cruza a** f si L cruza a f localmente en algún punto $x \in (a,b)$.

Los siguientes ejemplos pueden servir para aclarar alguna duda si es que la hubiere.

Ejemplo 2.1.2.

(a) Considere la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$. En el punto $x_0 = 0$, la recta $L(x) = 0$, es decir, el eje X, cruza a f localmente en ese punto pues, en el intervalo $[-1,0]$, la recta está por debajo de la gráfica de f, mientras que en el intervalo $[0,1]$ la recta está por encima de la gráfica de f. En general, cualquier línea recta no vertical que pase por el punto $(0,0)$ cruza a f localmente en ese punto. Por otro lado, la línea tangente en el punto $(1/\sqrt{3}, -2/3\sqrt{3})$ no cruza a f localmente en dicho punto. Sin embargo, existen líneas tangentes horizontales que cruzan localmente a una función. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ posee una recta tangente en $(0,0)$ que la cruza en dicho punto.

(b) En el siguiente ejemplo, la función considerada oscila muy fuertemente alrededor del punto $(0,0)$ y es razonable pensar que en dicho punto ninguna recta la cruza localmente. En efecto, si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es definida por

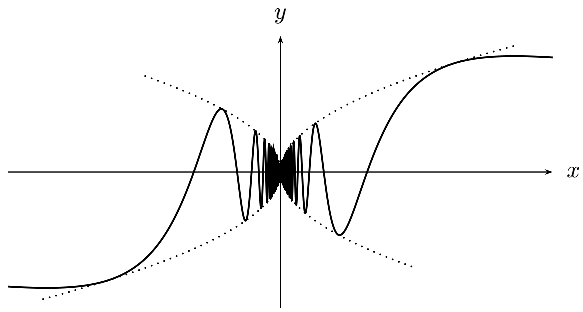
$$f(x) \;=\; \sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}(1/x), \qquad f(0) \;=\; 0,$$

entonces es imposible que por el punto $(0,0)$ pase una línea recta que cruce a f.

Observe que en cualquier otro punto del gráfico de f existen muchas líneas rectas que cruzan a f localmente. Aunque, como en el caso de las funciones continuas nunca diferenciables, puede ser difícil imaginar y, peor aun, construir una función que no sea cruzada localmente por ninguna línea recta, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que tales monstruos abundan en $C[0,1]$.

Denotemos por $\mathcal{NCL}[0,1]$, el conjunto formado por todas las funciones $f \in C[0,1]$ tal que, en cualquier punto $x \in (0,1)$, ninguna línea recta cruza a f localmente en dicho punto. Es importante destacar que

$$\mathcal{NCL}[0,1] \subsetneqq \mathcal{ND}[0,1] \qquad \text{y} \qquad \mathcal{NCL}[0,1] \subsetneqq \mathcal{NM}[0,1]. \tag{1}$$



En efecto, sea $f \in \mathcal{NCL}[0,1]$ y suponga que $f \notin \mathcal{ND}[0,1]$. Esto significa que f es diferenciable en algún punto $x_0 \in (0,1)$. Si $\gamma = f'(x_0)$, entonces cualquier línea recta L cuya pendiente es distinta de γ y que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ cruza a f localmente en dicho punto y, por la tanto $f \notin \mathcal{NCL}[0,1]$. Esta contradicción establece nuestra primera inclusión.

Para demostrar la segunda inclusión, observe que si $f \in C[0,1]$ es monótona sobre un subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$, entonces es claro que existen muchas líneas rectas que cruzan a f. De hecho, cualquier línea horizontal $L(x) = k$, donde k es cualquier número real entre $f(a)$ y $f(b)$, cruza a f. Esto significa que $\mathcal{NCL}[0,1] \subsetneqq \mathcal{NM}[0,1]$.

La demostración del siguiente resultado es casi una copia al carbón a la del Teorema de Bruckner-Garg.

Teorema 2.1.17. *El conjunto* $\mathcal{NCL}[0,1]$ *es residual en* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Para cada $f \in C[0,1]$ y cada $\gamma \in \mathbb{R}$ nos será de gran utilidad definir, como en el Teorema de Bruckner-Garg, la función $f_{-\gamma}$ por

$$f_{-\gamma}(x) = f(x) - \gamma x, \qquad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Observe que la función $f_{-\gamma}$ se obtiene de f substrayendo la función lineal $L(x) = \gamma x$ de f. Además, una línea recta con pendiente γ cruza el gráfico de f si, y sólo si, la correspondiente línea horizontal cruza el gráfico de $f_{-\gamma}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el conjunto de todas las funciones $f \in C[0,1]$ para las cuales existe un $\gamma \in [-n,n]$ y un $x \in [0,1]$ tal que

$$f_{-\gamma}(t) \leq f_{-\gamma}(x) \quad \text{cuando } t \in [0,1] \cap (x - 1/n, x)$$

y

$$f_{-\gamma}(t) \geq f_{-\gamma}(x) \quad \text{cuando } t \in [0,1] \cap (x, x + 1/n).$$

Nótese que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ y que el número n en la definición de A_n juega dos roles importantes. En efecto, si $f \in A_n$, entonces

(a) existe *al menos una* línea recta que cruza a f cuya pendiente está entre $-n$ y $+n$, y

(b) la fracción $1/n$ indica la longitud de un intervalo en el cual la recta debe estar arriba o abajo del gráfico de la función antes de cruzarla de nuevo.

Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Veamos que A es de primera categoría en $C[0,1]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$.

(1) A_n *es cerrado en* $C[0,1]$. La prueba es enteramente idéntica a la demostración del Teorema de Bruckner-Garg.

(2) A_n *es nunca-denso en* $C[0,1]$. Sea $U(f,\varepsilon)$ una bola abierta con centro en $f \in A_n$ y radio $\varepsilon > 0$. Vamos a demostrar que $U(f,\varepsilon) \nsubseteq A_n$. En efecto, como $\mathcal{ND}[0,1]$ es denso en $C[0,1]$, entonces $U(f,\varepsilon) \cap \mathcal{ND}[0,1] \neq \varnothing$.

Escojamos $g \in U(f,\varepsilon) \cap \mathcal{ND}[0,1]$ pero tal que $g \in \mathcal{NCL}[0,1]$. Resulta que $g \in U(f,\varepsilon) \setminus A_n$ y termina la prueba de que A es de primera categoría.

De modo completamente similar, se prueba que el conjunto $B = \{f \in C[0,1] : -f \in A\}$ es de primera categoría. Finalmente,

$$\mathcal{NCL}[0,1] \;=\; C[0,1] \setminus (A \cup B)$$

es, por el Teorema de Categoría de Baire, residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. ■

Comentario Adicional 2.1.4 Del resultado anterior y las inclusiones en (1), tenemos una nueva prueba de que los conjuntos $\mathcal{ND}[0,1]$ y $\mathcal{NM}[0,1]$ son residuales en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nunca monótonas juegan un papel muy importante en la Teoría de la Subdiferenciabilidad de Funciones. De hecho, ellas constituyen el ingrediente clave para la construcción de funciones continuas, absolutamente continuas y Lipschitz con subdiferenciales grandes sobre la recta real. Para una breve incursión en este campo, podemos invitar al lector a echarle una mirada al reciente artículo de Xinafu Wang [438] en donde él demuestra, entre otros, los siguientes resultados. (Los símbolos $\partial_c f$ y $\partial_a f$ representan la subdiferencial de Clarke y la subdiferencial aproximada de f respectivamente. Las definiciones pueden verse en [438], pág. 138-140.)

Wang (1). *Si $f \in C[0,1]$ es nunca monótona, entonces el conjunto de todos los puntos $x \in [0,1]$ donde f es oscilante, tanto a la derecha como a la izquierda de x, es residual en $[0,1]$.*

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice *no-decreciente (no-creciente) a la derecha de* $t \in [0,1]$ si existe un $h > 0$ tal que $f(t) \le f(x)$ (respectivamente, $f(x) \le f(t)$) para todo $t < x < t+h$. Si f no es ni no-decreciente ni no-creciente a la derecha de t, entonces decimos que f es *oscilante a la derecha de t*. De forma similar se define *oscilante a la izquierda de t*.

Sea X el conjunto de todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y no decrecientes en $[0,1]$, dotado de la métrica uniforme d_∞. Entonces (X, d_∞) es un espacio métrico completo.

Wang (2). *En (X, d_∞), el conjunto*

$$G = \big\{ f \in X \,:\, \partial_c f = \partial_a f \equiv [0,+\infty) \big\}$$

es residual.

Si H denota la familia de las funciones $f \in C[0,1]$ que son *estrictamente crecientes* tales que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, dotado de la métrica uniforme heredada de $C[0,1]$, entonces H no es necesariamente cerrado en $C[0,1]$. Pero H es un G_δ en el espacio métrico completo $\overline{H}^{d_\infty}$ y, en consecuencia, por el Teorema 1.11.3, es un espacio completamente metrizable. Sea d la métrica compatible que hace que (H, d) sea un espacio métrico completo.

Wang (3). *En (H, d), el conjunto*

$$H_1 = \big\{ f \in H \,:\, \partial_c f = \partial_a f \equiv [0,+\infty) \big\}$$

es residual.

Wang (4). *El conjunto*

$$\big\{ f \in C[0,1] \,:\, \partial_c f = \partial_a f \equiv \mathbb{R} \ \text{ y } \ \partial_- f \ \text{ existe sólo sobre un conjunto de primera categoría} \big\}$$

es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Wang (5). *En $Lip_M[0,1]$, el conjunto*

$$L = \big\{ f \in \mathrm{Lip}_M[0,1] \,:\, \partial_c f = \partial_a f \equiv [-M, M] \big\}$$

es residual.

2.1.9. ‖ ► Funciones continuas con un conjunto denso de máximos locales propios

Como en el caso de las funciones continuas nunca diferenciables, la existencia de abundante funciones continuas que poseen un conjunto denso numerable de máximos locales propios también se puede establecer por una aplicación del Teorema de Categoría de Baire, un resultado demostrado por Drobot y Morayne en [140] y que expondremos a continuación.

Definición 2.1.8. *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función. Diremos que f posee un* ***máximo local propio*** *en $x\in[0,1]$, si existe un entorno abierto V_x de x tal que $f(y)<f(x)$ para todo $y\in V_x\setminus\{x\}$.*

Es fácil demostrar que *si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función cualquiera, entonces el conjunto de todos los puntos $x\in[0,1]$ que son máximos locales propios de f es a lo más numerable*. En efecto, sea $\mathcal{Q}$ la familia de todos los subintervalos abiertos de $[0,1]$ con extremos racionales distintos. Resulta que $\mathcal{Q}$ es numerable gracias a la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. Para cada máximo local propio x de f, escojamos uno y sólo un conjunto $V_x\in\mathcal{Q}$ tal que $x\in V_x$ y $f(y)<f(x)$ para todo $y\in V_x\setminus\{x\}$. La correspondencia $x\mapsto V_x$ es claramente uno a uno con lo que demostrada nuestra afirmación. Lo anterior nos conduce a formularnos la siguiente pregunta: ¿Existe una función continua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ poseyendo un máximo local propio en cada punto de un conjunto *denso numerable*? Aunque una tal función existe, su gráfico no es, en lo absoluto, fácil de visualizar.

La siguiente función, construida por E. E. Posey y J. E. Vaughan en [359], es un ejemplo de una función continua poseyendo un máximo local propio en cada punto de un conjunto denso numerable: sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales en $\mathbb{R}$ y defina $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$g(x) \;=\; 1-\text{mín}\{1,|x|\}.$$

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

siendo $g_n(x)=A_n g((x-r_n)/w_n)$, y donde los números reales positivos A_n y w_n cumplen ciertas condiciones, posee un máximo local propio en cada r_n (véase, [359] para los detalles).

Denotemos por $\mathrm{MLP}(f)$ el subconjunto de $[0,1]$ formado por todos los máximos locales propios de f. El siguiente es el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1.18 (Drobot-Morayne). *El conjunto*

$$\mathcal{MLP}[0,1] \;=\; \big\{ f\in C[0,1] \;:\; \mathrm{MLP}(f) \text{ es denso en } [0,1]\big\},$$

es residual en $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Para cada subintervalo cerrado no degenerado I de $[0,1]$, es decir, I no se reduce a un punto, definamos

$$G(I) \;=\; \Big\{ f\in C[0,1] \;:\; \text{existe } x\in \mathrm{int}(I) \;\; \text{tal que} \;\; f(x)>f(y) \;\; \text{para todo} \;\; y\in I\setminus\{x\}\Big\}.$$

Sea J un intervalo cerrado contenido en $\mathrm{int}(I)$ y pongamos

$$V(I,J) \;=\; \Big\{ f\in C[0,1] \;:\; \sup\big\{f(x):x\in J\big\} > \sup\big\{f(x):x\in I\setminus \mathrm{int}(J)\big\}\Big\}.$$

Nuestra primera tarea es demostrar que $G(I)$ es denso en $C[0,1]$. Para ver esto, tomemos una función arbitraria $f \in C[0,1]$ y sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $z = \sup\{f(y) : y \in I\}$. Entonces, por la definición de z y la continuidad de f, existe un intervalo abierto $J = (a,b)$ incluido en I tal que

$$f(x) \; > \; z - \varepsilon \quad \text{para todo } x \in J.$$

Construyamos la función $g \in C[0,1]$ del modo siguiente:

$$g(x) \; = \; \begin{cases} \dfrac{2\big(z+\varepsilon - f(a)\big)}{b-a}(x-a) + f(a), & \text{si} \quad a < x < \dfrac{a+b}{2} \\ z+\varepsilon, & \text{si} \quad x = \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{-2\big(z+\varepsilon) - f(b)\big)}{b-a}(x-b) + f(b), & \text{si} \quad \dfrac{a+b}{2} < x < b \\ f(x), & \text{si} \quad x \in I \setminus J. \end{cases}$$

Es claro que, por construcción, $g \in G(I)$ y, además, $d_\infty(f,g) \leq 2\varepsilon$. Esto prueba que $G(I)$ es denso en $C[0,1]$. Veamos ahora que $G(I)$ es un G_δ en $C[0,1]$. En primer lugar notemos que, para cada intervalo cerrado J con $J \subseteq \operatorname{int}(I) \subseteq [0,1]$, el conjunto $V(I,J)$ es abierto en $C[0,1]$. En efecto, para cada $f \in V(I,J)$, la bola abierta $U(f,r)$ con centro f y radio $r = \frac{1}{3}\big(\sup\big\{f(x) : x \in J\big\} - \sup\big\{f(x) : x \in I \setminus \operatorname{int}(J)\big\}\big)$ está enteramente contenida en $V(I,J)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$G_n(I) \; = \; \bigcup \Big\{V(I,J) \; : \; J \text{ es un intervalo cerrado con } J \subseteq \operatorname{int}(I) \;\text{ y }\; \operatorname{long}(J) < 1/n\Big\}.$$

Entonces cada $G_n(I)$ es abierto y se cumple que $G(I) = \bigcap_{n=1}^\infty G_n(I)$. En efecto, sea $f \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n(I)$. Entonces $f \in G_n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual significa que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un intervalo cerrado $J_n \subseteq \operatorname{int}(I)$ con $\operatorname{long}(J_n) < 1/n$ tal que

$$\sup\big\{f(x) : x \in J_n\big\} > \sup\big\{f(x) : x \in I \setminus \operatorname{int}(J_n)\big\}.$$

De esto se sigue que $\bigcap_{n=1}^\infty J_n$ contiene todos los puntos donde f alcanza su máximo sobre I, pero como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{long}(J_n) = 0$, el Teorema de Encaje de Cantor nos asegura que $\bigcap_{n=1}^\infty J_n$ consta de un único punto, digamos $x \in \operatorname{int}(I)$. Resulta claro que f alcanza su máximo sobre en x y, sólamente, en x. Esto prueba que $f \in G(I)$ y, en consecuencia, $\bigcap_{n=1}^\infty G_n(I) \subseteq G(I)$. Para demostrar la otra inclusión, tomemos una función arbitraria $f \in G(I)$ y observemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un intervalo cerrado J incluido en el interior de I con longitud menor que $1/n$ y tal que

$$\sup\big\{f(x) : x \in J\big\} > \sup\big\{f(x) : x \in I \setminus \operatorname{int}(J)\big\},$$

de donde obtenemos que $f \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Esto termina la prueba de que $G(I) = \bigcap_{n=1}^\infty G_n(I)$ es un G_δ-denso en $C[0,1]$. Finalmente, si denotamos por $(I_m)_{m=1}^\infty$ una enumeración de todos los subintervalos cerrados con extremos racionales distintos de $[0,1]$, tendremos que, gracias al Teorema de Categoría de Baire, el conjunto $G = \bigcap_{m=1}^\infty G(I_m)$ es un G_δ-denso en $C[0,1]$ y, por supuesto, $G \subseteq \mathcal{MLP}[0,1]$. ■

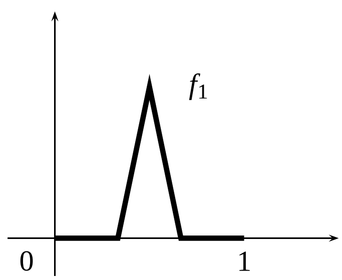
Es importante observar que si

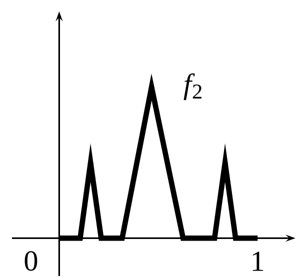
$$\mathcal{MLP}_*[0,1] \; = \; \big\{f \in C[0,1] \; : \; \mathrm{MLP}_*(f) \textit{ es denso en } [0,1]\big\},$$

donde $\mathrm{MLP}_*(f)$ denota el subconjunto de $[0,1]$ formado por todos los mínimos locales propios de f, entonces con un argumento enteramente similar al anterior, se tiene que $\mathcal{MLP}_*[0,1]$ también es residual en $C[0,1]$.

2.1.10. ‖ ► Funciones continuas con un conjunto no numerable de ceros

Recordemos que si $f \in C[0,1]$, entonces los ceros de f se denotan por $Z(f) = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$. ¿Puede una función $f \in C[0,1]$ poseer un conjunto no numerable de ceros y cuya medida de Lebesgue sea cero? La respuesta, indudablemente, es afirmativa. En efecto, sea Γ el conjunto ternario de Cantor en $[0,1]$ y construyamos la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $C[0,1]$ del modo siguiente: sea $\{J_{nk} : n = 1,2,\dots,\ k = 1,2,\dots,2^{n-1}\}$ los intervalos abiertos centrales extraídos en el n-ésimo paso en la construcción de Γ y sea $\{a_{nk} : n = 1,2,\dots,\ k = 1,2,\dots,2^{n-1}\}$ los puntos medios de cada uno de los intervalos en $\{J_{nk} : n = 1,2,\dots,k = 1,2,\dots,2^{n-1}\}$. Puesto que $J_{11} = (1/3,2/3)$ es el primer intervalo extraído en la construcción de Γ, defina f_1 así: $f_1(1/2) = 1$, y en el intervalo J_{11}, $f_1(x)$ está formado por las dos líneas que unen los extremos de $J_{1,1}$ con el punto $(a_{11},1) = (1/2,1)$. Finalmente, $f_1(x) = 0$ si $x \notin J_{11}$ (véase la figura). Una vez que f_{n-1} ha sido construida, definamos f_n como sigue: $f_n(x) = f_{n-1}(x)$ para todo $x \in \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{(n-1)k}$ y, como en la construcción anterior, $f_n(x)$ está formado por la unión de todas las dos líneas que unen cada uno de los extremos de J_{nk} con los puntos $(a_{(n)k}, 1/2^n)$ y para los puntos $x \notin \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{nk}$, $f_n(x) = 0$. Esto termina la construcción de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Defina $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Se puede probar sin mucha dificultad que la convergencia es, en realidad, uniforme por lo que $f \in C[0,1]$ y, además, se cumple que $Z(f) = \Gamma$. Esto nos dice que la cardinalidad de $Z(f)$ es $\mathfrak{c}$ y, por supuesto, $\lambda(Z(f)) = 0$.





En vista del ejemplo anterior uno podría preguntarse, ¿qué tan grande, desde el punto de vista de la categoría de Baire, es el conjunto de todas las funciones $f \in C[0,1]$ con infinitos (no numerable) ceros y tales que la medida de cada uno de esos conjuntos sea cero? Si nos restringimos a cierto subespacio cerrado de $C[0,1]$, el tamaño de tales conjuntos fue medido por Tomás Domínguez Benavides en [134]. En dicho trabajo, Domínguez Benavides considera el siguiente espacio:

$$C_0[0,1] = \{ f \in C[0,1] : Z(f) \neq \varnothing \},$$

con la métrica uniforme heredada de $C[0,1]$, el cual resulta ser un subespacio cerrado de $C[0,1]$ y, por consiguiente, un espacio métrico completo. El conjunto de todas las funciones $f \in C_0[0,1]$ tales que $\operatorname{card}(Z(f)) = \mathfrak{c}$ y $\lambda(Z(f)) = 0$, donde, como siempre, λ denota la medida de Lebesgue en $[0,1]$, es residual en dicho espacio.

Teorema 2.1.19 (Domínguez Benavides). *El conjunto*

$$\mathcal{Z}_\lambda[0,1] = \{ f \in C_0[0,1] : \lambda(Z(f)) = 0 \},$$

es residual en $(C_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$G_n = \{ f \in C_0[0,1] : \lambda(Z(f)) < 1/n \}.$$

• *G_n es abierto en $C_0[0,1]$*. Sea $f \in G_n$. Puesto que $\lambda(Z(f)) < 1/n$, de las propiedades de la medida de Lebesgue, podemos determinar un conjunto abierto $G \subseteq [0,1]$ tal que $Z(f) \subseteq G$, y $\lambda(G) < 1/n$. Siendo G abierto, el número r dado por

$$r := \text{ínf}\left\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1] \setminus G\right\},$$

está bien definido y es no negativo. Afirmamos que $r > 0$. En efecto, supongamos por un momento que $r = 0$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en el compacto $[0,1] \setminus G$ tal que $0 = \text{lím}_{n\to\infty} |f(x_n)|$. Por compacidad, existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que la seguiremos denotando del mismo modo, que converge a algún $x \in [0,1] \setminus G$. La continuidad de f nos garantiza que $\text{lím}_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x)| = 0$, de donde se desprende que $x \in Z(f)$, lo cual es imposible pues $x \notin G \supseteq Z(f)$. Por esto, $r > 0$.

Afirmamos que la bola abierta $U(f,r)$ está contenida en G_n. En efecto, sea $g \in U(f,r)$ y supongamos que $x \in Z(g)$. Puesto que $d_\infty(f,g) < r$, resulta que

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leq d_\infty(f,g) < r$$

de donde se sigue, gracias a la definición de r, que $x \in G$. Esto prueba que $Z(g) \subseteq G$ y, en consecuencia, $\lambda(Z(g)) \leq \lambda(G) < 1/n$. Por esto, $g \in G_n$, con lo cual hemos demostrado que $U(f,r) \subseteq G_n$; es decir, G_n es abierto.

• *G_n es denso en $C_0[0,1]$*. Para ver que esto, consideremos el conjunto $P_0[0,1]$ formado por todos los polinomios algebraicos que habitan en $C_0[0,1]$. Observemos que si $p \in P_0[0,1]$, entonces $\lambda(Z(p)) = 0 < 1/n$, por lo que $p \in G_n$. Lo anterior nos dice que $P_0[0,1] \subseteq G_n$ y como $P_0[0,1]$ es, gracias al Teorema de Aproximación de Weierstrass, denso en $C_0[0,1]$, resulta que también es denso el conjunto abierto G_n en $C_0[0,1]$.

Por ser $(C_0[0,1], d_\infty)$ un espacio métrico completo, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathcal{Z}_\lambda[0,1]$$

es un G_δ-denso en $C_0[0,1]$. ■

Teorema 2.1.20 (Domínguez Benavides). *El conjunto*

$$\mathcal{Z}_\lambda^1[0,1] = \left\{ f \in C_0[0,1] \,:\, \text{card}\,(Z(f)) = \mathfrak{c} \right\},$$

es residual en $(C_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Sea $A = \left\{ f \in C_0[0,1] \,:\, \text{card}\,(Z(f)) < \mathfrak{c} \right\}$. Demostraremos que A es de primera categoría en $C_0[0,1]$. Para lograr tal objetivo, sea $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los subintervalos cerrados de $[0,1]$ cuyos extremos son números racionales distintos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$A_n = \left\{ f \in C_0[0,1] \,:\, f \textit{ tiene un único cero en } I_n \right\}.$$

Afirmamos que A_n es nunca-denso en $C_0[0,1]$. Supongamos, por el contrario, que $\text{int}(\overline{A}_n) \neq \varnothing$. Entonces existen una $f \in A_n$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $U(f,\varepsilon) \subset \overline{A}$. Sea $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ el único cero de f en I_n. Por continuidad, existe un $0 < \delta < \varepsilon/2$, tal que $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2$ siempre que $0 < |x - x_n| < 2\delta$. Definamos la función continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $g \in U(f,\varepsilon)$, de modo que satisfaga

$$g(x) = \begin{cases} (x - x_n) \cdot \text{sen}\left(1/|x - x_n|\right), & \text{si } 0 < |x - x_n| < \delta \\ 0, & \text{si } x = x_n \\ f(x), & \text{si } |x - x_n| \geq 2\delta. \\ \text{lineal en } [x_n - 2\delta, x_n - \delta], \quad [x_n + \delta, x_n + 2\delta], & \end{cases}$$

Suponga que $x_n \neq a_n$ y que, además, $a_n < x_n - \delta$ (si $x_n \neq b_n$ un argumento similar se puede usar). Denote por z_1, z_2, z_3 los tres primeros ceros de la función $\cos(1/z)$ en el intervalo $(-\delta, 0)$ y sea $r = |z_3|/2$. Sea h cualquier función en $U(g,r)$. De la definición de g se tiene que

$$g(z_k + x_n) = \pm z_k, \qquad k = 1,2,3$$

de donde obtenemos que $\operatorname{sign} h(z_k + x_n) = \operatorname{sign} g(z_k + x_n)$. De esto se sigue que

$$\operatorname{sign} h(z_{k+1} + x_n) \neq \operatorname{sign} h(z_{k+1} + x_n) \quad \text{para } k = 1,2$$

ya que $\operatorname{sign} g(z_k + x_n) \neq \operatorname{sign} g(z_{k+1} + x_n)$. Por consiguiente, en el intervalo $(z_k + x_n, z_{k+1} + x_n)$, la función h tiene un cero y, en consecuencia, dicha función posee, por lo menos, dos ceros en I_n. Esto implica que

$$U(g,r) \cap A_n = \varnothing,$$

lo que evidentemente contradice el hecho de que $g \in U(f, \varepsilon) \subset \overline{A}_n$. Con esta contradicción hemos demostrado que A_n es nunca-denso en $C_0[0,1]$.

Finalmente, sea $f \in A$. Puesto que $Z(f)$ es un subconjunto cerrado a lo más numerable de $[0,1]$, se sigue del Teorema de Categoría de Baire (véase el Teorema 1.8.8, página 52) que $Z(f)$ posee por lo menos un punto asilado. Sea ξ un cero asilado de f. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que ξ es el único cero de f en I_n. Esto nos dice que $f \in A_n$ y, por lo tanto, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pongamos $G_n = C[0,1] \setminus \overline{A}_n$. Entonces G_n es un abierto denso y, de nuevo, por el Teorema de Categoría de Baire, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $C_0[0,1]$. Finalmente,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq C[0,1] \setminus A = \big\{ f \in C_0[0,1] : \operatorname{card}\big(Z(f)\big) = \mathfrak{c} \big\} = \mathcal{Z}^1_{\lambda}[0,1],$$

lo cual prueba que $\mathcal{Z}^1_{\lambda}[0,1]$ es residual en $C_0[0,1]$. ■

Combinando los dos resultados anteriores con una nueva aplicación del Teorema de Categoría de Baire obtenemos el siguiente resultado (compare con el Teorema 2.1.7).

Corolario 2.1.2 (Domínguez Benavides). *En* $(C_0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, *el conjunto*

$$\mathcal{H}_0^{\mathfrak{c}} = \big\{ f \in C_0[0,1] : \operatorname{card}(Z(f)) = \mathfrak{c} \ \ y \ \ \lambda(Z(f)) = 0 \big\},$$

es residual.

Consideremos ahora el espacio de Banach $(C^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ formado por todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, es decir, tanto f así como f' son continuas, provisto de la norma de Sobolev $\| f \|_1 = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$ para toda $f \in C^1[0,1]$. El siguiente resultado demostrado por Sard (véase, por ejemplo, [195], p. 205) nos será de utilidad en nuestro próximo teorema.

Teorema de Sard. *Para toda función* $f \in C^1[0,1]$, *se cumple que* $\lambda\big(f\big(Z(f')\big)\big) = 0$.

En contraste al Teorema de Domínguez Benavides, Udayan B. Darji y Michal Morayne [112] demuestran el siguiente resultado

Teorema 2.1.21 (Darji-Morayne). *El conjunto* $\mathcal{Z}^1_{<\infty}[0,1] = \big\{ f \in C^1[0,1] : Z(f) \text{ es finito} \big\}$ *es residual en* $(C^1[0,1], \|\cdot\|_1)$.

Prueba. Sea
$$A = C^1[0,1] \setminus \mathcal{Z}^1_{<\infty}[0,1] = \big\{ f \in C^1[0,1] \,:\, Z(f) \textit{ es infinito} \big\}.$$

Afirmamos que si $f \in A$, entonces existe algún $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. En efecto, sea $x \in Z(f)$. Por la compacidad de $Z(f)$ existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $Z(f)$ convergiendo a x. Finalmente

$$f'(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{x_n - x} = 0.$$

Sea ahora $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los intervalos cerrados de $[0,1]$ con extremos racionales distintos y observemos que

$$\begin{aligned} A &= \big\{ f \in C^1[0,1] \,:\, Z(f) \textit{ es infinito} \big\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{ f \in C^1[0,1] \,:\, \textit{existe } x \in I_n \textit{ tal que } f(x) = f'(x) = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que cada $F_n = \big\{ f \in C^1[0,1] : \textit{existe } x \in I_n \textit{ tal que } f(x) = f'(x) = 0 \big\}$ es cerrado y nunca-denso en $C^1[0,1]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$.

• *F_n es cerrado*. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en F_n convergiendo en la norma $\|\cdot\|_1$ hacia una función f. Se sigue de la definición de $\|\cdot\|_1$ que $\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_\infty = 0$ y también que $\lim_{k\to\infty} \big\| f_k' - f' \big\|_\infty = 0$. En particular, $f \in C^1[0,1]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seleccionemos un $x_k \in I_n$ tal que $f_k(x_k) = f_k{}'(x_k) = 0$. Por compacidad, existe una subsucesión de la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, que seguiremos denotando del mismo modo, convergiendo hacia algún $x \in [0,1]$. Usando la continuidad de f y la de f', así como la convergencia uniforme de las sucesiones $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(f_k')_{k=1}^{\infty}$ se obtiene que $f(x) = f'(x) = 0$. Esto prueba que $f \in F_n$, por lo que F_n es cerrado en $C^1[0,1]$.

• *F_n es nunca-denso*. Sea $f \in F_n$. Por el Teorema de Sard, $\lambda\big(f\big(Z(f')\big)\big) = 0$. De esto se sigue que existe un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño tal que $f(x) \neq \varepsilon$ para cualquier $x \in Z(f')$. Consideremos ahora la función $g = f - \varepsilon$. Afirmamos que $g \notin F_n$. Si ocurriera que $g \in F_n$, entonces $g(z) = g'(z) = 0$ para algún $z \in I_n$, de donde obtendríamos que $f(z) = \varepsilon$ y $f'(z) = 0$ y, en consecuencia, $\varepsilon \in f(Z(f'))$ lo que resulta ser imposible. Es claro que $g \in U_{\|\cdot\|_1}(f, 2\varepsilon)$ por lo que F_n tiene interior vacío.

Tenemos así que A es de primera categoría y, por consiguiente, $\mathcal{Z}^1_{<\infty}[0,1]$ es residual en $(C^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ gracias al Teorema de Categoría de Baire. ■

Comentario Adicional 2.1.5 Sean $f \in \mathcal{B}_\infty[0,1]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, considere el conjunto
$$Z(f,\alpha,c) \;=\; \big\{ x \in [0,1] \;:\; f(x) = \alpha x + c \big\}$$

Observe que cuando $\alpha = c = 0$, $Z(f,0,0)$ es el conjunto $Z(f)$ de los ceros de f.

En [112], U. B. Darji y M. Morayne obtienen, entre otros, los siguientes resultados:

Teorema (Darji-Morayne). *Para cualquier $n \geq 2$, el conjunto*

$$\mathcal{Z}^n_{<\infty}[0,1] \;=\; \big\{ f \in C^n[0,1] \,:\, Z(f,0,c) \textit{ es finito, para todo } c \big\},$$

es residual en $(C^n[0,1], \|\cdot\|_n)$, donde $\| f \|_n = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty + \cdots + \big\| f^{(n)} \big\|_\infty$, para toda $f \in C^n[0,1]$.

Teorema (Darji-Morayne). *El conjunto*

$$\mathcal{Z}_{\varnothing,P}[0,1] = \{f \in C^1[0,1] \,:\, Z(f') \text{ es vacío o perfecto}\},$$

es residual en $C^1[0,1]$.

2.1.11. ‖ ► Funciones cuyos puntos de discontinuidad son $\mathfrak{c}$-densos

Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Un resultado bien conocido de Lebesgue referente a la integral de Riemann establece que:

Teorema de Lebesgue. *Una función acotada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es Riemann integrable si, y sólo si,* $\lambda(\mathrm{Disc}(f)) = 0$*, donde* $\mathrm{Disc}(f)$ *es el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de* f.

Recordemos que $\mathcal{R}[a,b]$, el espacio de todas las funciones medibles y acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann integrables provisto de la métrica del supremo d_∞, es un espacio métrico completo. Para ver esto, es suficiente demostrar que $\mathcal{R}[a,b]$ es cerrado en $(\mathcal{B}_\infty[a,b], d_\infty)$. En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{R}[a,b]$ convergiendo uniformemente a $f \in \mathcal{B}_\infty[a,b]$. Por el Teorema de Lebesgue, $\lambda(\mathrm{Disc}(f_n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\mathrm{Disc}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{Disc}(f_n)$. En efecto, sea $x \notin \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{Disc}(f_n)$. Entonces f_n es continua en x para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $f_n \to f$ uniformemente, resulta que f es continua en x, es decir, $x \notin \mathrm{Disc}(f)$ y termina la prueba de nuestra afirmación. Finalmente, como $\lambda(\mathrm{Disc}(f)) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda(\mathrm{Disc}(f_n)) = 0$, una nueva aplicación del Teorema de Lebesgue nos revela que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Esto termina la demostración de que $(\mathcal{R}[a,b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Observe que estamos usando un cañón (el Teorema de Lebesgue) para matar un mosquito ($f \in \mathcal{R}[a,b]$), pero no deja de ser agradable (sólo en este contexto). En realidad, uno puede demostrar que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ usando el siguiente archiconocido criterio sobre la integrabilidad de Riemann:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ P\{x_1, \ldots, x_n\} \ \Big|\ \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon, \tag{$\mathfrak{R}_1$}$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ y $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Sea $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función característica de $\mathbb{Q}$ en $[0,1]$. Puesto que esta función es discontinua en todo punto de $[0,1]$, la cardinalidad de $\mathrm{Disc}(f)$ es $\mathfrak{c}$ (la cardinalidad de $\mathbb{R}$). Consideremos, sin embargo, este otro ejemplo. Sea Γ el conjunto ternario de Cantor en $[0,1]$ y definamos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in \Gamma \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resulta que g es discontinua en cualquier punto de Γ, el cual, como sabemos, tiene la cardinalidad del continuo, es decir, $\mathrm{card}(\mathrm{Disc}(g)) = \mathfrak{c}$. Por otro lado, puesto que $\lambda(\mathrm{Disc}(g)) = 0$, resulta g es Riemann integrable, gracias al Teorema de Lebesgue, mientras que f no es Riemann integrable ya que $\lambda(\mathrm{Disc}(f)) = 1$. El propósito de esta sección es demostrar la abundancia, en el espacio $\mathcal{R}[a,b]$, de las funciones f que satisfacen $\mathrm{card}(\mathrm{Disc}(f)) = \mathfrak{c}$.

Definición 2.1.9. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Un subconjunto* S *de* X *se dice que es* $\mathfrak{c}$***-denso en un conjunto abierto*** $O \subseteq X$ *si la intersección de* S *con cualquier subconjunto abierto no vacío* V *de* O *contiene* $\mathfrak{c}$ *puntos.*

Sea (X,d) un espacio métrico separable y denotemos por $\mathcal{B}_\infty^0(X)$ cualquier subespacio cerrado de $\mathcal{B}_\infty(X)$.

Definición 2.1.10. *Diremos que $\mathcal{B}^0_\infty(X)$ posee la* ***propiedad de discontinuidad $\mathfrak{c}$-densa*** *si existe una función $h \in \mathcal{B}^0_\infty(X)$ tal que* $\mathrm{Disc}(h)$ *es $\mathfrak{c}$-denso en X.*

El siguiente resultado, probado por Shi [405] en el año 2001, es una generalización de uno demostrado por Pavel Kostyrko, el cual establece que un espacio de funciones con la propiedad de discontinuidad $\mathfrak{c}$-densa posee, en realidad, abundantes funciones cuyos puntos de discontinuidad tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Teorema 2.1.22 (Shi). *Sea (X,d) un espacio métrico separable y suponga que $\mathcal{B}^0_\infty(X)$ posee la propiedad de discontinuidad $\mathfrak{c}$-densa. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}_0 = \{f \in \mathcal{B}^0_\infty(X) : \mathrm{Disc}(f) \ \ es \ \ \mathfrak{c}\text{-denso}\},$$

es un G_δ-denso en $(\mathcal{B}^0_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Sea V un subconjunto abierto no vacío de X y consideremos el conjunto

$$A(V) = \big\{f \in \mathcal{B}^0_\infty(X) : \mathrm{Disc}(f) \cap V \ \ tiene \ \ cardinalidad \ \ \mathfrak{c}\big\}.$$

Lo que vamos a demostrar de inmediato es que $A(V)$ es abierto en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$. En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{B}^0_\infty(X) \setminus A(V)$ convergiendo uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{R}$. Puesto que cada $f_n \notin A(V)$, el conjunto $E_n = \mathrm{Disc}(f_n) \cap V$ es a lo más numerable y, en consecuencia, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es a lo más numerable. Ya que f es continua en cada punto $x \in V \setminus \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, resulta que $f \in \mathcal{B}^0_\infty(X) \setminus A(V)$. Por esto, $\mathcal{B}^0_\infty(X) \setminus A(V)$ es cerrado en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$ y, así, $A(V)$ es abierto en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$.

Afirmamos que $A(V)$ es también denso en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$. Para ver esto, sea $U(f,\varepsilon)$ una bola abierta en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$, donde $f \in \mathcal{B}^0_\infty(X)$ y $\varepsilon > 0$. Existen dos opciones para f: la primera es que $f \in A(V)$, en cuyo caso no habría nada que probar, y la segunda es que $f \notin A(V)$. En este último caso f posee a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad en V. Por hipótesis, existe una función $h \in \mathcal{B}^0_\infty(X)$ tal que $\mathrm{Disc}(h)$ es $\mathfrak{c}$-denso. Sea M una constante tal que $|h(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y definamos $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2M} h(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Entonces $g \in \mathcal{B}^0_\infty(X)$ posee por lo menos $\mathfrak{c}$ puntos de discontinuidad en V. Además,

$$d_\infty(g,f) := \Big\| (f + \frac{\varepsilon}{2M} h) - f \Big\|_\infty = \Big\| \frac{\varepsilon}{2M} h \Big\|_\infty < \varepsilon$$

lo cual nos dice que $g \in A(V) \cap U(f,\varepsilon)$. Esto prueba que $A(V)$ es denso en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$.

Como X es separable, podemos tomar una sucesión densa $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere la bola abierta con centro en x_n y radio $1/m$, $V_{nm} := U(x_n, 1/m)$. Entonces, por el Teorema de Categoría de Baire

$$\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}_0 = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty A(V_{nm}),$$

es un G_δ-denso en $\mathcal{B}^0_\infty(X)$. ∎

Definición 2.1.11. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama* ***simétricamente continua*** *si*

$$\lim_{h\to 0} \Big(f(x+h) - f(x-h) \Big) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $\mathrm{BSC}[a,b]$ el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{B}_\infty[a,b]$ que son simétricamente continuas dotado de la norma del supremo. Entonces $\mathrm{BSC}[a,b]$ es un espacio métrico completo. Es claro que toda función continua es simétricamente continua, pero el recíproco no es, en general, válido. Sin embargo, se sabe que que toda función $f \in \mathrm{BSC}[a,b]$ es medible Lebesgue ([350]) y que, además, ella es continua excepto sobre un conjunto de medida cero y de primera categoría ([416]). En particular, f es Riemann integrable. Por un resultado de T. C. Tran [430] el conjunto

$$\mathrm{TD}[a,b] = \big\{ f \in \mathrm{BSC}[a,b] \,:\, \mathrm{Disc}(f) \ \text{ es } \ \mathfrak{c}\text{-denso} \big\}$$

es no vacío. Más aun, Shi [406] demuestra que $\mathrm{TD}[a,b]$ es un G_δ-denso en $\mathrm{BSC}[a,b]$.

Corolario 2.1.3. *Sea*

$$\mathcal{G}_1^{\mathfrak{c}} = \big\{ f \in \mathcal{R}[a,b] \,:\, \mathrm{Disc}(f) \ \textit{ es } \ \mathfrak{c}\textit{-denso} \big\}.$$

Entonces $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{c}}$ *es residual en* $(\mathcal{R}[a,b], d_\infty)$.

Prueba. Para poder aplicar el Teorema 2.1.22, todo lo que tenemos que hacer es construir una función $f \in \mathcal{R}[a,b]$ tal que la cardinalidad de $\mathrm{Disc}(f)$ sea $\mathfrak{c}$. Usemos el resultado de Tran para producir una función simétricamente continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad es $\mathfrak{c}$-denso. Por lo afirmado anteriormente, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f tiene medida de Lebesgue cero (ver también, [425], Theorem 2.3, p. 27) y gracias al Teorema de Lebesgue, f es Riemann integrable. Esto prueba que $\mathcal{R}[a,b]$ posee la propiedad de discontinuidad $\mathfrak{c}$-densa y gracias al Teorema 2.1.22, $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{c}}$ es residual en $(\mathcal{R}[a,b], d_\infty)$. ■

2.1.12. ‖ ► Funciones de clase C^∞ nunca analíticas

Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ es de **clase** C^∞ *si* f *posee derivada continua de todos los ordenes*; es decir, si $f^{(n)}$ existe y es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, una función f de clase C^∞, es **analítica** en $x_0 \in \mathbb{R}$ si f *admite un desarrollo en series de Taylor con radio de convergencia positivo en* x_0. Debemos recordar que *para que una función* f *de clase* C^∞ *en un intervalo de* $\mathbb{R}$ *sea analítica, no es suficiente que su serie de Taylor posea, en cada punto, un radio de convergencia positivo; es necesario, además, que la suma de dicha serie sea igual a* f.

Lo que resulta ser un tanto sorprendente es la existencia de abundantes funciones de clase C^∞ que no son analítica en ningún punto de su dominio, un resultado demostrado por primera vez por Morgenstern [322] en 1954 usando, por supuesto, el Teorema de Categoría de Baire. Uno de los ejemplos más sencillo y relativamente simple de una función de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ que no es analítica en ningún punto, fue construido por Mathias Lerch [291] en 1888:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(a^n x)}{n!} \qquad (\text{con } \ a \ \text{ impar } \ \text{y } > 1)$$

Denotemos por $C^\infty[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas continuas de todos los ordenes en $[0,1]$, es decir, $f^{(n)} \in C[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sobre $C^\infty[0,1]$ definamos la siguiente métrica:

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}, \quad f,g \in C^\infty[0,1],$$

donde $p_n(f) = \sup\{\left|f^{(n)}(x)\right| \,:\, x \in [0,1]\}$ para toda $f \in C^\infty[0,1]$. Observe que si $(f_k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión en $C^\infty[0,1]$, entonces

$$(f_k)_{k=1}^\infty \ \text{ es } \ d\text{-Cauchy} \quad \Longleftrightarrow \quad (f_k^{(n)})_{k=1}^\infty \ \text{ es } \ d_\infty\text{-Cauchy, para cada } n \in \mathbb{N}$$

y

$$d(f_k, f) \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\| f_k^{(n)} - f^{(n)} \right\|_\infty \longrightarrow 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

De lo anterior y la completitud de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ se puede probar, sin mucha dificultad, que $(C^\infty[0,1], d)$ es un espacio métrico completo; es decir, un espacio de Baire. Las funciones en $C^\infty[0,1]$ son llamadas **funciones de clase** C^∞ o también **funciones suaves**. Observemos que si para cada entero $n \geq 0$ y cualquier $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto

$$V_n(\varepsilon) = \bigcap_{k=0}^{n} \big\{h \in C^\infty[0,1] \,:\, p_k(h) < \varepsilon\big\},$$

resulta que la colección $\{V_n(\varepsilon) : \varepsilon > 0, n \geq 0\}$ es una base de entornos abiertos de la función cero en la topología métrica. La familia de todas las traslaciones $\big\{f + V_n(\varepsilon) \,:\, f \in C^\infty[0,1],\ n \geq 0,\ \varepsilon > 0\big\}$ forman, entonces, una base de entornos abiertos básicos para cualquier función f en la topología métrica. Observe que

$$V_n(f;\varepsilon) := f + V_n(\varepsilon) = \big\{h \in C^\infty[0,1] \,:\, p_k(h-f) < \delta \text{ para } k = 0,1,\ldots,n\big\},$$

Definición 2.1.12. *Sean $f \in C^\infty[0,1]$ y $x_0 \in [0,1]$. Diremos que f es* ***analítica*** *en x_0 siempre que la serie de Taylor con centro en x_0*

$$T(f;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

asociada a la función f, converge a $f(x)$ para cada x en algún entorno abierto U_{x_0} de x_0.

Si I es un subintervalo en $[0,1]$ y f es analítica en todo punto de I, entonces diremos que f es analítica en I. En caso de que $f \in C^\infty[0,1]$ sea analítica en x_0, el radio de convergencia, $r_f(x_0)$, de la serie de Taylor $T(f;x_0)$, que se define por la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$r_f(x_0) = \left(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|^{1/n}\right)^{-1},$$

es siempre positivo. Como siempre, pondremos $r_f(x_0) = 0$ o $r_f(x_0) = +\infty$ según el denominador del cociente anterior sea infinito o se anule respectivamente. Notemos que $r_f(x_0)$ puede ser positivo sin que f sea analítica en x_0 como se puede comprobar, por ejemplo, tomando la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

la cual no es analítica en $x_0 = 0$, pero cumple, sin embargo, que $r_f(0) = +\infty$.

Diremos que un punto $x_0 \in [0,1]$ es una **singularidad** para $f \in C^\infty[0,1]$, si f no es analítica en x_0. No es difícil establecer que el conjunto

$$S(f) = \big\{x \in [0,1] \,:\, x \textit{ es una singularidad para } f\big\}$$

es cerrado en $[0,1]$. Es interesante observar que para cualquier singularidad $x_0 \in S(f)$ existen, siempre, dos posibilidades para la serie de Taylor asociada a la función f:

(1) la serie de Taylor $T(f;x_0)$ no converge, con excepción del punto x_0, sobre ningún entorno abierto de x_0, llamada **singularidad de Pringsheim**, o

(2) la serie de Taylor $T(f;x_0)$ converge en algún entorno abierto de x_0 pero lo hace hacia una función que no coincide con f en ningún entorno de x_0, denominada **singularidad de Cauchy**.

Denotando por $SP(f)$, respectivamente, $SC(f)$, el conjunto de todas las singularidades de Pringsheim y todas las singularidades de Cauchy de f en $[0,1]$, tenemos que $S(f) = SP(f) \cup SC(f)$. Como ha de esperarse, una singularidad de Pringsheim es "peor" que una de Cauchy. De la definición de radio de convergencia tenemos que: $x_0 \in SP(f)$ *si, y sólo si*, $r_f(x_0) = 0$.

Por $\mathcal{NA}[0,1]$ denotaremos el conjunto de todas las funciones de clase C^∞ que son **nunca analítica**, esto es,

$$\mathcal{NA}[0,1] = \big\{ f \in C^\infty[0,1] \,:\, S(f) = [0,1] \big\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{SP}[0,1]$ el conjunto (más pequeño) de todas las funciones de clase C^∞ con una singularidad de Pringsheim en cualquier punto de $[0,1]$, es decir,

$$\mathcal{SP}[0,1] = \big\{ f \in C^\infty[0,1] \,:\, SP(f) = [0,1] \big\}$$

Por un resultado de Zahorsky [450], sabemos que $\mathcal{SP}[0,1] \neq \varnothing$. Pero, ¿puede ser el conjunto $\mathcal{SP}[0,1]$ residual en $C^\infty[0,1]$? Esta pregunta fue formulada por primera vez por Steinhauss y Marczewski. Un año después de que D. Morgenstern [322] demostrara, en 1954, que $\mathcal{NA}[0,1]$ es residual en $C^\infty[0,1]$, Salzmann y Zeller [396] respondían afirmativamente a la interrogante planteada por Steinhauss y Marczewski, es decir, ellos demostraron que $\mathcal{SP}[0,1]$ también es residual en $C^\infty[0,1]$. Es importante señalar que el artículo de Morgenstern contiene dos errores que fueron señalados por Salzmann y Zeller en [396]. Esto permitió que otros matemáticos publicaran demostraciones diferentes, pero correctas, de la residualidad de $\mathcal{NA}[0,1]$ en $C^\infty[0,1]$. Por ejemplo, Christensen [95] estableció, en 1971, que el conjunto $\mathcal{NA}_0[0,1]$ formado por todas las funciones $f \in C^\infty[0,1]$ para las cuales existe un subconjunto residual $G_f \subseteq [0,1]$ tal que $r_f(x) = 0$ para todo $x \in G_f$, es residual en $C^\infty[0,1]$. Dos años después, Darst [110] también demuestra que $\mathcal{NA}[0,1]$ es residual en $C^\infty[0,1]$. En 1984, Cater [86] nos provee, de nuevo, de otra demostración de que $\mathcal{NA}[0,1]$ es residual en $C^\infty[0,1]$. Notemos que $\mathcal{SP}[0,1] \subseteq \mathcal{NA}_0[0,1] \subseteq \mathcal{NA}[0,1]$, donde la última inclusión sigue del hecho de que $S(f)$ es cerrado en $[0,1]$. Se sigue de lo anterior que el resultado de Christensen implica el de Morgenstern-Darst pero no el de la residualidad de $\mathcal{SP}[0,1]$. Finalmente, L. Bernal-González [50] (para el caso complejo) y T. I. Ramsamujh [362] (tanto para el caso real así como para el caso complejo) obtienen que $\mathcal{SP}[0,1]$ es residual en $C^\infty[0,1]$. Es importante mencionar que el artículo de Ramsamujh posee un error que es corregido por el propio Ramsamujh en [363].

Lo que veremos a continuación es una demostración de este último hecho al estilo de Ramsamujh [362].

Teorema 2.1.23 (Salzmann-Zeller). *El conjunto* $\mathcal{SP}[0,1]$ *es residual en* $(C^\infty[0,1], d)$.

Prueba. Supongamos que $f \in C^\infty[0,1] \setminus \mathcal{SP}[0,1]$. Entonces existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $T(f;x_0)$ converge en algún entorno abierto de x_0. Esto nos dice que el radio de convergencia, $r_f(x_0)$, de $T(f;x_0)$ es positivo. Pero como

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{1/n} = \frac{1}{r_f(x_0)},$$

resulta de la definición del límite superior que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{1/n} < \frac{2}{r_f(x_0)}$$

para todo $n \geq n_0$. Sea

$$M = \text{máx}\left\{ \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{1/n} : n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1 \right\},$$

y seleccionemos cualquier entero k con $k \geq \text{máx}\{M, 2/r_f(x_0)\}$. Entonces, para todo entero $n \geq 0$, se cumple que

$$\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leq k^n \cdot n!$$

Consideremos ahora el conjunto

$$F_k = \left\{ f \in C^\infty : \text{existe } x_0 \in [0,1] \text{ tal que } \left| f^{(n)}(x_0) \right| \leq k^n \cdot n! \text{ para todo } n \geq 0 \right\}.$$

Con este análisis se deduce que

$$\mathcal{SP}[0,1] = C^\infty[0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Nuestro siguiente paso es demostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, F_k es un subconjunto cerrado nunca-denso de $C^\infty[0,1]$ y entonces aplicar el Teorema de Categoría de Baire para concluir que $\mathcal{SP}[0,1]$ es residual en $C^\infty[0,1]$. Veamos entonces que cada F_k es un subconjunto cerrado nunca-denso de $C^\infty[0,1]$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$.

1) *F_k es cerrado en $C^\infty[0,1]$*. Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión en F_k convergiendo a una función $f \in C^\infty[0,1]$. Por definición, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un número real $x_j \in [0,1]$ tal que

$$\left| f_j^{(n)}(x_j) \right| \leq k^n \cdot n!$$

para todo $n \geq 0$. Por compacidad podemos extraer, de la sucesión $(x_j)_{j=1}^\infty$ en $[0,1]$, una subsucesión de $(x_j)_{j=1}^\infty$, que seguiremos denotando del mismo modo, convergiendo a un punto $x_0 \in [0,1]$. Fijemos ahora $n \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(x_0) \right| &\leq \left| f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_j) \right| + \left| f^{(n)}(x_j) - f_j^{(n)}(x_j) \right| + \left| f_j^{(n)}(x_j) \right| \\ &\leq \left| f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_j) \right| + p_n(f - f_j) + k^n \cdot n!. \end{aligned}$$

Por la continuidad de $f^{(n)}$, el primer término de ésta desigualdad tiende a cero, mientras que el segundo término también converge a cero ya que $p_n(f - f_j) \leq d(f, f_j)$ y $\lim_{j\to\infty} d(f, f_j) = 0$. Por esto,

$$\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leq k^n \cdot n!$$

lo cual prueba que $f \in F_k$.

2) *F_k es nunca-denso en $C^\infty[0,1]$*. Supongamos, por un momento, que F_k tiene interior no vacío. Entonces existe un entorno abierto básico, digamos $V_m(g;\delta)$, contenido en F_k, donde

$$V_m(g;\delta) = \left\{ h \in C^\infty[0,1] : p_j(h-g) < \delta \text{ para } j = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

para algún $g \in F_k$, $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Puesto que el conjunto $P[0,1]$ de todos los polinomios algebraicos es, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, denso en $C^\infty[0,1]$ y ya que $V_m(g;\delta)$ es abierto en $C^\infty[0,1]$, resulta que $P[0,1] \cap V_m(g,\delta) \neq \varnothing$. Podemos, por lo anterior, escoger un entorno básico $V_N(p;\varepsilon)$ incluido en $V_m(g,\delta)$, para un cierto $p \in P[0,1]$, un cierto $N \in \mathbb{N}$ y algún $\varepsilon > 0$ (que también podemos suponer que es < 1). Tenemos así que

$$V_N(p;\varepsilon) \subseteq V_m(g;\delta) \subseteq F_k.$$

Nuestro siguiente objetivo es construir una función $f \in V_N(p;\varepsilon)$ pero que quede fuera de F_k lo que, por supuesto, será contradictorio debido a que $V_N(p;\varepsilon)$ está incluido en F_k. Elijamos un $n \in \mathbb{N}$ de modo tal que $n > \text{máx}\{N, k, \text{grado}(p)\}$ y sea

$$b = \big(1+n^n\big)n! \cdot \frac{4}{\varepsilon}.$$

Observe que como $0 < \varepsilon < 1$, entonces $b > 1$. Definamos ahora la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = p(x) \; + \; \frac{\varepsilon \cdot \text{sen}(bx)}{2\,b^N}.$$

Esta es la función que producirá la contradicción. En efecto, nótese, en primer lugar, que como la m-ésima derivada de la función $\varphi(x) = \text{sen}(bx)$ es

$$\big|\varphi^{(m)}(x)\big| = \begin{cases} b^m|\text{sen}(bx)|, & \text{si } m \text{ es par} \\ b^m|\cos(bx)|, & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

entonces, para cualquier $j = 0,1,2,\ldots,N$, (aquí es donde usamos el hecho de que $b > 1$)

$$p_j(f-p) = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\varepsilon \cdot \varphi^{(j)}(x)}{2\,b^N} \right| \; \le \; \frac{\varepsilon}{2}\, b^{j-N} \; \le \; \frac{\varepsilon}{2} \; < \; \varepsilon,$$

lo cual demuestra que $f \in V_N(p;\varepsilon)$. Por otro lado, de la relación $\text{sen}^2(bx) + \cos^2(bx) = 1$, se sigue que

$$|\,\text{sen}(bx)| \ge \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad |\cos(bx)| \ge \frac{1}{2}.$$

cualquiera sea el x en $[0,1]$. Fijemos ahora cualquier elemento arbitrario x en $[0,1]$. Para nuestro entero n (recuerde que $n > \text{máx}\{N, k, \text{grado}(p)\}$), se cumple que $p^{(n)}(x) = 0$ y, por lo anterior, tenemos que

$$\big|\varphi^{(n)}(x)\big| \ge \frac{b^n}{2} \qquad \text{o} \qquad \big|\varphi^{(n+1)}(x)\big| \ge \frac{b^{n+1}}{2}.$$

De esto se sigue, en el primer caso, que

$$\begin{aligned} \big|\,f^{(n)}(x)\big| \; &= \; \left|p^{(n)}(x) + \frac{\varepsilon}{2\,b^N}\,\varphi^{(n)}(x)\right| \; = \; \left|\frac{\varepsilon}{2\,b^N}\,\varphi^{(n)}(x)\right| \\ &\ge \; \frac{\varepsilon}{4}\,b^{n-N} \; \ge \; \frac{\varepsilon}{4}\,b \; = \; \big(1+n^n\big)n! \\ &> \; n^n n! \; > \; k^n n! \end{aligned}$$

y, en el segundo caso (recuerde que $\varepsilon < 1$), se tiene que

$$\begin{aligned} \big|\,f^{(n+1)}(x)\big| \; &= \; \left|\frac{\varepsilon}{2\,b^N}\,\varphi^{(n+1)}(x)\right| \\ &\ge \; \frac{\varepsilon}{4}\,b^{n+1-N} \; \ge \; \frac{\varepsilon}{4}\,b^2 \; = \; \frac{4}{\varepsilon}\Big[\big(1+n^n\big)n!\Big]^2 \\ &> \; 4\big[k^n n!\big]^2 \; > \; k^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

En resumen, hemos encontrado un entero n con $n > k$ tal que

$$\big|\,f^{(n)}(x)\big| \; > \; k^n n! \qquad \text{o} \qquad \big|\,f^{(n+1)}(x)\big| \; > \; k^{n+1}(n+1)!$$

para todo $x \in [0,1]$. Esto, por supuesto, contradice el hecho de que $f \in V_N(p;\varepsilon) \subset F_k$ y, en consecuencia, F_k es nunca-denso en $C^\infty[0,1]$. Con esto se termina la prueba. ■

En 1954 A. P. Morgenstern [322] demostró, usando el Teorema de Categoría de Baire, que las funciones de clase C^∞ que son nunca analíticas es residual en $C^\infty[0,1]$. Por supuesto, éste hecho es un corolario inmediato del teorema anterior. Otras demostraciones del resultado de Morgenstern también fueron dadas por F. S. Cater [86] en 1984 y por H. Shi [405] en 2001.

Corolario 2.1.4 (Morgenstern). $\mathcal{NA}[0,1]$ *es residual en* $(C^\infty[0,1],d)$.

Prueba. Como $\mathcal{SP}[0,1] \subseteq \mathcal{NA}[0,1]$ el resultado sigue del teorema anterior. ■

Comentario Adicional 2.1.6 En [50], Bernal González obtiene un resultado más general que el de Salzmann y Zeller al demostrar lo siguiente:

Teorema de Bernal González. *Sea* $(c_n)_{n=1}^\infty$ *una sucesión en* $(0,+\infty)$ *y sea* M *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M}((c_n)_{n=1}^\infty, M) = \Big\{ f \in C^\infty[0,1] \,:\, \text{existe infinitos } n \in M \text{ tal que máx} \Big\{ \big|f^{(n)}(x)\big|, \big|f^{(n+1)}(x)\big| \Big\} > c_n \\ \text{para todo } x \in [0,1] \Big\}$$

es residual en $C^\infty[0,1]$.

Haciendo $c_n = (1+n)! \cdot (1+n)^{1+n}$ y $M = \mathbb{N}_0$ tenemos que $\mathcal{M}((c_n)_{n=1}^\infty, \mathbb{N}_0) \subseteq C^\infty[0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty F_k = \mathcal{SP}[0,1]$, de modo que la residualidad de $\mathcal{SP}[0,1]$ en $C^\infty[0,1]$ sigue del resultado anterior.

El conjunto $\mathcal{NA}[0,1]$, siendo abundante (= residual) en $C^\infty[0,1]$ no posee una estructura lineal, sin embargo, Cater [86] va un poco más allá al demostrar que $\mathcal{NA}[0,1] \cup \{0\}$ contiene un subespacio vectorial de dimensión $\mathfrak{c}$ que es denso en $C^\infty[0,1]$. A un resultado más general llega Bernal-González en [50] al demostrar que $\mathcal{SP}[0,1] \cup \{0\}$ contiene un álgebra de dimensión infinita que es, además, denso en $C^\infty[0,1]$.

2.1.13. ‖ ► Funciones analíticas nunca prolongables

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ un conjunto no vacío, abierto y conexo. Recordemos que una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones a valores complejos definidas sobre Ω se dice que **converge a** f **uniformemente sobre subconjuntos compactos de** Ω si para cualquier compacto $K \subseteq \Omega$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $N_1 := N_1(K,\varepsilon)$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$ y para todo $n \geq N_1$. Como siempre, el espacio de las funciones continuas a valores complejos definidas sobre Ω será denotado por $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Éste espacio puede ser dotado de una métrica, distinta a la métrica del supremo, bajo la cual una sucesión converge en dicha métrica si, y sólo si, ella converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Para obtener tal métrica sobre $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ lo primero que vamos hacer es demostrar el siguiente resultado (véase, [385], Th. 13.3, p.285).

Teorema 2.1.24. *Para cualquier conjunto abierto* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, *existe una sucesión* $(K_n)_{n=1}^\infty$ *de subconjuntos compactos de* Ω *tal que*

(1) $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$,

(2) $K_n \subseteq int(K_{n+1})$, *para cada* $n = 1,2,\dots$ *y*

(3) *si $K \subseteq \Omega$ es cualquier conjunto compacto, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_n$.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$K_n = \Big\{ z \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}\big(z, \mathbb{C} \setminus \Omega\big) \geq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |z| \leq n \Big\}.$$

Observe que, en este caso,

$$\mathbb{C} \setminus K_n = \big\{ \omega \in \mathbb{C} \,:\, |\omega| > n \big\} \cup \bigcup_{\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega} D\big(\omega, 1/n\big)$$

donde, siguiendo la tradición, usaremos el símbolo $D(\omega, r)$ para denotar la bola abierta con centro ω y radio r en $\mathbb{C}$, en lugar de $U(\omega, r)$. Es claro que cada K_n es compacto y que la sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface (1). Más aun, si $z \in K_n$, entonces uno verifica, sin mucha dificultad, que

$$D\Big(z, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \subseteq K_{n+1},$$

lo cual prueba (2). Finalmente, si $K \subseteq \Omega$ es cualquier subconjunto compacto, entonces

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(K_{n+1})$$

y por la compacidad de K, existe un subcubrimiento finito de K por los conjuntos $\{\operatorname{int}(K_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{int}(K_{n+1}) = \operatorname{int}(K_{N+1}) \subseteq K_{N+1}.$$

Esto termina la prueba. ■

Cualquier sucesión de compactos $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo las propiedades $(1) - (3)$ del teorema anterior será llamada una **sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω**.

Estamos ahora en condiciones de construir nuestra métrica sobre $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Sea $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$d_{K_n}(f, g) = \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|, \qquad f, g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega),$$

el cual es finito pues K_n es un subconjunto compacto de Ω. Notemos que $d_{K_n}(\cdot,\cdot)$ no es, en general, una métrica sobre $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$, sino una pseudo-métrica, es decir, satisface todas la propiedades de una métrica con la excepción de que la condición $d_{K_n}(f, g) = 0$ no implica, en términos generales, que $f = g$.

Definamos ahora $\rho_n : C_{\mathbb{C}}(\Omega) \times C_{\mathbb{C}}(\Omega) \to [0, +\infty)$ por

$$\rho_n(f, g) = \frac{d_{K_n}(f, g)}{1 + d_{K_n}(f, g)}$$

para toda $f, g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Entonces se tiene que

Lema 2.1.3. (a) $\rho_n(\cdot,\cdot)$ *es una pseudo-métrica,*

(b) $0 \leq \rho_n(f,g) < 1$ *para todo* $f,g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$, *y*

(c) *Si* $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones en* $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ *y* $f \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$, *entonces*

$$\lim_{j\to\infty} \rho_n(f_j, f) = 0 \qquad \textit{si, y sólo si,} \qquad \lim_{j\to\infty} d_{K_n}(f_j, f) = 0.$$

Prueba. (a) Es claro que $\rho_n(f,g) \geq 0$ y que $\rho_n(f,g) = \rho_n(g,f)$ para toda $f,g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Para demostrar la desigualdad triangular usemos la función $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $\varphi(t) = t/(1+t)$. Puesto que $\varphi'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$, tenemos que φ es creciente y así, para toda $f,g,h \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\rho_n(f,g) &= \varphi(d_{K_n}(f,g)) \\
&\leq \varphi\big(d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)\big) \\
&= \frac{d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)}{1 + d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)} \\
&= \frac{d_{K_n}(f,h)}{1 + d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)} + \frac{d_{K_n}(h,g)}{1 + d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)} \\
&\leq \frac{d_{K_n}(f,h)}{1 + d_{K_n}(f,h)} + \frac{d_{K_n}(h,g)}{1 + d_{K_n}(h,g)} \\
&= \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g).
\end{aligned}$$

(b) es inmediata de la definición de ρ_n.

(c) Supongamos que $\lim_{j\to\infty} d_{K_n}(f_j, f) = 0$. Entonces $\lim_{j\to\infty} \rho_n(f_j, f) = 0$ debido al hecho de que la función $\varphi(t) = t/(1+t)$ es continua en $t = 0$ y $\rho_n(f_j, f) = \varphi(d_{K_n}(f_j, f))$. Recíprocamente, si $\lim_{j\to\infty} \rho_n(f_j, f) = 0$, entonces $\lim_{j\to\infty} d_{K_n}(f_j, f) = 0$ ya que $d_{K_n}(f_j, f) = \rho_n(f_j, f)/\big(1 - \rho_n(f_j, f)\big)$. La prueba es completa. ■

De la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (= 1)$, resulta que

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f,g) \qquad f,g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$$

está bien definida y es, por lo probado anteriormente, la métrica que nos interesa.

Lema 2.1.4. *Fijemos una sucesión exhaustiva* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *de subconjuntos compactos de* Ω *y sean* $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones en* $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ *y* $f \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. *Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ *uniformemente sobre subconjuntos compactos de* Ω.

(2) $\lim_{j\to\infty} \rho(f_j, f) = 0$.

En particular, la topología generada por ρ *es independiente de la selección de los* K_n.

Prueba. Si $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, entonces puesto que cada $K_n \subseteq \Omega$ es compacto, se sigue $\lim_{j\to\infty} d_{K_n}(f_j, f) = 0$ y, en consecuencia, $\lim_{j\to\infty} \rho_n(f_j, f) = 0$. Para demostrar que $\lim_{j\to\infty} \rho(f_j, f) = 0$, tomemos cualquier $\varepsilon > 0$ y seleccionemos un entero positivo N suficientemente grande de modo que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\rho(f_j,f) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(f_j,f)\\ &= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\rho_n(f_j,f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(f_j,fg)\\ &< \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\rho_n(f_j,f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\\ &< \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\rho_n(f_j,f) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\rho_n(f_j,f) \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces eligiendo un j_0 lo suficientemente grande de modo que $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\rho_n(f_j,f) < \varepsilon/2$ para todo $j \geq j_0$, resultará que $\rho(f_j,f) < \varepsilon$ siempre que $j \geq j_0$, es decir, $\text{lím}_{j\to\infty} \rho(f_j,f) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{lím}_{j\to\infty} \rho(f_j,f) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, de la relación

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\rho_m(f_j,f) \geq 2^{-n}\rho_n(f_j,f),$$

se sigue que

$$\rho_n(f_j,f) \leq 2^n \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\rho_m(f_j,f) = 2^n\rho(f_j,f) \to 0 \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Esto prueba que $\text{lím}_{j\to\infty} \rho_n(f_j,f) = 0$ para todo n y así, por el Lema 2.1.3, $\text{lím}_{j\to\infty} d_{K_n}(f_j,f) = 0$, lo cual significa, gracias al Teorema 2.1.24 (3), que $\text{lím}_{j\to\infty} f_j = f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. ∎

Recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** o **analítica** en Ω si el límite

$$f'(z_0) = \text{lím}_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe para todo $z_0 \in \Omega$. Si denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el subespacio vectorial complejo de $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ formado de todas las funciones que son holomorfas o analíticas en Ω, entonces $(\mathcal{H}(\Omega), \rho)$ resulta ser un espacio métrico completo, en particular, un espacio de Baire.

Se sigue del resultado anterior que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $(\mathcal{H}(\Omega), \rho)$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Es natural preguntarse, ¿qué ocurre si la convergencia es puntual?, es decir, si $\text{lím}_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$, ¿es cierto que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$? Para dar una respuesta a dicha interrogante debemos recordar los siguientes hechos:

Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ se llama una **familia normal** *si cualquier sucesión de miembros de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión la cual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de* Ω. En el siguiente teorema haremos uso de un resultado clásico debido a P. Montel ([385], Theorem 14.6, p. 300) que dice lo siguiente:

Teorema de Montel. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ y suponga que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de Ω. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Estamos ahora en condiciones de responder a nuestra interrogante anterior.

Teorema 2.1.25 (Osgood). *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(\mathcal{H}(\Omega),\rho)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntualmente. Entonces existe un subconjunto abierto denso G de Ω tal que $f|_G$ es holomorfa y la sucesión restricción $(f_n|_G)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de G a $f|_G$.*

Prueba. Defina, para $k = 1,2,\dots$

$$F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{z\in\Omega : |f_n(z)|\leq k\big\} = \Big\{z\in\Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(z)|\leq k\Big\}.$$

De la continuidad de las f_n resulta que cada conjunto F_k es cerrado en Ω y $F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots$. Además,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

En efecto, es claro que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\subseteq\Omega$. Para demostrar la otra inclusión, sea $z\in\Omega$. Puesto que $f_n(z)\to f(z)$, la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ es acotada de donde se sigue que $z\in F_k$ para algún $k\in\mathbb{N}$. Siendo Ω un espacio de Baire, el Teorema 1.8.6 nos garantiza que $G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ es un abierto denso en Ω, donde $G_k = \operatorname{int}(F_k)$ para $k = 1,2,\dots$.

Una vez que estos hechos han sido establecidos, veamos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de G. Sea entonces K un subconjunto compacto de $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Puesto que la sucesión $(G_k)_{k=1}^{\infty}$ es un cubrimiento abierto de K, existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $K\subseteq\bigcup_{k=1}^{m} G_k = G_m$ y, por consiguiente, la sucesión es uniformemente acotada sobre K (por m). Por el Teorema de Montel existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de G a una función g. Por supuesto, g debe coincidir con f y, en consecuencia g y, por lo tanto f, debe ser holomorfa sobre G. Más aun, la sucesión $(f_n|_G)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de G a $f|_G$. ■

Diremos que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ *admite* **prolongación analítica** *si existe un dominio (= conjunto abierto conexo) $\widetilde{\Omega}$ conteniendo a Ω, de modo que $\widetilde{\Omega}\setminus\Omega$ tenga interior no vacío, y una función $\widetilde{f}\in\mathcal{H}(\widetilde{\Omega})$ que es una extensión de f, es decir, tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z\in\Omega$.* Nuestro objetivo en esta parte es demostrar que las funciones analíticas que no admiten prolongación analítica forman un conjunto residual en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Teorema 2.1.26. *Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un conjunto no vacío, abierto y conexo. Si definimos el conjunto S_Ω por*

$$S_\Omega = \{f\in\mathcal{H}(\Omega) : f \textit{ admite prolongación analítica}\},$$

entonces: o bien $S_\Omega = \mathcal{H}(\Omega)$, o bien S_Ω es un subconjunto de primera categoría en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Prueba. Siguiendo la tradición, designemos, como siempre, por $\mathbb{D}$ la bola unitaria abierta de $\mathbb{C}$; es decir, $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$. Seleccionemos una sucesión densa $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en la frontera $\partial\Omega$ de Ω y para enteros positivos arbitrarios m,n,p definamos

$$\begin{aligned} H_{nmp} = \Big\{ f\in\mathcal{H}(\Omega) :\ &\text{existe } \widetilde{f}\in\mathcal{H}\big(\Omega\cup(z_n+m^{-1}\mathbb{D})\big) \\ &\text{tal que } \widetilde{f}\big|_\Omega = f \ \text{ y } \ \big|\widetilde{f}(z)\big|\leq p \text{ para todo } z\in z_n+m^{-1}\mathbb{D}\Big\}. \end{aligned}$$

Nuestra primera tarea es demostrar que cada H_{nmp} es cerrado en $\mathcal{H}(\Omega)$. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en H_{nmp} convergiendo a una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Denotemos por $\widetilde{f_k}$ la extensión de f_k según la definición de H_{nmp}. Veamos que $\widetilde{f_k}$ está uniformemente acotada en cada compacto de $\Omega\cup(z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D})$. En efecto, sea K un tal compacto. Entonces $K\setminus(z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D})$ es un compacto de Ω en el cual $\widetilde{f}_k$ está uniformemente acotada, mientras que, por definición, $|\widetilde{f}_k|\leq p$ sobre $z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D}$, $k=1,2,\dots$ Gracias al Teorema de Montel, aplicado al espacio $\mathcal{H}\big(\Omega\cup(z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D})\big)$, existe una subsucesión $(\widetilde{f}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(\widetilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\widetilde{f}_{n_k}\to\widetilde{f}$ en $\mathcal{H}\big(\Omega\cup(z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D})\big)$. Es claro que $|\widetilde{f}|\leq p$ sobre $z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D}$ y que $\widetilde{f}$ extiende a f. Esto prueba que la función $f\in H_{nmp}$, por lo que H_{nmp} resulta ser cerrado en $\mathcal{H}(\Omega)$.

El siguiente objetivo es probar que si $E_{nm}=\bigcup_{p=1}^{\infty}H_{nmp}$, entonces

$$S_\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{nm}.$$

Para ver esto último, notemos que cualesquiera sean $m,n\in\mathbb{N}$, se tiene que $E_{nm}\subseteq S_\Omega$ y, por consiguiente,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{nm}\subseteq S_\Omega.$$

Por otro lado, sea $f\in S_\Omega$. Entonces existe un dominio $\widetilde{\Omega}$ conteniendo a Ω y una $\widetilde{f}\in\mathcal{H}(\widetilde{\Omega})$ que es una extensión de f. Por la conexidad de $\widetilde{\Omega}$ resulta claro que $\partial\Omega\cap\widetilde{\Omega}\neq\varnothing$. Sea $z_n\in\partial\Omega\cap\widetilde{\Omega}$, y escojamos un $r>0$ de modo que la bola cerrada de centro z_n y radio r esté contenida en $\widetilde{\Omega}$. Si ahora elegimos $m\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m}<r$, resultará que $\widetilde{f}\big|_{\mathbb{D}_{nm}}$ es acotada, donde $\mathbb{D}_{nm}=z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D}$. Esto prueba que $f\in E_{nm}$ y así,

$$S_\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{nm}.$$

Un hecho importante que debemos destacar es que, efectivamente, cada E_{nm} es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(\Omega)$. Lo probado anterior nos conduce a examinar las dos siguientes posibilidades:

a) o bien todos los H_{nmp} tienen interior vacío, en cuyo caso S_Ω es de primera categoría,

b) o bien algún H_{nmp} tiene interior no vacío para alguna terna $m,n,p\in\mathbb{N}$. En este caso, el subespacio vectorial E_{nm} tiene interior no vacío y, en consecuencia, por el Ejemplo **B-2)**, página 212, forzosamente coincide con $\mathcal{H}(\Omega)$.

Esto termina la prueba. ■

Notemos que si $S_\Omega=\mathcal{H}(\Omega)$, entonces $S_\Omega=E_{nm}=\mathcal{H}(\Omega)$ para algún par de enteros positivos n,m y, por consiguiente, toda $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ se prolonga a una función analítica acotada sobre $\Omega\cup(z_n+\frac{1}{m}\mathbb{D})$. Si para cada z_n, existe una $f_n\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\lim_{z\to z_n}|f_n(z)|=\infty$, entonces S_Ω es de primera categoría en $\mathcal{H}(\Omega)$ y, por tanto, existe una $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ que no admite prolongación analítica. En efecto, la hipótesis implica que $E_{nm}\neq\mathcal{H}(\Omega)$ para todos los valores de n y m en $\mathbb{N}$. Como $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, entonces siempre ocurre que S_Ω es de primera categoría en $\mathcal{H}(\Omega)$ ya que, para cada $n\in\mathbb{N}$, la función $f_n(z)=1/(z-z_n)$ está en $\mathcal{H}(\Omega)$ y cumple con $\lim_{z\to z_n}|f_n(z)|=\infty$. Se sigue del Teorema de Categoría de Baire que $\mathcal{H}(\Omega)\setminus S_\Omega$ es residual en $\mathcal{H}(\Omega)$, con lo cual hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.1.27 (Kierst-Szpirajn). *Si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ es conjunto no vacío, abierto y conexo, entonces el conjunto $\mathcal{NE}(\Omega)$, formado por todas las funciones $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ que no admiten prolongación analítica sobre Ω, es residual en $(\mathcal{H}(\Omega),\rho)$.*

2.1.14. ‖ ► Series de Fourier siempre divergentes

En su libro: *Théorie Analytique de la Chaleur*, el cual fue publicado en 1822, Fourier presentó por primera vez su teoría de las series trigonométricas, donde audazmente declaraba, basado en algunos ejemplos muy particulares, que "cada función periódica de período 2π puede ser representada por una serie trigonométrica muy particular", conocida hoy en día por el nombre de serie de Fourier. Al parecer, la comunidad de matemáticos admitió tal afirmación como un desafío y, como muchas otras afirmaciones dadas por matemáticos de renombre que decretan su veracidad sin demostrarla, los matemáticos se han gastado más de un siglo tratando de ver cómo probar tal declaración. De hecho, muchos matemáticos de la época solían pensar que la serie Fourier de cualquier función continua debía converger puntualmente en todo su dominio. En 1876, Paul du Bois Reymond exhibe el primer ejemplo de una función continua definida sobre $[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier diverge en un punto. La existencia de una tal función (que probaremos más adelante) se demuestra sin mucha dificultad usando el Principio de Acotación Uniforme el cual, como ya hemos visto, se soporta sobre el Teorema de Categoría de Baire. Más aun, usando el Teorema de Categoría de Baire se demuestra la abundancia (en un conjunto residual) de funciones continuas que poseen un conjunto G_δ-denso de puntos de no convergencia ([78], pág. 684), aunque dicho conjunto tiene medida de Lebesgue cero. Para terminar de hacer el panorama más complicado, A. Kolmogorov, en 1922, cuando apenas contaba con 19 años de edad (véase, [268], [432]), produce el primer ejemplo de una función $f \in L_1[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier diverge casi-siempre (en el sentido de la medida de Lebesgue) en $[-\pi,\pi]$, aunque, como comenta el propio Kolmogorov, a él no le fue posible, para ese momento, construir una serie de Fourier siempre divergente. Tres años más tarde, en 1926, Kolmogorov anuncia (sin prueba), en el artículo [269], la existencia de una serie de Fourier siempre divergente. Con todo este panorama de resultados "desagradables" todavía, para ese momento, se desconocía si una función continua podía tener una serie de Fourier que diverge sobre un conjunto de medida positiva. Luzin conjeturó que eso no podía ocurrir. En 1966, Carleson demostró que la conjetura de Luzin era cierta, es decir, la serie de Fourier de cualquier función continua sobre $[-\pi,\pi]$ converge casi-siempre. Es más, Carleson demuestra que la serie de Fourier de cualquier $f \in L_2[-\pi,\pi]$ converge casi-siempre ([78], pág. 685). El mismo año de 1966, Jean-Pierre Kahane y Y. Katznelson prueban que dado cualquier subconjunto del círculo con medida de Lebesgue cero, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge sobre ese conjunto [249]. Una exposición más detallada de todos estos hechos se pueden encontrar, por ejemplo, en los excelentes artículos de Jean-Pierre Kahane [247], P. L. Ul'yanov [432] y S. H. Jones [241].

Como siempre, si λ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces $\in L_p(\lambda)$ denota el espacio de Banach de todas las funciones medibles Lebesgue (clases de equivalencias) f definidas sobre $\mathbb{R}$ con la norma $\|\cdot\|_p$ dada por

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Suponga ahora que $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo unitario en $\mathbb{C}$. Existe un mecanismo sencillo de identificar las funciones definidas sobre $\mathbb{T}$ con las funciones 2π-periódicas definidas sobre $\mathbb{R}$ (esto quiere decir que $f(t) = f(t+2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$). En efecto, si F es cualquier función definida sobre $\mathbb{T}$ y si f es la función sobre $\mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = F(\mathrm{e}^{it}) \tag{1}$$

entonces f es una función periódica de período 2π. Recíprocamente, si f es una función periódica sobre $\mathbb{R}$, con período 2π, entonces existe una función F sobre $\mathbb{T}$ tal que (1) se cumple. Como cada función 2π-periódica f sobre $\mathbb{R}$ queda completamente determinada por sus valores en, digamos, $[-\pi,\pi]$, entonces, con la identificación en mente antes mencionada, podemos suponer que $\mathbb{T}$ es el intervalo $[-\pi,\pi]$ donde los extremos de ese intervalo se identifican uno con el otro. Por esta razón podemos describir a $L_p(\mathbb{T})$ como el espacio de todas las funciones (clases de equivalencias) f medibles Lebesgue, 2π-periódicas definidas sobre $[-\pi,\pi]$ para la cual

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

es finita. En otras palabras, estamos considerando a $L_p(\mathbb{T})$ como todas las funciones $f\in L_p(\lambda/2\pi)$ que son 2π-periódicas.

Un **polinomio trigonométrico** es una suma finita de la forma

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\operatorname{sen} kt) \tag{2}$$

donde $t\in\mathbb{R}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números complejos. Es claro que todo polinomio trigonométrico es una función 2π-periódica. Teniendo en cuenta que $\mathrm{e}^{ikt} = \cos kt + i\operatorname{sen} kt$, podemos reescribir (2) en la forma

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{ikt}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

donde $b_0 = 0,\ c_0 = a_0/2$ y, para cada $k\in\{1,\ldots,n\}$,

$$c_k = \frac{a_k - i\,b_k}{2} \qquad \text{y} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + i\,b_k}{2}.$$

Diremos que $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{ikt}$ tiene **grado** n si tanto c_n, así como c_{-n}, son distintos de cero.

Para cualquier $f\in L_1(\mathbb{T})$, definimos los **coeficientes de Fourier de** f por la fórmula

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

La serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int},$$

asociada a la función f, se llama la **serie de Fourier de** f y su n-ésima **suma parcial**, para $n = 0,1,2,\ldots$, viene dada por

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikt}.$$

En general, cualquier serie de la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{int}$, es llamada una **serie trigonométrica**.

Si ahora definimos el producto interno en $L_2(\mathbb{T})$ por

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \qquad f,g\in L_2(\mathbb{T})$$

y si hacemos $e_k(t) = \mathrm{e}^{ikt}$ para todo $t\in[-\pi,\pi]$ y todo $k\in\mathbb{Z}$, tendremos que

$$\langle e_n,e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases}1, & \text{si } n=m,\\ 0, & \text{si } n\neq m,\end{cases} \tag{4}$$

lo cual dice que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{T})$, al que comúnmente se llama sistema trigonométrico. Observe que si $p_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \mathrm{e}^{ikt}$ es cualquier polinomio trigonométrico, entonces la igualdad (4) implica que

$$c_k \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,dt, \quad k=-m,\ldots,m.$$

Más aun,

$$S_n(p,x) \;=\; p \quad \text{para todo } n>m=\text{grado de } p_m. \tag{5}$$

Uno de los problemas importantes que dieron origen al desarrollo de la Teoría de las Series de Fourier, es el siguiente:

Problema de la convergencia puntual de series de Fourier. *¿Para qué familia de funciones definidas sobre $\mathbb{T}$, digamos $\mathcal{F}(\mathbb{T})$, la serie de Fourier de cualquier $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T})$ converge puntualmente a $f(t)$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,t) \;=\; f(t), \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}?$$

Es un hecho conocido que si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T}) = L_2(\mathbb{T})$, entonces la serie de Fourier de f converge a f en la $\|\cdot\|_2$-norma. Esto implica, en particular, la existencia de una subsucesión de $(S_n(f,t))_{n=-\infty}^{\infty}$ que converge puntualmente a $f(t)$ para casi todo t (véase, por ejemplo, [385], Theorem 3.12). Sin embargo, lo anterior no resuelve el problema satisfactoriamente. ¿Qué ocurre, por ejemplo, si en lugar de trabajar con $(L_2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$ se considera un espacio (más pequeño) como $C(\mathbb{T})$? Al final de un artículo de 1829, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet comentaba que él estaba casi convencido de que la serie de Fourier de cualquier función continua convergía puntualmente a dicha función en cualquier punto. Grandes matemáticos tales como Riemann, Weierstrass, y Dedekind sostuvieron, por casi 40 años, puntos de vista similares a los de Dirichlet. Todos ellos estaban equivocados. En 1876, P. du Bois-Reymond da el primer ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no converge a dicha función y no lo hace precisamente en los puntos de un subconjunto denso de $[-\pi,\pi]$. Esto, por supuesto, resuelve en forma negativa el problema planteado en $C(\mathbb{T})$. El resultado de du Bois-Reymond usa el Teorema de Acotación Uniforme como un ingrediente fundamental es su demostración. En lo que sigue abordaremos la demostración de du Bois-Reymond.

Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ es una función cuya serie de Fourier diverge en algún $t \in \mathbb{T}$, entonces la sucesión de sus sumas parciales $(S_n(f,t))_{n=-\infty}^{\infty}$ puede o no estar acotada. Si ocurre que dicha sucesión no está acotada, entonces diremos que la serie de Fourier **diverge no-acotadamente** y la escribiremos como

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|S_n(f,t)\right| \;=\; \infty.$$

Para cada $f \in L_1(\mathbb{T})$, podemos escribir a $S_n(f,x)$ en la forma

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) \;&=\; \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikt} \\
&=\; \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,dt\right)\mathrm{e}^{ikx} \\
&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{i(x-t)t}\right)dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt,
\end{aligned}$$

donde

$$D_n(t) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Los $D_n \in C(\mathbb{T})$ son llamados los **núcleos de Dirichlet** y es fácil demostrar que ellos se pueden reescribir en la forma

$$D_n(t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, & \text{si } t \in [-\pi,\pi], \quad t \neq 0 \\ 2n+1, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

De aquí se sigue que cada $D_n(t)$ es una función par, 2π-periódica, y para $n \in \mathbb{N}$, toma valores positivos y negativos. Más aun,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt \;=\; 1.$$

Nótese, finalmente, que $S_n(f,t) = (D_n * f)(t) = (f * D_n)(t)$, esto es

$$S_n(f,x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Teorema 2.1.28 (du Bois-Reymond). *Sea $t \in \mathbb{T}$. Existe una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge, precisamente, en el punto t. Más aun, el conjunto de todas las funciones en $C(\mathbb{T})$ que comparten esa propiedad es un G_δ-denso en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Prueba. Haremos la prueba suponiendo que $t = 0$ ya que no se pierde generalidad en asumir esta restricción. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $x_n^* : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ por

$$x_n^*(f) \;=\; S_n(f,0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt, \quad \text{para cada } f \in C(\mathbb{T}).$$

Puesto que

$$|x_n^*(f)| = |S_n(f,0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||D_n(t)|dt \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\|D_n\|_1,$$

entonces

$$\|x_n^*\| \leq \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1.$$

Nuestro primer objetivo será demostrar que $\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1 = \infty$. En efecto, como D_n es una función par y $0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$ para todo $0 \leq x \leq \pi$, resulta que

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_1 \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \qquad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right| dt \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right| dt \;\;\geq\;\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t|}{t}dt \\
&=\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}ds \;\;>\;\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}ds, \quad \text{donde } s = \left(n+\frac{1}{2}\right)t, \\
&=\; \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}ds > \;\; \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(s)ds \\
&=\; \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} \| D_n \|_1 = \infty$.

Una vez establecido el resultado anterior, veamos ahora que $\| x_n^* \| = \| D_n \|_1$. En efecto, fijemos un $n \in \mathbb{N}$, y consideremos la función

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad D_n(t) \geq 0 \\ -1, & \text{si} \quad D_n(t) < 0. \end{cases}$$

De inmediato vamos a probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una función $f_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$, con $\| f_\varepsilon \|_\infty = 1$, tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = g(t)$. En efecto, puesto que D_n posee un número finito de ceros, la función signo g posee, en consecuencia, un número finito de discontinuidades en salto. Sean $\{t_1, \ldots, t_k\}$ los puntos donde la función g es discontinua. Para cada t_i, consideremos un intervalo cerrado J_i con centro en t_i y radio $\delta \leq \varepsilon/2N$, donde N se elige de modo que los intervalos J_i sean lo suficientemente pequeño y disjuntos dos a dos, y entonces se define la función f_ε por:

$$f_\varepsilon(t) \;=\; \begin{cases} g(t), & \text{si } t[-\pi,\pi] \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i \\ \text{lineal sobre } J_i, \;\; i = 1, \ldots, k \end{cases}$$

Es claro que con esta construcción $f_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$, $\| f_\varepsilon \|_\infty = 1$, y $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = g(t)$. Por otro lado, como $g(t)D_n(t) = |D_n(t)|$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)D_n(t) = |D_n(t)| \qquad \text{y} \qquad |f_\varepsilon(t)D_n(t)| \leq |D_n(t)|, \quad \lambda\text{-c.s} \;\; \text{en } \mathbb{T}$$

y se sigue del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} x_n^*(f_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t) D_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \\ &= \| D_n \|_1 . \end{aligned}$$

De esto se deduce que $\| x_n^* \| = \| D_n \|_1$ y, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} \| x_n^* \| = \infty$. Un llamado al Teorema de Acotación Uniforme 2, página 217, nos revela la existencia de un subconjunto G_δ-denso G de $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ tal que la igualdad

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,0)| = \infty$$

se cumple para cada $f \in G$. ■

El Teorema de du Bois-Reymond establece, como hemos visto, la existencia de una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en un punto. El resultado que sigue a continuación afirma, además, que el conjunto de puntos donde dicha función diverge es un G_δ-denso y que, más aun, la colección de las funciones en $C(\mathbb{T})$ que comparten esa propiedad también es un G_δ-denso. Formalmente,

Teorema 2.1.29 (du Bois-Reymond - genérico). *Existe un subconjunto $G \subseteq C(\mathbb{T})$, el cual es un G_δ-denso en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ tal que, para cada $f \in G$, el conjunto*

$$G_f = \Big\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,t)| = \infty \Big\},$$

es residual en $\mathbb{T}$.

Prueba. Observemos que en la demostración del Teorema de du Bois-Reymond la elección de $t = 0$ se hizo sólo por conveniencia en los cálculos, pero debe ser claro que la conclusión es la misma si elegimos un punto arbitrario t en $\mathbb{T}$. En consecuencia,

Para cada $t \in \mathbb{T}$, existe un conjunto $G_t \subseteq C(\mathbb{T})$, el cual es un G_δ-denso en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, tal que

$$S^*(f,t) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,t)| = \infty,$$

para cada $f \in G_t$.

Usemos la separabilidad de $\mathbb{T}$ para fijar una sucesión densa $(t_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{T}$. Por el Teorema de du Bois-Reymond (véase la observación anterior) existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto G_δ-denso G_n en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ tal que

$$S^*(f,t_n) = \infty, \quad \text{para cada } f \in G_n.$$

Sea

$$G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n.$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, G es un conjunto G_δ-denso en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ tal que, para cada $f \in G$, $S^*(f,t_n) = \infty$ se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $f \in C(\mathbb{T})$, $S^*(f,t)$, por ser el supremo de una colección de funciones continuas, es inferiormente semicontinua como una función de t y, por consiguiente, para cada número real r, el conjunto $\{t \in \mathbb{T} : S^*(f,t) > r\}$ es abierto en $\mathbb{T}$ que, además, es denso en dicho conjunto. Finalmente, si $f \in G$, el conjunto

$$G_f = \big\{t \in \mathbb{T} \,:\, S^*(f,t) = \infty\big\} = \bigcap_{k=1}^\infty \big\{t \in \mathbb{T} \,:\, S^*(f,t) > k\big\}$$

es, por el Teorema de Categoría de Baire, un G_δ-denso en $\mathbb{T}$. Esto termina la prueba. ■

Gracias al resultado anterior podemos afirmar que la convergencia puntual de las series de Fourier es "atípica" en el sentido de que: la serie de Fourier de la *gran mayoría* de funciones continuas no converge puntualmente.

Recordemos que si $C(\mathbb{T})$ denota el espacio de Banach de todas las funciones continuas 2π-periódicas definidas sobre $[-\pi,\pi]$, con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$, entonces el Teorema de Aproximación de Weierstrass, Teorema 2.1.2, establece que $\mathcal{P}_T(\mathbb{T})$, *el conjunto de todos los polinomios trigonométricos, es denso en* $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. *Esto quiere decir que, dado $\varepsilon > 0$ y $f \in C(\mathbb{T})$, existe $p \in \mathcal{P}_T(\mathbb{T})$ tal que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.* Por otro lado sabemos, (véase, por ejemplo, [385], Theorem 3.14), que $C(\mathbb{T})$ *es denso en* $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ y como $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$, resulta que:

Corolario 2.1.5. *Los polinomios trigonométricos son densos en $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$.*

Prueba. Sean $\varepsilon > 0$ y $f \in L_1(\mathbb{T})$. Como $C(\mathbb{T})$ es denso en $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$, escojamos una función $g \in C(\mathbb{T})$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Invoquemos ahora el Teorema de Aproximación de Weierstrass para obtener un polinomio trigonométrico p tal que $\|g - p\|_\infty < \varepsilon/2$. Finalmente, las desigualdades

$$\|f - p\|_1 \,\leq\, \|f - g\|_1 \,+\, \|g - p\|_1 \,\leq\, \|f - p\|_1 \,+\, \|g - p\|_\infty \,<\, \varepsilon$$

dan fin a la prueba. ■

De hecho, los polinomios trigonométricos son densos en $(L_p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$, para cualquier $1 \leq p < \infty$.

En una carta escrita a un amigo en 1826, Neils Hendrik Abel escribió: "*Las series divergentes son una invención del diablo*". Cien años después, en 1926, A. N. Kolmogorov [269] exhibe el primer ejemplo de una función periódica integrable Lebesgue cuya serie de Fourier diverge siempre (una prueba del resultado de Kolmogorov puede ser leída en el excelente libro de Zygmund [457] quien presenta paso a paso la construcción de Kolmogorov, o en el artículo de P. L. Ul'yanov [432]). Kline, en 1972, arremete de nuevo contra las series divergentes al afirmar: "*… usándolas se puede derivar cualquier cosa que se desee y es por esa razón que ellas han producido muchas falacias y paradojas*". Sin embargo, como se ha podido demostrar, tales funciones forman, desde el punto de vista de la categoría de Baire, un conjunto increíblemente abundante.

Teorema de Kolmogorov. *Existe una función $f \in L_1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge siempre sobre $\mathbb{T}$. Más aun,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_n(f,t)\right| = \infty, \quad \textit{para cada} \ \ t \in \mathbb{T}.$$

La versión genérica del resultado anterior que demuestra la abundancia de funciones $f \in L_1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge siempre sobre $\mathbb{T}$, es dada por el siguiente.

Teorema 2.1.30 (Kolmogorov - genérico). *El conjunto*

$$\mathcal{F}_{div} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \textit{la serie de Fourier de } f \textit{ diverge siempre sobre } \mathbb{T} \right\}$$

es residual en $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$. Más aun,

$$\mathcal{F}_{div}^{\infty} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_n(f,t)\right| = \infty, \quad \textit{para todo} \ \ t \in \mathbb{T} \right\}$$

es residual en $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$.

Prueba. Comencemos escogiendo, por el Teorema de Kolmogorov, una función g en la bola unitaria B_1 de $L_1(\mathbb{T})$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_n(g,t)\right| = \infty$ para todo $t \in \mathbb{T}$. De esto se deduce que: cualesquiera sean $M, N \in \mathbb{N}$,

$$\delta_N(g,t) := \sup_{n>N} \left|S_n(g,t) - S_N(g,t)\right| > M, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}. \tag{$\mathfrak{K}$)$_1$}$$

Nuestro primer objetivo es construir, vía inducción, una sucesión estrictamente creciente $(N_k)_{k=0}^{\infty}$ de enteros no negativos y una sucesión $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ de vectores en la bola cerrada unitaria de $L_1(\mathbb{T})$ tal que

$$\sup_{N_{k-1}<n\leq N_k} \left|S_n(g_k,t) - S_{N_{k-1}}(g_k,t)\right| > k, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}. \tag{$\mathfrak{K}$)$_2$}$$

Empecemos tomando $N_0 = 0$ y supongamos que $N_0, \ldots, N_{k-1}, g_1, \ldots, g_{k-1}$ han sido definidos. Para ver cómo se construyen N_k y g_k, usemos $(\mathfrak{K})_1$, donde hemos elegido $M = k$ y $N = N_{k-1}$ para obtener un vector $g_k \in B_1$ tal que $\delta_N(g_k,t) > k$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Sea

$$\delta_N^*(t) := \sup_{N_{k-1}<n\leq N_k} \left|S_n(g_k,t) - S_{N_{k-1}}(g_k,t)\right|, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$ escojamos un $N_t \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_{N_t}^*(t) > k$. Por la continuidad de $\delta_N^*(t)$ sobre $\mathbb{T}$, existe un entorno abierto U_t de t tal que $\delta_{N_t}^*(t') > k$ para todo $t' \in U_t$. Por compacidad, un número finito de tales abiertos, digamos, $U_{t_1}, \ldots, U_{t_j}$ cubren a $\mathbb{T}$. Tomando $N = \text{máx}\{N_{t_1}, \ldots, N_{t_j}\}$ resulta que $\delta_N^*(t) > k$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Justo ahora elija $N_k = N$ para obtener $(\mathfrak{K})_2$.

Con las sucesiones $(N_k)_{k=0}^{\infty}$ de enteros no negativos y $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ de vectores en B_1 satisfaciendo $(\mathfrak{K})_2$ podemos definir, para cada $M, k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathcal{A}(M,k) = \bigcup_{l=k}^{\infty} \Big\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \sup_{N_{l-1} < n \leq N_l} \big| S_n(f,t) \; - \; S_{N_{l-1}}(f,t) \big| > M \;\; \textit{para todo } t \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Es claro que $\mathcal{A}(M,k)$ es abierto. Veamos que también es denso en $L_1(\mathbb{T})$. Para ver esto último, sea V cualquier subconjunto abierto no vacío de $L_1(\mathbb{T})$. Usemos el hecho de que los polinomios trigonométricos son densos en $L_1(\mathbb{T})$ para obtener una bola abierta $U(p, 2\varepsilon)$ contenida en V, donde p es un polinomio trigonométrico y $\varepsilon > 0$. Gracias a $(\mathfrak{K})_2$, elijamos un l lo suficientemente grande de modo que $l \geq M/\varepsilon$, $N_{l-1} \geq \mathrm{grado}(p)$ y tal que

$$\sup_{N_{l-1} < n \leq N_l} \big| S_n(g_l,t) \; - \; S_{N_{l-1}}(g_l,t) \big| > \frac{M}{\varepsilon}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}. \tag{6}$$

Afirmamos que el vector $p + \varepsilon g_l \in V$ también pertenece a $\mathcal{A}(M,k)$. En efecto, puesto que $N_{l-1} \geq \mathrm{grado}(p)$, se sigue de (5), de la página 170, que

$$S_n(p,t) \; - \; S_{N_{l-1}}(p,t) \; = \; 0$$

para cada $n > N_{l-1}$ y, por consiguiente, gracias a la linealidad de $S_n(\cdot,t)$ en la primera variable y la desigualdad (6), obtenemos

$$\sup_{N_{l-1} < n \leq N_l} \big| S_n(p+\varepsilon g_l,t) \; - \; S_{N_{l-1}}(p+\varepsilon g_l,t) \big| \; = \; \sup_{N_{l-1} < n \leq N_l} \big| S_n(\varepsilon g_l,t) \; - \; S_{N_{l-1}}(\varepsilon g_l,t) \big| > M$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Con esto hemos demostrado que $V \cap \mathcal{A}(M,k) \neq \varnothing$ y, en consecuencia, la densidad de $\mathcal{A}(M,k)$ ha quedado, de este modo, establecida. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos dice que el conjunto

$$\bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(M,k) \subseteq \mathcal{F}_{div}^{\infty}$$

es un G_δ-denso en $(L_1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$. ■

Comentario Adicional 2.1.7 A pesar de que los problemas de no convergencia de series de Fourier abundan para funciones en $L_1(\mathbb{T})$, en los espacios $L_p(\mathbb{T})$ con $p > 1$, el panorama es más esperanzador. En efecto, un resultado profundo, y a su vez difícil, de L. Carleson demostrado en 1966 para funciones continuas [83] y generalizado por R. A. Hunt en [224] para funciones en $L_p(\mathbb{T})$ con $p > 1$ establece que:

Teorema de Carleson-Hunt. *Para cada $f \in L_p(\mathbb{T})$ con $p > 1$, si*

$$E = \big\{ x \in \mathbb{T} : \lim_{n\to\infty} S_n(f,x) \neq f(x) \big\}$$

entonces $\lambda(E) = 0$.

En el mismo año de 1966, Kahane y Katznelson [249] demuestran el recíproco del resultado de Carleson con una prueba que podemos considerar sencilla.

Teorema de Kahane-Katznelson. *Dado cualquier subconjunto medible Lebesgue E de $\mathbb{T}$ con $\lambda(E) = 0$, existe una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge sobre E.*

La abundancia de funciones continuas que satisfacen la conclusión del resultado de Kahane-Katznelson es lo que llamamos la versión genérica del fenómeno encontrado por Kahane-Katznelson y se expresa del modo siguiente.

Teorema 2.1.31 (Kahane-Katznelson - genérico). *Sea E un subconjunto F_σ de $\mathbb{T}$ con $\lambda(E) = 0$. Entonces el conjunto*

$$G = \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_n(f,t)\right| = \infty, \text{ para todo } t \in E \right\}$$

es residual en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. (**Esbozo**). La prueba descansa fundamentalmente sobre el siguiente resultado demostrado por Kahane-Katznelson en [249].

Lema de Kahane-Katznelson. *Sea F una unión finita de intervalos de $\mathbb{T}$ con $\lambda(F) = a$, donde $0 < a < \frac{1}{\pi}$. Entonces existe un polinomio trigonométrico p en $C(\mathbb{T})$, con $\|p\|_\infty = 1$, tal que*

$$S^*(p,t) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(p,t)| \geq \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{a\pi}, \qquad \text{cuando} \quad t \in F.$$

Supongamos, en primer lugar, que E es cerrado con $\lambda(E) = 0$ y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$G_n = \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : S^*(f,t) > n, \text{ para todo } t \in E \right\}.$$

Puesto que $S^*(f,t)$ es una función inferiormente semicontinua, resulta que cada G_n es abierto. Veamos que ellos también son densos. Teniendo en cuenta que los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$, es suficiente demostrar que cada entorno abierto de cualquier polinomio trigonométrico f intersecta a G_n. Sea f un polinomio trigonométrico y sea U_ε una bola abierta con centro en f y radio $2\varepsilon > 0$. Nótese que existe una constante $M > 0$ tal que $S^*(f,t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{T}$. A continuación, usemos el Lema de Kahane-Katznelson para determinar un polinomio trigonométrico p, con norma $\|p\|_\infty = 1$, tal que

$$S^*(p,t) \; > \; \frac{n+M}{\varepsilon} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Entonces

$$S^*(f+\varepsilon p,t) \;\geq\; S^*(\varepsilon p,t) - S^*(f,t) \;>\; n.$$

Esto prueba que $f + \frac{\varepsilon}{2} p \in G_n$, es decir, $U_\varepsilon \cap G_n \neq \varnothing$. Por el Teorema de Categoría de Baire el conjunto $\bigcap_{n=1}^\infty G_n \subseteq G$ es un G_δ-denso en $C(\mathbb{T})$.

Finalmente, sea $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, donde cada E_k es cerrado con $\lambda(E_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots$. Por la primera parte existe, para cada $k \in \mathbb{N}$, un G_δ-denso H_k de $C(\mathbb{T})$ tal que

$$S^*(f,t) = \infty, \quad \text{para todo } f \in H_k \text{ y todo } t \in E_k.$$

De nuevo, por el Teorema de Categoría de Baire, $\bigcap_{k=1}^\infty H_k$ es un G_δ-denso incluido en G. ■

2.1.15. ‖ ► Series universales

La representación de funciones por series trigonométricas, de Fourier, de Taylor, de Dirichlet, etc., siempre ha sido un tema de interés. Ya hemos visto que el problema de la unicidad de la representación por series de Fourier posee, en general, una respuesta negativa, dada por Menchoff (o Menšov, o Menshov) en 1916. El otro problema, el de la existencia:

Dada una función medible Lebesgue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ¿existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int} \qquad \lambda\text{-c.s?},$$

contrario al problema de la unicidad de la representación, posee una respuesta positiva. Menchoff, de nuevo, es el responsable de tal descubrimiento en el año de 1940 (véase, por ejemplo, [271]).

En esta sección abordaremos muy superficialmente algunas informaciones relacionadas con la respuesta positiva de Menchoff al problema de existencia ya planteado. Ello condujo a la noción de series universales que ha tenido un gran impacto en el análisis armónico y un profundo e increíble desarrollo por más de 50 años. . . y aun continúa.

Definición 2.1.13. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ se llama **universal** si la sucesión $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ de sus sumas parciales es norma-densa en X.*

En lo que sigue supondremos que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, donde $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, \ldots\}$, está provisto de la topología producto. Las hipótesis del siguiente teorema son naturales y muy permisivas. Ellas permiten reconfirmar lo que ya había demostrado Grosse-Erdmann en [193]: "Universalidad es, en análisis, un fenómeno genérico".

Teorema 2.1.32 (Bayart). *Sean X un espacio vectorial topológico, metrizable y separable, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y Y un subconjunto de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ con las siguientes propiedades:*

(a) *Y es un espacio de Baire,*

(b) *para cada $m \in \mathbb{N}^*$, la proyección $p_m : Y \to \mathbb{C}$ dada por $p_m(c_0, \ldots, c_m, \ldots) = c_m$ es continua, y*

(c) *si $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$, $b = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$ y $N \geq 0$, entonces $c(N) = (b_0, \ldots, b_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots) \in Y$, y*

$$\lim_{N\to\infty} c(N) = b.$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *Para al menos un $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ es universal.*

(2) *El conjunto $\mathcal{SU} = \left\{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \text{ es universal}\right\}$ es un G_δ-denso en Y.*

Prueba. Es claro que (2) implica (1). Suponga entonces que (1) se cumple. La separabilidad de X garantiza la existencia de una base numerable $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ para X. Definamos ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$G_k = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y : \text{ existe } N \geq 0 \text{ para el cual } \sum_{n=0}^{N} a_n x_n \in U_k \right\}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que cada conjunto G_k es abierto y denso en Y. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y observemos que, por ser la proyección p_m una función continua, también lo es la aplicación $\varphi_m : Y \to X$ dada por $\varphi_m(a) = a_m x_m$ para todo $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$. De esto se sigue que G_k es abierto en Y. Para demostrar la densidad de G_k, tomemos un abierto no vacío V de Y y veamos que $G_k \cap V \neq \varnothing$. Sea $b = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in V$. Por hipótesis, existe un elemento $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ es universal. Por (c) resulta que $c(N) \in Y$ para cualquier $N \geq 0$ y, además, $\lim_{N\to\infty} c(N) = b$. De esto se sigue la existencia de un entero $N_0 > 0$ tal que

$$c = (b_0, \ldots, b_{N_0}, a_{N_0+1}, a_{N_0+2}, \ldots) \in V.$$

Afirmamos que $c \in G_k$. En efecto, como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ es una serie universal, el conjunto $\mathcal{S}$ formado por todas sus sumas parciales es denso en X y, por lo tanto, $\mathcal{S}$ intersecta al abierto $\sum_{n=0}^{N_0} a_n x_n - \sum_{n=0}^{N_0} b_n x_n + U_k$. Elijamos ahora un entero $N_1 > N_0$ de modo que

$$\sum_{n=0}^{N_1} a_n x_n \in \sum_{n=0}^{N_0} a_n x_n - \sum_{n=0}^{N_0} b_n x_n + U_k.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_1} c_n x_n &= \sum_{n=0}^{N_0} b_n x_n + \sum_{n=N_0+1}^{N_1} a_n x_n = \sum_{n=0}^{N_0} b_n x_n + \sum_{n=0}^{N_1} a_n x_n - \sum_{n=0}^{N_0} a_n x_n \\ &= -\Big(\sum_{n=0}^{N_0} a_n x_n - \sum_{n=0}^{N_0} b_n x_n\Big) + \sum_{n=0}^{N_1} a_n x_n \in U_k\end{aligned}$$

Esto prueba que $c \in G_k$ y, así, $G_k \cap V \neq \varnothing$. Siendo Y un espacio de Baire, se obtiene que $\mathcal{SU} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ es un G_δ-denso en Y. ■

Sea Ω un subconjunto no vacío, abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *representable por una serie de potencia* en Ω si para cualquier disco abierto $\mathbb{D}(a,r) \subseteq \Omega$ corresponde una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ que converge a $f(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}(a,r)$. El siguiente resultado es conocido.

Teorema 2.1.33 ([385], Th. 10.6, p.215). *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es representable por una serie de potencias en Ω si, y sólo si, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

El primer ejemplo del fenómeno de *universalidad* para series de potencias fue observado por Fekete en 1914 (véase, por ejemplo, [193], p. 346), quien demostró el siguiente resultado:

‖ ► **Teorema de Fekete**. *Existe una serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ sobre $[-1,1]$, con $a_n \in \mathbb{R}$, que diverge en cualquier punto $x \neq 0$, y que posee la siguiente propiedad: para cada función continua $f \in C[-1,1]$ satisfaciendo $f(0) = 0$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_k} a_n x^n \quad \textit{uniformemente sobre } [-1,1].$$

Si se tiene en cuenta un teorema de Borel (de 1895) el cual establece que *cualquier serie de potencia es la serie de Taylor alrededor del* 0 *de alguna función de clase C^∞*, entonces podemos valorar lo espectacular que resulta el resultado de Fekete.

El ejemplo de Fekete de una serie de potencia (o de Taylor) exhibe dos aspectos de universalidad que están presentes en dicho resultado. El primero es el de la divergencia maximal: sólo en $x = 0$ la serie converge. El segundo aspecto, el más interesante, es el de la existencia de un sólo objeto el cual, a través de un proceso usualmente numerable (tomar límites), permite aproximar una clase maximal de otros objetos. Esto es lo que sugiere el nombre de universalidad, el cual fue empleado por primera vez por Marcinkiewicz en 1953 (él la llamó una *primitiva universal*) y quien también fue el primero en demostrar que tales primitivas universales formaban un conjunto residual.

‖ ► **Teorema de Marcinkiewicz**. *Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales con $h_n \to 0$. Entonces existe una función continua $f \in C[0,1]$ tal que, para cualquier función medible $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos con*

$$\frac{f(x+h_{n_k}) - f(x)}{h_{n_k}} \to g(x), \quad \lambda - \text{c.s.} \quad \text{en } [0,1].$$

Más aun, el conjunto de tales f es residual en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Antes del resultado de Marcinkiewicz, D. Menchoff (véase [193], p. 362) había demostrado el siguiente resultado que resolvía positivamente el problema de la representación de funciones medibles por series trigonométricas:

‖ ► **Teorema de Menchoff**. *Existe una serie trigonométrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}$ cuyos coeficientes convergen a cero tal que, para cualquier función medible Lebesgue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos con*

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-n_k}^{n_k} c_n \mathrm{e}^{2\pi int}, \quad \lambda - \text{c.s.} \quad \text{sobre } \mathbb{T}.$$

Posteriormente, en 1957, A. A. Talayan (véase, [193], p. 363) demostró que uno puede reemplazar el sistema trigonométrico por cualquier sistema ortonormal completo en $L^2(\mathbb{T})$ para obtener la misma conclusión en el Teorema de Menchoff. La siguiente definición fue propuesta después del resultado de Menchoff.

Definición 2.1.14. *Una serie trigonométrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}$ se dice **universal en el sentido de Menchoff** si, para cualquier función medible Lebesgue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k(f))_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{S}_{n_k(f)}(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-n_k(f)}^{n_k(f)} c_n e^{2\pi int} = f(t), \quad \lambda - c.s. \quad \textit{sobre } \mathbb{T}$$

Veremos ahora algunos resultados genéricos sobre universalidad. Para ello es importante hacer notar que si $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$ denota el conjunto de todas las series trigonométricas con coeficientes complejos, entonces a dicho conjunto lo dotaremos de la topología que corresponde a la topología producto de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mediante el isomorfismo

$$\mathcal{S}_T(\mathbb{C}) \ni \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \longmapsto (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

Por consiguiente, la topología sobre $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$ no es otra cosa que la topología de la convergencia de los coeficientes; es decir, una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a s en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$ si, y sólo si, convergen los coeficientes para cada índice n:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} \mathrm{e}^{2\pi int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \quad \text{si, y sólo si,} \quad \lim_{m\to\infty} c_{mn} = c_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Con esta topología, $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$ resulta ser un espacio de Baire. Si $\mathbb{S} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \in \mathcal{S}_T(\mathbb{C})$, entonces la n-ésima suma parcial de $\mathbb{S}$ será denotada, como siempre, por $\mathbb{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{2\pi ikt}$.

El siguiente lema, fundamentalmente la parte (b), es una pieza clave en la demostración del próximo teorema.

Lema 2.1.5. *Sea V un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{T}$ y sea $N \in \mathbb{N}$. Definamos*

$$V(\mathbb{T}) \;=\; \big\{ f \in C(\mathbb{T}) \,:\, \operatorname{sop}(f) \subseteq V \big\}, \qquad y \qquad K = \mathbb{T} \setminus V.$$

Entonces

(a) $\Big\{ \big(\widehat{f}(n)\big)_{n=-N}^{N} : f \in V(\mathbb{T}) \Big\} = \mathbb{C}^{2N+1}$*, es decir, la aplicación*

$$V(\mathbb{T}) \ni f \quad \longmapsto \quad \big(\widehat{f}(n)\big)_{n=-N}^{N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$$

es sobreyectiva.

(b) *Para cada $f \in C(\mathbb{T})$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico P de la forma*

$$P(t) \;=\; \sum_{N<|n|\leq M} c_n e^{2\pi i n t}$$

tal que $\| f - P \|_K < \varepsilon$, donde $\| g \|_K = \sup \big\{ |g(t)| : t \in K \big\}$ para $g \in C(\mathbb{T})$.

Prueba. (a) Pongamos $Y := \big\{ \big(\widehat{f}(n)\big)_{n=-N}^{N} : f \in V(\mathbb{T}) \big\}$ y suponga que $Y \neq \mathbb{C}^{2N+1}$. Entonces, el complemento ortogonal de Y, $Y^{\perp} \neq \{0\}$ y, por consiguiente, podemos elegir un $\alpha = (\alpha_n)_{n=-N}^{N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $\alpha \neq 0$, tal que $\alpha \in Y^{\perp}$, es decir, que cumpla

$$\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \widehat{f}(n) \;=\; 0, \quad \text{para toda } f \in V(\mathbb{T}). \tag{1}$$

Veremos, en lo inmediato, que esta suposición conduce a una contradicción. Para ello, consideremos la expresión $\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z^n = z^{-N} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z^{n+N}$. Ya que el polinomio $\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z^n$ posee a lo sumo $2N+1$ ceros y como $V \subseteq \mathbb{T}$ es abierto, existe un $t_0 \in V$ tal que $z_0 = \mathrm{e}^{-2\pi i t_0}$ cumple

$$\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z^n \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \mathrm{e}^{-2\pi i n t_0} \;\neq\; 0. \tag{2}$$

Consideremos ahora $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$ una identidad aproximada centrada en t_0, es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta_k \in C(\mathbb{T}), \quad \delta_k \geq 0 \text{ sobre } \mathbb{T}, \quad \int_0^1 \delta_k(t)\,dt = 0, \quad \operatorname{sop}(\delta_k) \subseteq [t_0 - 1/k, t_0 + 1/k].$$

Observemos que para k suficientemente grande, $\delta_k \in V(\mathbb{T})$, de modo tal que $\big(\widehat{\delta}_k(n)\big)_{n=-N}^{N} \in Y$. Es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\delta}_k(n) \;=\; \int_0^1 \delta_k(t) \mathrm{e}^{-2\pi i n t} dt \quad \longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2\pi i n t_0} \;=\; z_0^n \quad \text{cuando } k \to \infty. \tag{3}$$

Se sigue ahora de (2) y (3) que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \widehat{\delta}_k(n) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z_0^n,$$

y, por lo tanto, $\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \widehat{\delta}_k(n) \neq 0$ para k suficientemente grande, lo que evidentemente contradice a (1). Por esto, $Y = \mathbb{C}^{2N+1}$.

(b) Fijemos $f \in C(\mathbb{T})$, $\varepsilon > 0$, y pongamos $\gamma_n = \widehat{f}(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por lo demostrado en (a), existe $g \in V(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{g}(n) = \gamma_n$, para $n \in \{-N, \dots, N\}$, de modo que la función $h = f - g$ cumple

$$\widehat{h}(n) \;=\; 0, \quad \text{para todo } n \in \{-N, \dots, N\} \tag{4}$$

Una aplicación del Teorema de Aproximación de Weierstrass nos proporciona un polinomio trigonométrico $\sum_{n=-M}^{M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int}$ tal que

$$\left\| h - \sum_{n=-M}^{M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \right\|_\infty \;<\; \frac{\varepsilon}{2N+1}. \tag{5}$$

Conviene suponer que $M > N$. Se sigue de (4) y (5) que para cada $n \in \{-N, \dots, N\}$

$$|c_n| \;=\; \left| \left(h - \sum_{n=-M}^{M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \right)^{\wedge} (n) \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{2N+1},$$

y por lo tanto,

$$\left\| \sum_{n=-M}^{M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \right\|_\infty \;<\; (2N+1)\frac{\varepsilon}{2N+1} \;=\; \varepsilon.$$

Combinando esto último con (5) se deduce que

$$\left\| h - \sum_{N<|n|\leq M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \right\|_\infty \;<\; \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2N+1} \;<\; 2\varepsilon.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $h_{|_K} = g_{|_K}$, concluimos que

$$\left\| h - \sum_{N<|n|\leq M} c_n \mathrm{e}^{2\pi int} \right\|_K \;<\; 2\varepsilon.$$

■

Para cada $a \in \mathbb{T}$, los conjuntos compactos $K_j(a) = [a, a+1-1/j]$ para $j \in \{3, 4, \dots\}$, serán usados en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.34 ([247], Th. 2.1). *El conjunto de todas las series trigonométricas* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}$ *que poseen la propiedad: para cada función* $f \in C(\mathbb{T})$ *existe una sucesión estrictamente creciente* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *de enteros positivos tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{S}_{n_k}(t) = f(t)$$

para cada $t \in \mathbb{T}$ *y uniformemente sobre cada compacto* $K_j(a) \subseteq \mathbb{T}$ *con* $a \in \mathbb{T}$ *y* $j \in \{3, 4, \dots\}$, *es un* G_δ*-denso en* $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$.

Prueba. Dados P, un polinomio trigonométrico con coeficientes racionales, $\varepsilon > 0$ un número racional y $j \in \{3, 4, \dots\}$, consideremos el conjunto

$$G(P, \varepsilon, j) = \left\{ \mathbb{S} \in \mathcal{S}_T(\mathbb{C}) : \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } |P(t) - \mathbb{S}_N(t)| < \varepsilon \text{ sobre } K_j \right\}$$

el cual es, claramente abierto, en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$. Veamos que también dicho conjunto es denso en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$. Notemos en primer lugar que cualquier subconjunto abierto de $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$ contiene un cilindro de la forma

$$C \;=\; \left\{ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \; c_n \in I_n \text{ para } \; |n| \leq M \right\},$$

donde $M \in \mathbb{N}$, y los I_n son intervalos abiertos. Sea ahora U cualquier intervalo abierto no vacío de $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$. Fijemos un $M \in \mathbb{N}$, e intervalos abiertos I_n de modo tal que el cilindro C, como se definió arriba, esté totalmente contenido en U. Sin perder generalidad podemos suponer, y así lo haremos, que $M > \text{grad}(P)$. Escojamos $c_n \in I_n$ con $|n| \leq M$ y definamos

$$Q = P - \sum_{|n|\leq M} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t}.$$

Por (b) del lema anterior, existe un polinomio trigonométrico R de la forma

$$R = \sum_{M<|n|\leq L} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

tal que $\| Q - R \|_{K_j} < \varepsilon$, es decir,

$$\left\| P - \sum_{|n|\leq M} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t} - \sum_{M<|n|\leq L} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t} \right\|_{K_j} < \varepsilon.$$

Es claro que

$$\mathbb{S}(t) := \sum_{|n|\leq L} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t} \in G(P, \varepsilon, j) \cap C \subseteq G(P, \varepsilon, j) \cap U,$$

de donde se deduce que $G(P, \varepsilon, j)$ es un abierto denso en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$. Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcap_{P\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}} \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}} \bigcap_{j=3}^{\infty} G(P, \varepsilon, j)$$

es un G_δ-denso en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$, donde $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ denota el conjunto de todos los polinomios trigonométricos con coeficientes racionales. ■

Para el siguiente resultado el lector está invitado a echarle una mirada al Capítulo 3, mirar la Definición 3.1.2, página 476, y revisar algunas de las propiedades del espacio $\mathfrak{B}_1(X)$ formado por todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son límite puntual de sucesiones de funciones continuas.

Corolario 2.1.6. *El conjunto de todas las series trigonométricas $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}$ que poseen la propiedad: para cada función $f \in \mathfrak{B}_1(\mathbb{T})$ existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{S}_{n_k}(t) = f(t)$$

para cada $t \in \mathbb{T}$, es un G_δ-denso en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$.

Prueba. Sea $f \in \mathfrak{B}_1(\mathbb{T})$. Entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $C(\mathbb{T})$ tal que

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}. \tag{1}$$

Sea G el G_δ-denso cuya existencia fue probada en el Teorema 2.1.34 y sea, como antes, $K_k = [a, a+1-1/k]$. Por el Teorema 2.1.34, para cada serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t} \in G$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_k(t) - \mathbb{S}_{n_k}(t)| < 1/k \quad \text{sobre } K_k. \tag{2}$$

Se sigue de (1) y (2) que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{S}_{n_k}(t) = f(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}$$

ya que $t \in K_k$ para k suficientemente grande. ■

Teniendo en cuenta que toda función medible Lebesgue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es de la forma $f = g + h$, donde g es medible Borel y $h = 0$ c.s. , y del hecho de que $\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{B}_1(\mathbb{T})$, entonces se obtiene, como una consecuencia del corolario anterior, la versión genérica del resultado de Menchoff (véase, [247], p. 154).

Teorema 2.1.35 (Menchoff - genérico). *El conjunto de todas la series trigonométricas que son universales en el sentido de Menchoff es residual en $\mathcal{S}_T(\mathbb{C})$.*

Si ahora consideramos el subespacio $\mathcal{S}_T(c_0) = \{s \in \mathcal{S}_T(\mathbb{C}) : \text{cuyos coeficientes } c_n \text{ tienden a } 0\}$, resulta que dicho conjunto constituye un espacio de Banach isomorfo a c_0 y se cumple el siguiente resultado demostrado por Kahane-Nestoridis [250].

Teorema 2.1.36 (Kahane-Nestoridis). *El conjunto de todas la series trigonométricas en $\mathcal{S}_T(c_0)$ que son universales en el sentido de Menchoff es un G_δ-denso.*

Dada una función $f \in C^\infty[-1,1]$ satisfaciendo $f(0) = 0$, diremos que f posee una **serie de Taylor universal** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

es una serie universal. Del ejemplo de Fekete sobre la existencia de una serie de Taylor universal en combinación con el Teorema de Aproximación de Weierstrass se sigue el siguiente resultado:

Corolario 2.1.7. *El conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty[-1,1]$ que satisfacen $f(0) = 0$ y que poseen una serie de Taylor universal, es residual en $C[0,1]$.*

A pesar de este resultado, las series de Taylor universales resultan más interesantes cuando ellas representan funciones analíticas en un disco dado, digamos, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. La siguiente definición fue formulada por V. Nesterodis [338].

Definición 2.1.15. *Una serie de Taylor $S := \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ convergente en $\mathbb{D}$ se llama **universal en el sentido de Nestoridis** si, dado cualquier compacto $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ el cual no divide el plano (es decir, cuyo complemento es conexo), se satisface la siguiente propiedad: para cualquier función $f : K \to \mathbb{C}$ continua sobre K y analítica en el interior de K, existe una sucesión de sumas parciales de S que converge a f uniformemente sobre K.*

Consideraremos a $\mathfrak{U}_T(\mathbb{D})$, el conjunto de todas las series de Taylor universales en el sentido de Nestoridis, como un subconjunto del espacio de las funciones holomorfas $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Si bien es cierto que hasta el momento no se conoce, en forma explícita, una serie de Taylor universal en el sentido de Nestoridis, su existencia fue demostrada por V. Nestoridis en [338], Theorem 2.6, p. 1300.

Abordaremos la prueba del resultado de Nestoridis siguiendo la demostración dada por el propio Nestoridis. Para ello se requieren de algunos lemas previos y el siguiente resultado de Mergelyan.

> **Teorema de Mergelyan** ([385], Th. 20.5). *Sea K un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{C}$ cuyo complemento es conexo. Si $f : K \to \mathbb{C}$ es continua sobre K y analítica en el interior de K y si $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio p tal que $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.*

En los siguientes cuatro lemas vamos a demostrar que $\mathfrak{U}_T(\mathbb{D})$ es un subconjunto G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

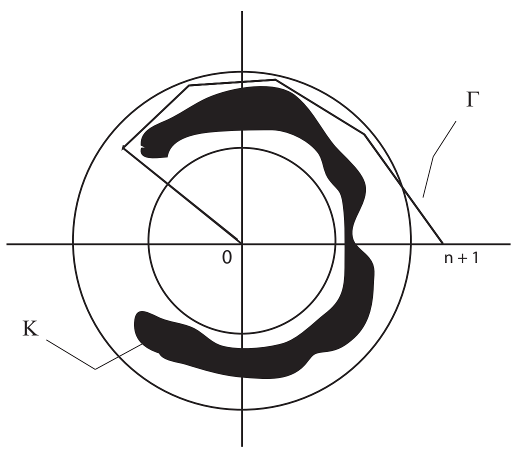
Lema 2.1.6. *Existe una sucesión $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ de conjuntos compactos infinitos en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, cada uno con complemento conexo, tal que se cumple lo siguiente: para cada compacto $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ teniendo complemento conexo, existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $K\subseteq K_m$.*

Prueba. Sea $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ un conjunto compacto con complemento conexo. Si K es finito, entonces es fácil determinar un compacto infinito K' conteniendo a K tal que $K'\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ y su complemento es conexo. Por esta razón asumiremos que K es infinito. Claramente existe un entero $n>1$ tal que

$$K\subseteq\{z\in\mathbb{C}:1\leq|z|\leq n\}.$$

Puesto que 0 y $n+1$ pertenecen al complemento de K, el cual es conexo, podemos unirlos por una línea poligonal Γ incluida en $\mathbb{C}\setminus K$ y teniendo vértices con coordenadas racionales. Observemos que Γ es un conjunto compacto infinito cuyo complemento es conexo. Denotando por $LP(K)$ el conjunto de tales líneas poligonales resulta que dicho conjunto es numerable. Siendo Γ y K compactos disjuntos, la distancia entre ellos es estrictamente positiva. De esto se sigue la existencia de un número natural s tal que $K\subseteq L(n,\Gamma,s)$, donde

$$L(n,\Gamma,s)=\left\{z\in\mathbb{C}:1\leq|z|\leq n,\ \operatorname{dist}(z,\Gamma)\geq\frac{1}{s}\right\}.$$



Observemos ahora que el conjunto

$$\mathcal{A}=\{L(n,\Gamma,s):n,s\in\mathbb{N},\ \Gamma\in LP(K)\}$$

es numerable y que si $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ es una enumeración de $\mathcal{A}$, entonces cada compacto $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ con complemento conexo está incluido en algún K_m. ■

Fijemos la sucesión $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ obtenida en el lema anterior y sea $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los polinomios cuyos coeficientes poseen coordenadas racionales. Para cada $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $n\in\mathbb{Z}$ con $n\geq 0$, denotemos, como siempre, por $S_n(f,z)$ la n-ésima suma parcial del desarrollo de Taylor de f en $z\in\mathbb{C}$. Más aun, para cualesquiera enteros m,j,s,n con $m,j,s\geq 1$ y $n\geq 0$, sea $E(m,j,s,n)$ el subconjunto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ definido por

$$E(m,j,s,n)=\left\{g\in\mathcal{H}(\mathbb{D}):\sup_{z\in K_m}\left|S_n(g,z)-f_j(z)\right|<\frac{1}{s}\right\}.$$

Lema 2.1.7. $\mathcal{U}_T(\mathbb{D}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n)$.

Prueba. Por definición,

$$\mathcal{U}_T(\mathbb{D}) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n) := G.$$

Para demostrar la otra inclusión, sea $f \in G$. Sean $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ un conjunto no vacío y compacto con complemento conexo, y $h : K \to \mathbb{C}$ una función continua sobre K y holomorfa en el interior de K. Fijemos ahora un $\varepsilon > 0$ y un $\nu \in \mathbb{N}$. Nuestra tarea inmediata es determinar un $N > \nu$ tal que

$$\sup_{z \in K} \left| S_n(f,z) - h(z) \right| < \varepsilon.$$

Por el Teorema de Mergelyan, existe un polinomio f_j (para algún $j \in \mathbb{N}$) cuyos coeficientes poseen coordenadas racionales tal que

$$\sup_{z \in K} \left| h(z) - f_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer (y así lo haremos), que $f_j(0) \neq f(0)$. Por el Lema 2.1.6 existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_m$. Puesto que, para cualquier $s \in \mathbb{N}$,

$$f \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n),$$

se sigue que, para cada $s \in \mathbb{N}$, existe un entero $n_s \geq 0$ tal que

$$\sup_{z \in K_m} \left| S_{n_s}(f,z) - f_j(z) \right| < \frac{1}{s}.$$

Observemos ahora que la sucesión $(n_s)_{s=1}^{\infty}$ no puede poseer subsucesiones acotadas. En efecto, supongamos que ella posee alguna subsucesión acotada. Entonces existe un entero $\lambda \geq 0$ tal que $n_s = \lambda$ para infinitos s. Sobre K_m uno obtiene que $S_\lambda(f,\cdot) = f_j(\cdot)$ y puesto que K_m es infinito resulta que $S_\lambda(f,\cdot) \equiv f_j(\cdot)$, lo cual contradice el hecho de $f_j(0) \neq f(0)$. Por consiguiente, la sucesión $(n_s)_{s=1}^{\infty}$ converge a $+\infty$ y, en consecuencia, existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que $1/s < \varepsilon/2$ y $n_s > \nu$.

Finalmente, puesto que

$$\sup_{z \in K} \left| h(z) - f_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sup_{z \in K_m} \left| S_{n_s}(f,z) - f_j(z) \right| < \frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad K \subseteq K_m,$$

la desigualdad triangular nos garantiza que

$$\sup_{z \in K} \left| S_{n_s}(f,z) - h(z) \right| < \varepsilon$$

siempre que $n_s > \nu$. Esto prueba que $f \in \mathcal{U}_T(\mathbb{D})$ y termina la prueba. ■

Lema 2.1.8. *$E(m,j,s,n)$ es abierto en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ para cualesquiera enteros m,j,s,n con $m,j,s \geq 1$ y $n \geq 0$.*

Prueba. Sea $f \in E(m,j,s,n)$. Entonces

$$\sup_{z\in K_m} \left|S_n(f,z) - f_j(z)\right| < \frac{1}{s}.$$

Definiendo $M = \sup\{|z| : z \in K_m\}$, vemos que $1 \le M < +\infty$. Sea

$$a := \frac{\frac{1}{s} - \sup_{z\in K_m} \left|S_n(f,z) - f_j(z)\right|}{\sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda} > 0.$$

Supongamos que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ satisface

$$\sup_{|z|\le\frac{1}{2}} \left|g(z) - f(z)\right| < a.$$

Vamos a demostrar que

$$\sup_{z\in K_m} \left|S_n(g,z) - f_j(z)\right| < \frac{1}{s}$$

lo cual nos conducirá, por consiguiente, a que $g \in E(m,j,s,n)$ y, en consecuencia a que $E(m,j,s,n)$ es abierto.

En efecto, para $z \in K_m$ tenemos que

$$\left|S_n(g,z) - f_j(z)\right| \le \left|S_n(g-f,z)\right| + \left|S_n(f,z) - f_j(z)\right|.$$

Escribamos

$$S_n(g-f,z) = \sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda z^\lambda.$$

Puesto que $\sup_{|z|\le\frac{1}{2}} \left|g(z) - f(z)\right| < a$, tenemos que $|b_\lambda| < a \cdot 2^\lambda$. Para $z \in K_m$,

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda z^\lambda\right| < a \cdot \sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda.$$

De esto se sigue que

$$\sup_{z\in K_m} \left|S_n(g,z) - f_j(z)\right| < a \cdot \sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda + \sup_{z\in K_m} \left|S_n(f,z) - f_j(z)\right| = \frac{1}{s}.$$

Esto termina la prueba. ■

Lema 2.1.9. *Para cualesquiera $m,j,s \in \mathbb{N}$, el conjunto $G(m,j,s) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n)$ es abierto y denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.*

Prueba. Por el Lema 2.1.8 los conjuntos $E(m,j,s,n)$, $n = 0,1,2,\ldots$ son abiertos y entonces cada $G(m,j,s)$ también lo es.

Sean $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $L \subseteq \mathbb{D}$ un disco compacto no vacío y $\varepsilon > 0$. Para demostrar que $G(m, j, s)$ es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es suficiente encontrar un $n \geq 0$ y una función $g \in E(m, j, s, n)$, tal que

$$\sup_{z \in L} \left| f(z) - g(z) \right| < \varepsilon.$$

Notemos que los compactos K_m y L son disjuntos y que $K_m \cup L$ es un compacto con complemento conexo. Por el Teorema de Mergelyan, aplicado a la función $F : K_m \cup L \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \begin{cases} f_j(z) & \text{si } z \in K_m, \\ f(z) & \text{si } z \in L, \end{cases}$$

la cual es continua sobre $K_m \cup L$ y analítica en el interior $K_m \cup L$, existe un polinomio g tal que

$$\left| F(z) - g(z) \right| < \text{mín}\{\varepsilon, 1/s\} \quad \text{sobre } K_m \cup L.$$

Más aun, si $n := \text{grado}(g)$, entonces

$$S_n(g, \cdot) = g(\cdot), \qquad \sup_{z \in K_m} \left| S_n(g,z) - f_j(z) \right| < \frac{1}{s} \qquad \text{y} \qquad \sup_{z \in L} \left| f(z) - g(z) \right| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $G(m, j, s)$ es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y termina la prueba. ■

Finalmente estamos ahora en condiciones demostrar el teorema de Nestoridis.

Teorema 2.1.37 (Nestoridis). *$\mathfrak{U}_T(\mathbb{D})$ es un subconjunto G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. En particular, $\mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) \neq \varnothing$.*

Prueba. Puesto que $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es un espacio de Baire, la aplicación de los lemas Lema 2.1.7 y Lema 2.1.9 producen el resultado. ■

Como una consecuencia del resultado de Nestoridis combinado con el Teorema de Categoría de Baire tenemos:

Corolario 2.1.8 (Nestoridis). *Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ una serie de Taylor con $z \in \mathbb{D}$, $c_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cuyo radio de convergencia es mayor o igual a 1. Entonces $f = s_1 - s_2$, donde s_1 y s_2 son series de Taylor universales en el sentido de Nestoridis.*

Prueba. Puesto que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, la aplicación $\Phi : \mathcal{H}(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ definida por $\Phi(g) = g + f$, para toda $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.1.37, el conjunto $\mathfrak{U}(\mathbb{D})$ es un G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, y como Φ es un homeomorfismo, resulta que $\Phi(\mathfrak{U}_T(\mathbb{D})) = \mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) + f$ también es un G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Siendo $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ un espacio de Baire, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que el conjunto $\mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) \cap (\mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) + f) \neq \varnothing$. Esto muestra la existencia de dos elementos $s_1, s_2 \in \mathfrak{U}_T(\mathbb{D})$, tal que $f = s_1 - s_2$. La prueba es completa. ■

Recordemos que $\mathcal{NE}(\mathbb{D})$ representa el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ las cuales no se pueden extender holomorficamente a ningún dominio conteniendo estrictamente a $\mathbb{D}$. Es un hecho ya establecido (véase, por ejemplo, Teorema 2.1.27, página 167, o [264]) que $\mathcal{NE}(\mathbb{D})$ contiene un subconjunto G_δ-denso de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Por el Teorema de Categoría de Baire tenemos que $\mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) \cap \mathcal{NE}(\mathbb{D}) \neq \varnothing$. Sea $f \in \mathfrak{U}_T(\mathbb{D}) \cap \mathcal{NE}(\mathbb{D})$. Entonces f es una serie de Taylor universal en el sentido de Nestoridis que no es el desarrollo de Taylor de ninguna función racional (= cociente de dos polinomios) ya que f no es extendible.

Comentario Adicional 2.1.8 Recordemos que el Teorema de Marcinkiewicz establece que *si* $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales con* $h_n \to 0$*, entonces existe una función continua* $\Phi \in C[0,1]$ *(llamada* ***función de Marcinkiewicz****) tal que, para cualquier función medible Lebesgue* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, existe una sucesión estrictamente creciente* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *de enteros positivos con*

$$\frac{\Phi(x+h_{n_k})-\Phi(x)}{h_{n_k}} \to g(x), \quad \lambda-\text{c.s.} \quad \text{en } [0,1].$$

Si definimos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_k(x) = \frac{\Phi(x+h_{n_k})-\Phi(x)}{h_{n_k}}, \quad x \in [0,1],$$

entonces Φ_k es continua y para cada g medible Lebesgue, $\lim_{k\to\infty}\Phi_k(x) = g(x)$, λ-c.s., para alguna sucesión $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergiendo a cero. Por otro lado, el teorema de aproximación de Luzin afirma que toda función medible Lebesgue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ es el límite puntual de una sucesión de funciones continua λ-c.s. Lo interesante del Teorema de Marcinkiewicz es que todas las funciones $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ que son medibles Lebesgue se dejan aproximar por subsucesiones de una sola sucesión $\left(\frac{\Phi(\cdot+h_n)-\Phi(\cdot)}{h_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Por otro lado, si consideramos sólamente el caso cuando g es constante, vemos que la función Φ tiene la propiedad de que cualquier número real a es un *número derivado* de Φ para casi todo punto de $[0,1]$.

Algunos otros resultados demostrado por Nestoridis en [338], en relación a las series de Taylor universales, son los siguientes:

Teorema de Nestoridis. *Sea* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *una serie de Taylor universal en el sentido de Nestoridis. Entonces*

(1) $(c_n)_{n=1}^{\infty} \notin c_0$.

(2) $f \notin H^1(\mathbb{D})$. *En particular,* $f \notin H^p(\mathbb{D})$ *para cualquier* $p \geq 1$*, donde* $H^p(\mathbb{D})$ *es el espacio de Hardy de orden* p.

(3) f *no es el desarrollo de Taylor de ninguna función racional*.

(4) *Ninguna subsucesión de las sumas parciales de* f *converge uniformemente sobre* $\mathbb{T}$.

(5) *Las series de Taylor universales en el sentido de Nestoridis cuando son consideradas en el círculo* $|z| = 1$*, son series trigonométricas universales en el sentido de Menchoff.*

En un artículo aun no publicado, V. Farmaki y V. Nestoridis [160] usando la teoría de Ramsey infinita, específicamente, el principio de dicotomía de Galvin-Prikry, prueban el siguiente resultado:

Teorema de Farmaki-Nestoridis. *Para cualquier sucesión* $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ *en* $\mathbb{C}$*, existe una subsucesión* $(\alpha_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ *tal que*:

(1) *cualquier subsucesión de* $(\alpha_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ *define una serie de Taylor universal en el sentido de Nestoridis, o*

(2) *ninguna subsucesión de* $(\alpha_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ *define una serie de Taylor universal en el sentido de Nestoridis.*

Muchos otros resultados interesantes se pueden ver en [193], [248] y las referencias allí citadas. Por ejemplo, en ([193] Proposition 7), se prueba el siguiente resultado:

Teorema. *Sean X un espacio vectorial topológico metrizable y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Existe una serie universal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ en X.*

(2) *Para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, el subespacio lineal generado por $\{x_n : n \geq n_0\}$ es denso en X.*

2.1.16. $\|$ ► Series condicionalmente convergentes en $\mathbb{R}$ y abundantes reordenamientos

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales. La convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ depende, como sabemos, del *orden* en que los elementos de la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ están dispuestos, por lo que una permutación de los términos de la sucesión puede modificar, o dejar inalterable, la convergencia o divergencia de dicha serie. Resulta claro que para alterar el estatus de la convergencia de dicha serie la permutación debe ser capaz de modificar un número infinito de términos de la sucesión, pues permutando sólo un número finito de los términos de la sucesión la nueva serie no altera su convergencia o divergencia. Recordemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se dice que es un **reordenamiento** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\pi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existen series que poseen cualidades muy sorprendentes, como por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ la cual tiene la desconcertante particularidad de que, para cualquier valor real preasignado, digamos r, existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\pi(n)}/\pi(n) = r$. Sin embargo, este tipo de comportamiento no ocurre si nuestra serie es absolutamente convergente. Recordemos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **absolutamente convergente** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, < \, \infty.$$

Es bien conocido que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y, para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ permanece convergente reteniéndose, además, la suma de la serie original, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (véase, por ejemplo, [267], Theorem 6, p. 81, o también [244], Theorem 1.1.2, p. 3). Por esta razón, a tales series también se les conoce con el nombre de **series incondicionalmente convergentes**, es decir, series que no alteran su suma independientemente de como se cambien sus términos por cualquier permutación. Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **condicionalmente convergente** si ella es convergente sin ser absolutamente convergente, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

¿Por qué las series condicionalmente convergentes son interesantes? Tal vez una buena respuesta a dicha interrogante sea, probablemente, un resultado descubierto por Bernard Riemann el cual establece que las series condicionalmente convergentes pueden cambiar drásticamente su comportamiento por medio un cierto reordenamiento, es decir: *dada cualquier serie condicionalmente convergente y fijado cualquier número real extendido α, es decir, $-\infty \leq \alpha \leq \infty$, es posible reordenar dicha serie de tal suerte que la nueva serie obtenida converja a α*, o dicho de otro modo, *reordenando adecuadamente una serie condicionalmente convergente podemos hacer que la nueva serie sea divergente o que converja a un número real prefijado*. Este hecho notable, pero fascinante, se puede formular en los siguientes términos (véase, por ejemplo, [386], Theorem 3.54, p. 76).

Teorema 2.1.38 (Riemann). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente con $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y suponga que $-\infty \,\leq\, \alpha \,\leq\, \beta \,\leq\, +\infty$. Entonces existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\pi(n)} \,=\, \alpha \qquad y \qquad \limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\pi(n)} \,=\, \beta. \tag{A}$$

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \qquad \text{y} \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Observe que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$, $p_n - q_n = a_n$ y $p_n + q_n = |a_n|$.

La prueba será efectuada en dos pasos, el primero de los cuales es el siguiente:

(1) *Las series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ son ambas divergentes.*

En efecto, si ambas fueran convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sería convergente, lo que resulta contrario a la definición de serie condicionalmente convergente. Por otro lado, puesto que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \big(p_n - q_n\big) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (o viceversa) conducen, en ambos casos, a la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, lo que de nuevo viola nuestra hipótesis.

Particionemos el conjunto de los números naturales en los dos subconjuntos siguientes:

$$N_1 = \{i_n : a_{i_n} > 0,\ n = 1, 2, \ldots\} \qquad \text{y} \qquad N_2 = \{l_n : a_{l_n} < 0,\ n = 1, 2, \ldots\}$$

manteniendo el orden en el cual tanto los términos positivos, así como los negativos, aparecen en la serie. De este modo $i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$ y $l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \cdots$. Para evitar un poco lo engorroso de los subíndices, pongamos $P_n = a_{i_n}$ y $Q_n = |a_{l_n}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ difieren de las series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ sólamente por los términos que son ceros, de allí que ellas también son divergentes.

El segundo y último paso consistirá en construir la permutación π.

(2) *Existen subsucesiones $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tales que la serie*

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - \big(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\big) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - \big(Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2}\big) + P_{m_2+1} + \cdots + P_{m_3} - \cdots, \quad (B)$$

satisface (A). Nótese que esta nueva serie es un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para demostrar (2) comencemos, en primer lugar, escogiendo sucesiones en $\mathbb{R}$, digamos $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta, \qquad \text{con} \quad \beta_1 > 0, \quad \text{y} \quad \alpha_n < \beta_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

La idea ahora es reordenar convenientemente los términos de la serie para obtener lo deseado. Esto lo haremos haciendo pasar delante ciertos bloques de términos positivos de la serie y retrasando la entrada de otros bloques de términos negativos. Veamos esto.

Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = +\infty$, podemos elegir un entero positivo, llamémoslo m_1, el cual será tomado como el más pequeño, tal que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1.$$

Observe que, por la elección de m_1, se cumple que $P_1 + \cdots + P_{m_1-1} \leq \beta_1$ y, en consecuencia,

$$\beta_1 < P_1 + \cdots + P_{m_1} = P_1 + \cdots + P_{m_1-1} + P_{m_1} \leq \beta_1 + P_{m_1}.$$

Definiendo $S_1^p = P_1 + \cdots + P_{m_1}$, resulta que

$$\left|S_1^p - \beta_1\right| \leq P_{m_1}.$$

Vamos a definir los primeros m_1 valores de nuestra permutación π declarando que:

$$\pi(1) = i_1, \quad \pi(2) = i_2, \quad \ldots, \quad \pi(m_1) = i_{m_1}.$$

Similarmente, siendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$, que de nuevo elegiremos como el entero positivo más pequeño, de modo tal que

$$Q_1 + \cdots + Q_{k_1} > P_1 + \cdots + P_{m_1} - \alpha_1,$$

esto es,

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\right) < \alpha_1.$$

Una vez más, la escogencia de k_1 nos garantiza que $P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1 - 1}\right) \geq \alpha_1$, de donde se sigue que

$$\alpha_1 - Q_{k_1} \leq P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1 - 1}\right) - Q_{k_1} < \alpha_1.$$

Por esto,

$$\left|S_1^q - \alpha_1\right| \leq Q_{k_1},$$

donde hemos puesto $S_1^q = P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\right)$. Los siguientes valores de π, comenzando desde $m_1 + 1$ hasta k_1, se obtienen definiendo

$$\pi(m_1 + 1) = l_1, \quad \pi(m_1 + 2) = l_2, \quad \ldots, \quad \pi(k_1) = l_{k_1}.$$

Usando de nuevo el hecho de que las series $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ son divergentes podemos, como antes, escoger los enteros positivos más pequeños, digamos m_2 y k_2, con $k_2 > k_1$ y $m_2 > m_1$, tales que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > Q_1 + \cdots + Q_{k_1} + \beta_2,$$

y

$$Q_1 + \cdots + Q_{k_1} + Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2} > P_1 + \cdots + P_{m_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - \alpha_2.$$

De esto se desprende, por las elecciones de m_2 y k_2, que si definimos

$$S_2^p = P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\right) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2$$

y

$$S_2^q = P_1 + \cdots + P_{m_1} - \left(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\right) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - \left(Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2}\right) < \alpha_2,$$

entonces,

$$\left|S_2^p - \beta_2\right| \leq P_{m_2} \qquad \text{y} \qquad \left|S_2^q - \alpha_2\right| \leq Q_{k_2}.$$

Hagamos

$$\pi(k_1 + 1) = i_{m_1+1}, \quad \ldots, \quad \pi(m_2) = i_{m_2}, \quad \pi(m_2 + 1) = l_{k_1+1}, \quad \ldots, \quad \pi(k_2) = l_{k_2}.$$

El procedimiento anterior, que se puede llevar a cabo indefinidamente gracias al hecho (1), culmina con la obtención de las dos sucesiones $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que la serie (B), que como se puede ver es un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, satisface, como veremos de inmediato, las igualdades en (A). En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$S_n^p = P_1 + \cdots + P_{m_1} - \big(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\big) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - \big(Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2}\big) + \cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n}$$

$$S_n^q = P_1 + \cdots + P_{m_1} - \big(Q_1 + \cdots + Q_{k_1}\big) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - \big(Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2}\big) + \cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n} - \big(Q_{k_{n-1}+1} + \cdots + Q_{k_n}\big).$$

las sumas parciales de la serie (B). Resulta entonces, por el procedimiento antes descrito, que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|S_n^p - \beta_n\big| \le P_{m_n} \qquad \text{y} \qquad \big|S_n^q - \alpha_n\big| \le Q_{k_n}.$$

Hasta ahora no hemos usado el hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Ha llegado el momento. En efecto, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, de donde se sigue que $\lim_{n\to\infty} P_n = 0 = \lim_{n\to\infty} Q_n$. Por esto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n^p = \beta \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^q = \alpha.$$

Es claro, por nuestra construcción de la serie (B), que ninguna subsucesión de las sumas parciales de (B) puede tener como límite a un número menor que α o mayor que β. Esto finaliza nuestra prueba. ■

Observe que, como consecuencia del Teorema de Riemann se sigue que, dada cualquier serie condicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

(R_1) si $r \in \mathbb{R}$, entonces se puede construir una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = r$,

(R_2) existen permutaciones π_1 y π_2 de $\mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_1(n)} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_2(n)} = +\infty.$$

Parece razonable, en vista del resultado de Riemann, preguntarse por el "tamaño" de todas aquellas permutaciones de una serie condicionalmente convergente para las cuales la conclusión (R_2) del Teorema de Riemann se cumple. Para que tal pregunta tenga sentido es importante que ésta pueda ser formulada en un contexto adecuado, es decir, debemos determinar el espacio de Baire en la que tal pregunta se puede formular.

Denotemos por $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todas las permutaciones de $\mathbb{N}$ y dotemos a dicho conjunto de la métrica de Fréchet d, definida por:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

para cualesquiera $\pi_1 = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \pi_2 = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{P}(\mathbb{N})$. Supongamos ahora que $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente y entonces definamos

$$A(s) = A(a_1, a_2, \ldots) = \Big\{\pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \text{ converge}\Big\}$$

Observe que, gracias al Teorema de Riemann, $A(s)$ es un subconjunto no vacío y propio de $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. La pregunta que anteriormente nos formuláramos referente al tamaño de las permutaciones que verificaban el Teorema de Riemann ahora puede ser reformulada en los siguientes términos (véase, Ralph P. Agnew, [4], quien le concede a M. Kac el planteamiento del siguiente problema):

Problema de Kac. *Dada una serie condicionalmente convergente $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ¿cuál es la categoría, en el sentido de Baire, del conjunto $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \setminus A(s)$?*

Para abordar la solución al Problema de Kac, es imprescindible que podamos verificar que nuestro espacio métrico $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ sea un espacio de Baire. Antes de demostrar esto último, vamos a destacar dos propiedades importantes del espacio métrico $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$. En primer lugar:

(a) $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ *no es completo*. En efecto, para cada $n \geq 2$, considere la permutación

$$\pi_n \;=\; \big\{2,\,3,\,\cdots,\,n-1,\,n,\,1,\,n+1,\,n+2,\cdots\big\}$$

y observe que $d(\pi_m, \pi_{m+1}) = 2m/(1+2m)$ para todo $m \geq 2$, de donde resulta que $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ que no converge a ningún punto de $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

(b) Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos una permutación arbitraria $\pi = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$. Suponga que hemos elegido un $N \in \mathbb{N}$ de modo tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon$. Entonces, cualquier permutación $\pi_1 = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{P}(\mathbb{N})$ para la cual se cumple que $y_n = x_n, \;\; n = 1, \ldots, N$, pertenece a la bola abierta con centro π y radio ε, es decir, $\pi_1 \in U(\pi, \varepsilon)$. Esto sigue del hecho de que,

$$\begin{aligned} d(\pi,\pi_1) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \\ &=\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \\ &<\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;<\; \varepsilon. \end{aligned}$$

De esto se deduce que si

$$\mathcal{N}(x_1,\ldots,x_N) \;=\; \Big\{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{P}(\mathbb{N}) : \;\; y_k \,=\, x_k,\;\; k = 1,\ldots,N\Big\},$$

entonces $\mathcal{N}(x_1,\ldots,x_N) \subseteq U(\pi, \varepsilon)$.

Recíprocamente, si $N \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande y si $\pi_1 = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ es cualquier permutación de $\mathbb{N}$ tal que $\pi_1 \in U(\pi, 2^{-N-1})$, entonces $x_1 = y_1, \ldots, x_N = y_N$. En efecto, como $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/2^n = 2^{-N}$ y ya que $d(\pi, \pi_1) < 2^{-N-1}$, tenemos, por el hecho de que las coordenadas de π y π_1 son enteras, que $x_n = y_n$ para $n = 1, \ldots, N$.

Denote por X el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ formado por todas las funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (= sucesiones en $\mathbb{N}$) y dotemos a dicho espacio con la métrica de Fréchet. Resulta que (X, d) es un espacio métrico completo y $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ es un subespacio propio y, por supuesto, no cerrado de X. Para cada $k, m \in \mathbb{N}$ sea

$$E(m,k) \;=\; \Big\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \;\; x_m = k\Big\}$$

y observe que $E(m,k)$ es un subconjunto abierto de X. En efecto, si $x \in E(m,k)$, entonces, por antes lo visto, se sigue que cualquier $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in U(x, 2^{-m-1})$ satisface que $y_1 = x_1, \ldots, y_m = x_m = k$, de donde se deduce que, $U(x, 2^{-m-1}) \subseteq E(m,k)$. Definamos ahora

$$P_\pi \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E(m,k).$$

Resulta que P_π es un G_δ en el espacio métrico completo X y, entonces, por el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, página 64, P_π es completamente metrizable. Nótese que P_π es el conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X con la propiedad de que cada $k \in \mathbb{N}$ aparece al menos una vez en dicha sucesión. En efecto, sea $(x_n)_{n=1}^\infty \in P_\pi$. Entonces $(x_n)_{n=1}^\infty \in \bigcup_{m=1}^\infty E(m,k)$ para todo $k \geq 1$. De aquí se sigue que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{m_k} = k$, de donde se sigue nuestra afirmación. Observe que cualquier permutación de $\mathbb{N}$ pertenece a P_π, es decir, $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \subseteq P_\pi$.

Lema 2.1.10. *$(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea P_θ la clausura de $P(\mathbb{N})$ en X. Puesto que $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ no es cerrado en X, $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \subsetneq P_\theta$ y, en consecuencia, $\mathbf{P}(\mathbb{N}) = P_\theta \cap P_\pi$. Por otro lado, siendo P_θ un G_δ en X (por ser completo), tenemos que $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ también es un G_δ y, por lo tanto, por una nueva aplicación del Teorema de Alexandroff-Hausdorff, completamente metrizable. Se sigue del Teorema 1.11.1, página 63, que $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ es un espacio de Baire. ■

Fijemos una serie condicionalmente convergente, digamos, $\sum_{n=1}^\infty a_n$, y denotemos por $H(a_1, a_2, \ldots)$ el conjunto definido por

$$H(a_1,a_2,\ldots) = \left\{ \pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_{\pi(n)} = -\infty \quad \text{y} \quad \limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_{\pi(n)} = \infty \right\}.$$

Por el Teorema de Riemann se tiene que $H(a_1, a_2, \ldots)$ es no vacío. Lo que Agnew demuestra es que tal conjunto es abundante en $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ y, en consecuencia, como $A(s) \subseteq H(a_1, a_2, \ldots)$, resulta que $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \setminus A(s)$ también es residual en $\mathbf{P}(\mathbb{N})$, quedando, de esta manera, resuelto el problema de Kac.

Teorema 2.1.39 (Agnew). *Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es una serie condicionalmente convergente, entonces $H(a_1, a_2, \ldots)$ es residual en $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$.*

Prueba. Sea

$$F^+ = \left\{ \pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_{\pi(n)} < +\infty \right\}.$$

Observe que si, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_k = \left\{ \pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \sup_{N\geq 1} \sum_{n=1}^N a_{\pi(n)} \leq k \right\},$$

entonces $F^+ = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Nuestra primera tarea consistirá en demostrar que cada conjunto F_k es nunca-denso en $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. Fijemos entonces $k \in \mathbb{N}$ y suponga, para arribar a una contradicción, que $\operatorname{int}(\overline{F_k}) \neq \varnothing$. Sea $\pi' = (x'_n)_{n=1}^\infty$ una permutación en $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ tal que

$$U(\pi', \varepsilon) \subseteq \overline{F_k}$$

para algún $\varepsilon > 0$ y escojamos un $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande que nos garantice que

$$\sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puesto que $\sum_{n=1}^\infty |a_n| = +\infty$, podemos construir una permutación $\pi'' = (x''_n)_{n=1}^\infty$ de $\mathbb{N}$ de modo tal que, para el m escogido anteriormente, se cumpla:

$$x''_n = x'_n \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq m,$$

y si $n > m$, entonces

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_{\pi''(n)} \;=\; \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{x''_n} \;=\; +\infty.$$

Con esta definición resulta que $d(\pi', \pi'') < \varepsilon/2$, por lo que $\pi'' \in U(\pi', \varepsilon)$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi''(n)} = +\infty$, podemos escoger un subíndice $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{\pi''(1)} \;+\; a_{\pi''(2)} \;+\; \cdots \;+\; a_{\pi''(q)} \;>\; k. \tag{1}$$

Pongamos $\delta = 2^{-q-1}$ y observe ahora que si $\pi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in U(\pi'', \delta)$, entonces $x_1 = x''_1, \ldots, x_q = x''_q$ y se sigue de (1) que

$$a_{\pi(1)} \;+\; a_{\pi(2)} \;+\; \cdots \;+\; a_{\pi(q)} \;>\; k.$$

Esto prueba que $\pi \notin F_k$ y, por lo tanto, F_k no contiene ningún punto de $U(\pi'', \delta)$. En particular, $\overline{F_k}$ no contiene a π'' lo que, evidentemente, contradice el hecho de que

$$\pi'' \;\in\; U(\pi', \varepsilon) \;\subseteq\; \overline{F}_k.$$

Por esto, F_k es nunca-denso, y entonces F^+ es de primera categoría.

De modo enteramente similar, se prueba que el conjunto

$$F^- \;=\; \Big\{\pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\pi(n)} \;>\; -\infty\Big\}.$$

es de primera categoría y, así, $F = F^+ \cup F^-$ es de primera categoría en $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. Finalmente, siendo $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$ un espacio de Baire, se sigue del Teorema 1.6.3, página 37, que el conjunto $H(a_1, a_2, \ldots) = \mathbf{P}(\mathbb{N}) \setminus F$ es residual en $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$. ■

2.1.17. ‖ ► Series con signos alternantes

La serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

como sabemos, es un ejemplo de una serie condicionalmente convergente y, en consecuencia, gracias al Teorema de Agnew, el conjunto

$$A(a_1, a_2, \ldots) \;=\; \Big\{\pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \text{ converge}\Big\},$$

es de primera categoría en $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), d)$, donde $a_n = (-1)^{n+1}/n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Recuerde que una permutación π lo que hace es mudar la posición de cada término a_n hacia la posición $a_{\pi(n)}$. Supongamos que no queremos mudar las posiciones de los términos de la serie armónica alternada por medio de una permutación sino, sólamente, cambiar la posición de algunos o todos los signos $+1$ y -1 en dicha serie, es decir, supongamos que para cada sucesión $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon_n}}{n}. \tag{1}$$

Podemos entonces preguntarnos: ¿de qué categoría, en el sentido de Baire, es el conjunto de todos los elementos $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que permiten que la serie (1) siga siendo convergente? De modo más general, supongamos que hemos fijado una sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales no negativos de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. ¿De que categoría es el conjunto

$$\mathfrak{C} = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{a_n} b_n \text{ converge}\right\}?$$

o más general aun, ¿cuál es la categoría de

$$\mathfrak{B} = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{existe } M > 0 \text{ para el cual } \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n\right| \leq M\right\}?$$

Este es el problema que, en esos términos, queremos investigar. Como antes, es necesario disponer de un espacio adecuado donde sea posible aplicar el Teorema de Categoría de Baire. Para ello vamos a requerir que nuestro espacio, en esta parte, sea $2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la métrica de Fréchet d que, como sabemos, viene dada por

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

donde $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Es un hecho ya establecido que $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico completo. Observe que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.

En primer lugar vamos a establecer el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2.1.11. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ números reales y c un número real positivo. Entonces*

$$V_+(k,c) = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \alpha_1(-1)^{a_1} + \alpha_2(-1)^{a_2} + \cdots + \alpha_k(-1)^{a_k} > c\right\}$$

es abierto en $(2^{\mathbb{N}}, d)$.

Prueba. Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ un elemento de $V_+(k,c)$. Lo que queremos demostrar es la existencia de algún $\varepsilon > 0$ tal que cada sucesión $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ cuya distancia a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sea menor que ε esté en $V_+(k,c)$. Esto se puede obtener muy fácilmente con sólo tomar $\varepsilon = 1/2^{k+1}$. En efecto, ya hemos visto que si $d(a,b) < \varepsilon$, entonces $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ lo cual significa que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ también está en $V_+(k,c)$. ■

El siguiente resultado es de M. Dindoš [131].

Teorema 2.1.40 (Dindoš). *Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{a_n} b_n$, donde $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. Entonces*

$$\mathfrak{B} = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \textit{existe } M > 0 \textit{ para el cual } \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n\right| \leq M\right\}$$

es de primera categoría en $(2^{\mathbb{N}}, d)$.

Prueba. Notemos en primer lugar que

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n\right| \leq M\right\}.$$

Para cada $M \in \mathbb{N}$, sea

$$F_M = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \left| \sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n \right| \leq M \right\}.$$

Es claro $\mathfrak{B} = \bigcup_{M=1}^{\infty} F_M$. Fijemos $M \in \mathbb{N}$ y observe que si $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin F_M$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \left| \sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n \right| > M \right\},$$

el cual, como sabemos (Lema 2.1.11), es abierto en $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Esto nos dice que $2^{\mathbb{N}} \setminus F_M$ es abierto, y por consiguiente, F_M es cerrado en $(2^{\mathbb{N}}, d)$.

Queda por establecer que cada F_M es nunca-denso en $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Para ver esto, sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in F_M$. Vamos a demostrar que en cualquier bola abierta $U(a, \varepsilon)$ existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ en dicha bola que no está en F_M. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, escojamos un $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que $1/2^{k+1} < \varepsilon$ y considere ahora la sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$c_n = \begin{cases} a_n, & \text{para } n = 1, 2, \ldots, k, \\ 0, & \text{para } n > k. \end{cases}$$

Es claro que la sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ está en $U(a, \varepsilon)$ pero no pertenece a F_M ya que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{c_n} b_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n = \infty.$$

Esto termina la prueba del teorema. ■

Puesto que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, resulta que $\mathfrak{C}$ también es de primera categoría en $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Por el Teorema de Categoría de Baire tenemos que

$$\mathfrak{D} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}} : \limsup_{k \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{k} (-1)^{a_n} b_n \right| = +\infty \right\}$$

es residual en $(2^{\mathbb{N}}, d)$.

Comentario Adicional 2.1.9 Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es una serie convergente de números complejos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = +\infty$, entonces el Teorema de Agnew se puede aplicar a las series $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ para demostrar que el conjunto

$$A_0 = \left\{ \pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N}) : \sup_{N \geq 1} \sum_{n=1}^{N} \left| z_{\pi(n)} \right| < \infty \right\}$$

es de primera categoría en $P(\mathbb{N})$.

|| ► Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente y para cada $\pi \in \mathbf{P}(\mathbb{N})$, defina

$$\mathbf{SP}(\pi) = \left\{ \sum_{n=1}^{N} a_{\pi(n)} : N = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Si $\mathbf{SP}(\pi)'$ denota el conjunto de todos los puntos de acumulación o puntos límites de $\mathbf{SP}(\pi)$, entonces J. Červeňanský [91] demuestra el siguiente resultado:

Teorema de Červeňanský. *El conjunto*

$$H'(a_1,a_2,\dots) \;=\; \Big\{\pi\in\mathbf{P}(\mathbb{N}) : \; SP(\pi)' = [-\infty,+\infty]\Big\}$$

es residual en $(\mathbf{P}(\mathbb{N}),d)$.

|| ► **Subseries de series en espacios normados**.

Considere un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en X. Recordemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice que es incondicionalmente convergente si para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge. Denote por $\mathcal{N}_1$ el conjunto de todas las sucesiones $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$ Si $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ es un elemento de $\mathcal{N}_1$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n} \;=\; x_{k_1}+x_{k_2}+\cdots+x_{k_n}+\cdots$$

se llama una **subserie** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. La importancia de este concepto se evidencia por el hecho de que:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es incondicionalmente convergente si, y sólo si, cada subserie de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge*.

Existe una forma interesante de establecer una correspondencia uno a uno entre subseries de una serie dada y los puntos del intervalo $(0,1]$. En efecto, dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X y fijado un elemento $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{N}_1$, considere el punto $t\in(0,1]$ definido por

$$t \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k_n}.$$

Otra manera adecuada a nuestro objetivo es reescribir el punto t en la forma

$$t \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)2^{-k}, \qquad \text{donde } \; c_k(t) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{si } k\notin\{k_1,k_2,\dots\},\\ 1, & \text{si } k\in\{k_1,k_2,\dots\}.\end{cases} \tag{1}$$

Podemos ahora definir la correspondencia entre subseries de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y los números $t\in(0,1]$ dados por la ecuación (1), poniendo

$$S(t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)x_k.$$

El siguiente resultado es de Dindoš, Martišovitš y Šalát [132].

Teorema de Dindoš, Martišovitš y Šalát. *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie divergente en* X. *Entonces el conjunto*

$$C(x_1,x_2,\dots) \;=\; \left\{t\in(0,1] : \; S(t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)x_k \;\text{ converge}\right\}$$

es de primera categoría en $(0,1]$.

|| ► **Función que preserva suma**.

Si se considera el espacio s de todas las sucesiones de números reales, $s = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dotado de la métrica de Fréchet d, entonces (s,d) es un espacio métrico completo y la función

$$\sigma : S \to [-\infty, +\infty]$$

definida por

$$\sigma\big((x_n)_{n=1}^{\infty}\big) \;=\; \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

resulta ser sobreyectiva pero no inyectiva y siempre discontinua en s. Más aun, para cualquier $a \in s$ y $r > 0$, se cumple que $\sigma\big(U(a,r)\big) = [-\infty, \infty]$. Estos resultados se pueden ver en Lahiri y Das [276]. Si para cada $t \in [0, +\infty]$ se define el conjunto

$$H_t \;=\; \big\{x \in s : \; \sigma(x) \;=\; t\big\},$$

entonces Lahiri y Das demuestran que

Teorema de Lahiri-Das. *H_∞ es residual en (s,d).*

|| ► Como comentario final, Aizpuru, Pérez Eslava y Seoane Sepúlveda en [6] prueban el siguiente resultado.

Teorema de Aizpuru, Pérez y Seoane . *Sea $CS(\mathbb{K})$ el conjunto formado por todas las series convergentes en $\mathbb{K}$. $CS(\mathbb{K})$ contiene un espacio vectorial D tal que*:

(1) *Cualquier $x \in D \setminus \{0\}$ es una serie condicionalmente convergente*.

(2) $\dim(D) = \mathfrak{c}$.

2.1.18. || ► Números de Liouville

Además de la clasificación de $\mathbb{R}$ en números racionales e irracionales, existe otra interesante partición de $\mathbb{R}$ constituida ahora por números algebraicos y trascendentes. Recordemos que un número real o complejo z se dice **algebraico** si satisface alguna ecuación algebraica de la forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ están en $\mathbb{Z}$ y no todos son ceros. Denotemos por $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros y por $\mathcal{A}_{\mathrm{lg}}(\mathbb{C})$ el conjunto de todos los números algebraicos. Observe que todo número racional es algebraico pues, si $z = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, entonces z satisface la ecuación $qx - p = 0$. También ocurre que muchos números irracionales (pero no tantos, pues como veremos más abajo, $\mathcal{A}_{\mathrm{lg}}(\mathbb{C})$ es numerable) son algebraicos. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico pues él solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. En general, si p es un entero positivo que no es una potencia, entonces $\sqrt[n]{p}$ es un irracional que satisface la ecuación $x^n - p = 0$. Cualquier número real que no es algebraico se llama **trascendente**, es decir, un número trascendente es aquel que no satisface ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Por definición, cualquier número trascendente es irracional, pero como ya vimos, existen números irracionales que no son trascendentes. El *grado* de un número algebraico z es el entero positivo más pequeño n tal que z satisface una ecuación algebraica de grado n. La primera prueba de la existencia de números trascendentes fue dada por Joseph Liouville quien, en 1844, descubrió una clase muy extensa de tales números. Por ejemplo, todos lo números de la forma

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^{24}}+\cdots+\frac{1}{n^{k!}}+\cdots$$

son trascendentes, donde n es número entero mayor que 1. Aunque este descubrimiento de Liouville genera muchísimos números trascendentes, sigue siendo un reto difícil para un matemático demostrar que un sospechoso particular es o no trascendente. Por tal razón, cuando Charles Hermite demostró, en 1873, que *e es trascendente*, los matemáticos no dejaron de asombrarse ante la belleza y sencillez de la prueba. Nueve años más tarde del descubrimiento de Hermite, en 1882, Ferdinand Lindemann demostró que π pertenecía al mismo clan.

Una pequeña observación es pertinente en este momento. *Cualquier problema geométrico que es resoluble con la ayuda de la regla y el compás, cuando se lleva a su forma algebraica equivalente, conduce a una o más ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros, que pueden ser resueltas por sucesivas extracciones de raíces cuadradas.* Lo que Lindemann demostró es que π no satisface ninguna de tales ecuaciones y, por consiguiente, el *circulo no se puede cuadrar* con dichos instrumentos.

¿Qué otros números extraños de esos que he llamados trascendentes existen? Lo que vamos a demostrar en esta sección es que tales números constituyen, de hecho, un subconjunto residual de $\mathbb{R}$, por lo que su existencia confirman la regla y no la excepción. La abundancia de los números trascendentes fue demostrada por G. Cantor cuando dio a conocer el siguiente resultado:

Teorema 2.1.41 (Cantor). *El conjunto $\mathcal{A}_{\mathrm{lg}}(\mathbb{C})$ formado por todos los números algebraicos es numerable.*

Prueba. Denote por $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros. Para cada polinomio $p\in\mathbb{Z}[x]$ de grado n, sea

$$Z(p)\,=\,\big\{z\in\mathbb{C}:\ p(z)=0\big\}.$$

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, $Z(p)$ contiene a lo sumo n elementos, es decir, es un conjunto finito, y como

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lg}}(\mathbb{C})\,=\,\bigcup_{p\in\mathbb{Z}[x]} Z(p),$$

entonces nuestra prueba finalizará una vez que hallamos demostrado que $\mathbb{Z}[x]$ es numerable. Veamos esto. Para cada $n\in\mathbb{N}$, considere, en primer lugar, el conjunto de todos los polinomios en $\mathbb{Z}[x]$ cada uno de los cuales tiene grado n, esto es,

$$\mathbf{P}(n)\,=\,\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\ \in\ \mathbb{Z}[x]\ :\ a_n\neq 0\right\}.$$

Afirmamos que cada $\mathbf{P}(n)$ es numerable. Efecto, el conjunto

$$E_n\,=\,\big\{(a_0,a_1,\ldots,a_n):\ a_k\in\mathbb{Z},\ a_n\neq 0\big\}\,=\,\mathbb{Z}\times\overset{n}{\cdots}\times\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}).$$

es numerable y ya que la aplicación $\varphi: E_n\to\mathbf{P}(n)$ definida por

$$\varphi(a_0,a_1,\ldots,a_n)\,=\,\sum_{k=1}^{n} a_k x^k.$$

es claramente uno-a-uno y sobreyectiva, resulta que $\mathbf{P}(n)$ es numerable. Finalmente, como

$$\mathbb{Z}[x]\,=\,\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(n)$$

y cada $\mathbf{P}(n)$ es numerable, tenemos que $\mathbb{Z}[x]$ es numerable y, en consecuencia,

$$\mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{C}) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}[x]} Z(p)$$

es a lo más numerable (unión numerable de conjuntos finitos). Pero ya que $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{C})$, se concluye que $\mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{C})$ es, efectivamente, numerable. ■

El siguiente es el argumento de cardinalidad empleado por G. Cantor para demostrar la existencia de números trascendentes. En efecto, si denotamos por $\mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los números reales que son trascendentes, es decir, $\mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}$, entonces la no numerabilidad de $\mathbb{R}$ en compañía del resultado anterior, nos revela que $\mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$ es no numerable (Observe que como $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{C})$, entonces $\mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R})$ también es numerable). El argumento de Cantor, a pesar de ser muy contundente, no muestra ningún miembro de $\mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$ (existen, pero son invisibles). Como se sabe, 30 años antes de esta demostración de Cantor, Joseph Liouville se había ocupado de mostrarnos algunos extraordinarios números trascendentes llamados, en honor a su nombre, números de Liouville y que, gracias a la magia del Teorema de Categoría de Baire, se demostró posteriormente que la totalidad de tales números constituye un conjunto super abundante, es decir, es residual en $\mathbb{R}$.

Lo que ahora sigue es la prueba que dio Liouville sobre la existencia de números trascendentes. Para ello debemos primero definir lo que se entiende por números de Liouville.

Definición 2.1.16. *Un número $x \in \mathbb{R}$ se llama* ***número de Liouville*** *si x es irracional y para cada $n \in \mathbb{N}$, existen enteros p y q, con $q > 1$, tal que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Denotaremos por $\mathbb{L}$ el conjunto de todos los números de Liouville. De inmediato probaremos que los números de Liouville existen y son trascendentes. Para ello vamos a requerir del siguiente resultado.

Lema 2.1.12. *Para cualquier número algebraico $z \in \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R})$ de grado $n > 1$, existe un entero positivo M tal que*

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n} \tag{2.1.1}$$

para todos los enteros p y q con $q > 0$.

Prueba. Puesto que $z \in \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R})$, existe un polinomio de grado $n > 1$, digamos $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$, para el cual $f(z) = 0$. Consideremos el intervalo cerrado $[z-1, z+1]$. Como la derivada f' de f es una función continua, su restricción al intervalo compacto $[z-1, z+1]$ es acotada y, por consiguiente, podemos determinar un entero $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in [z-1, z+1]$. Haciendo uso del Teorema del Valor Medio para derivadas, arribamos a la desigualdad

$$|f(x)| = |f(x) - f(z)| \leq M|x - z| \tag{2.1.2}$$

siempre que $x \in [z-1, z+1]$.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_m$ las raíces distintas de $f(x)$ que son diferentes a z y supongamos que la desigualdad (2.1.1) no se satisface. Entonces existen enteros p y q, con $q > 0$ tal que

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{Mq^n} < 1.$$

Por esto,

$$\frac{p}{q} \in [z-1, z+1],$$

y, más aún,

$$\frac{p}{q} \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}.$$

En efecto, recordemos que como el grado de z es n, entonces el polinomio $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$ y, en particular, irreducible sobre $\mathbb{Q}$; esto significa que $f(x)$ no tiene ninguna raíz racional. Por consiguiente

$$0 \neq f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

y, en consecuencia,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + a_2 q^{n-2} p^2 + \cdots + a_n p^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Usando esto y la desigualdad (2.1.2), obtenemos

$$\frac{1}{q^n} \leq M \left| z - \frac{p}{q} \right|,$$

es decir,

$$\frac{1}{Mq^n} \leq \left| z - \frac{p}{q} \right|.$$

Esta contradicción establece el fin de la prueba del lema. ■

Ahora el resultado de Liouville.

Teorema 2.1.42 (Liouville). $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$*, es decir, cualquier número de Liouville es trascendente.*

Prueba. Sea z un número de Liouville y supongamos que él es algebraico, es decir, $z \in \mathcal{A}_{\text{lg}}(\mathbb{R})$. Por el Lema 2.1.12, existen enteros positivos M y n tal que

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n} \tag{2.1.3}$$

para todos los enteros p y q, $q > 0$. Escojamos un entero positivo k tal que $2^k \geq 2^n M$. Como z es un número de Liouville, para este k, existen enteros p y q, con $q > 1$ tal que

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

De esto y la desigualdad (2.1.3) obtenemos $1/q^k > 1/Mq^n$, y así,

$$M > q^{k-n} \geq 2^{k-n} \geq M.$$

Esta contradicción nos convence que todo número de Liouville es trascendente. ■

Nuestro próximo objetivo es mostrar, usando el Teorema de Categoría de Baire, la abundancia de los números de Liouville. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada número racional p/q con p y q primos entre sí, construyamos el intervalo abierto

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right),$$

y entonces definamos

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right).$$

Como cada G_n es un conjunto abierto conteniendo a $\mathbb{Q}$, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso conteniendo a $\mathbb{Q}$. Además, ya que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ es también un G_δ-denso, resulta que $\mathbb{L} = \mathbb{I} \cap G$ es un G_δ-denso; es decir,

Teorema 2.1.43. *$\mathbb{L}$ es residual en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto,*

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{L} \;=\; \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n)$$

es de primera categoría.

Puesto que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$, se sigue del resultado anterior que $\mathbb{T}_{\text{ras}}(\mathbb{R})$ también es residual en $\mathbb{R}$. Otra consecuencia inmediata del Teorema 2.1.43, observada por Paul Erdös [156] en el año de 1962, es la siguiente: *cualquier número real se puede escribir como la suma de dos números de Liouville, esto es,* $\mathbb{R} = \mathbb{L} + \mathbb{L}$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y definamos $\mathbb{L}_x = x - \mathbb{L}$. Resulta que $\mathbb{L}_x$ también es residual en $\mathbb{R}$ por lo que dicho conjunto intersecta, gracias al Teorema de Categoría de Baire, a $\mathbb{L}$. Sea $g_1 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{L}_x$. Entonces existe un $g_2 \in \mathbb{L}$ tal que $g_1 = x - g_2$ y, en consecuencia, $x = g_1 + g_2$. Similarmente, existen h_1, h_2 en $\mathbb{L}$ tal que $x = h_1 h_2$. Es importante destacar que en el mencionado artículo de Erdös también existe una demostración constructiva de ambos resultados.

Nótese que, en general, si G es cualquier subconjunto residual en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces cualquier $x \in X$ se puede representar en la forma $x = g_1 + g_2$, donde $g_1, g_2 \in G$.

2.1.19. ‖ ► Aproximaciones diofánticas

Un resultado de Kronecker establece que:

Teorema 2.1.44 (Kronecker). *Para cada $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto*

$$H_\theta \;=\; \left\{ n\theta + m : \; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es denso en $\mathbb{R}$.

La prueba del resultado de Kronocker puede ser llevada a cabo por una aplicación del Principio del Palomar o de Dirichlet, el cual se puede formular del modo siguiente:

> **Principio del Palomar o de Dirichlet**. *Si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$, entonces al menos uno de los palomares debe contener más de una paloma*.

Prueba del Teorema de Kronecker. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ para los cuales se cumple que $|m + n\theta - x| < \varepsilon$. Por simplicidad, suponga que $x = 0$. Escojamos un entero $n \geq 1$ tal que

$n > 1/\varepsilon$ y considere los $n+1$ números $\{0\cdot\theta\}, \{1\cdot\theta\}, \ldots, \{n\cdot\theta\}$, donde $\{a\}$ denota la parte fraccional de a, es decir, $\{a\} = a - [a]$ siendo $[a]$ la parte entera de a. Divida el intervalo $[0,1)$ en n partes iguales: $[0,1/n), [1/n, 2/n), \ldots, [(n-1)/n, 1)$. Por el Principio del Palomar, al menos dos de los números fraccionales yacen en alguno de esos intervalos, es decir, existen enteros p y q en $\{0,1,\ldots,n\}$ tales que $|\{p\cdot\theta\} - \{q\cdot\theta\}| < 1/n$, esto es, $|(p-q)\theta - ([q\cdot\theta] - [p\cdot\theta])| = |n\theta + m| < \varepsilon$, donde $n = p-q$ y $m = [p\cdot\theta] - [q\cdot\theta]$. ■

Observe que como $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es residual en $\mathbb{R}$, el resultado de Kronecker puede ser reestablecido en los siguientes términos: *existe un conjunto residual $G \subseteq \mathbb{R}$ tal que $H_\theta = \{n\theta + m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ para cada $\theta \in G$.*

Un resultado más general que el de Kronocker fue dado a conocer por Bagemihl y Seidel en [46] al demostrar que: *si $(t_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, entonces existe un conjunto residual $G \subseteq \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in G$, el conjunto*

$$H_x = \{t_n x + m : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$. También es fácil ver que si la sucesión $(t_n)_{n=1}^\infty$ satisface los requerimientos anteriores, entonces el conjunto

$$H = \left\{\frac{m}{t_n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

es denso en $\mathbb{R}$. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a < b$. El principio de Arquímedes nos garantiza la existencia de un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0(b-a) > 1$, y puesto que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > m_0$ y, por consiguiente, $t_n(b-a) > 1$, es decir, $t_n b - t_n a > 1$. Como $t_n a$ y $t_n b$ difieren en más de una unidad, existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $t_n a < m < t_n b$, de donde se sigue que

$$a < \frac{m}{t_n} < b.$$

Esto demuestra que $H \cap (a,b) \neq \varnothing$ y termina la prueba. ■

La demostración del resultado de Bagemihl y Seidel depende de una versión muy especial del Teorema de Categoría de Baire que se utiliza, en particular, para derivar éste y otros resultados interesantes.

Recordemos que el Teorema 1.6.2 nos dice que si F es un subconjunto cerrado de un espacio topológico de Hausdorff X, entonces F es nunca-denso si, y sólo si, $X\setminus F$ es denso en X. Suponga ahora F es un subconjunto arbitrario de X tal que $X\setminus F$ es denso en X. ¿qué condición o condiciones hay que agregarle al conjunto F, distinta a la de ser cerrado, para que él sea nunca-denso? La siguiente condición fue dada por Bagemihl y Seidel en [46]:

Lema 2.1.13 (Propiedad BS). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y sea $F \subseteq X$. Suponga que:*

(1) *cada vez que A sea un subconjunto de F denso en algún abierto $V \subseteq X$, se cumpla que $V \subseteq F$, y*

(2) *$X\setminus F$ es denso en X.*

Entonces F es nunca-denso en X.

Prueba. Suponga que F no es nunca-denso en X. Esto significa que $\mathrm{int}(\overline{F}) \neq \varnothing$, de donde se sigue, si hacemos $V = \mathrm{int}(\overline{F})$, que F es denso en el abierto $V \subseteq X$. Pongamos $A := F$. Entonces A es denso en el abierto V y obviamente $A \subseteq F$. Se concluye de (1) que $V \subseteq F$. Por otro lado, (2) nos dice que cualquier abierto de X intersecta a $X\setminus F$, en particular, $V \cap (X\setminus F) \neq \varnothing$ lo que resulta obviamente imposible pues $V \subseteq F$. Esta contradicción establece que F es nunca-denso en X. ■

La siguiente es una versión del Teorema de Categoría de Baire al estilo de Bagemihl y Seidel [46].

Teorema 2.1.45 (Bagemihl-Seidel). *Sea (X,τ) un espacio de Baire y suponga que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de X cada uno de los cuales satisface las condiciones (1) y (2) dadas en el* Lema 2.1.13*. Entonces $X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ es residual en X.*

Prueba. Por el Lema 2.1.13, cada F_n es nunca-denso en X y, gracias al Teorema 1.6.3, $X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ es residual en X. ■

Teorema 2.1.46 (Bagemihl-Seidel). *Sean Y_1 un espacio topológico de Hausdorff, Y_2 un espacio de Hausdorff que es segundo numerable y X un espacio de Baire. Suponga que a cada $x\in X$ se le ha asociado un subconjunto no vacío $H_x\subseteq Y_1$ tal que*

(3) *si el conjunto $D\subseteq X$ es denso en algún subconjunto abierto no vacío $G\subseteq X$, entonces el conjunto H_D es denso en H_G, donde $H_A:=\bigcup_{x\in A}H_x$ para cualquier $A\subseteq X$.*

Sea $f:Y_1\to Y_2$ una función continua tal que

(4) *si G es un subconjunto abierto no vacío de X, entonces $f(H_G)$ es denso en Y_2.*

Entonces existe un conjunto residual $R\subseteq X$ con la siguiente propiedad: para cada $r\in R$, el conjunto $f(H_r)$ es denso en Y_2.

Prueba. Como Y_2 es segundo numerable podemos seleccionar una base numerable, digamos $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, en dicho espacio. Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina el conjunto

$$F_n \;=\; \big\{x\in X\,:\, f(H_x)\cap B_n=\varnothing\big\}.$$

Veamos que cada F_n posee las propiedades (1) y (2) del Lema 2.1.13. Fijemos $n\in\mathbb{N}$ y sea D un subconjunto de X que es denso en algún abierto no vacío $G\subseteq X$ y tal que $D\subseteq F_n$. En primer lugar vamos a demostrar que $G\subseteq F_n$. En efecto, como D es denso en G, la condición (3) nos dice que el conjunto H_D es denso en H_G, esto es, $H_G\subseteq\overline{H}_D$ y, por la continuidad de f, tenemos que $f(H_G)\subseteq f(\overline{H}_D)\subseteq\overline{f(H_D)}$. Teniendo en cuenta que $D\subseteq F_n$, entonces $f(H_d)\cap B_n=\varnothing$ para todo $d\in D$, y en consecuencia,

$$f(H_D)\cap B_n \;=\; \bigcup_{d\in D}\Big(f(H_d)\cap B_n\Big) \;=\; \varnothing.$$

Un llamado al Lema 1.4.1 nos revela que $\overline{f(H_D)}\cap B_n=\varnothing$. En particular, $f(H_G)\cap B_n=\varnothing$ lo cual significa que $f(H_g)\cap B_n=\varnothing$ para todo $g\in G$, y en consecuencia, $G\subseteq F_n$. Falta demostrar que $X\setminus F_n$ es denso en X. Sea G un subconjunto abierto no vacío de X. Por (4), $f(H_G)$ es denso en Y_2, y como B_n es abierto en Y_2, se tiene que $f(H_G)\cap B_n\neq\varnothing$. De esto se sigue que el conjunto $G\cap(X\setminus F_n)=\{x\in G: f(H_x)\cap B_n\neq\varnothing\}$ es no vacío, y por consiguiente, $X\setminus F_n$ es denso en X.

Habiendo demostrado que cada F_n satisface las propiedades (1) y (2) del Lema 2.1.13, el Teorema 2.1.45, nos garantiza que el conjunto

$$R \;:=\; X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}(X\setminus F_n) \;=\; \Big\{x\in X\,:\, f(H_x)\cap B_n\neq\varnothing,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}\Big\}$$

es residual en X. Puesto que $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Y_2, cualquier abierto V de Y_2 se puede expresar en la forma $V=\bigcup_{k\in K}B_k$ para algún conjunto $K\subseteq\mathbb{N}$, de donde se sigue que $f(H_x)$ es denso en Y_2 para cualquier $x\in R$. ■

Teorema 2.1.47 (Bagemihl-Seidel). *Sean X un espacio de Baire, Y un espacio de Hausdorff segundo numerable y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas de X en Y. Sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ una base fija de Y y suponga que la siguiente condición se cumple:*

(5) *para cualquier conjunto abierto no vacío $G \subseteq X$ y cualquier B_n, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(G) \cap B_n \neq \varnothing$.*

Entonces existe un conjunto residual $R \subseteq X$ tal que, para cualquier $x \in R$, el conjunto $H_x = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en Y.

Prueba. Definamos $Y_1 = Y_2 = Y$ y sea f la función identidad de Y en Y. Para cada $x \in X$, considere el conjunto
$$H_x = \big\{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \big\}.$$
Observe que si $A \subseteq X$, entonces $H_A = \bigcup_{a \in A} H_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(A)$. Queremos demostrar que las hipótesis del teorema implican las condiciones (3) y (4) del teorema anterior. En efecto, para ver que (3) se cumple, suponga que $D \subseteq X$ es denso en algún abierto no vacío $G \subseteq X$, esto es, $G \subseteq \overline{D}$. La continuidad de cada f_n nos asegura que $f_n(G) \subseteq \overline{f_n(D)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia,
$$H_G = \bigcup_{n \geq 1} f_n(G) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \overline{f_n(D)} \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(D)} = \overline{H_D},$$
es decir, H_D es denso en H_G y la condición (3) del Teorema 2.1.46 queda establecida. Demostremos ahora que (4) se cumple. Sea G un subconjunto abierto no vacío de X y veamos que $f(H_G) = H_G$ es denso en Y. En efecto, sea U un subconjunto abierto no vacío de Y. Como $U = \bigcup_{n \in J} B_n$ para algún $J \subseteq \mathbb{N}$ y ya que $H_G = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(G)$, entonces la condición (5) nos revela que $H_G \cap U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \in J} (f_k(G) \cap B_n)$ es no vacío, quedando así demostrada la condición (4) del Teorema 2.1.46. Una aplicación del Teorema 2.1.46 nos asegura la existencia de un conjunto residual $R \subseteq X$ tal que $f(H_x) = H_x = \big\{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \big\}$ es denso en Y para cada $x \in R$. ■

Teorema 2.1.48 (Aproximación Diofántica). *Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Entonces existe un conjunto residual $R \subseteq \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in R$, el conjunto*
$$H_x = \big\{ t_n x + m : \ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \big\}$$
es denso en $\mathbb{R}$.

Prueba. Para poder aplicar el Teorema 2.1.47, hagamos $X = Y = \mathbb{R}$, la base $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ que vamos a considerar es la que está formada por todos los intervalos abiertos no degenerados de $\mathbb{R}$ con extremos racionales, mientras que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ consistirá de una enumeración de todas las funciones $\varphi_{m,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $\varphi_{m,k}(x) = t_m x + k$, donde $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Veamos ahora que si G es cualquier subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(G) \cap B_n \neq \varnothing$. En efecto, sea (a,b) un intervalo abierto contenido en G. El principio de Arquímedes nos garantiza la existencia de un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0(b-a) > 1$, y puesto que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, podemos hallar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_m > m_0$ y, así, $t_m(b-a) > 1$. De esto se sigue que existe un entero j con $t_m a < j < t_m b$ tal que cualquier número real x (en particular, cualquier $x \in B_n$) se puede escribir en la forma $t_m x_0 + j$ para algún $x_0 \in (a,b)$. Si f_k es la función que corresponde a $\varphi_{m,j}(x) = t_m x + j$, para algún $k \in \mathbb{N}$, en nuestra enumeración, entonces tendremos que $f_k(G) \cap B_n \neq \varnothing$. Por el Teorema 2.1.47 existe un conjunto residual $R \subseteq \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in R$, el conjunto $H_x = \big\{ t_n x + m : \ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \big\}$ es denso en $\mathbb{R}$. ■

2.2. Otras aplicaciones en espacios de Banach

2.2.1. ‖ ► Algunas aplicaciones clásicas

Esta sección la dedicaremos a mostrar algunas de las aplicaciones clásicas del Teorema de Categoría de Baire en el ámbito de los espacios de Banach tales como: el Teorema de Acotación Uniforme, el Teorema de Banach-Steinhauss, el Teorema de la Aplicación Abierta, y otras aplicaciones viejitas pero que no son tan conocidas. Algunas herramientas y resultados de la teoría de los espacios de Banach serán presentadas en lo que sigue y sus pruebas, las que no se dan, se pueden ver, por ejemplo, en [104]. Salvo mención explícita de lo contrario, todos nuestros espacios de Banach serán sobre el cuerpo de los números reales.

‖ ► Espacios de Banach

Si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces X^* denota el dual (topológico) de X, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales continuos definidos sobre X. Los elementos de X^* serán denotados por $x^*, y^*, z^*, \ldots$ y, en ocasiones, por $f, g, \ldots$. En algunas ocasiones usaremos el símbolo $\langle x, x^*\rangle$ para denotar el valor de x^* en x, es decir, $x^*(x)$. Sobre X^* se define la norma

$$\|x^*\| \;=\; \sup\big\{|x^*(x)| : \|x\| \leq 1\big\} \;=\; \sup\big\{x^*(x) : \|x\| \leq 1\big\}$$

para cada $x^* \in X^*$. Resulta que con esa norma $(X^*,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. De ahora en adelante, el símbolo B_X denota la bola unitaria cerrada de X; esto es, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, y la esfera unitaria será escrita por $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. En general, cualquier bola cerrada con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$ se denotará por $B(x,r)$, mientras que las bolas abiertas serán designadas por el símbolo $U(x,r)$. En particular, escribiremos $U_X = U(0,1)$. Sea A un subconjunto de X. Recordemos que:

- A es **convexo** si $tx + (1-t)y \in A$ siempre $x, y \in A$ y $0 < t < 1$.
- A es **absorbente** si, para cada $x \in X$, existe un $k_x > 0$ tal que $x \in tA$ para todo $t > k_x$.
- A es **simétrico** si $A = -A$.

Usando inducción se demuestra que un subconjunto A de X es convexo si contiene a todas las combinaciones convexas de A, es decir, para cualquier colección finita de vectores en A, digamos, $x_1, \ldots, x_n$ y escalares no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, se cumple que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in A$. La **cápsula convexa** de A, en notación, $\mathrm{co}(A)$, es el conjunto convexo más pequeño (con respecto a la inclusión) que contiene a A. Es fácil establecer que $\mathrm{co}(A)$ consiste de todas las combinaciones convexas de A, esto es,

$$\mathrm{co}(A) \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \; x_i \in A,\;\; \lambda_i \geq 0,\;\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\right\}.$$

Existe una colección de resultados, todos ellos vinculados entre sí, conocidos con el mismo nombre de “Teorema de Hahn-Banach” el cual establece la existencia, bajo ciertas condiciones, de funcionales lineales acotados sobre cualquier espacio lineal normado no nulo. Los que en esta notas necesitaremos son los siguientes:

Teorema de Hahn-Banach. *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio normado y* M *un subespacio lineal cerrado de* X *con* $M \neq X$. *Si* x_0^* *es un funcional lineal acotado definido sobre* M, *entonces existe un funcional lineal acotado* x^* *definido sobre* X *que es una extensión de* x_0^* *y que preserva la norma, es decir,*

$$x^*(x) \;=\; x_0^*(x) \quad \text{para todo } x \in M, \qquad \text{y} \qquad \|x^*\| \;=\; \|x_0^*\|.$$

Más aun, para cada $x \in X$, con $x \neq 0$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $\|x\| = x^*(x)$. En particular,

$$\|x\| \;=\; \sup\big\{x^*(x) : \, x^* \in X^*, \, \|x^*\| = 1\big\}$$

para todo $x \in X$.

Teorema de Hahn-Banach (Forma Geométrica). *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y sean* K, F *subconjuntos convexos no vacíos de* X *tales que:* K *es compacto,* F *es cerrado y* $K \cap F = \varnothing$. *Entonces existe un* $x^* \in X^*$ *y números reales* α *y* β *tales que*

$$x^*(x) \;<\; \alpha \;<\; \beta \;<\; x^*(y)$$

para todo $x \in K$ *y todo* $y \in F$.

La *topología débil* o la ω-*topología* sobre un espacio normado X se define como la topología más pequeña sobre X bajo la cual las aplicaciones

$$x \mapsto x^*(x), \quad \text{para cada } x^* \in X^*$$

son continuas. Con esta topología X es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Una base local del $0 \in X$ en esta topología viene dada por los conjuntos

$$U(x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon) = \big\{x \in X : |x_1^*(x)|,\dots,|x_n^*(x)| < \varepsilon\big\}, \quad \text{para } x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*, \ n \in \mathbb{N}.$$

Si $A \subseteq X$, su clausura en la ω-topología será denotada por $\overline{A}^{\omega}$, mientras que $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ es su clausura en la $\|\cdot\|$-topología. Si bien la ω-topología es más débil que la $\|\cdot\|$-topología, los conjuntos convexos cerrados en ambas topologías, coinciden.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Mazur). *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Si* $A \subseteq X$ *es cualquier conjunto convexo, entonces* $\overline{A}^{\omega} = \overline{A}^{\|\cdot\|}$.

Prueba. Es suficiente demostrar que $\overline{A}^{\omega} \subseteq \overline{A}^{\|\cdot\|}$ ya que claramente $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{\omega}$. Sea $x_0 \notin \overline{A}^{\omega}$ pero suponga que $x_0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Por la forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existe un $x^* \in X^*$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^*(x_0) \;<\; \alpha \;<\; x^*(y)$$

para todo $y \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Resulta que el conjunto $U = \{x \in X : x^*(x) < \alpha\}$ es un ω-entorno de x_0 que es disjunto de $\overline{A}^{\|\cdot\|}$, por lo que $x_0 \notin \overline{A}^{\omega}$. Esta contradicción establece que $\overline{A}^{\omega} \subseteq \overline{A}^{\|\cdot\|}$ y termina la prueba. ■

Como una consecuencia inmediata del Teorema de Mazur se tiene que: si Y es un subespacio lineal del espacio lineal normado $(X,\|\cdot\|)$, entonces $\overline{Y}^{\omega} = \overline{Y}^{\|\cdot\|}$. Más aun, si A es cualquier subconjunto no vacío de X, entonces

$$\overline{\text{co}}^{\,\|\cdot\|}(A) \;=\; \overline{\text{co}}^{\,\omega}(A),$$

lo que escribiremos simplemente por $\overline{\mathrm{co}}(A)$.

La aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por $Jx(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$ y todo $x \in X$, es una aplicación lineal continua que tiene el peculiar encanto de satisfacer la igualdad $\|Jx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Este hecho nos revela que J es una aplicación inyectiva y nos permite identificar cada elemento x de X con el elemento Jx de X^{**} y, así, pensar a X como un subespacio norma-cerrado de X^{**}, es decir, cuando estemos trabajando con el bidual X^{**} de un espacio de Banach X, convenimos en identificar a B_X con $J(B_X)$ y, en general, a X con $J(X) \subseteq X^{**}$. Si ocurre que la aplicación J es sobreyectiva, es decir $X = J(X) = X^{**}$, entonces se dice que X es un espacio **reflexivo**.

Si en lugar de X consideramos su dual X^*, podemos definir una nueva topología sobre X^*, llamada la ω^*-*topología*, como la topología más pequeña sobre X^* bajo la cual las aplicaciones

$$x^* \mapsto x^*(x), \quad \text{para cada } x \in X$$

son continuas. Esta topología convierte a X^* en un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. Una base local del $0 \in X^*$ en la ω^*-topología la constituye la colección de todos los conjuntos de la forma

$$U(0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| \leq \varepsilon\}, \quad \text{para } x_1, \ldots, x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dos resultados importantes acerca de la ω^*-topología sobre un espacio de Banach dual que nos serán de gran ayuda son los siguientes:

Teorema de Banach-Alaoglu. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces B_{X^*} es ω^*-compacto. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es, además, metrizable.*

Teorema de Goldstine. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces identificando a B_X con $J(B_X)$ tenemos que B_X es ω^*-denso en $B_{X^{**}}$; es decir,*

$$\overline{B}_X^{\omega^*} = B_{X^{**}}.$$

Corolario 2.2.1 (Caracterización de espacios reflexivos). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. B_X es débilmente compacto si, y sólo si, X es reflexivo.*

Prueba. Suponga que B_X es débilmente compacto. Puesto que la aplicación canónica $J : (X, \omega) \to (X^{**}, \omega^*)$ es continua, entonces $J(B_X)$ es ω^*-compacto, en particular, $B_X = J(B_X)$ es ω^*-cerrado. Se sigue ahora del Teorema de Goldstine que $B_X = \overline{B}_X^{\omega^*} = B_{X^{**}}$, de donde se deduce fácilmente que J es sobreyectiva y, en consecuencia, X es reflexivo.

Suponga ahora que X es un espacio reflexivo. Teniendo en cuenta que $J : (X, \omega) \to (X^{**}, \omega^*)$ es un homeomorfismo y sabiendo que $B_{X^{**}}$ es, gracias al Teorema de Banach-Alaoglu, ω^*-compacto, resulta que B_X es débilmente compacto. ■

El siguiente es un poderoso y fascinante resultado de R. C. James, que establece cómo caracterizar a los subconjuntos débilmente compactos en un espacio de Banach. Su demostración, que no es en lo absoluto trivial, puede ser vista en ([185], [219], p. 157–161, o [323]). Algunas de las aplicaciones recopiladas del resultado de James se pueden mirar en [74].

Teorema 2.2.2 (Teorema sup de James). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y suponga que K es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de X. Entonces, K es débilmente compacto si, y sólo si, para cada $x^* \in X^*$ existe un $x_0 \in K$ tal que*

$$x^*(x_0) \;=\; \sup x^*(K).$$

Con éste instrumento en las manos, el siguiente resultado es muy fácil de demostrar.

Corolario 2.2.2 (Teorema de Krein-Šmulian). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto débilmente compacto de X, entonces $\overline{\text{co}}\,(K)$ también es débilmente compacto.*

Prueba. Sea $x^* \in X^*$. Si K es débilmente compacto, entonces el resultado de James nos provee de un $x_0 \in K$ tal que $x^*(x_0) = \sup x^*(K)$. Pero ya que, $\sup x^*(K) = \sup x^*(\overline{\text{co}}\,(K))$, entonces $x^*(x_0) = \sup x^*(\overline{\text{co}}\,(K))$ y de nuevo, por el Teorema sup de James, $\overline{\text{co}}\,(K)$ es débilmente compacto. ■

Finalizamos, por ahora, con uno de los resultados clásicos e importantes en la teoría de los espacios normados que nos dice, en particular, que en los espacios lineales normados de dimensión infinita la bola cerrada unitaria nunca puede ser compacta en la topología de la norma.

Lema 2.2.1 (Lema de Riesz). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio lineal normado y Y un subespacio lineal cerrado y propio de X. Para cada $0<\theta<1$, existe un $x_\theta \in S_X$ tal que $\|x_\theta - y\| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Prueba. Escojamos un $y \in X\setminus Y$, lo cual es posible por ser $Y \neq X$. Puesto que Y es cerrado, la distancia de y a Y es positiva, es decir,

$$0 \;<\; d \;:=\; \text{ínf}\big\{\,\|x-z\| : z\in Y\big\} \;<\; \frac{d}{\theta},$$

de allí que existe un $z \in Y$ tal que

$$\|x-z\| \;<\; \frac{d}{\theta}.$$

Definamos ahora

$$x_\theta \;=\; \frac{x-z}{\|x-z\|}.$$

Es claro que $x_\theta \in S_X$. Más aun, si $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x_\theta - y\| \;&=\; \left\| \frac{x-z}{\|x-z\|} - y \right\| \\
&=\; \left\| \frac{x}{\|x-z\|} - \frac{z}{\|x-z\|} - \frac{x-z}{\|x-z\|}y \right\| \\
&=\; \frac{1}{\|x-z\|}\left\| x - \underbrace{(z + \|x-z\|y)}_{\text{un elemento de } Y} \right\| \\
&>\; \frac{\theta}{d}\,d \;=\; \theta.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.3 (Riesz). *Sean $(X_1,\|\cdot\|_1)$ y $(X_2,\|\cdot\|_2)$ dos espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y suponga que $\dim(X_1) = \dim(X_2) < +\infty$. Entonces X_1 y X_2 son topológicamente isomorfos.*

Prueba. Es suficiente demostrar que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión finita, digamos $\dim(X) = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X es topológicamente isomorfo a $\left(\ell_1^n, \|\cdot\|_1\right)$, donde

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

para cualquier vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \ell_1^n$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de Hamel para X y defina la aplicación lineal $T : \ell_1^n \to X$ por

$$T\big((a_1, \ldots, a_n)\big) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Claramente T es un isomorfismo de ℓ_1^n sobre X. Más aun, para todo $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \ell_1^n$ resulta que

$$\|T(x)\| = \|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \|x\|_1$$

lo cual prueba que T es un operador lineal continuo. Un llamado al Teorema de la Aplicación Inversa (véase el Corolario 2.2.8, página 223) nos revela que T^{-1} también es continuo y termina la prueba. ■

Una consecuencia inmediata del Lema de Riesz y del resultado anterior es el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Riesz). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La bola unitaria B_X es compacta en la topología de la norma si, y sólo si, $\dim(X) < +\infty$.*

Prueba. Suponga que $\dim(X) = n < +\infty$. Entonces, por el Teorema 2.2.3, X es isomorfo a ℓ_2^n y, en consecuencia, la compacidad de B_X sigue del Teorema de Heine-Borel.

Suponga ahora que algún espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ de dimensión infinita posee su bola unitaria B_X compacta. Nuestra tarea, para generar una contradicción, será construir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en B_X de modo tal que ninguna subsucesión de ella sea convergente en la norma. Para ver esto, comencemos escogiendo un $x_1 \in S_X$ y sea Y_1 el subespacio lineal generado por x_1. Por ser Y_1 un subespacio cerrado y propio de X, el Lema de Riesz nos dice que existe un $x_2 \in S_X$ tal que $\|x_2 - \alpha x_1\| \geq 3/4$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. Como los vectores x_1 y x_2 son linealmente independientes y la dimensión de X es infinita, el subespacio lineal generado por x_1 y x_2, llamémoslo Y_2, es cerrado y propio. Por el Lema de Riesz, existe un $x_3 \in S_X$ tal que $\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \geq 3/4$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En particular, $\|x_3 - x_i\| \geq 1/2$ para $i = 1, 2$. Continuando inductivamente con este mecanismo, obtenemos la sucesión deseada. Claramente la sucesión así construida no posee subsucesión alguna convergente lo cual niega la compacidad de B_X gracias al Teorema 1.4.18. ■

Observe que, por el teorema anterior, en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita X, ninguna bola cerrada de X puede ser norma-compacta y, por consiguiente, ningún conjunto acotado, abierto y no vacío cuando se clausura en la topología de la norma puede ser norma-compacto. Como una consecuencia inmediata del Teorema de Riesz en combinación con el Teorema de Categoría de Baire se tiene el siguiente:

Corolario 2.2.3. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $(X, \|\cdot\|)$ nunca es un σ-compacto, es decir, nunca se puede escribir como una unión numerable de subconjuntos norma-compactos.*

Prueba. Suponga que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es un subconjunto norma-compacto de X. Por el Teorema de Categoría de Baire, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(K_{n_0}) \neq \varnothing$. Esto significa que K_{n_0} contiene una bola abierta $U(x, r)$ para algún $r > 0$ y algún $x \in X$. De aquí se sigue que $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ es compacto y, entonces, por el Teorema de Riesz, $\dim(X) < \infty$. Esta contradicción da por terminada la prueba. ■

(**B**-1) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto absorbente, convexo y cerrado de X, entonces K contiene un entorno abierto del origen.*

Prueba. Definamos $D = K \cap (-K)$. Entonces D es absorbente, simétrico, convexo, cerrado y además $0 \in D$. Más aún, para cualquier subconjunto no vacío A de D, resulta que

$$0 \in \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) \subseteq \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}(-D) \subseteq \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}D = D,$$

y entonces será suficiente demostrar que $\operatorname{int}(D) \neq \varnothing$ puesto que el entorno del origen

$$\frac{1}{2}\operatorname{int}(D) + \frac{1}{2}(-\operatorname{int}(D))$$

está contenido en D. Supongamos que $\operatorname{int}(D) = \varnothing$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto nD es cerrado y tiene interior vacío; es decir, es nunca-denso en X. Del Teorema 1.6.2, se sigue que $X \setminus nD$ es abierto y denso en X y por el Teorema de Categoría de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus nD)$ es denso en X. Observemos ahora que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus nD) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} nD = \varnothing$$

pues $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nD$ ya que D es absorbente. Esta contradicción establece que $\operatorname{int}(D) \neq \varnothing$ y termina la prueba. ■

(**B**-2) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si F es un subespacio lineal cerrado y propio de X, entonces F es nunca-denso en X.*

Prueba. Supongamos que $\operatorname{int}(F) \neq \varnothing$ y sea $z \in \operatorname{int}(F)$. Entonces existe un $r > 0$ tal que la bola abierta $U(z,r) \subseteq F$. Como F es un subespacio lineal, entonces

$$-z + U(z,r) = U(0,r) \subseteq F.$$

De aquí se sigue, gracias a que F es cerrado, que $n \cdot U(0,r) \subseteq F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot U(0,r) \subseteq F$. Por otro lado, si $x \in X$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| \leq nr$, es decir, $x \in n \cdot U(0,r)$ por lo que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot U(0,r) = F,$$

lo que resulta ser imposible pues F es un subespacio propio de X. ■

Varias consecuencias se derivan inmediatamente de éste resultado. Por ejemplo:

(a) *En el espacio de Banach $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ de todas las sucesiones acotadas, las sucesiones que son divergentes son abundantes, es decir, forman un conjunto residual*. En efecto, si consideramos a $(c, \|\cdot\|_\infty)$, el espacio de Banach de todas las sucesiones de números reales convergentes, resulta que c es un subespacio lineal, cerrado y propio de ℓ_∞ por lo que, gracias al resultado anterior, c es nunca-denso en ℓ_∞; es decir, el conjunto $\ell_\infty \setminus c$, *que consiste de todas las sucesiones de números reales acotadas y divergentes*, es norma-denso en ℓ_∞. De hecho, como c es cerrado en ℓ_∞, el conjunto $\ell_\infty \setminus c$ es abierto y, en consecuencia, un G_δ. Esto prueba que $\ell_\infty \setminus c$ es residual en ℓ_∞.

Uno puede demostrar, sin apelar al resultado anterior, que $\ell_\infty \setminus c$ es denso en ℓ_∞ por medio del siguiente argumento:

Sea $U(x,\varepsilon)$ una bola abierta arbitraria contenida en ℓ_∞, donde $x=(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, y veamos que $U(x,\varepsilon)\cap(\ell_\infty\setminus c)\neq\varnothing$. Observe que si $x\notin c$, entonces no hay nada que demostrar. Suponga entonces que $x\in c$ y que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ para algún $a\in\mathbb{R}$. Escojamos ahora un $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon/4$ para todo $n\geq N$. Definamos $y=(y_n)_{n=1}^\infty\in\ell_\infty$ del modo siguiente:

$$y_1 = x_1,\ldots,y_N = x_N, \qquad \text{y para } n>N \text{ pongamos} \qquad y_n = \begin{cases} a+\varepsilon/4 & \text{si } n \text{ es impar,}\\ a-\varepsilon/4 & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

Entonces $d_\infty(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|<\varepsilon$, de donde se sigue que $y\in U(x,\varepsilon)$. Por otro lado, como

$$\limsup_{n\to\infty} y_n = a+\varepsilon/4 \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to\infty} y_n = a-\varepsilon/4,$$

vemos que $y\notin c$. Esto prueba la densidad de $\ell_\infty\setminus c$ en ℓ_∞.

(b) Similar al Corolario 2.2.3 tenemos que: *si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y si $(X_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de subespacios lineales (no necesariamente cerrados) de X tal que $X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n$, entonces existe al menos un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\overline{X}_{n_0}=X$.* En efecto, si $\overline{X}_n\neq X$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces como cada $\overline{X}_n$ es un subespacio lineal cerrado y propio de X, por el resultado anterior tenemos que $\overline{X}_n$ es nunca-denso y, en consecuencia, por el Teorema de Categoría de Baire, $X\neq\bigcup_{n=1}^\infty\overline{X}_n$. Esto, por supuesto, contradice nuestra hipótesis pues, como $X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ y ya que $\bigcup_{n=1}^\infty X_n\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty\overline{X}_n\subseteq X$, entonces $X=\bigcup_{n=1}^\infty\overline{X}_n$. De lo anterior se concluye, en particular, que: *ningún espacio de Banach puede se escrito como una unión numerable estrictamente creciente de subespacios lineales cerrados propios.*

(c) *Sea $(T_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de operadores lineales continuos de un espacio de Banach X en un espacio normado Y tal que $T_n\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces, el conjunto*

$$X_0 = \big\{x\in X : T_n(x)\neq 0 \ \text{ para todo } n\geq 1\big\}$$

es residual en X. En efecto, como T_n es continuo y $T_n\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, resulta que el conjunto $\operatorname{Ker}(T_n)=\{x\in X : T_nx=0\}$ es un subespacio lineal cerrado y propio de X. Por $(\mathbf{B}-2)$, el conjunto $\operatorname{Ker}(T_n)$ es nunca-denso y, por lo tanto, como X es un espacio de Banach, $X_0=X\setminus\bigcup_{n=1}^\infty\operatorname{Ker}(T_n)$ es, por el Teorema 1.6.3, residual en X.

(d) Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $x\in X$ y Y un subespacio lineal cerrado de X. Denotemos por $E(x,Y)$ el error de mejor aproximación de x con elementos de Y, esto es,

$$E(x,Y) = \inf\big\{\,\|x-y\| : y\in Y\big\},$$

es decir, $E(x,Y)=\operatorname{dist}(x,Y)$. Otro resultado, producto de la combinación del Lema de Riesz y el Teorema de Categoría de Baire es el siguiente (véase, [402], Theorem 1):

Teorema 2.2.5 (Shapiro). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y suponga que $(X_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios lineales cerrados y propios de X, es decir,*

$$\{0\} \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X.$$

Si $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión no-creciente de números reales positivos convergiendo a cero, entonces existe un conjunto residual G de X tal que, para cada $x\in G$, existe un $n_x\in\mathbb{N}$ para el cual se cumple que $E(x,X_{n_x})>m\varepsilon_{n_x}$ para todo $m\in\mathbb{N}$.

Prueba. En primer lugar observe que, por (b), $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Seleccionando cualquier vector $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, tendremos que $E(x, X_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, además, por ser la sucesión estrictamente creciente se tienen las desigualdades

$$E(x, X_1) \geq E(x, X_2) \geq \cdots > 0$$

Para cada $m \geq N$, considere el conjunto

$$Y_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : E(x, X_n) \leq m\varepsilon_n\},$$

el cual puede ser vacío para algún m. En cualquier caso, ya que $E(\cdot, Y)$ es una aplicación continua, resulta que cada conjunto Y_m es cerrado en X. Más aun, es fácil establecer que Y_m es convexo y, además, como $E(x, X_n) = E(-x, X_n)$ para cualquier $x \in X$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces Y_m también es simétrico. Sea

$$Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m.$$

Veamos que cada Y_m es nunca-denso en X. En efecto, suponga por un momento que, para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, Y_{m_0} tiene interior no vacío y escojamos una bola cerrada $B(x_0, r)$ contenida en Y_{m_0} para algún $r > 0$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $0 < r < 1$. Sea y cualquier vector en X con $\|y\| \leq 1$. Entonces $x_0 + ry \in Y_{m_0}$ y por simetría, los elementos $x_0 - ry$ y $-x_0 + ry$ están en Y_{m_0}. Usando ahora el hecho de que Y_{m_0} es convexo, resulta que para cualquier $y \in X$ con $\|y\| = 1$, el elemento

$$\frac{1}{2}\Big[(x_0 + ry) + (x_0 - ry)\Big] = ry$$

también pertenece a Y_{m_0}, es decir, la esfera cerrada $S(0, r)$ con centro en 0 y radio r está contenida en Y_{m_0}. Teniendo en cuenta que $\varepsilon_n \searrow 0$, podemos seleccionar un entero positivo n_0 lo suficientemente grande de modo tal que $\varepsilon_{n_0} < r/m_0$. Si $x \in S(0, r)$, entonces $x \in Y_{m_0}$ y, en consecuencia, $E(x, X_{n_0}) \leq m_0\varepsilon_{n_0} < r$ lo que constituye una clara violación al Lema de Riesz. Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto

$$\begin{aligned} G &= X \setminus Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} (X \setminus Y_m) \\ &= \{x \in X : \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ para el cual } E(x, X_{n_x}) > m\varepsilon_{n_x}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

es residual en X. ■

Suponga ahora que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita y que nuestro subespacio lineal F siga siendo propio pero, en lugar de aceptar que sea cerrado, pedimos que sea denso en X. ¿Es F de segunda categoría? La pregunta, formulada por V. Klee y A. Wilansky, obtuvo una respuesta negativa si se acepta el Axioma de Martin. En efecto, en [16] J. Arias de Reyna construye, en cada espacio de Banach separable de dimensión infinita, un subespacio lineal denso de primera categoría utilizando el Axioma de Martín para deducir que si κ es un número cardinal menor que $2^{\aleph_0}$ y si $\mathcal{A} = \{A_k \subseteq \mathbb{R} : k < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ cada uno de los cuales posee medida de Lebesgue cero, entonces $\bigcup_{k<\kappa} A_k$ también posee medida de Lebesgue cero (véase, [407]). Posteriormente, M. Valdivia [433] generaliza el resultado de Arias de Reyna a espacios vectoriales topológicos de Baire, separables y de dimensión infinita pero siempre admitiendo como premisa el Axioma de Martin.

(**B**-3) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel (= base algebraica) de X, entonces la cardinalidad de $\mathfrak{B}$ es no numerable.*

Prueba. Supongamos que $\mathfrak{B}$ es infinito numerable, digamos $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$F_n = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$$

donde $[\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ denota el subespacio lineal generado $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Cada F_n es un subespacio lineal de dimensión finita y, en consecuencia, propio y cerrado en X. Puesto que $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel resulta que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y, por consiguiente, podemos hacer uso del Teorema de Categoría de Baire para que nos provea de la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_n) \neq \varnothing$, lo que evidentemente contradice el resultado anterior. Por esto $\mathfrak{B}$ es no numerable. ■

(**B**-4) *Sea (K, τ) un espacio de Hausdorff compacto. K es numerable si, y sólo si, él es disperso y metrizable.*

Recordemos que un espacio de Hausdorff compacto (K, τ) se dice **disperso** si cada subconjunto cerrado L de K posee al menos un punto aislado.

Prueba. Supongamos que K es numerable y para cada par de elementos $x, y \in K$ con $x \neq y$, definamos el conjunto

$$H_{x,y} = \{f \in C(K) : f(x) = f(y)\},$$

donde, como siempre, $C(K)$ es el espacio de Banach de Banach de todas las funciones continuas acotadas a valores reales definidas sobre K. Es fácil ver que cada $H_{x,y}$ es un subespacio cerrado y propio de $C(K)$. Por $(\mathbf{B}-2)$, cada $H_{x,y}$ tiene interior vacío; es decir, cada conjunto $H_{x,y}$ es cerrado y nunca-denso. Observe que como K es numerable, la unión $\bigcup_{x,y \in K} H_{x,y}$ es una unión numerable y, así, por el Teorema de Categoría de Baire,

$$\bigcup_{x,y \in K} H_{x,y} \subsetneq C(K).$$

Por consiguiente, existe una función $f \in C(K)$ que no pertenece a ningún $H_{x,y}$; es decir, f es una función inyectiva sobre K. De aquí se sigue que $f : K \to f(K)$ es un homeomorfismo y como $f(K)$ es un subconjunto métrico compacto (de $\mathbb{R}$), entonces K es metrizable. Para finalizar la prueba de esta implicación, notemos que cualquier subconjunto cerrado L de K es numerable y, de nuevo, por el Teorema de Categoría de Baire, L posee al menos un punto aislado; es decir, K es disperso.

Supongamos ahora que K es un espacio métrico compacto disperso. Por el Lema 2.2.11, página 281, existe un $\beta < \omega_1$ tal que $K^{(\beta)} = \varnothing$. Puesto que $K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)}$ es a lo más numerable ya que cada $x \in K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)}$ es un punto aislado de $K^{(\alpha)}$ y como

$$K = \bigcup_{\alpha < \beta} \left(K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)} \right) \cup K^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha < \beta} \left(K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)} \right),$$

resulta que K es numerable. Esto termina la prueba de $(\mathbf{B}-4)$. ■

(**B**-5) **Teorema de Osgood**. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $(f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de funciones continuas a valores reales definidas sobre X* ***puntualmente acotada****, lo cual significa que para cada $x \in X$, existe una constante no negativa M_x tal que*

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} |f_\alpha(x)| \leq M_x.$$

Entonces existen un conjunto abierto no vacío V en X y una constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha\in\Gamma,\, x\in V} |f_\alpha(x)| \leq M,$$

Prueba. Para cada entero positivo n, definamos

$$F_n = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \{x \in X \,:\, |f_\alpha(x)| \leq n\}.$$

Puesto que cada función f_α es continua, el conjunto $\{x \in X \,:\, |f_\alpha(x)| \leq n\}$ es cerrado y, por consiguiente, cada F_n es cerrado en X. Más aún, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos garantiza la existencia de n_0 tal que $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$. Definiendo $V = \mathrm{int}(F_{n_0})$, resulta que

$$\sup_{\alpha\in\Gamma,\, x\in V} |f_n(x)| \leq M.$$

■

El resultado anterior fue probado por Osgood en 1897 ([343]) el cual nos permite demostrar, de una forma casi inmediata, el Teorema de Acotación Uniforme.

(**B**-6) **Teorema de Acotación Uniforme 1.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $(T_\alpha)_{\alpha\in D}$ es una familia de operadores lineales continuos de X en Y puntualmente acotada, es decir, para cada $x \in X$ existe una constante positiva M_x tal que*

$$\sup_{\alpha\in D} ||T_\alpha(x)|| \leq M_x.$$

*entonces ella es **uniformemente acotada**, vale decir, existe una constante positiva M tal que*

$$\sup_{\alpha\in D} ||T_\alpha|| \leq M.$$

Prueba. Para cada $\alpha \in D$, la función $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_\alpha(x) = ||T_\alpha(x)||$ para todo $x \in X$ es continua y, se sigue de nuestra hipótesis, que la familia $(f_\alpha)_{\alpha\in D}$ es puntualmente acotada. Por el Teorema de Osgood, existen una constante positiva M' y un conjunto abierto no vacío V en X tal que

$$\sup_{\alpha\in D,\, x\in V} ||T_\alpha(x)|| \leq M'.$$

En particular, existe algún $x_0 \in V$ y algún $\delta > 0$ tal que $U(x_0, \delta) \subseteq V$, y

$$\sup_{\alpha\in D,\, x\in U(x_0,\delta)} ||T_\alpha(x)|| \leq M'.$$

Ahora, si $y \in X$ con $||y|| < \delta$, entonces $x_0 + y \in U(x_0, \delta)$ y así, para todo $\alpha \in D$,

$$\begin{aligned} ||T_\alpha(y)|| &\leq ||T_\alpha(x_0 + y)|| + ||T_\alpha(x_0)|| \\ &\leq 2M' \end{aligned}$$

Finalmente, si $z \in X$ con $z \neq 0$ y si definimos $y = (\delta/2||z||)z$, tendremos que $||y|| < \delta$ y, por la observación anterior, $||T_\alpha(y)|| \leq 2M'$. Por esto, para todo $\alpha \in D$,

$$\begin{aligned} ||T_\alpha(z)|| &= \left\| T_\alpha\left(\frac{2||z||}{\delta} y\right) \right\| \\ &= \frac{2||z||}{\delta} \| T_\alpha(y) \| \\ &\leq \frac{4M'}{\delta} \| z \| . \end{aligned}$$

Por consiguiente, tomando $M = 4M'/\delta$, tendremos que $\| T_\alpha(z) \| \leq M \| z \|$ para todo $\alpha \in \Gamma$ y todo $z \in X$, es decir,

$$\sup_{\alpha \in D} ||T_\alpha|| \leq M.$$

■

Observemos que el Teorema de Acotación Uniforme también se puede expresar del modo siguiente:

(**B**-7) **Teorema de Acotación Uniforme 2.** *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $(Y, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Si* $(T_\alpha)_{\alpha \in D}$ *es una familia de operadores lineales continuos de* X *en* Y*, entonces una, y sólo una, de las siguientes dos condiciones se cumple:*

(a) *o existe una constante positiva* M *tal que*

$$\sup_{\alpha \in D} ||T_\alpha|| \leq M,$$

(b) *o existe un subconjunto* G_δ*-denso* G *de* X *tal que*

$$\sup_{\alpha \in D} ||T_\alpha(x)|| = \infty, \quad \text{para todo } x \in G.$$

Prueba. Considere la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sup_{\alpha \in D} \| T_\alpha(x) \| \qquad (x \in X)$$

y sea

$$G_n = \{x \in X : f(x) > n\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Como cada función $x \mapsto \| T_\alpha(x) \|$ es continua sobre X, resulta que f es inferiormente semicontinua y, por consiguiente, cada G_n es abierto. Dos opciones son viables: la primera es que todos los G_n son densos, en cuyo caso aplicamos el Teorema de Categoría de Baire para obtener que la intersección $G := \bigcap_{n=1}^\infty G_n = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ es densa en X lo que constituye la prueba de la parte (b). La otra posibilidad es que exista algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que G_{n_0} no sea denso en X. En este caso existe una bola abierta, digamos $U(x_0, \delta)$ en X, que no intersecta a G_{n_0}. Esto implica, en particular, que

$$\| T_\alpha(x) \| \ \leq \ n_0 \quad \text{siempre que} \quad \alpha \in D \ \text{ y } \ x \in U(x_0, \delta).$$

De esto último se deduce que, para todo $x \in U(x_0, \delta)$ y todo $\alpha \in D$

$$\| T_\alpha(x - x_0) \| \leq \| T_\alpha x \| + \| T_\alpha x_0 \| \leq 2n_0.$$

Como en la prueba del Teorema de Acotación Uniforme 1 se concluye de esto que

$$\sup_{\alpha\in D} ||T_\alpha|| \leq \frac{4n_0}{\delta}$$

lo que finaliza la prueba de (a). ∎

La segunda parte del resultado anterior algunos autores prefieren en llamarlo el **Principio of Condensación of Singularidades**, mientras que el Teorema de Acotación Uniforme 2 también se le conoce con el nombre de **Teorema de Banach-Steinhauss**. Otra demostración del Teorema de Acotación Uniforme 1 sin apelar al Teorema de Categoría de Baire fue dada por S. Banach en su libro [29] usando el método de la joroba deslizante (Gliding hump). Más recientemente, J. Hennefeld [210] utilizando sólo la noción de series en un espacio de Banach y el hecho de que en tales espacios toda serie absolutamente convergente es convergente (en la norma del espacio) nos proporciona otra manera de probar el Teorema de Acotación Uniforme.

Otra consecuencia del Teorema de Acotación Uniforme es el siguiente:

(**B**-8) **Teorema de Banach-Steinhauss.** *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $(Y, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $(T_n)_{n=1}^\infty$ *una sucesión de operadores lineales continuos de* X *en* Y *tal que* $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *existe para cada* $x \in X$. *Si definimos* $T : X \to Y$ *por la fórmula*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

para todo $x \in X$, *entonces:*

a) T *es lineal y continuo,* y

b) $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Prueba. a) La linealidad de T es consecuencia inmediata de la de cada T_n. Por otro lado, puesto que toda sucesión convergente es acotada, y ya que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe para cada $x \in X$, se sigue que para cada $x \in X$ existe una constante positiva M_x tal que $\sup_n ||T_n(x)|| \leq M_x$, en otras palabras, para cada $x \in X$, $||T_n(x)|| \leq M_x \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Acotación Uniforme, existe una constante $M > 0$, tal que $\sup_n ||T_n|| \leq M$. De esto y la continuidad de cada T_n, se sigue que $||T_n(x)|| \leq M||x||$ para todo $x \in X$. Finalmente, de la desigualdad

$$\|T(x)\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x)\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + M\|x\|$$

y el hecho de que $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, concluimos que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{para todo } x \in X,$$

es decir, T es continua.

b) Sea $(n_k)_{k=1}^\infty$ una subsucesión de $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|T_{n_k}\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. Entonces

$$\|Tx\| \leq \|(T_{n_k} - T)(x)\| + \|T_{nk}\|\,\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X \ \text{ y } \ k \in \mathbb{N}.$$

De esto se sigue, teniendo en cuenta que $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_{n_k}(x)$, que

$$\|Tx\| \leq (\lim_{k\to\infty} \|T_{n_k}\|)\,\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X,$$

por lo que

$$\|T\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T_{n_k}\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Esto finaliza la prueba. ■

(**B**-9) **Teorema de la Aplicación Abierta.** *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *y* $(Y,\|\cdot\|)$ *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal acotado sobreyectivo. Entonces* T *es una aplicación abierta; es decir,* T *transforma conjuntos abiertos en* X *en conjuntos abiertos en* Y.

Antes de abordar la prueba del Teorema de la Aplicación Abierta, recordemos el siguiente hecho:

Lema (✓). *Si* $(X,\|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach, entonces cada serie absolutamente convergente es convergente.*

Prueba del Lema (✓). Sea $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie absolutamente convergente en X. Si $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ con $m_2 > m_1$, entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_2} x_n - \sum_{n=1}^{m_1} x_n \right\| \leq \sum_{n=m_1}^{m_2} \|x_n\|$$

el cual se puede hacer arbitrariamente pequeño siempre que m_1 se escoja lo suficientemente grande. ■

Prueba del Teorema de la Aplicación Abierta. La prueba la haremos en dos actos. El primer acto requiere que demostremos, en primer lugar, el siguiente:

Lema (✓✓). *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *y* $(Y,\|\cdot\|)$ *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal acotado. Supongamos que para algún* $\rho > 0$ *y algún* $R > 0$ *se cumple que*

$$U_Y(0,\rho) \subseteq \overline{T(U_X(0,R))}.$$

Entonces

$$U_Y(0,\rho) \subseteq T(U_X(0,R)).$$

Prueba del Lema (✓✓). Nuestro primer objetivo será construir, para cada $0 < \varepsilon < 1/2$ y cada vector $y \in U_Y(0,\rho)$, una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty, \qquad x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{y} \qquad y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n.$$

Fijemos entonces $0 < \varepsilon < 1/2$ y tomemos cualquier $y \in U_Y(0,\rho)$. Por hipótesis, $y \in \overline{T(U_X(0,R))}$ y, así, existe $y_1 \in T(U_X(0,R))$ tal que $\|y - y_1\| < \varepsilon\rho$. Pero $y_1 \in T(U_X(0,R))$ significa que existe un $x_1 \in U_X(0,R)$ tal que $y_1 = Tx_1$; es decir, $\|y - Tx_1\| < \varepsilon\rho$, lo cual es equivalente a decir que $y - Tx_1 \in U_Y(0,\varepsilon\rho)$. Observemos, por otro lado, que la condición $U_Y(0,\rho) \subseteq \overline{T(U_X(0,R))}$ implica que

$$U_Y(0,\varepsilon\rho) = \varepsilon U_Y(0,\rho) \subseteq \varepsilon\overline{T(U_X(0,R))} = \overline{T(U_X(0,\varepsilon R))}$$

y, en consecuencia,

$$y - Tx_1 \in \overline{T(U_X(0,\varepsilon R))}.$$

Procediendo como en el paso anterior, existe un punto $x_2 \in U_X(0,\varepsilon\rho)$ tal que

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2)\| < \varepsilon\rho;$$

es decir,

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in U_Y(0,\varepsilon\rho) \subseteq \overline{T(U_X(0,\varepsilon R))}.$$

Si suponemos que este proceso se lleva a cabo indefinidamente, habremos obtenido una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U_X(0,\varepsilon^{n-1}R)$ y

$$y - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n \in U_Y(0,\varepsilon^n\rho) \subseteq \overline{T(U_X(0,\varepsilon^n R))}.$$

De esto, y el hecho de que $\|x_n\| < \varepsilon^{n-1}R$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \qquad \text{y} \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n.$$

Por otro lado, como X es completo, el Lema ($\checkmark$) nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a algún $x \in X$ y entonces, la continuidad de T nos garantiza que $y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$. Vamos de inmediato a verificar que $x \in U_X(0,R/(1-2\varepsilon))$. En efecto, las desigualdades

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \frac{R}{1-\varepsilon} < \frac{R}{1-2\varepsilon},$$

muestran que $x \in U_X(0,R/(1-2\varepsilon))$ y, por lo tanto, $y = Tx \in T\big(U_X(0,R/(1-2\varepsilon))\big)$.

Hasta ahora hemos demostrado que

$$U_Y(0,\rho) \subseteq T\big(U_X(0,R/(1-2\varepsilon))\big), \qquad \text{para todo } 0 < \varepsilon < 1/2.$$

Para finalizar el primer acto de la prueba elijamos, de nuevo, un elemento cualquiera y en $U_Y(0,\rho)$. Entonces $\|y\| < \rho$. Escojamos ahora un $d > 0$ de modo que $\|y\| < d < \rho$. Entonces

$$\begin{aligned} y \in U_Y(0,d) &= \frac{d}{\rho}\, U_Y(0,\rho) \\ &\subseteq \frac{d}{\rho}\, T\big(U_X(0,R/(1-2\varepsilon))\big) \\ &= T\big(U_X(0,dR/\rho(1-2\varepsilon))\big) \end{aligned}$$

Puesto que $d/\rho < 1$, podemos redefinir $\varepsilon > 0$ eligiéndolo suficientemente pequeño de modo que siga siendo menor que $1/2$ pero que, además, cumpla la desigualdad $dR/\rho(1-2\varepsilon) < R$. De aquí se sigue que $y \in T(U_X(0,R))$ y, en consecuencia, $U_Y(0,\rho) \subseteq T(U_X(0,R))$. Esto termina la prueba del primer acto. ■

El segundo acto es demostrar que

$$\textit{para cada } r > 0, \textit{ existe un } \rho > 0 \textit{ tal que } U_Y(0,\rho) \subseteq T(U_X(0,r)). \tag{$*^{2}$

En efecto, fijemos $r > 0$ y observemos que como T es sobreyectiva, entonces

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T\big(U_X(0,n)\big)}.$$

Se sigue del Teorema de Categoría de Baire que $\operatorname{int}\big(\overline{T\left(U_X(0,n_0)\right)}\big) \neq \varnothing$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Por la simetría y convexidad de $\overline{T\left(U_X(0,n_0)\right)}$ se obtiene que $0 \in \operatorname{int}\big(\overline{T\left(U_X(0,n_0)\right)}\big)$ y, en consecuencia, también $0 \in \operatorname{int}\big(\overline{T\left(U_X(0,r)\right)}\big)$. Por esto,

$$U_Y(0,\rho) \subseteq \overline{T\left(U_X(0,r)\right)}, \quad \text{para algún } \rho > 0.$$

Un llamado al Lema ($\checkmark\checkmark$) nos dice

$$U_Y(0,\rho) \subseteq T\big(U_X(0,r)\big),$$

terminado así la prueba de $(*)^2$.

Con estos ingredientes a la mano es fácil ver que T es una aplicación abierta. En efecto, sea entonces G un conjunto abierto no vacío en X y suponga que $y \in T(G)$. Veamos que $T(G)$ contiene una bola abierta con centro en y. Sea $x \in G$ tal que $y = Tx$. Puesto que G es abierto, existe un $r > 0$ tal que $U(x,r) \subseteq G$ y, por consiguiente, $T(U_X(x,r)) \subseteq T(G)$. Usemos ahora $(*)^2$ para obtener un $\rho > 0$ tal que $U_Y(0,\rho) \subseteq T(U_X(0,r))$ y finalmente observe que

$$U_Y(y,\rho) = y + U_Y(0,\rho) \subseteq Tx + T\big(U_X(0,r)\big) = T\big(U_X(x,r)\big) \subseteq T(G)$$

lo que demuestra que $T(G)$ es abierto y termina la prueba. ■

Los siguientes resultados son consecuencias inmediata del Teorema de la Aplicación Abierta:

Corolario 2.2.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces cualquier funcional lineal no nulo $x^* \in X^*$, es una aplicación abierta.*

Prueba. Sea $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $x^* \neq 0$, podemos elegir un $x_0 \in X$ de modo tal que $x^*(x_0) = 1$. Entonces $x^*(\lambda x_0) = \lambda$ lo cual prueba que x^* es sobreyectivo y el Teorema de la Aplicación Abierta termina la prueba. ■

Corolario 2.2.5. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado tal que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. Entonces $T(X) = Y$.*

Prueba. Puesto que

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T\big(U_X(0,n)\big)$$

y ya que $T(X)$ es de segunda categoría en Y, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T\left(U_X(0,n_0)\right)}$ tiene interior no vacío. Esto quiere decir que existe un $y_0 \in Y$ y así como un $r_0 > 0$ tal que

$$U_Y(y_0,r_0) \subseteq \overline{T\big(U_X(0,n_0)\big)}.$$

Se sigue de la simetría de $U_Y(y_0,r_0)$ y la convexidad de $\overline{T\left(U_X(0,n_0)\right)}$ que

$$U_Y(0,r_0) = \frac{1}{2}U_Y(y_0,r_0) + \frac{1}{2}U_Y(-y_0,r_0) \subseteq \frac{1}{2}\overline{T\big(U_X(0,n_0)\big)} + \frac{1}{2}\overline{T\big(U_X(0,n_0)\big)} = \overline{T\big(U_X(0,n_0)\big)}.$$

Un llamado al Lema ($\checkmark\checkmark$) nos revela que

$$U_Y(0,r_0) \subseteq T\big(U_X(0,n_0)\big),$$

de donde se deduce que $T(X) = Y$. ■

Corolario 2.2.6. $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ *es de primera categoría en* $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$. *En particular,*

$$G = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty \right\}$$

es un G_δ*-denso en* $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$.

Prueba. Puesto que, como conjuntos, $\ell_1 \subseteq \ell_2$, entonces la aplicación inclusión $j : \ell_1 \to \ell_2$ definida por $j(x) = x$ para todo $x \in \ell_1$ es un operador lineal continuo ya que

$$\|j\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|x\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|x\|_1 \leq 1.$$

Si ℓ_1 fuese de segunda categoría en ℓ_2, entonces el corolario anterior nos diría que $j(\ell_1) = \ell_2$, lo cual es imposible ya que, por ejemplo, la sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \setminus \ell_1$. Esto prueba que $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es de primera categoría en $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ y se sigue del Teorema de Categoría de Baire que $\ell_2 \setminus \ell_1 = G$ es un G_δ-denso en $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$. ■

Un argumento enteramente similar puede ser llevado a cabo para demostrar que ℓ_p es de primera categoría en ℓ_q para cualesquiera $1 \leq p < q < \infty$.

Muchas funciones continuas, como sabemos, se pueden representar por medio de una serie de potencia. Por ejemplo, si $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$, entonces la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[0,1].$$

es, por el M-test de Weierstrass, una función continua. Surge, como natural, preguntarse: ¿qué tan grande, en el sentido de la categoría de Baire, es el conjunto

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[0,1] : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}?$$

Como otra aplicación del Corolario 2.2.5, tenemos lo siguiente.

Corolario 2.2.7. *El conjunto*

$$G \;=\; \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[0,1] : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty \right\}$$

es un G_δ*-denso en* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Es suficiente demostrar que el conjunto

$$F \;=\; C[0,1] \setminus G \;=\; \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[0,1] : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

es de primera categoría en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Para ver esto último, considere el operador lineal $T : \big(\ell_1, \|\cdot\|_1\big) \to \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ dado por

$$T(a)(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{para todo } x \in [0,1],$$

donde $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$. T está bien definido y es fácil ver que él es lineal y continuo. Observe que $T(\ell_1) = F$. Vamos a demostrar de inmediato que T no puede ser sobreyectivo. Suponga, por el contrario, que $T(\ell_1) = C[0,1]$. Entonces, para la función $f \in C[0,1]$ dada por $f(x) = 1/1+x$, podemos encontrar un $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $T(a) = f$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;=\; \frac{1}{1+x},$$

la que también se puede escribir en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \;=\; a_0 \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + a_{n+1}\big) x^{n+1} \;=\; 1.$$

De esto se sigue que $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, \ldots$, de donde resulta que $a = (1,-1,1,-1,\ldots) \notin \ell_1$. Esta contradicción establece que T no puede ser sobreyectiva y, entonces, por el Corolario 2.2.5, $F = T(\ell_1)$ es de primera categoría. ∎

Ya hemos visto que entre espacios topológicos una biyección continua no necesariamente es un homeomorfismo. Sin embargo, si nuestros espacios topológicos son espacios de Banach y las aplicaciones continuas son operadores lineales continuos, tenemos unos de los resultados más importantes en la Teoría de los Operadores Lineales Acotados que se obtiene como consecuencia del Teorema de la Aplicación Abierta.

Corolario 2.2.8 (Teorema de la Aplicación Inversa). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado biyectivo. Entonces T^{-1} es un operador lineal acotado.*

Prueba. Es claro que $T^{-1} : Y \to X$ existe y es lineal. Para probar que él es acotado, tomemos cualquier conjunto abierto G en X. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, $T(G)$ es abierto en Y y ya que $\big(T^{-1}\big)^{-1}(G) = T(G)$, resulta que T^{-1} es continua. ∎

Entre las aplicaciones inmediatas del Teorema de la Aplicación Inversa está el siguiente:

(**B**-10) **Teorema del Gráfico Cerrado.** *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ una transformación lineal con gráfico cerrado, esto es,*

$$\mathrm{Gra}(T) \;=\; \big\{(x, Tx) \,:\, x \in X\big\}$$

es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Entonces T es continua.

Observe que $\mathrm{Gra}(T)$ es un subespacio lineal del espacio normado $(X \times Y, \|\cdot\|)$, donde $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ para todo $(x,y) \in X \times Y$. La parte crucial en la demostración del Teorema del Gráfico Cerrado consiste en usar el siguiente hecho:

Lema 2.2.2. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y sea $T : X \to Y$ una transformación lineal. Son equivalentes:*

(1) $\mathrm{Gra}(T)$ *es cerrado en $X \times Y$.*

(2) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que los límites*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \tag{a}$$

existen, entonces $y = Tx$.

Prueba. $(2) \Rightarrow (1)$. Suponga que $(x,y) \in \overline{\mathrm{Gra}(T)}$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n) = (x,y).$$

Se sigue de la definición de la topología producto que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Usando ahora (a) vemos que $y = Tx$ y, en consecuencia, $(x,y) \in \mathrm{Gra}(T)$. Hemos probado que $\mathrm{Gra}(T)$ es cerrado.

$(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que $\mathrm{Gra}(T)$ es cerrado en $X \times Y$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X satisfaciendo (a). Entonces

$$\|(x_n, Tx_n) - (x,y)\| = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0.$$

Como $\mathrm{Gra}(T)$ es cerrado en $X \times Y$, resulta que $(x,y) \in \mathrm{Gra}(T)$ y, por consiguiente, $y = Tx$. Esto termina la prueba. ■

Prueba del Teorema del Gráfico Cerrado. Observe que como $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios de Banach también lo es $(X \times Y, \|\cdot\|)$ y, en consecuencia, $(\mathrm{Gra}(T), \|\cdot\|)$ por ser cerrado en $X \times Y$ es igualmente de Banach. Consideremos la aplicación $P : \mathrm{Gra}(T) \to X$ definida por $P(x, Tx) = x$ para todo $(x, Tx) \in \mathrm{Gra}(T)$. Claramente P es una aplicación lineal biyectiva la cual es continua pues

$$\|P(x,Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x,Tx)\|, \quad \text{para todo } (x,Tx) \in \mathrm{Gra}(T).$$

Por el Teorema de la Aplicación Inversa, Corolario 2.2.8, P^{-1} es una aplicación continua, donde $P^{-1} : X \to \mathrm{Gra}(T)$ viene dada por $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ para todo $x \in X$. Esto significa que existe una constante $M > 0$ tal que $\left\|P^{-1}(x)\right\| \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$ y, por lo tanto,

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x,Tx)\| = \left\|P^{-1}(x)\right\| \leq M\|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Por esto, T es continua y finaliza la prueba. ■

Un resultado interesante producto de los Teoremas del Gráfico Cerrado, de Arzelá-Ascoli y del Lema de Riesz, debido originalmente a Fonf, V. Gurariy, y a V. Kadeč [161] establece lo siguiente:

Teorema 2.2.6 (Fonf-Gurariy-Kadeč). *En el espacio de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, si X es un subespacio norma-cerrado de $C[0,1]$ compuesto únicamente de funciones de clase C^1, entonces* $\dim(X) < \infty$.

Prueba. Defina el operador $D : X \to C[0,1]$ por $D(f) = f'$ para toda $f \in X$. Claramente D es lineal y se sigue del Teorema C^1, página 132, que D posee gráfico cerrado. Como $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, el Teorema del Gráfico Cerrado nos dice que T es continuo, por lo que existe una constante $M > 0$ tal que $\|D(f)\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ para toda $f \in X$, y por lo tanto,

$$\left\|f'\right\|_\infty \leq M$$

para toda $f \in B_X = \{g \in X : \|g\|_\infty \leq 1\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta \leq \varepsilon/(1+M)$. Si $x, y \in [0,1]$ satisfacen $0 < |x-y| < \delta$, entonces se sigue del Teorema del Valor Medio y la desigualdad anterior que para cada $f \in B_X$, existe un τ entre x y y tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\tau)||x-y| \leq \left\|f'\right\|_\infty \frac{\varepsilon}{1+M} < \varepsilon$$

Esto prueba que B_X es equicontinuo, y como B_X es norma-acotado, el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.4.15, página 26, nos garantiza que B_X es relativamente compacto en $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$. En particular, por ser B_X norma-cerrado, tenemos que B_X es norma-compacto. Un llamado al Teorema de Riesz, página 211, nos dice que $\dim(X) < \infty$ y finaliza la prueba. ■

Es importante destacar que si $[0,1]$ es reemplazado por $[0,1)$ en el Teorema de Fonf-Gurariy-Kadeč, entonces, como fue demostrado por Wojtaszczyk (véase, [442], Theorem 1), el espacio X es isomorfo a un subespacio normado cerrado de c_0.

Recordemos que un operador lineal acotado $T : X \to Y$, donde X y Y son espacios de normados, se llama **compacto** si $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Similarmente, diremos que T es un operador **débilmente compacto** si $\overline{T(B_X)}^{\omega}$ es compacto en la topología débil de Y. Observe que, por la continuidad de T, $T(B_X) = T(\overline{U}_X) \subseteq \overline{T(U_X)}$, de modo que: T es compacto si, y sólo si, $\overline{T(U_X)}$ es compacto. Lo mismo vale para operadores débilmente compactos. Otra consecuencia inmediata del Teorema de la Aplicación Abierta en combinación con el Teorema de Riesz es el siguiente:

Corolario 2.2.9. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ y $(Y,\|\cdot\|)$ son espacios de Banach, ambos de dimensión infinita, y suponga que $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado sobreyectivo. Entonces T nunca es compacto.*

Prueba. Suponga que T es compacto. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, $T(U_X)$ es un abierto incluido en $T(B_X)$ y, entonces, por la compacidad de $\overline{T(B_X)}$ resulta que $\overline{T(U_X)}$ también es norma compacto, un hecho que es imposible por el Teorema de Riesz. ■

Sin embargo, si se omite el requerimiento de completitud en el corolario anterior, la conclusión puede no ser verdadera: existen espacios normados no completos X y Y, ambos de dimensión infinita, y un operador lineal acotado $T : X \to Y$ que es compacto y sobreyectivo (véase, [409]). A pesar de ese ejemplo, si ocurre que $X = Y$, entonces ningún operador compacto $T : X \to X$ puede ser sobreyectivo. Para demostrar esto último debemos recordar que:

Hecho I ([299], Lemma 1.7.10, p. 54). *Si N es un subespacio lineal cerrado de un espacio normado $(X,\|\cdot\|)$, entonces la aplicación cociente $Q : X \to X/N$ definida por $Q(x) = x + N$ para todo $x \in X$, es lineal, continua, abierta y sobreyectiva. Más aun,*

$$Q(U_X) = U_{X/N}. \tag{1}$$

Recordemos que si $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo, entonces el kernel de T, definido por $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, es un subespacio lineal cerrado de X. Otro hecho importante de debemos destacar referente al cociente $X/\mathrm{Ker}(T)$ es el siguiente:

Hecho II ([299], Theorem 1.7.13, p. 55). *Si $T : X \to X$ es un operador lineal continuo, entonces la aplicación lineal asociada $\widehat{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to X$ definida por $\widehat{T}(x+\mathrm{Ker}(T)) = Tx$ para todo $x \in X$, es continua e inyectiva. Además, se cumple que $T(X/\mathrm{Ker}(T)) = T(X)$.*

En particular, si T es compacto, entonces $\widehat{T}$ también lo es. En efecto, usando (1) y tomando la norma-clausura del conjunto

$$\widehat{T}\big(U_{X/\mathrm{Ker}(T)}\big) \ = \ \widehat{T}\big(Q(U_X)\big) \ = \ T\big(U_X\big)$$

vemos que $\widehat{T}$ es compacto. Observe que si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $X/\mathrm{Ker}(T)$ también es de dimensión infinita (si $X/\mathrm{Ker}(T)$ fuese de dimensión finita, entonces $\mathrm{Ker}(T)$ sería de codimensión finita y, por consiguiente, la dimensión de X sería finita).

Teorema 2.2.7 (Spurný). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita y sea $T : X \to X$ un operador compacto. Entonces T no puede ser sobreyectivo.*

Prueba. Observe que, por el Corolario 2.2.9, la conclusión es inmediata si X es completo. Suponga entonces que X no es completo pero que existe un operador $T : X \to X$ que es compacto y sobreyectivo. Puesto que $\overline{T(B_X)} = \overline{T(U_X)}$, entonces $K = \overline{T(U_X)}$ es compacto y, además, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$. Gracias a la sobreyectividad de T, tenemos que

$$K \subseteq X = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nK) \qquad \text{y} \qquad K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K \cap T(nK).$$

Como K es compacto y los conjuntos $K \cap T(nK)$ son cerrados por ser compactos, el Teorema de Categoría de Baire para espacios compactos nos revela que al menos uno se esos conjuntos tiene interior no vacío, es decir, existe un $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ tal que

$$\varnothing \neq K \cap U \subseteq K \cap T(nK). \tag{2}$$

Puesto que K es la norma-clausura de $T(U_X)$, podemos encontrar un $y \in T(U_X)$ y un $r > 0$ tal que $y + rU_X \subseteq U$. Escojamos $x \in U_X$ con $y = Tx$ y usemos la continuidad de T para elegir un $s > 0$ de modo que

$$x + sU_X \subseteq U_X \qquad \text{y} \qquad T(sU_X) \subseteq rU_X. \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue que

$$T\big(x + sU_X\big) \subseteq T(U_X) \cap \big(y + rU_X\big) \subseteq T(nK). \tag{4}$$

Finalmente, la inclusión anterior implica que

$$\begin{aligned} \widehat{T}\big(Q(x) + sU_{X/\mathrm{Ker}(T)}\big) &= \widehat{T}\big(Q(x + sU_X)\big) \\ &= T\big(x + sU_X\big) \\ &\subseteq T(nK) = \widehat{T}\big(Q(nK)\big). \end{aligned}$$

Puesto que $\widehat{T}$ es inyectivo, esta última inclusión implica que

$$Q(x) + sU_{X/\mathrm{Ker}(T)} \subseteq Q(nK) \tag{5}$$

lo cual constituye, por el Teorema de Riesz, una contradicción, pues hemos encontrado una bola abierta incluida en el compacto $Q(nK)$. Por esto T no puede ser sobreyectivo. ■

El argumento de Spurný en la prueba del resultado anterior se puede llevar a cabo para el caso de operadores débilmente compactos sobreyectivos casi sin modificaciones.

Teorema 2.2.8 (Mena Rodríguez). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \to X$ un operador débilmente compacto sobreyectivo. Entonces $X/\mathrm{Ker}(T)$ es un espacio de Banach reflexivo.*

Prueba. La demostración es casi idéntica a la anterior, el único cambio es lo siguiente: el conjunto $K = \overline{T(U_X)}^{\,\omega}$ ahora es débilmente compacto y se repite el argumento anterior hasta llegar a (5), es decir, $Q(x) + sU_{X/\mathrm{Ker}(T)} \subseteq Q(nK)$. Teniendo en cuenta que $Q(nK)$ es débilmente compacto, entonces de la inclusión anterior se deduce que $B_{X/\mathrm{Ker}(T)}$ es débilmente compacto y por el Corolario 2.2.1, se concluye que $X/\mathrm{Ker}(T)$ es reflexivo. ■

Es un hecho ya establecido, conocido como el Lema de Riemann-Lebesgue, que:

Lema de Riemann-Lebesgue. *Si* $f \in L_1(\mathbb{T})$*, entonces* $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$*, donde* $(\widehat{f}(n))_{n=-\infty}^{\infty}$ *es la sucesión de los coeficientes de Fourier de* f*; es decir,*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Prueba. La demostración de este hecho resulta sencilla si se tiene en cuenta que:

(a) Los polinomios trigonométricos son norma-densos en $L_1(\mathbb{T})$, y

(b) si p es un polinomio trigonométrico y si N es el grado de p, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| > N$,

$$\widehat{p}(n) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = 0.$$

En efecto,sea $\varepsilon > 0$ y escojamos p un polinomio trigonométrico tal que $\|f-p\|_1 < \varepsilon$. Si N es el grado de p, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| > N$, se cumple que

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(n) - \widehat{p}(n)| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - p(t)\big)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt\right| \\ &\leq \|f-p\|_1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$. ■

El resultado de Riemann-Lebesgue nos dice que si $f \in L_1(\mathbb{T})$, entonces la sucesión de los coeficientes de Fourier de f, $(\widehat{f}(n))_{n=-\infty}^{\infty}$, es un elemento de $c_0(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \lim_{|n|\to\infty} c_n = 0\}$, y resulta entonces natural preguntarse por el recíproco, es decir, si cualquier sucesión $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ en $c_0(\mathbb{Z})$ son los coeficientes de Fourier de alguna función $f \in L_1(\mathbb{T})$, o dicho de otro modo, ¿dada la sucesión $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ en $c_0(\mathbb{Z})$, existe alguna función f en $L_1(\mathbb{T})$ tal que

$$c_n = \widehat{f}(n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}?$$

Como una aplicación del Teorema de la Aplicación Abierta vamos a demostrar que la respuesta es, en general, falsa.

Corolario 2.2.10. *Existe una sucesión* $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in c_0(\mathbb{Z})$ *que no son los coeficientes de Fourier de ninguna función* $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Prueba. Consideremos el operador lineal $T : L_1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ definido por

$$T(f) = \big(\widehat{f}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

El Lema de Riemann-Lebesgue garantiza que, efectivamente, $T(f) \in c_0(\mathbb{Z})$ por lo que T está bien definido. Por otro lado, puesto que

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,dx\right| \leq \|f\|_1,$$

entonces $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$, lo cual muestra que T es continuo.

Vamos a verificar que T es inyectivo. Supongamos que $T(f)=0$ para alguna $f\in L_1(\mathbb{T})$. Entonces $\widehat{f}(n)=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y, por consiguiente, $S_n(f,t)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{ikt}=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por un resultado bien conocido debido a Fejér (véase, por ejemplo, [145], Teorema 1.10) sabemos que

$$\sigma_n(f,t) \;=\; \frac{S_0(f,t)+\cdots+S_n(f,t)}{n+1}$$

converge a f en la norma de $L_1(\mathbb{T})$. Por esto, $f=0$ y, por lo tanto, T es inyectiva.

¿Qué ocurre si cada sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}\in c_0(\mathbb{Z})$ son los coeficientes de Fourier de alguna función f en $L_1(\mathbb{T})$?. En este caso estaríamos afirmando que la aplicación T es sobreyectiva y, en consecuencia, podemos invocar el Teorema de la Aplicación Inversa para garantizar que su inversa T^{-1} es continuo, lo cual es equivalente a la existencia de una constante positiva m tal que

$$m\,\|f\|_1\leq\|T(f)\|_\infty,\quad \text{para toda } f\in L_1(\mathbb{T}). \tag{$*$}$$

Sin embargo, como los núcleos de Dirichlet, D_n, $n\in\mathbb{N}$, pertenecen a $L_1(\mathbb{T})$ y $\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1=\infty$, entonces sustituyendo los D_n en $(*)$ y tomando límite obtendríamos que

$$\infty=m\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1\leq\lim_{n\to\infty}\|T(D_n)\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\big\|\widehat{D}_n\big\|_\infty=1.$$

Esta fatal incongruencia nos revela que T no puede ser sobreyectiva y termina la prueba. ■

(**B**-11) *Si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable de dimensión infinita, entonces:*

(a) *El conjunto* $\mathrm{PC}_{\omega^*}(\|\cdot\|_*,B_{X^*})$ *de todos los puntos de ω^*-continuidad de la restricción de $\|\cdot\|_*$ a B_{X^*} es un G_δ-denso en (B_{X^*},ω^*), y*

(b) $\mathrm{PC}_{\omega^*}(\|\cdot\|_*,B_{X^*})\subseteq S_{X^*}$*, y en consecuencia, S_{X^*} también es G_δ-denso en (B_{X^*},ω^*).*

Prueba. (a) Sabemos que si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado y si $\tau_{\|\cdot\|}$ es la topología generada por la métrica-norma, entonces $\|\cdot\|:(X,\tau_{\|\cdot\|})\to\mathbb{R}$, es una aplicación continua. Por otro lado, $\|\cdot\|_*$ es siempre ω^* - inferiormente semicontinua y si X es separable, entonces (B_{X^*},ω^*) es un espacio compacto metrizable y, en consecuencia, un espacio métrico completo. Por el Ejemplo 1, página 100, $\|\cdot\|_*$ es ω^* - continua sobre un subconjunto G_δ-denso de (B_{X^*},ω^*), pero no es ω^* - continua sobre (B_{X^*},ω^*) ya que $\omega^*-\mathrm{int}\big(B_{X^*}\big)$ es vacío.

(b) Sea $x_0^*\in B_{X^*}$ y suponga que $\|x_0^*\|<1$. Veamos que la bola ω^*-abierta $U(x_0^*,\varepsilon)$, donde $\varepsilon=1-\|x_0^*\|$, no contiene ningún ω^*-entorno de x_0^*. En efecto, en primer lugar observe que $U(x_o^*,\varepsilon)\cap S_{X^*}=\varnothing$ y ahora considere a $V:=V(x_o^*;x_1,\ldots,x_n;\delta)$, un ω^*-entorno arbitrario de x_0^*. Puesto que V contiene al subespacio x_0^*+H, donde $H=\{x^*\in X^*:x^*(x_k)=0,\,k=1,\ldots,n\}$ y como $(x_0^*+H)\cap S_{X^*}\neq\varnothing$, resulta que $V\nsubseteq U(x_0^*,\varepsilon)$. Esto prueba que $\mathrm{PC}_{\omega^*}(\|\cdot\|_*,B_{X^*})\subseteq S_{X^*}$, y en consecuencia, S_{X^*} es, por la parte (a), denso en (B_{X^*},ω_*). Que S_{X^*} es un G_δ en (B_{X^*},ω^*) sigue del hecho de que lo podemos escribir en la forma $S_{X^*}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\big\{x^*\in B_X:\|x^*\|>1-\frac{1}{n}\big\}$. ■

(**B**-12) *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach con dual separable y sea K un subconjunto ω^*-compacto de X^*. Entonces la aplicación identidad,* $\mathrm{Id}:(K,\omega^*)\to(K,\|\cdot\|_{X^*})$*, es continua en un subconjunto G_δ-denso de (K,ω^*).*

Prueba. Para cada $\varepsilon>0$, definamos el conjunto

$$G_\varepsilon \;=\; \bigcup\big\{W\cap K: W \textit{ es } \omega^* \textit{ abierto en } X^* \textit{ y } \|\cdot\|_*-\textit{diam}(W\cap K)<\varepsilon\big\}.$$

Claramente cada G_ε es ω^* abierto en K. Más aún, los puntos de $\omega^* - \|\cdot\|_*$ continuidad de Id son exactamente los que se encuentran en $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n}$. Si logramos probar que cada G_ε es ω^*-denso en K, entonces invocaremos el Teorema de Categoría de Baire para concluir que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n}$ es un ω^* G_δ-denso en K. Veamos entonces que cada G_ε es ω^*-denso en K. Como X^* es separable, existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(K \cap \left(x_n^* + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*} \right) \right).$$

Pero ya que cada uno de los conjuntos $K \cap (x_n^* + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*})$ es ω^*-cerrado, el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.8.6) nos asegura que el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ es ω^*-denso en K, donde W_n es el ω^*-interior relativo de $K \cap (x_n^* + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*})$. Puesto que ciertamente cada W_n tiene norma-diámetro $\leq \varepsilon$, resulta que su unión forma parte de G_ε. Por esto cada G_ε es ω^*-denso en K y termina la prueba. ■

Si no se exige que el espacio separable X tenga dual separable, podemos obtener la misma conclusión del resultado anterior si sólo pedimos que X^* satisfaga la propiedad de Kadec-Klee-ω^*.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Diremos que X^* tiene la **propiedad de Kadec-Klee-**ω^* si la topología de la norma y la topología ω^* coinciden sobre S_{X^*}, es decir, para cada red (x_α^*) en X^*, las condiciones

$$x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^* \qquad \text{y} \qquad \|x_\alpha^*\| = \|x^*\|, \ \forall\, \alpha$$

implican que $x_\alpha^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$.

Teorema. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable cuyo dual X^* satisface la propiedad de Kadec-Klee-ω^* y sea K un subconjunto ω^*-compacto de X^*. Entonces la aplicación identidad,* $\mathrm{Id} : (K, \omega^*) \to (K, \|\cdot\|_{X^*})$, *es continua en un subconjunto G_δ-denso de (K, ω^*).*

Prueba. Siendo X separable, el conjunto (K, ω^*) es un espacio compacto metrizable, en particular, un espacio métrico completo. Además, como la norma dual $\|\cdot\|_{X^*}$ de X^* es inferiormente semicontinua sobre (K, ω^*), entonces se sigue del Teorema Genérico de Baire-Kuratowski (véase, Ejemplo 1, página 100) que el conjunto de puntos de (K, ω^*) donde $\|\cdot\|_{X^*}$ es continua es un G_δ-denso. La propiedad de Kadec-Klee-ω^* nos garantiza que $\mathrm{Id} : (K, \omega^*) \to (K, \|\cdot\|_{X^*})$ es continua en un subconjunto G_δ-denso de (K, ω^*). ■

Sin referencia alguna a la separabilidad del espacio de Banach X, M. Talagrand en [420] obtiene la siguiente generalización de los dos resultados anteriores.

Teorema de Talagrand. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto de X^* que es ω^*-compacto y débilmente $\mathcal{K}$-analítico. Entonces existe un subconjunto G_δ ω^*-denso G de K tal que la aplicación identidad* $\mathrm{Id} : (K, \omega^*) \to (K, \|\cdot\|)$ *es continua en todo punto de G.*

Véase la página 257 para la definición de espacio débilmente $\mathcal{K}$-analítico .

(**B**-13) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces S_X es un subconjunto G_δ-denso de (B_X, ω).*

Prueba. Puesto que B_X es convexo y $S_X \subseteq B_X$, se sigue del Teorema de Mazur que $\overline{S}_X^{\omega} \subseteq B_X$. Sea $x_0 \in B_X \setminus S_X$. Para demostrar que $x_0 \in \overline{S}_X^{\omega}$, es suficiente considerar cualquier ω-entorno abierto básico V de x_0 y probar que $V \cap S_X \neq \varnothing$. Sea entonces V un ω-entorno básico de x_0, es decir,

$$V = \left\{ x \in X : |x_i^*(x - x_0)| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n \right\},$$

donde $\varepsilon > 0$ y $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$. Tomemos cualquier $0 \neq x \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(x_i^*)$ y observemos que la función $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $g(t) = \| x_0 + tx \|$ es continua y satisface las condiciones:

$$g(0) < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty.$$

La continuidad de g nos garantiza la existencia de algún $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 1$, es decir, $\| x_0 + t_0 x \| = 1$, lo cual significa que el punto $x_0 + t_0 x \in S_X$. Veamos ahora que $x_0 + t_0 x$ también pertenece a V. En efecto, para cualquier $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $|x_i^*(x_0 + t_0 x - x_0)| = t_0 |x_i^*(x)| = 0 < \varepsilon$. Por esto, $x_0 + t_0 x \in V \cap S_X$, lo cual prueba que $B_X \subseteq \overline{S}_X^{\omega}$ y, por lo tanto, $\overline{S}_X^{\omega} = B_X$. Para finalizar la prueba, notemos que si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$G_n = \left\{ x \in B_X : \| x \| > 1 - \frac{1}{n} \right\},$$

resulta que G_n es abierto en (B_X, ω) y $S_X = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. ■

(**B**-14) *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces (X, ω) no es un espacio de Baire.*

Prueba. En efecto, por el resultado anterior sabemos que toda bola norma-cerrada en X es nunca densa en la topología débil de X; es decir, no posee interior débil. Así,

$$\mathrm{int}_\omega B(x, r) = \varnothing,$$

donde $\mathrm{int}_\omega B(x, r)$ denota el interior de $B(x, r)$ en la topología débil de X. Si (X, ω) fuera un espacio de Baire, entonces como

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty B(0, n)$$

tendríamos, por el Teorema de Categoría de Baire, que alguna bola cerrada $B(0, n)$ debería tener interior débil no vacío, lo cual es imposible. ■

Si bien es cierto que (X, ω) no es un espacio de Baire cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, en algunos casos subconjuntos más pequeños pueden serlo, como por ejemplo (B_X, ω). Concretamente:

(**B**-15) *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces (B_X, ω) es un espacio de Baire.*

Prueba. Esto sigue del hecho de que en espacios reflexivos la bola unitaria cerrada es débilmente compacta (Corolario 2.2.1). ■

Existen otras condiciones bajo la cual (B_X, ω) es un espacio de Baire. Por ejemplo, cuando la norma del espacio tiene la propiedad de Kadec-Klee. La norma $\|\cdot\|$ del espacio de Banach X posee la **propiedad de Kadec-Klee** o es una **norma de Kadec-Klee** si la topología de la norma y la topología débil coinciden sobre S_X, es decir, si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en S_X y x_0 es un elemento de S_X tal que $x_n \to x_0$ débilmente, entonces $\| x_n - x_0 \| \to 0$.

(**B**-16) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si la norma $\|\cdot\|$ posee la propiedad de Kadec-Klee, entonces (B_X, ω) es un espacio de Baire.*

Prueba. La demostración se sustenta sobre los siguientes dos hechos conocidos:

(1) *S_X es un G_δ-denso en (B_X, ω).* (Ejemplo **B**-13).

(2) *Un espacio topológico de Hausdorff Y es de Baire si dicho espacio contiene un subespacio de Baire denso*. (Teorema 1.8.3, página 48).

Veamos ahora que (B_X, ω) es un espacio de Baire. En efecto, como $(S_X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Baire (= espacio métrico completo con la topología de la norma) y ya que nuestra norma satisface la propiedad de Kadec-Klee, resulta (S_X, ω) es un espacio de Baire. El resultado se deduce inmediatamente de (1) y (2). ■

Puesto que la norma canónica $\|\cdot\|_1$ de ℓ_1 tiene la propiedad de Kadec-Klee (véase el Ejemplo ($\mathbf{B}-22$) más abajo), entonces (B_{ℓ_1}, ω) es un espacio de Baire. La situación para la bola unitaria de c_0 es completamente diferente.

Teorema. (B_{c_0}, ω) *no es un espacio de Baire.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$B_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{c_0} : |x_j| \leq 1/2\}.$$

Es claro que cada conjunto B_n es cerrado en B_{c_0} en su topología débil, la cual coincide allí, en dicho conjunto, con la topología puntual. Veamos ahora que B_n también es nunca-denso en esta topología. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $x \in B_n$ y $m \in \mathbb{N}$, existe un $\tilde{x} \in B_{c_0}$ tal que $|\tilde{x}_j - x_j| < \varepsilon$ para todo $j \leq m$ y $|\tilde{x}_{\text{máx}\{m+1,n\}}| > 1/2$, de modo que $\tilde{x} \notin B_n$. Esto nos revela que B_n es nunca-denso-denso en topología débil y, por lo tanto, $B_{c_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es de primera categoría en sí mismo en su topología débil, es decir, (B_{c_0}, ω) no es un espacio de Baire. ■

(**B**-17) *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach tal que X^{**} es separable, entonces (B_X, ω) es un espacio de Baire.*

Prueba. Visto X como un subconjunto de X^{**}, tenemos que

$$X^{\perp} = \{x^{***} \in X^{***} : x^{***}(x) = 0, \ \textit{para todo } x \in X\}.$$

Dotemos ahora a $X^{\perp}$ de la ω^* topología de X^{***}. Puesto que $(B_{X^{***}}, \omega^*)$ es un compacto metrizable, él es separable y, por consiguiente, podemos hallar una sucesión densa $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(B_{X^{\perp}}, \omega^*)$. Por el Teorema de Goldstine, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(x_{n,k}^*)_{k=1}^{\infty}$ en B_{X^*} tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n,k}^* = y_n$ en la ω^* topología de X^{***}. Por el Teorema Bipolar sabemos que $X = (X^{\perp})_{\perp}$, donde $A_{\perp}$ denota el polar en X^{**} de un subconjunto A de X^{***}. Por esto,

$$\begin{aligned} B_X &= X \cap B_{X^{**}} \\ &= (X^{\perp})_{\perp} \cap B_{X^{**}} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{ x^{**} \in B_{X^{**}} : \left| x^{**}\left(x_{n,k_l}^*\right) \right| < \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Veamos esto último. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y observemos que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{ x^{**} \in B_{X^{**}} : \left| x^{**}\left(x_{n,k_l}^*\right) \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

consiste precisamente de los elementos de X^{**} para los cuales existe una subsucesión $(k_l)_{l=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{l\to\infty} \left| x^{**}\left(x_{n,k_l}^*\right) \right| = 0. \tag{1}$$

Pero $\omega^* - \text{lím}_{k\to\infty} x^*_{n,k} = y_n$, de modo que $\text{lím}_{k\to\infty} x^{**}\big(x^*_{n,k}\big)$ existe para cada $x^{**} \in X^{**}$ y es igual a $y_n(x^{**})$. Lo acabado de probar nos dice que (1) es equivalente a $y_n(x^{**}) = 0$, de donde se concluye que

$$x^{**} \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{x^{**} \in B_{X^{**}} : \left|x^{**}\big(x^*_{n,k_l}\big)\right| < \frac{1}{m}\right\} \iff y_n(x^{**}) = 0 \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$\iff x^{**} \in (X^{\perp})_{\perp}.$$

Lo anterior nos muestra que B_X es un G_δ en $(B_{X^{**}}, \omega^*)$ y como $(B_{X^{**}}, \omega^*)$ es un compacto metrizable, en particular, un espacio métrico completo, entonces el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, página 64, nos revela que (B_X, ω) es completamente metrizable, y por consiguiente, un espacio de Baire. ■

(**B**-18) *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces (X, ω) no es metrizable.*

Prueba. Supongamos que (X, ω) es metrizable. Sea d la métrica que genera la topología débil de X. Entonces (X, d) satisface el primer axioma de numerabilidad y, por consiguiente, cada punto de X posee una base de entornos a lo sumo numerable. Esto significa que los entornos básicos del cero generan todos lo demás entornos de X. De allí resulta que podemos elegir una sucesión $(x^*_n)_{n=1}^{\infty}$ en X^* tal que para cada entorno débil U de 0 se pueden encontrar un racional $r > 0$ y un entero positivo n_U de modo que

$$W(0; x^*_1, \ldots, x^*_{n_U}, r) = \big\{x \in X : |x^*_1(x)|, \ldots, |x^*_{n_U}(x)| < r\big\} \subseteq U.$$

Ahora bien, cada $x^* \in X^*$ genera el entorno débil $W = W(0; x^*, 1)$ de 0 y, en consecuencia,

$$W(0; x^*_1, \ldots, x^*_{n_W}, r) \subseteq W.$$

Esto nos dice que x^* es una combinación lineal de $x^*_1, \ldots, x^*_{n_W}$ ya que

$$\bigcap_{n=1}^{n_W} \text{Ker}(x^*_n) \subseteq \text{Ker}(x^*).$$

Sea F_m el subespacio lineal generado por $x^*_1, \ldots, x^*_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Puesto que cada F_m es un subespacio de dimensión finita y, por consiguiente, cerrado de X^* y ya que $X^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, el Teorema de Categoría de Baire nos revela que algún F_m tiene norma-interior no vacío. Esto, como sabemos, es imposible por $(\mathbf{B}-2)$ de esta sección. Esta contradicción establece que (X, ω) no es metrizable.

(**B**-19) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable y K un subconjunto ω^* compacto de X^* tal que, para cada $x \in X$, existe un $x^* \in K$ verificando la igualdad*

$$x^*(x) = \sup_{y^* \in K} |y^*(x)| = \|x\|. \tag{$**$}$$

Entonces el conjunto

$$F = \big\{x \in B_X : \ \textit{existe un único } x^* \textit{ verificando } (**)\big\}$$

es un G_δ-denso en B_X.

Prueba. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en B_X y, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, definamos

$$E_{m,n} = \left\{x \in B_X : \ \textit{existen } x^*, y^* \in K \textit{ tales que } x^*(x) = y^*(x) = \|x\| \quad \text{y} \quad |x^*(x_n) - y^*(x_n)| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Para demostrar que F es denso en B_X, vamos a probar primero que

$$F = \bigcap_{m,n=1}^{\infty} \big(B_X \setminus E_{m,n}\big).$$

y después que cada $E_{m,n}$ es cerrado y nunca-denso en B_X, para luego invocar el Teorema de Categoría de Baire. Es claro que $F \subseteq \bigcap_{m,n=1}^{\infty} \big(B_X \setminus E_{m,n}\big)$. Para demostrar la otra inclusión, sea $x \in B_X$ tal que

$$x \in \bigcap_{m,n=1}^{\infty} \big(B_X \setminus E_{m,n}\big).$$

Como $x \notin E_{m,n}$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$, resulta que si $x^*, y^* \in K$ satisfacen la igualdad $x^*(x) = y^*(x) = \|x\|$, entonces

$$|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \frac{1}{m} \qquad \text{para todo } m,n \in \mathbb{N}$$

lo cual significa, gracias a la continuidad de los funcionales x^* y y^* y la densidad de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que $x^* = y^*$; es decir, $x \in F$.

Probemos ahora que cada $E_{m,n}$ es cerrado y nunca-denso en B_X.

• $E_{m,n}$ es cerrado: Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $E_{m,n}$ tal que $z_k \to z$. Puesto que $z_k \in E_{m,n}$, existen $x_k^*, y_k^* \in K$ tales que

$$x_k^*(z_k) = y_k^*(z_k) = \|z_k\| \qquad \text{y} \qquad |x_k^*(x_n) - y_k^*(x_n)| \geq \frac{1}{m}.$$

Ahora bien, como K es un ω^*-compacto metrizable, existen subsucesiones de $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ y $(y_k^*)_{k=1}^{\infty}$, que seguiremos denotando del mismo modo, tales que

$$x_k^* \xrightarrow{\omega^*} x^* \in K \qquad \text{y} \qquad y_k^* \xrightarrow{\omega^*} y^* \in K.$$

De aquí se sigue que

$$x^*(z) = y^*(z) = \|z\| \qquad \text{y} \qquad |x^*(x_n) - y^*(x_n)| \geq \frac{1}{m},$$

es decir, $z \in E_{m,n}$.

• $E_{m,n}$ es nunca-denso: Supongamos que para algún $m,n \in \mathbb{N}$, el interior de $E_{m,n}$ es no vacío. Entonces existen un $x \in B_X$ y un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $U(x,\delta) \subseteq E_{m,n}$; esto es,

$$\|x - y\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad y \in E_{m,n}.$$

Obtendremos una contradicción si logramos construir, por inducción, una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en B_X y dos sucesiones $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ y $(y_k^*)_{k=1}^{\infty}$ en K tales que:

(a) $\|x - z_k\| \leq (1 - 1/2^k)\delta$,

(b) $x_k^*(z_k) = y_k^*(z_k) = \|z_k\|$ y $x_k^*(x_n) \geq \frac{k}{m} + y_1^*(x_n)$

En efecto, de ser cierto lo anterior tendríamos, por la última desigualdad, que el lado izquierdo permanece acotado mientras que el lado derecho tiende a ∞ cuando $k \to \infty$, lo cual es imposible.

Para comenzar la inducción, sea $z_1 = x$. Como $z_1 \in E_{m,n}$, existen $x_1^*, y_1^* \in K$ tales que

$$x_1^*(z_1) = y_1^*(z_1) = \| z_1 \| \quad \text{y} \quad x_1^*(x_1) \geq \frac{1}{m} + y_1^*(x_1).$$

Supongamos que $z_1, \ldots, z_k$, y $x_1^*, \ldots, x_k^*, y_1^*, \ldots, y_k^*$ han sido escogidos tales que

$$\left\| x - z_j \right\| < \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)\delta, \qquad x_j^*(z_j) = y_j^*(z_j) = \left\| z_j \right\| \quad \text{y} \quad x_j^*(x_n) \geq \frac{j}{m} + y_1^*(x_n) \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Definamos ahora

$$z_{k+1} = \frac{\| x \|}{\| z_k + a x_n \|}(z_k + a x_n),$$

donde a se ha elegido de modo que sea positivo y tal que $\| z_k - z_{k+1} \| < \frac{\delta}{2^{k+1}}$. Puesto que $z_{k+1} \in E_{m,n}$, existen $x_{k+1}^*, y_{k+1}^* \in K$ tales que

$$x_{k+1}^*(z_{k+1}) = y_{k+1}^*(z_{k+1}) = \| z_{k+1} \| \qquad \text{y} \qquad x_{k+1}^*(x_n) - y_{k+1}^*(x_n) \geq \frac{1}{m}.$$

Si pudiéramos mostrar que

$$y_{k+1}^*(x_n) \geq x_k^*(x_n),$$

tendríamos entonces que

$$x_{k+1}^*(x_n) \geq \frac{1}{m} + y_{k+1}^*(x_n) \geq \frac{k+1}{m} + y_1^*(x_n)$$

y concluiríamos la prueba de la no densidad de $E_{m,n}$. Veamos que ello es así. Notemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} \| z_{k+1} \| &= y_{k+1}^*(z_{k+1}) \\ &= \| x \| \frac{y_{k+1}^*(z_k) + a y_{k+1}^*(x_n)}{\| z_k + a x_n \|} \\ &\leq \| x \| \frac{\| z_k \| + a y_{k+1}^*(x_n)}{\| z_k + a x_n \|}, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado,

$$\begin{aligned} \| z_{k+1} \| &\geq x_k^*(z_{k+1}) \\ &= \| x \| \frac{x_k^*(z_k) + a x_k^*(x_n)}{\| z_k + a x_n \|} \\ &= \| x \| \frac{\| z_k \| + a x_k^*(x_n)}{\| z_k + a x_n \|}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$y_{k+1}^*(x_n) \geq x_k^*(x_n).$$

Hemos demostrado que $E_{m,n}$ es cerrado y nunca-denso en B_X. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire conduce a que F es un G_δ-denso en B_X. ■

(**B**-20) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La dimensión de X es infinita si, y sólo si, todo subconjunto totalmente acotado de X es nunca-denso.*

Prueba. Supongamos que $\dim(X) = \infty$ y sea F un subconjunto totalmente acotado de X. Suponga, para generar una contradicción, que F no es nunca-denso. Por Teorema 1.4.9 resulta que $K := \overline{F}$ es un conjunto compacto y como F no es nunca-denso, entonces $\mathrm{int}(K) = \mathrm{int}(\overline{F}) \neq \varnothing$. Escojamos $x \in X$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{U(x,\varepsilon)} \subseteq K$. Observe que como K es compacto, también lo es $\overline{U(x,\varepsilon)}$ y entonces el Teorema de Riesz nos revela que la dimensión de X es finita. Esta contradicción establece que F es nunca-denso.

Recíprocamente, supongamos que todo subconjunto totalmente acotado de X es nunca-denso pero que la dimensión de X es finita. De nuevo, por el Teorema de Riesz, B_X es compacto y, en consecuencia, totalmente acotado. Por hipótesis, B_X es nunca-denso; es decir, $\mathrm{int}(B_X) = \varnothing$. Esto, por supuesto, es imposible pues $\mathrm{int}(B_X) = U_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ es un abierto no vacío. Fin de la prueba. ■

(**B**-21) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita. Entonces $\mathrm{ext}(B_X)$ es no numerable.*

Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Recordemos que un punto $x \in C$ se llama un **punto extremal** de C si x no es el centro de ningún segmento (no degenerado) de línea contenido en C. El conjunto de todos los puntos extremales de C será denotado por $\mathrm{ext}(C)$.

Un subconjunto H de X es un **subespacio afín** si $H = x + Y$, donde Y es un cierto subespacio lineal cerrado de X y $x \in X$. Si C es un subconjunto convexo de X, un subespacio afín H de X se llama una **variedad soporte** para C si $H \cap C \neq \varnothing$, y siempre que $[x,y] := \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$ es cualquier segmento de línea contenido en C con un punto interior en H, entonces $[x,y] \subseteq H$.

Hecho 1. *Si $f \in X^*$ y si existe $x_0 \in C$ tal que $\alpha := f(x_0) = \sup\{f(z) : z \in C\}$, entonces $H = f^{-1}(\alpha)$ es una variedad soporte para C.*

Prueba. Suponga que $[x,y] \subset C$ y que para algún $t \in (0,1)$ el punto interior $tx + (1-t)y \in H$. Entonces $f(tx + (1-t)y) = \alpha$. Afirmamos que $f(x) = f(y) = \alpha$. En efecto, si $f(x) < \alpha$ o $f(y) < \alpha$ entonces tendremos que

$$f(tx + (1-t)y) \;=\; t f(x) \;+\; (1-t) f(y) \;<\; t\alpha \;+\; (1-t)\alpha \;=\; \alpha,$$

lo cual es imposible. Similarmente, $f(y) = \alpha$, de donde se sigue que $f(tx + (1-t)y) = \alpha$ para todo $t \in [0,1]$ y así, $[x,y] \subseteq H$. ■

Varios resultados son necesarios para demostrar la no numerabilidad de $\mathrm{ext}(B_X)$. Comencemos con el primero.

Lema D. *Sea K un subconjunto convexo de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Si H es una variedad soporte para K tal que $H \cap K = \{x\}$ para algún $x \in X$, entonces $x \in \mathrm{ext}(K)$.*

Prueba. Es claro que $x \in K$. Si $x \notin \mathrm{ext}(K)$, entonces $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ donde $x_1 \neq x_2$ son elementos de K. Como K es convexo, el segmento $[x_1, x_2] \subseteq K$ y ya que x, que es un punto interior de $[x_1, x_2]$, pertenece a H, entonces $[x_1, x_2] \subseteq H$ pues H es una variedad soporte para K. Esto prueba, en particular, que $\{x_1, x_2\} \subseteq H \cap K$. Esta contradicción establece que $x \in \mathrm{ext}(K)$. ■

Lema E. *Sea K un subconjunto convexo y ω-compacto de un espacio de Banach real $(X, \|\cdot\|)$. Si H es una variedad soporte para K, entonces H contiene un punto extremal de K.*

Prueba. Sea $\mathcal{M}$ la familia de todas las variedades soporte para K contenidas en H. Nótese que $\mathcal{M} \neq \varnothing$ pues $H \in \mathcal{M}$. Ordenemos parcialmente a $\mathcal{M}$ por la relación $\preceq$ declarando que

$$M_{\alpha_1} \preceq M_{\alpha_2} \qquad \text{si} \qquad M_{\alpha_1} \supseteq M_{\alpha_2}.$$

Si $\big(M_\alpha\big)_{\alpha \in D}$ es una cadena en $\mathcal{M}$, entonces $\bigcap_{\alpha\in D} M_\alpha$ es un subespacio afín de X y

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in D} M_\alpha\Big) \cap K = \bigcap_{\alpha\in D} (M_\alpha \cap K) \neq \varnothing,$$

ya que $M_\alpha \cap K$ es ω-compacto para todo $\alpha \in D$. Si un segmento $[x,y] \subseteq K$ tiene un punto interior en $\bigcap_{\alpha\in D} M_\alpha$, entonces $[x,y] \subset M_\alpha$ para cualquier $\alpha \in D$ por el hecho de que M_α es una variedad soporte para K. De esto se sigue que $[x,y] \subseteq \bigcap_{\alpha\in D} M_\alpha$ y, en consecuencia, $\bigcap_{\alpha\in D} M_\alpha$ es una variedad soporte para K. Por el Lema de Zorn, existe un elemento minimal M_0 en $\mathcal{M}$. Vamos a demostrar que $M_0 \cap K = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Supongamos que existen x,y en $M_0 \cap K$ con $x \neq y$. Como X^* se para los puntos de X, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Puesto que $M_0 \cap K$ es ω-compacto, el funcional lineal f alcanza su supremo sobre dicho conjunto; es decir, existe un $w \in M_0 \cap K$ tal que $\beta := f(w) = \sup\{f(z) : z \in M_0 \cap K\}$. Se sigue del Hecho 1 que $f^{-1}(\beta)$ es una variedad soporte para $M_0 \cap K$. Pongamos $M_* = M_0 \cap f^{-1}(\beta)$. Resulta que M_* es un subespacio afín (observe que $w \in M_*$) y, más aun, es una variedad soporte para K. Puesto que $f(x) \neq f(y)$, entonces al menos uno de los elementos en $\{x,y\}$ no está en M_*, es decir, M_* es un subconjunto estricto de M_0 contradiciendo de este modo la minimalidad de M_0. Por esto, $M_0 \cap K = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Un llamado al Lema D nos revela que $x_0 \in \operatorname{ext}(K)$. ■

Teorema de Krein-Milman. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto convexo y ω-compacto de X. Entonces $K = \overline{\mathrm{co}}\big(\operatorname{ext}(K)\big)$.*

Prueba. Sea $B = \overline{\mathrm{co}}\big(\operatorname{ext}(K)\big)$ y suponga que $B \neq K$. Sea $c \in K \setminus B$. Por el Teorema de Separación de Hahn-Banach, podemos seleccionar un funcional $f \in X^*$ tal que $f(c) > \sup\{f(x) : x \in B\}$. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x \in K\}$. Por el Hecho 1, el conjunto $H = f^{-1}(\alpha)$ es una variedad soporte para K y por el Lema E, H contiene un punto extremal x de K. Pero como $f(x) = \alpha \geq f(c) > \sup\{f(x) : x \in B\}$, resulta que $x \notin B$. Esta contradicción nos dice que $K = \overline{\mathrm{co}}\big(\operatorname{ext}(K)\big)$ y termina la prueba. ■

Recordemos que el *kernel* o *núcleo* de una aplicación lineal $T : X \to Y$ se define como el conjunto $\operatorname{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$. Otro hecho que debemos recordar es el siguiente:

Hecho 2. *Si X es un espacio vectorial de dimensión infinita y $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ son funcionales lineales, entonces $N = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}(f_i)$ es un subespacio de dimensión infinita.*
.

Prueba. Definamos $T : X \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: para cada $x \in X$ sea $Tx = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Claramente T es un operador lineal y $\operatorname{Ker}(T) = N$. Por un resultado del álgebra lineal tenemos que $\dim(TX) + \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim(X)$. Dado que $\dim(X) = \infty$ y $\dim(TX) < \infty$, se concluye que $\dim(N) = \infty$. ■

De lo anterior se sigue que si X es un espacio vectorial de dimensión infinita y $f_1, \ldots, f_n$ son funcionales lineales, entonces $N = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}(f_i) \neq \{0\}$, en particular, cualquier traslación de N contiene una recta.

Prueba de B-20). Por el Teorema de Krein-Milman, $\operatorname{ext}(B_X) \neq \varnothing$. Supongamos que $\operatorname{ext}(B_X)$ es numerable y escribamos $\operatorname{ext}(B_X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_n = \big\{ f \in B_{X^*} : f(x_n) = \|f\| \big\}.$$

Afirmamos que estos conjuntos son ω^*-cerrados. En efecto, sea (f_α) una red en F_n tal que $f_\alpha \to f$ en la ω^*-topología. Entonces,

$$\lim_\alpha \| f_\alpha \| = \lim_\alpha f_\alpha(x_n) = f(x_n),$$

de donde se sigue que $\| f \| \geq f(x_n) = \lim_\alpha \| f_\alpha \|$. Por otro lado, como la norma sobre X^* es ω^*-inferiormente semicontinua , resulta que $\| f \| \leq \liminf_\alpha \| f_\alpha \|$. Por esto, $\| f \| = \lim_\alpha \| f_\alpha \|$ y, por consiguiente, $f \in F_n$.

Veamos ahora que $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = B_{X^*}$. Es claro que $\bigcup_{n=1}^\infty F_n \subseteq B_{X^*}$. Para demostrar la otra inclusión, sea $f \in B_{X^*}$. Puesto que X es reflexivo, el Corolario 2.2.1, página 209, nos revela que B_X es ω-compacto, y por lo tanto, el funcional f alcanza su supremo sobre tal conjunto, esto es, existe un $x_0 \in B_X$ tal que $\alpha := f(x_0) = \sup\{ f(x) : x \in B_X \} = \| f \|$. Resulta, por el Hecho 1, que $H = f^{-1}(\alpha)$ es una variedad soporte para B_X y se sigue del Lema E que H contiene un punto $x_n \in \operatorname{ext}(B_X)$, lo cual quiere decir decir que $f \in F_n$. Esto nos demuestra que $B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Puesto que X^* es un espacio reflexivo, de nuevo el Corolario 2.2.1 nos dice que la bola unitaria (B_{X^*}, ω) es compacta, en particular, un espacio de Baire. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que algún F_n, digamos F_1, posee ω-interior no vacío. Sea $f_0 \in G := \omega - \operatorname{int}(F_1)$. Puesto que la multiplicación por escalares positivos menores que 1 son homeomorfismos de (X^*, ω) bajo los cuales F_1 es invariante, podemos suponer que $\| f_0 \| < 1$. Escojamos ahora un ω-entorno básico V de f_0 contenido en G. Es decir, el conjunto V tiene la forma

$$V := \bigcap_{i=1}^n \left\{ f \in B_{X^*} : |(f - f_0)(y_i)| < \varepsilon \right\} \subseteq G.$$

para ciertos $y_1, \ldots, y_n$ en X y algún $\varepsilon > 0$. Sea

$$N = \left\{ f \in X^* : f(y_i) = f_0(y_i) \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ y } f(x_1) = f_0(x_1) \right\}.$$

Puesto el espacio X^* es de dimensión infinita, el Hecho 2 nos garantiza que el conjunto N contiene una línea recta, es decir, existe $f_1 \in N$ con $f_1 \neq f_0$ tal que $f_\tau := f_0 + \tau(f_1 - f_0) \in N$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Como $\| f_0 \| < 1$, la recta anterior debe cortar a la esfera unitaria de X^*, esto es, existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\| f_\tau \| = 1$. Esto prueba que $f_\tau \in F_1$ y, por lo tanto,

$$1 = \| f_\tau \| = f_\tau(x_1) = f_0(x_1) \leq \| f_0 \| \| x_1 \| = \| f_0 \|.$$

Esto contradice el hecho de que $\| f_0 \| < 1$ y, en consecuencia, $\operatorname{ext}(B_X)$ es no numerable. ■

(**B**-22) *En* $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, *toda sucesión débilmente convergente es norma convergente*.

Recordemos que

$$\ell_1 = \left\{ (\xi_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach cuando se le dota de la norma $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|$, donde $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Sabemos que el dual de ℓ_1, ℓ_1^*, es ℓ_∞ en el sentido de que cada $f \in \ell_1^*$ se identifica con un único elemento $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ de modo que $f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \xi_k$ para todo $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, y que, además, la aplicación $f \to (a_k)_{k=1}^\infty$ es una isometría de ℓ_1^* sobre ℓ_∞.

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en ℓ_1, donde $x_n = (\xi_{nk})_{k=1}^\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se dice que *converge débilmente* a 0 si para cualquier $f \in \ell_1^*$ ocurre que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, esto es equivalente a afirmar que, para cualquier sucesión acotada $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty a_k \xi_{nk} = 0$.

Observe que como ℓ_1 es separable, entonces $(B_{\ell_\infty}, \omega^*)$ es un compacto metrizable y que una métrica compatible con la topología viene dada por

$$d(f,g) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k - g_k|}{2^k}.$$

Un hecho importante que debemos recordar es que una base local de ω^*-entornos alrededor de cualquier $f \in B_{\ell_\infty}$ es dada por $\mathcal{B}_f = \big\{V(f,\delta,N) : \delta > 0, N \in \mathbb{N}\big\}$, donde

$$V(f,\delta,N) \;:=\; \bigcap_{i=1}^{N} \big\{g \in B_{\ell_\infty} \,:\, |f_i - g_i| < \delta\big\},$$

con $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ arbitrarios.

Prueba de B-21). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en ℓ_1 convergiendo débilmente a 0, donde $x_n = (\xi_{nk})_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nos proponemos demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = 0$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| = 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y para cada $\varepsilon > 0$, definamos

$$F_k \;=\; \bigcap_{n=k}^{\infty} \Big\{ f \in B_{\ell_\infty} \,:\, |f(x_n)| \le \frac{\varepsilon}{3} \Big\}.$$

Estos conjuntos son ω^*-cerrados en B_{ℓ_∞}, crecen con k y gracias a la convergencia débil de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hacia cero, es fácil ver que $B_{\ell_\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Como $\big(B_{\ell_\infty}, \omega^*\big)$ es un espacio métrico compacto, el Teorema de Categoría de Baire nos revela la existencia de algún F_{k_0} con ω^*-interior no vacío. Para éste k_0, existen una $f = (f_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}$, un entero $N \ge 1$ y un $\delta > 0$ tal que

$$V(f,\delta,N) \;\subseteq\; F_{k_0} \subseteq\; F_k \qquad \text{para todo } k \ge k_0.$$

Puesto que $\omega - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$, podemos elegir un $p \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{i=1}^{N} |\xi_{ni}| < \varepsilon/3$ para todo $n \ge p$. Fijemos ahora cualquier $n \ge \max\{k_0, p\}$ y defina $g = (g_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}$ del modo siguiente:

$$g_i \;=\; \begin{cases} f_i, & \text{si } 1 \le i \le N \\ \operatorname{sign}(\xi_{ni}), & \text{si } i > N. \end{cases}$$

Entonces $g \in V(f,\delta,N)$ y, por consiguiente, $g \in F_{k_0}$. De allí que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f_i \xi_{ni} \;+\; \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_{ni}| \right| \;\le\; \frac{\varepsilon}{3},$$

de donde se deduce que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_{ni}| \;\le\; \frac{\varepsilon}{3} \;+\; \sum_{i=1}^{N} |\xi_{ni}| \;<\; \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Se sigue de esto que

$$\|x_n\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_{ni}| \;<\; \varepsilon \qquad \text{siempre que } n \ge \max\{k_0, p\}.$$

La prueba es completa. ■

(**B**-23) *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *y* $(Y,\|\cdot\|)$ *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal acotado. Entonces,* T *es compacto si, y sólo si,* $T(X)$ *está contenido en algún subconjunto* σ*-compacto de* Y.

Prueba. Suponga que T es compacto. Entonces $\overline{T(B_X)}$ es compacto en la norma-topología de Y y, por consiguiente, $n\cdot\overline{T(B_X)}$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que

$$T(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\cdot\overline{T(B_X)},$$

entonces $T(X)$ está contenido en un subconjunto σ-compacto de Y.

Para demostrar la otra implicación, suponga que $T(X)$ está contenido en un subconjunto σ-compacto de Y, es decir,

$$T(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

donde cada K_n es un subconjunto norma-compacto de Y. Pongamos $F_n = T^{-1}(K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por continuidad, cada F_n es cerrado en X y como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que algún F_{n_0} posee interior no vacío. Esto significa que existe un $x \in F_{n_0}$ y algún $\varepsilon > 0$ tal que $x+\varepsilon B_X \subseteq F_{n_0}$. Ahora

$$Tx + \varepsilon T(B_X) = T(x+\varepsilon B_X) \subseteq T(F_{n_0}) \subseteq K_{n_0},$$

de modo que $T(B_X) \subseteq \frac{1}{\varepsilon}\big(-Tx+K_{n_0}\big)$. Como $\frac{1}{\varepsilon}\big(-Tx+K_{n_0}\big)$ es compacto, la prueba termina. ∎

(**B**-24) *Sea* X *un espacio de Banach y suponga que* $T : X \to X$ *es un operador lineal acotado con rango denso, es decir, tal que* $\overline{\mathrm{Rang}(T)} = \overline{TX} = X$. *Si* $\big(G_n\big)_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en* X*, entonces*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\big(G_n\big)$$

es denso en X.

Prueba. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Observe que por la continuidad de T, y el hecho de que G_n es denso en X, tenemos que $T(X) = T\big(\overline{G_n}\big) \subseteq \overline{T(G_n)}$, de donde se sigue que $X = \overline{TX} = \overline{T(G_n)}$, es decir, $T(G_n)$ es denso en X. El mismo argumento sirve para deducir que los conjuntos $T^2(G_n), T^3(G_n), \ldots, T^n(G_n)$ son densos en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Si tuviéramos la certeza de que $T^n(G_n)$ también es abierto en X, entonces invocaríamos el Teorema de Categoría de Baire para finalizar la prueba, pero como no lo sabemos, debemos tomar otro camino. Pues bien, para demostrar que $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\big(G_n\big)$ es denso en X, procederemos del modo siguiente. Sea $y \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Siendo G_0 denso en X, existe $x_0 \in G_0$ tal que

$$\|y - x_0\| < \varepsilon/2.$$

Como G_0 es un abierto conteniendo a x_0, podemos hallar una bola abierta U_0 con centro en x_0 y radio $r_0 < \varepsilon/4$ totalmente incluida en G_0. Nótese que cualquiera sea $x_1 \in T^{-1}(U_0)$ se tiene que $Tx_1 \in U_0$ y, por lo tanto, $\|Tx_1 - x_0\| < \varepsilon/2$. Lo que tenemos que hacer es garantizar que x_1 también esté en G_1. Para ello, observe que como $T^{-1}(U_0)$ es abierto en X, entonces la densidad de G_1 nos dice que $G_1 \cap T^{-1}(U_0) \neq \varnothing$. Escojamos ahora $x_1 \in G_1 \cap T^{-1}(U_0)$ tal que

$$\|Tx_1 - x_0\| < \frac{r_0}{\|T\|}.$$

Sea U_1 una bola abierta contenida en el abierto $G_1 \cap T^{-1}(U_0)$ con centro en x_1 y radio $r_1 < \varepsilon/4^2$. Continuando inductivamente con este proceso, se construye una sucesión de vectores $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ en X y una sucesión de bolas abiertas $(U_k)_{k=0}^{\infty}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(a) $x_k \in G_k \cap T^{-1}(U_{k-1})$ para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

(b) cada bola U_k está contenida en $G_k \cap T^{-1}(U_{k-1})$ teniendo su centro en x_k y radio $r_k < \varepsilon/4^{k+1}$ y,

(c) $\| Tx_k - x_{k-1} \| < r_k / \| T \|^k$ para todo $k \geq 1$.

Por último, observe que $Tx_k \in T(G_k) \cap U_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, como $T(G_k)$ es denso en X, entonces $T(G_k) \cap U_{k-1} \neq \varnothing$ y, en consecuencia, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$Tx_k \in T(U_k) \;\subseteq\; T\big(G_k \cap T^{-1}(U_{k-1})\big) \;\subseteq\; T(G_k) \cap U_{k-1} \;\subseteq\; U_{k-1}.$$

En particular,

$$T^n x_{k+n} \in U_k, \qquad \text{y} \qquad T^k x_k \in U_0, \quad \text{para todo } k, n \in \mathbb{N}.$$

Sean ahora $k, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\big\| T^n x_{k+n} - T^{n-1} x_{k+n-1} \big\| \;\leq\; \| T \|^{n-1} \| Tx_{k+n} - x_{k+n-1} \| \;<\; \frac{r_{k+n}}{\| T \|^{k+1}},$$

de donde se sigue, fijando a k, que la sucesión $(T^n x_{k+n})_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en X, la cual, por la completitud de X, converge a un punto $y_k \in U_k \cap G_k$. En efecto, ya hemos visto que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $T^n x_{k+n} \in U_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $y_k \in U_k \cap G_k$. Más aun, para todo $k \geq 2$ y todo $n \leq k$

$$T^n y_k \;=\; T^n\big(\lim_{j\to\infty} T^j x_{k+j}\big) \;=\; \lim_{j\to\infty} T^{j+n} x_{(k-n)+j+n} \;=\; y_{k-n}.$$

En particular, $y_0 = Ty_1 = T^2 y_2 = \cdots = T^k y_k = \cdots$. Puesto que, por construcción, $\| y - y_0 \| < \varepsilon$ y como $y_k \in G_k$ para todo $k \geq 0$, resulta que $y_0 \in T^k(G_k)$ para todo $k \geq 0$. Esto termina la prueba. ∎

Nótese que cuando $T = I$, el operador identidad sobre X, obtenemos el Teorema de Categoría de Baire para espacios de Banach.

Comentario Adicional 2.2.10 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y para cada subconjunto acotado A de X sea

$$\alpha(A) \;=\; \text{ínf}\Big\{ r > 0 \,:\, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \text{ con } \operatorname{diam}(M_i) \leq r \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \Big\}.$$

A $\alpha(\cdot)$ se le llama la **medida de no-compacidad de Kuratowski** (véase, por ejemplo, [188]). No es difícil ver que A es compacto si, y sólo si, $\alpha(A) = 0$. También se cumple que si A y B son subconjuntos acotados de X con $A \subseteq B$, entonces $\alpha(A) \leq \alpha(B)$. Similarmente, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ se cumple que $\alpha(sA) = |s|\alpha(A)$.

Suponga ahora que $K \subseteq X$ es un conjunto convexo, cerrado y acotado. Fijemos un número real $k > 0$. Una función $f : K \to K$ se dice que es $k - \alpha$ - **contractiva** si para cualquier subconjunto A de K,

$$\alpha\big(f(A)\big) \;\leq\; k\alpha(A).$$

Denotemos por $(\Sigma_1(K), d)$ el espacio métrico completo de todas las funciones $f : K \to K$ que son $k - \alpha$ - contractivas, donde $d(f, g) = \sup\{\| f(x) - g(x) \| : x \in K\}$. La aplicación f se llama **α-condensante** si ella es continua y satisface $\alpha\big(f(A)\big) < \alpha(A)$ para cualquier subconjunto A de K que no sea relativamente compacto. En [136] demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.2.9 (Domínguez Benavides). *El conjunto* $\mathcal{C}\mathrm{ond}_\alpha(K)$ *formado por todas las aplicaciones* α*-condensantes en* $\Sigma_1(K)$ *es residual en* $(\Sigma_1(K), d)$.

Prueba. Sea D el conjunto de todas las $k-\alpha$ - contracciones ($k<1$) en $\Sigma_1(K)$, esto es,

$$D = \bigcup_{k<1} \Sigma_k(K).$$

Observe que D es denso en $\Sigma_1(K)$. En efecto, si $f \in \Sigma_1(K)$ y si definimos $f_n = (n/n+1)f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ verifica que $f_n \in \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\| f_n - f \| \to 0$. Para cada $f \in D$, sea $k_f \ = \ \inf\{k \geq 0 : \ f \in \Sigma_k(K)\}$ y defina

$$G \ = \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{f\in D} U\big(f, (1-k_f)/2n\big).$$

Claramente $D \subseteq G$ y, por consiguiente, G es un G_δ-denso en $\Sigma_1(K)$. Afirmamos que G está contenido en $\mathcal{C}\mathrm{ond}_\alpha(K)$. En efecto, sean $g \in G$ y $A \subseteq K$ con $\alpha(A) > 0$. Escojamos un entero positivo n_0 tal que $1/n_0 < \alpha(A)$. Puesto que $g \in G$, existe $f \in D$ tal que $g \in U(f, (1-k_f)/2n_0)$ lo cual implica, usando las propiedades de $\alpha(\cdot)$, que

$$\alpha\big(g(A)\big) \ \leq \ \alpha\big(f(A)\big) + (1-k_f)/n_0 \ < \ k_f\,\alpha(A) + (1-k_f)\alpha(A) \ = \ \alpha(A).$$

Esto demuestra que $g \in \mathcal{C}\mathrm{ond}_\alpha(K)$ y termina la prueba. ■

Dada cualquier función $f : K \to K$, denotemos por $\mathrm{PF}(f,K)$ el conjunto de todos los puntos fijos de f en K, esto es,

$$\mathrm{PF}(f,K) \ = \ \big\{x \in K : \ f(x) = x\big\}.$$

Como una aplicación del teorema anterior, Domínguez Benavides obtiene, entre otros resultados, el siguiente: *para cada* $f \in \mathcal{C}\mathrm{ond}_\alpha(K)$,

(1) $\mathrm{PF}(f,K)$ *es no vacío y compacto,* y

(2) $\mathrm{Orb}(f,x)$ *es relativamente compacto.*

El Teorema del Punto Fijo de Schauder [188] demostrado en 1930 por Julius Schauder establece que:

Teorema del Punto Fijo de Schauder. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y suponga que* K *es un subconjunto convexo y norma-compacto de* X. *Entonces* $\mathrm{PF}(f,K) \neq \varnothing$ *para cualquier función continua* $f : K \to K$.

Un maravilloso resultado de Tudor Zamfirescu [453] afirma que para "casi todas" las funciones f en $C(K)$, el conjunto $\mathrm{PF}(f,K)$ es no numerable. Específicamente,

Teorema 2.2.10 (Zamfirescu). *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* K *un subconjunto convexo y norma-compacto de* X. *Entonces existe un conjunto residual* G *en* $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ *tal que, para cada* $f \in G$, *el conjunto* $\mathrm{PF}(f,K)$ *es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor* Γ.

El Teorema del Punto Fijo de Schauder generaliza el Teorema del Punto Fijo de Brouwer el cual afirma que:

Teorema del Punto Fijo de Brouwer. *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo, compacto con interior no vacío. Para cualquier* $f \in C(K)$, *el conjunto* $\mathrm{PF}(f,K)$ *es no vacío.*

De nuevo, Zamfirescu en el artículo ya citado demuestra que:

Teorema 2.2.11 (Zamfirescu). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto con interior no vacío. Entonces existe un conjunto residual G en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ tal que, para cada $f \in G$, el conjunto* $\mathrm{PF}(f, K)$ *tiene medida de Lebesgue n-dimensional igual a cero.*

Finalizamos esta sección mencionando el siguiente resultado de Tomás Domínguez Benavides [135]. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U un subconjunto abierto del espacio producto $\mathbb{R} \times X$ y $C(U, X)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas de U en X provisto de la topología metrizable de la convergencia uniforme. En $\mathbb{R} \times X$ usaremos la norma

$$\|(t, x)\| = \text{máx}\{|t|, \|x\|\}$$

y en $U \times C(U, X)$ la métrica

$$d_\infty\big((u, f), (v, g)\big) = \text{máx}\{\|u - v\|, d(f, g)\},$$

donde d es una métrica sobre $C(U, X)$ que define la topología considerada. Considere el problema de Cauchy

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_u) = x_u \tag{1}$$

donde $f \in C(U, X)$ y $u = (t_u, x_u) \in U$.

Teorema de Domínguez Benavides. *Existe un conjunto residual $G \subseteq U \times C(U, X)$ tal que, para todo $(u, f) \in G$, el problema (1) tiene solución única en un entorno $V(u, f)$ de t_u la cual depende continuamente de los valores iniciales*.

2.2.2. ‖ ► Diferenciabilidad en espacios de Banach

Las propiedades de diferenciabilidad de las funciones continuas y convexas a valores reales definidas sobre un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$, han resultado ser de una importancia fundamental en ciertas áreas de las matemáticas. Un estudio en profundidad de algunas propiedades similares de diferenciabilidad pero ahora para funciones convexas continuas a valores reales definidas sobre un subconjunto abierto y convexo de algún espacio de Banach de dimensión infinita ha sido llevada a cabo desde hace un poco más de 70 años. En efecto, el primer resultado de este tipo fue obtenido por S. Mazur quien, en 1933, demostró que *cualquier función continua convexa a valores reales definida sobre un espacio de Banach separable de dimensión infinita, es Gâteaux-diferenciable en un subconjunto residual de dicho espacio*. A partir de ese momento el estudio de estas nociones generalizadas de diferenciabilidad dieron origen a la creación de los espacios de Asplund y los espacios débilmente de Asplund; es decir, aquellos espacios de Banach los cuales tienen la propiedad de que cualquier función convexa y continua definida sobre ellos es Fréchet (respectivamente, Gâteaux) diferenciable en los puntos de un subconjunto G_δ-denso de su dominio. En esta sección no intentaremos abordar dicho estudio, ni tan siquiera dibujar algunas de sus consecuencias más importantes sino, tan sólo, mostrar algunos resultados fundamentales en los que el Teorema de Categoría de Baire aparece como un ingrediente importante en su demostración. Los libros de Fabian [157], Giles [181], Phelps [351], Deville-Godefroy-Zizler [128], etc. abordan muchos aspectos en profundidad de esos espacios. Debemos señalar, finalmente, que estas dos modalidades de diferenciabilidad son, en términos generales, muy diferentes. Por ejemplo, existen exquisitas y variadas formas equivalentes de caracterizar a los espacios de Asplund, pero no ocurre lo mismo con los espacios débilmente de Asplund; de hecho, no existen, hasta el momento, condiciones equivalentes que caractericen a dichos espacios y tan sólo un número modesto de condiciones necesarias son conocidas.

‖ ► Funciones multivaluadas

Sean X y Y espacios topológicos de Hausdorff y sea $F : X \to 2^Y$ una función multivaluada, es decir, una función tal que, para cada $x \in X$, $F(x)$ es un subconjunto de Y. Puesto que $F(x)$ puede ser vacío para algunos $x \in X$, entonces es necesario definir el **dominio** de F como $\mathrm{Dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \varnothing\}$. Para $A \subseteq X$, definimos $F(A) = \bigcup\{F(x) : x \in A\}$, mientras que si $B \subseteq Y$, entonces

$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\} \qquad \text{y} \qquad F^{\#}(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}.$$

Observemos que $F^{\#}(B)$ contiene cada punto $x \in X$ para el cual $F(x) = \varnothing$. Más aun, $F^{-1}(Y) = \mathrm{Dom}(F)$ y $F^{\#}(Y) = X$. Finalmente, el conjunto

$$\mathrm{Gra}(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times F(x)$$

se llama el **grafo** de F. Algunas referencias donde estos objetos son estudiados más en profundidad son las siguientes [157], [351], [448].

Definición 2.2.1. *Sean X y Y espacios topológicos de Hausdorff. Una función multivaluada $F : X \to 2^Y$ se llama **superiormente semicontinua** (respectivamente, **inferiormente semicontinua**) en $x_0 \in X$ si, para cualquier conjunto abierto $V \subseteq Y$ con $F(x_0) \subseteq V$ (respectivamente, $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$), existe un entorno abierto U de x_0 en X tal que $F(x) \subseteq V$ (respectivamente, $F(x) \cap V \neq \varnothing$) para todo $x \in U$.*

F es superiormente semicontinua en X si ella es superiormente semicontinua en cada punto de X. Notemos que la semicontinuidad superior se puede caracterizar del modo siguiente:

‖► *F es superiormente semicontinua en X*

(β_1) *si, y sólo si, el conjunto $F^{\#}(V)$ es abierto en X, para cualquier abierto $V \subseteq Y$.*

(β_2) *si, y sólo si, para cada subconjunto cerrado C de Y, el conjunto $F^{-1}(C)$ es cerrado en X.*

Escribiremos F es **usc** (respectivamente, **lsc**) cuando dicha función es superiormente semicontinua (respectivamente, inferiormente semicontinua).

En el caso particular en que X es un espacio de Banach, tenemos la siguiente formulación:

Reformulación (1). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $F : X \to 2^{X^*}$ una aplicación multivaluada. Son equivalentes:*

(1) *F es norma - ω^* (respectivamente, norma - norma) superiormente semicontinua en $x \in X$.*

(2) *Para cada conjunto ω^* - abierto (respectivamente, norma-abierto) W conteniendo a $F(x)$ y cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X con $\|x_n - x\| \to 0$, se tiene que $F(x_n) \subseteq W$ para todo n suficientemente grande.*

En lo que sigue sólo consideraremos aplicaciones multivaluadas $F : X \to 2^Y$ cuyo dominio, $\mathrm{Dom}(F)$, sea denso en X. La razón es la siguiente: si $x_0 \notin \overline{\mathrm{Dom}(F)}$, entonces para algún conjunto abierto U de X conteniendo a x_0 tendríamos que $F(x) = \varnothing$ para cualquier $x \in U$; lo cual implica que F es automáticamente usc y lsc en tales puntos. Por lo tanto, si $\mathrm{Dom}(F)$ es denso en X y si F es usc en algún $x_0 \in X$, entonces necesariamente $F(x_0) \neq \varnothing$. Por consiguiente, convenimos que cuando decimos que F es a valores no-vacíos lo que estamos asumiendo es que $\mathrm{Dom}(F) = X$.

Una de las definiciones importantes de aplicaciones multivaluadas es cuando la imagen de cualquier punto es un conjunto compacto no vacío.

Definición 2.2.2. *Sea $F : X \to 2^Y$ una función multivaluada superiormente semicontinua. Si para cada punto $x \in X$, el conjunto $F(x)$ es compacto y no vacío, entonces diremos que F es una aplicación* USCO. *Si, además, Y es un espacio vectorial topológico y $F(x)$ es un conjunto no vacío, convexo y compacto, entonces se dice que F es una aplicación* CUSCO.

El siguiente lema es clave para lo que sigue.

Lema 2.2.3. *Sea $F : X \to 2^Y$ una aplicación* USCO *y sea $x \in X$. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ es una red tal que $x_\alpha \to x$, y $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ para cada $\alpha \in D$, entonces $(y_\alpha)_{\alpha\in D}$ posee una subred que converge a algún $y \in F(x)$.*

Prueba. Supongamos que la conclusión es falsa. Esto significa que para cada $z \in F(x)$, existe un entorno abierto V_z de z tal que $y_\alpha \notin V_z$ para todo $\alpha > \alpha_z$, donde $\alpha_z \in D$ depende de z. Puesto que $F(x)$ es compacto, existe un número finito de puntos, digamos $z_1, \ldots, z_n \in F(x)$ tales que $F(x) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{z_k} := V$. De lo anterior se sigue que $y_\alpha \notin V$ siempre que $\alpha > \text{máx}\{\alpha_{z_1}, \ldots, \alpha_{z_n}\}$, lo que entra en contradicción con la semicontinuidad superior de F en x. ■

Una consecuencia inmediata del lema anterior es el siguiente

Corolario 2.2.11. *Si $F : X \to 2^Y$ es una aplicación* USCO, *entonces su grafo* $\mathrm{Gra}(F)$ *es cerrado en $X \times Y$.*

Prueba. Suponga que $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in D}$ es una red en $\mathrm{Gr}(F)$ la cual converge a $(x, y) \in X \times Y$, es decir,

$$x_\alpha \to x, \qquad y_\alpha \in F(x_\alpha) \qquad \text{y} \qquad y_\alpha \to y.$$

Por el Lema 2.2.3, $(y_\alpha)_{\alpha\in D}$ posee una subred que converge a algún punto de $F(x)$. Se sigue que $y \in F(x)$, con lo cual hemos demostrado que $(x, y) \in \mathrm{Gra}(F)$. ■

Si $F : X \to 2^Y$ es una aplicación multivaluada con grafo cerrado en $X \times Y$, entonces diremos que F tiene **grafo cerrado**. Algunas veces, el recíproco del resultado anterior es también cierto: por ejemplo, si $F : X \to 2^Y$ tiene grafo cerrado y si el espacio Y es compacto, entonces F es USCO. Sean $F, G : X \to 2^Y$ dos aplicaciones multivaluadas. Diremos que F **está contenida** en G si $F(x) \subseteq G(x)$ para cada $x \in X$.

Teorema 2.2.12. *Si $F : X \to 2^Y$ es una aplicación multivaluada con grafo cerrado a valores no vacíos la cual está contenida en una aplicación $G : X \to 2^Y$ la cual es* USCO, *entonces F es* USCO.

Prueba. Conviene observar, en primer lugar, que como $\mathrm{Gr}(F)$ es cerrado, entonces $F(x)$ también es cerrado en Y para cada $x \in X$. Además, como $G(x)$ es compacto y $F(x) \subseteq G(x)$, resulta que $F(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Supongamos ahora que F no es superiormente semicontinua . Entonces existe $x_0 \in X$ tal que F no es superiormente semicontinua en x_0. Esto significa que en alguna parte de Y se encuentran un abierto V conteniendo a $F(x_0)$ y una red $(x_d)_{d\in D}$ en X convergiendo a x_0 tal que para cada $d \in D$ existe algún $y_d \in F(x_d) \setminus V$. Ya que G es USCO y $y_\alpha \in G(x_\alpha)$, el Lema 2.2.3 nos ofrece la existencia de una subred de $(y_\alpha)_{\alpha\in D}$, que seguiremos denotando del mismo modo, que converge a algún $y \in G(x_0)$. Por otro lado, como $\mathrm{Gra}(F)$ es cerrado, resulta que $y \in F(x_0)$ lo cual constituye una contradicción pues: $y_\alpha \to y \in F(x_0)$, mientras que $y_\alpha \notin V \supseteq F(x_0)$ para todo $\alpha \in D$. ■

La más importante subclase de las aplicaciones USCO's son las llamadas USCO minimales, las cuales poseen poderosas y sorprendentes propiedades. Su existencia quedará garantizada por una aplicación del Lema de Zorn.

Definición 2.2.3. *Una aplicación* USCO *$F : X \to 2^Y$ se llama* **USCO *minimal*** *si, para cada cualquier otra aplicación* USCO *$G : X \to 2^Y$ tal que $G(x) \subseteq F(x)$ para todo $x \in X$, entonces $G = F$.*

Teorema 2.2.13. *Si $F : X \to 2^Y$ es una aplicación* USCO*, entonces existe una aplicación $G : X \to 2^Y$ que es* USCO *minimal contenida en F.*

Prueba. Sea

$$\mathfrak{H} = \Big\{ H : X \to 2^Y \ \Big|\ H \text{ es USCO } y\ H(x) \subseteq F(x) \text{ para todo } x \in X \Big\}.$$

Observe que $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ pues $F \in \mathfrak{H}$. Introduzcamos un orden parcial sobre $\mathfrak{H}$ declarando que

$$H_1 \preceq H_2 \quad \text{siempre que} \quad H_1, H_2 \in \mathfrak{H} \quad \text{y} \quad H_1(x) \subseteq H_2(x) \ \text{ para todo } x \in X.$$

Suponga ahora que $\mathfrak{H}_0 = \{H_\alpha \in \mathfrak{H} : \alpha \in D\}$ es un conjunto totalmente ordenado por "$\preceq$" y considere la función $H : X \to 2^Y$ definida por

$$H(x) = \bigcap_{\alpha \in D} H_\alpha(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Veamos que H es USCO. En primer lugar observe que, para cada $x \in X$, $\{H_\alpha(x) : \alpha \in D\}$ es una familia encajada de compactos no vacíos, de donde resulta que $H(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de Y. Para ver que H es superiormente semicontinua , sea C cualquier subconjunto cerrado de Y. Vamos a demostrar que $H^{-1}(C) = \{x \in X : H(x) \cap C \neq \varnothing\}$ es cerrado en X. En efecto, nótese que

$$\begin{aligned}
x \in H^{-1}(C) \quad &\text{si, y sólo si,} \quad H(x) \cap C \neq \varnothing, \\
&\text{si, y sólo si,} \quad \bigcap_{\alpha \in D} \big(H_\alpha(x) \cap C\big) \neq \varnothing, \\
&\text{si, y sólo si,} \quad H_\alpha(x) \cap C \neq \varnothing \quad \text{para todo } \alpha \in D, \\
&\text{si, y sólo si,} \quad x \in \bigcap_{\alpha \in D} \big\{z \in X : H_\alpha(z) \cap C \neq \varnothing\big\}.
\end{aligned}$$

Pero cada conjunto $\big\{z \in X : H_\alpha(z) \cap C \neq \varnothing\big\}$ es, por la semicontinuidad superior de H_α, cerrado en X, de donde se sigue que $H^{-1}(C)$ es cerrado en X. Hemos demostrado que $H \in \mathfrak{H}$ y como $H \preceq H_\alpha$ para todo $\alpha \in D$, podemos invocar el Lema de Zorn para obtener una aplicación USCO minimal G en $(\mathfrak{H}, \preceq)$ tal que $G \preceq F$. Esto termina la prueba. ■

El siguiente resultado muestra varias propiedades útiles e interesantes de las aplicaciones USCO's minimales.

Teorema 2.2.14. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff y $F : X \to 2^Y$ una aplicación* USCO*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *F es* USCO *minimal.*

(2) *Si $U \subseteq X$ es abierto y $C \subseteq Y$ es cerrado tal que $F(x) \cap C \neq \varnothing$ para todo $x \in U$, entonces $F(U) \subseteq C$.*

(3) *Si U y V son subconjuntos abiertos de X y Y respectivamente tales que $U \cap F^{-1}(V) \neq \varnothing$, entonces existe un subconjunto abierto no vacío U' de X tal que $U' \subseteq U$ y $F(U') \subseteq V$.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Sean $U \subseteq X$ abierto y $C \subseteq Y$ cerrado tales que $F(x) \cap C \neq \varnothing$ para todo $x \in U$. Definamos ahora $H : X \to 2^Y$ por

$$H(x) = \begin{cases} F(x) \cap C & \text{si } x \in U, \\ F(x) & \text{si } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Entonces, para cualquier $x \in X$, el conjunto $H(x)$ es no vacío y $H \subseteq F$. Siendo F USCO, el Corolario 2.2.11 nos dice que $\mathrm{Gra}(F)$ es cerrado y, por consiguiente, $\mathrm{Gra}(H)$ también es cerrado. Puesto que $H \subseteq F$, el Teorema 2.2.12 nos garantiza que H es USCO y, gracias a la minimalidad de F tenemos que $H = F$. Por esto, $F(x) \subseteq C$ para cualquier $x \in U$; es decir, $F(U) \subseteq C$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Suponga que U y V son subconjuntos abiertos de X y Y respectivamente tales que $U \cap F^{-1}(V) \neq \varnothing$, lo cual significa que para algún $x_0 \in U$ tenemos que $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$. Si ahora definimos $C := Y \setminus V$, podemos distinguir dos casos:

(1˚) $F(x_0) \subseteq V$. En este caso, la semicontinuidad superior de F en x_0 nos proporciona la existencia de un conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ con $x_0 \in U'$, tal que $F(U') \subseteq V$.

(2˚) $F(x_0) \nsubseteq V$. Esto quiere decir que $F(x_0) \cap C \neq \varnothing$. Afirmamos que existe $x_1 \in U$ tal que $F(x_1) \cap C = \varnothing$. En efecto, si ocurriera que $F(x) \cap C \neq \varnothing$ para todo $x \in U$, entonces tendríamos, en virtud de (2), que $F(U) \subseteq C$ lo que evidentemente contradice la suposición $F(x_0) \cap C \neq \varnothing$. Finalmente, usando de nuevo la la semicontinuidad superior de F en x_1, podemos determinar un entorno abierto U' de x_1, $U' \subseteq U$, tal que $F(U') \subseteq V$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Supongamos que F no es minimal. Por el Teorema 2.2.13 existe una aplicación USCO minimal $F_0 : X \to 2^Y$ con $F_0 \subseteq F$ y tal que, para algún $x_0 \in X$, se cumple que $F_0(x_0) \subsetneqq F(x_0)$. Por la compacidad de $F_0(x_0)$, podemos encontrar un conjunto abierto $W \subseteq Y$ tal que

$$F(x_0) \cap W \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad F_0(x_0) \cap \overline{W} = \varnothing.$$

La semicontinuidad superior de F_0 nos dice que $F_0(U) \cap \overline{W} = \varnothing$ para algún conjunto abierto $U \subseteq X$ conteniendo a x_0. Por otro lado, como $F(x_0) \cap W \neq \varnothing$ tenemos que $U \cap F^{-1}(W) \neq \varnothing$, y se sigue ahora de (3) que $F(U') \subseteq W$ para algún conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ conteniendo a x_0. En particular, $F_0(U') \subseteq W$ lo que resulta en una clara contradicción con el hecho de que $F_0(x_0) \cap \overline{W} = \varnothing$. ■

Uno de los problemas centrales de las aplicaciones multivaluadas es el siguiente:

> **Un Problema de las Aplicaciones Multivaluadas**. *Dada una aplicación multivaluada $F : X \to 2^Y$, donde X es un espacio de Baire y Y es un espacio topológico, encuentre condiciones que garanticen la existencia de un subconjunto G_δ-denso X_1 de X y de una función univaluada (= a un sólo-valor) continua $f : X_1 \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X_1$.*

Esto último significa que f es una selección de F sobre el conjunto X_1. En general, una **selección** para la función multivaluada $F : X \to 2^Y$ es una función univaluada $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para cada $x \in X$. Observe que, gracias al Axioma de Elección, siempre existe una selección para cualquier función multivaluada.

|| ► Funciones convexas y los teoremas de diferenciabilidad de Mazur y Asplund-Lindenstrauss.

Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$. Recordemos que un subconjunto no vacío U de X se llama **convexo** si $\lambda x+(1-\lambda)y\in U$ siempre que $x,y\in U$ y $\lambda\in[0,1]$. Una función $f:U\to\mathbb{R}$ se llama **convexa** si

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ \le\ \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

para todo $x,y\in U$ y todo $0\le\lambda\le 1$.

Un resultado clásico e importante sobre la diferenciabilidad de funciones a valores reales definidas sobre intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es el siguiente, cuya prueba puede ser consultada, por ejemplo, en [351], Theorem 1.16.

Teorema de diferenciabilidad real. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función convexa continua. Entonces f es diferenciable en todo punto de (a,b) excepto sobre un subconjunto a lo sumo numerable.*

Nuestro objetivo es esta sección es demostrar dos resultados fundamentales sobre diferenciabilidad de funciones convexas continuas definidas sobre espacios de Banach reales, donde se hace uso del Teorema de Categoría de Baire, siendo el primero de ellos el siguiente teorema publicado por Mazur en 1933 ([303]).

Teorema 2.2.15 (Teorema de diferenciabilidad de Mazur). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable, U un subconjunto abierto convexo de X y $f:U\to\mathbb{R}$ una función convexa continua. Entonces el conjunto de puntos donde f es Gâteaux diferenciable es un G_δ-denso de U.*

La demostración de este resultado requiere de algunas definiciones y resultados adicionales.

Definición 2.2.4. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f:X\to\mathbb{R}$ función. Se dice que f es **Gâteaux diferenciable** en $x\in X$ si existe un único funcional lineal continuo de X en $\mathbb{R}$, denotado por $df(x)\in X^*$, tal que*

$$\langle df(x),h\rangle\ =\ \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

*para cada $h\in X$. El funcional $df(x)$ es entonces llamado la **derivada de Gâteaux** de f en x.*

*Si, además, el límite anterior es uniforme en $h\in S_X$, diremos que f es **Fréchet diferenciable** en x. Equivalentemente, f es Fréchet diferenciable en x si existe $f'(x)\in X^*$, tal que*

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)-\langle f'(x),y\rangle}{\|y\|}\ =\ 0.$$

*El funcional $f'(x)$ se le llama la **derivada de Fréchet** de f en x.*

La **subdiferencial** de una función convexa f, se define como la aplicación multivaluada $\partial f:X\to 2^{X^*}$ dada por

$$\partial f(x)=\left\{x^*\in X^*:\langle x^*,y-x\rangle\ \le\ f(y)-f(x)\ \text{ para todo } y\in X\right\},\quad x\in X.$$

Notemos que $\partial f(x)$ consiste de todos los funcionales lineales continuos que son posibles candidatos para la derivada de Gâteaux de f en x. Es fácil ver que si $\partial f(x)\neq\varnothing$, entonces dicho conjunto es convexo. En efecto, sean $x_1^*,x_2^*\in\partial f(x)$ y sea $\lambda\in(0,1)$. Para cualquier $y\in X$, tenemos que

$$\langle\lambda x_1^*,y-x\rangle\le\lambda f(y)-\lambda f(x)\qquad\text{y}\qquad\langle(1-\lambda)x_2^*,y-x\rangle\ \le\ (1-\lambda)f(y)-(1-\lambda)f(x).$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos $\langle\lambda x_1^*+(1-\lambda)x_2^*,y-x\rangle\ \le\ f(y)-f(x)$ para todo $y\in X$, por lo que $\lambda x_1^*+(1-\lambda)x_2^*\in\partial f(x)$.

Más aun, se cumple la siguiente desigualdad (monotonicidad del operador ∂f):

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \ \geq \ 0$$

siempre que $x,y \in X$ y $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$. En efecto, si $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$, entonces sumando las siguientes dos desigualdades se obtiene el resultado:

$$\langle x^*, y - x\rangle \ \leq \ f(y) - f(x) \qquad \text{y} \qquad -\langle y^*, y - x\rangle \ = \ \langle y^*, x - y\rangle \ \leq \ f(x) - f(y).$$

De aquí en adelante consideraremos sólo funciones convexas continuas $f : U \to \mathbb{R}$, donde $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach real y U un subconjunto abierto convexo de X.

Lema 2.2.4. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función convexa continua. Entonces*

(1) $\partial f(x) \neq \varnothing$ *para todo $x \in U$, y*

(2) *si f es Gâteaux diferenciable en $x \in U$, entonces $\partial f(x)$ consta de un único punto, a saber $df(x)$.*

Prueba. (1) Fijemos $x \in U$ y pongamos $C : \big\{(x,t) : f(x) \leq t\big\}$. El conjunto C, que se denomina el epígrafo de f, resulta ser convexo pues f y U lo son. Trasladando C al punto $(x_0, f(x_0))$ produce el conjunto

$$C_0 \ := \ C - (x_0, f(x_0)) \ = \ \Big\{(x,t) \in (U - \{x_0\}) \times \mathbb{R} : \ \varphi(x) := f(x + x_0) - f(x_0) \leq t\Big\}.$$

Observe que $(0,0) \in C_0$ y que C_0 es el epígrafo de φ sobre $U \setminus \{x_0\}$. Por el Teorema de Separación de Hahn-Banach, existe un hiperplano cerrado H en $X \times \mathbb{R}$ que soporta a C_0 en $(0,0)$, lo que a su vez implica la existencia de un funcional lineal no cero $x^* \in X^*$ tal que

$$\langle x^*, x\rangle \ \leq \ \varphi(x) \ = \ f(x + x_0) \ - \ f(x_0), \qquad \text{para todo } x \in U \setminus \{x_0\}$$

o bien

$$\langle x^*, x - x_0\rangle \ \leq \ f(x) \ - \ f(x_0), \qquad \text{para todo } x \in U$$

lo cual quiere decir que $x^* \in \partial(f)$.

(2) Supongamos que $df(x_0)$ existe y sea $x^* \in \partial(f)$. Veamos que $x^* = df(x_0)$. Como $x^* \in \partial(f)$, tenemos que

$$\langle x^*, x - x_0\rangle \ \leq \ f(x) \ - \ f(x_0), \qquad \text{para todo } x \in U.$$

Sea $h \in X$ arbitrario y escojamos $t > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que $x := x_0 + th \in U$. Entonces

$$\langle x^*, h\rangle \ \leq \ \frac{f(x_0 + th) \ - \ f(x_0)}{t}$$

de donde se obtiene que $\langle x^*, h\rangle \leq \langle df(x_0), h\rangle$. Similarmente, como también $\langle x^*, -h\rangle \leq \langle df(x_0), -h\rangle$, se concluye que $x^* = df(x_0)$. ■

Recordemos una función convexa $f : U \to \mathbb{R}$ es **localmente acotada** en $x_0 \in U$ si existen constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in U(x_0, \delta)$. Similarmente, f es **localmente Lipschitz** en x_0 si existen constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ siempre que $x,y \in U(x_0, \delta)$. f es localmente acotada (resp. localmente Lipschitz) sobre U si f es localmente acotada (resp. localmente Lipschitz) en todo punto de U. Más aun, diremos que la aplicación $x \to \partial f(x)$ es localmente acotada en x_0 si existe una constante $M > 0$ y un entorno abierto U de x_0 tal que $\|x^*\| \leq M$ para todo $x^* \in \partial f(x)$ y todo $x \in U$.

Un hecho que es importante resaltar es el siguiente.

Lema 2.2.5. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función convexa localmente acotada. Entonces*

(1) *f es localmente Lipschitz.*

(2) *∂f es localmente acotada, y para cada $x \in U$, $\partial f(x)$ es ω^*-compacto.*

(3) *La aplicación subdiferencial $x \to \partial f(x)$ es norma-ω^* superiormente semicontinua sobre U.*

Prueba. (1) Fijemos $x_0 \in X$. Puesto que f es localmente acotada en x_0, existen constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ siempre que $x \in U(x_0, 2\delta)$. Para cualesquiera $x, y \in U(x_0, \delta)$, sean $\alpha = \|x - y\|$ y $z = y + (y - x)\delta/\alpha$. Entonces $z \in U(x_0, 2\delta)$. Puesto que

$$y = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} z + \frac{\delta}{\alpha + \delta} x \in U(x_0, 2\delta)$$

resulta que

$$f(y) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(z) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(x)$$

y así,

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta}\big(f(z) - f(x)\big) \leq \frac{2M}{\delta}\|x - y\|.$$

Intercambiando x con y, vemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in U(x_0, \delta).$$

Esto nos dice que f es localmente Lipschitz.

(2) Para ver que ∂f es localmente acotada, sean $x \in U(x_0, \delta)$ y $x^* \in \partial f(x)$. Entonces, para todo $y \in U(x_0, \delta)$,

$$\langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \leq \frac{M}{2\delta}\|y - x\|$$

lo cual implica que $\|x^*\| \leq \frac{M}{2\delta}$. Finalmente, como $\partial f(x_0)$ es norma-acotado, sólo nos resta demostrar que $\partial f(x_0)$ es ω^*-cerrado. En efecto, sea $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\partial f(x_0)$ tal que $x_n^* \to x^* \in X^*$ en la ω^*-topología. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $y \in X$ se tiene que

$$\langle x_n^*, y - x_0\rangle \leq f(y) - f(x_0).$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, se obtiene que

$$\langle x^*, y - x_0\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, y - x_0\rangle \leq f(y) - f(x_0)$$

y así, $x^* \in \partial f(x_0)$. Se sigue del Teorema de Banach-Alaoglu que $\partial f(x_0)$ es ω^*-compacto.

(3). Para demostrar esta última parte, haremos uso de la Reformulación (1), página 243. En efecto, sean $x \in U$, W cualquier subconjunto ω^*-abierto de X^* conteniendo a $\partial f(x)$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión en U tal que $x_n \to x$ en la norma. Vamos a demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\partial f(x_n) \subseteq W$ para todo $n \geq N$. Supongamos que este no es el caso, entonces existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que la seguiremos denotando del mismo modo, tal que $\partial f(x_n) \nsubseteq W$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos $x_n^* \in \partial f(x_n) \setminus W$. Puesto que $\partial f(\cdot)$ es localmente acotada, podemos suponer que existe una bola norma-cerrada $B(0, K)$ en X^*, conteniendo a todos los conjuntos $\partial f(x_n)$.

Sea $x^* \in \overline{\{x_n^* : n=1,2,\dots\}}^{\omega^*} \subseteq B(0,K)$. Esto significa que x^* es el ω-límite de una subred de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ y, por supuesto, $x^* \notin W$. Fijemos un $y \in U$ y consideremos la expresión

$$\langle x^*,y\rangle - \langle x_n^*,x\rangle \;=\; \langle x^*,y\rangle - \langle x_n^*,y\rangle + \langle x_n^*,y\rangle - \langle x_n^*,x_n\rangle + \langle x_n^*,x_n\rangle - \langle x_n^*,x\rangle + \langle x_n^*,x\rangle - \langle x^*,x\rangle. \tag{1}$$

Como x^* es un punto de ω^*-clausura de la sucesión $\{x_n^* : n=1,2,\dots\}$, resulta que las sucesiones $(\langle x_n^*,x\rangle)_{n=1}^\infty$ y $(\langle x_n^*,y\rangle)_{n=1}^\infty$ poseen subsucesiones, a las que seguiremos nombrando del mismo modo, que convergen a $\langle x^*,x\rangle$ y a $\langle x^*,y\rangle$ respectivamente, esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*,x\rangle \;=\; \langle x^*,x\rangle \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\langle x_n^*,y\rangle \;=\; \langle x^*,y\rangle. \tag{2}$$

Además, puesto que $x_n^* \in B(0,K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\big|\langle x_n^*,x_n\rangle - \langle x_n^*,x\rangle\big| \;\le\; K\,\|x_n - x\| \;\longrightarrow\; 0. \tag{3}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la desigualdad

$$\begin{aligned}\langle x_n^*,y\rangle - \langle x_n^*,x_n\rangle \;&\le\; f(y) - f(x_n)\\ &=\; f(y) - f(x) + f(x) - f(x_n),\end{aligned}$$

la cual es válida por estar $x_n^* \in \partial f(x_n)$, y como $f(x) - f(x_n) \to 0$ por la continuidad de f en x, resulta de la desigualdad anterior que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\langle x_n^*,y\rangle - \langle x_n^*,x_n\rangle\Big) \;\le\; f(y) - f(x) \tag{4}$$

Finalmente, tomando el límite en (1) cuando $n \to \infty$, y usando (2), (3) y (4) se concluye que

$$\langle x^*,y\rangle - \langle x^*,x\rangle \;\le\; f(y) - f(x) \qquad \text{para todo } y \in U.$$

Esto prueba que $x^* \in \partial f(x) \setminus W$, lo cual es una contradicción por el hecho de que W contiene a $\partial f(x)$. ■

Un resultado importante que caracteriza la diferenciabilidad de funciones convexas continuas en términos de ciertas selecciones es el siguiente:

Teorema 2.2.16. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U un subconjunto abierto convexo no vacío de X y $f : U \to \mathbb{R}$ una función convexa continua. f es Fréchet (respectivamente, Gâteaux) diferenciable en $x \in U$ si, y sólo, existe una selección φ para ∂f la cual es norma - norma (respectivamente, norma - ω^*) continua en x.*

Prueba. La demostración será llevada a cabo sólo para el caso en que f es Fréchet diferenciable. Supongamos que existe una selección φ para la subdiferencial ∂f de f. Puesto que $\varphi(x) \in \partial f(x)$ para todo $x \in U$, tenemos que $\langle \varphi(x), y-x\rangle \le f(y) - f(x)$ para todo $y \in U$. Para tales $y \in U$ también se cumple que $\varphi(y) \in \partial f(y)$, y así, $\langle \varphi(y), x-y\rangle \le f(x) - f(y)$. Combinando estas dos desigualdades resulta que para todo $y \in U$,

$$0 \le f(y) - f(x) - \langle \varphi(x), y-x\rangle \;\le\; \langle \varphi(y) - \varphi(x), y-x\rangle. \tag{2.2.1}$$

Si φ es norma-norma continua en x, entonces el hecho de que el último término en la desigualdad (2.2.1) está acotada por $\|\varphi(y) - \varphi(x)\|\,\|y-x\|$ implica que f es Fréchet diferenciable en x.

Recíprocamente, supongamos que f es Fréchet diferenciable en $x \in U$. En primer lugar vamos a demostrar que ∂f es norma-norma superiormente semicontinua en x, es decir, queremos probar que para cualquier entorno norma-abierto V de $x^* := f'(x)$, existe un entorno norma-abierto W de x tal que $\partial f(W) \subseteq V$.

Supongamos que ∂f no es norma-norma superiormente semicontinua en x. Entonces es posible elegir un $\varepsilon > 0$, una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en U y $x_n^* \in \partial f(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \text{pero} \qquad \|x_n^* - x^*\| > 2\varepsilon.$$

La última desigualdad implica la existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de un $z_n \in S_X$ tal que $\langle x_n^* - x^*, z_n\rangle > 2\varepsilon$. Ahora bien, como f es Fréchet diferenciable en x, existe un $\delta > 0$ tal que $x+y \in U$ y

$$f(x+y) - f(x) - \langle x^*, y\rangle \;\leq\; \varepsilon\|y\|$$

siempre que $\|y\| \leq \delta$. Por otro lado, puesto que $x_n^* \in \partial f(x_n)$, tenemos que

$$\langle x_n^*, (x+y) - x_n\rangle \;\leq\; f(x+y) - f(x_n)$$

y, así,

$$\langle x_n^*, y\rangle \;\leq\; f(x+y) \;-\; f(x) \;+\; \langle x_n^*, x_n - x\rangle \;+\; f(x) \;-\; f(x_n)$$

siempre que $\|y\| \leq \delta$. Sea $y_n = \delta z_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\|y_n\| = \delta$ y

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\delta < \langle x_n^* - x^*, y_n\rangle &\leq \left[f(x+y_n) - f(x) - \langle x^*, y_n\rangle\right] + \langle x_n^*, x_n - x\rangle + f(x) - f(x_n) \\ &\leq \varepsilon\delta + \langle x_n^*, x_n - x\rangle + f(x) - f(x_n). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Finalmente, como ∂f es localmente acotada y $|\langle x_n^*, x_n - x\rangle| \leq \|x_n^*\|\,\|x_n - x\|$, se sigue de la continuidad de f en x que $f(x) - f(x_n) \to 0$ y, en consecuencia, las desigualdades en (2.2.2) nos conduce a la desigualdad $2\varepsilon\delta \leq \varepsilon\delta$ que resulta, a todas luces, contradictoria. Esto prueba que ∂f es norma-norma superiormente semicontinua en x.

Para cada $x \in U$, pongamos $\varphi(x) = f'(x)$. Resulta que φ es una selección para ∂f la cual es norma-norma continua en x. En efecto, los siguientes tres hechos: $\partial f(x)$ consta de un único punto (Lema 2.2.4), $\varphi(y) \in \partial f(y)$ para cada $y \in U$ y ∂f es superiormente semicontinua en x, implican inmediatamente que $\varphi(y) \to \varphi(x) = f'(x)$ siempre que $y \to x$ en norma, es decir, φ es norma-norma continua en x. ■

Observemos que si la función convexa $f : U \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in U$, entonces ella es localmente acotada en dicho punto y, en consecuencia, $\partial f(x_0)$ es localmente acotada. Además,

Corolario 2.2.12. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa. Entonces, para cada $x \in U$, tenemos que $df(x)$ existe si, y sólo si, $\partial f(x)$ consiste exactamente de un único elemento.*

Prueba. Ya sabemos, por el Lema 2.2.4, que si $df(x)$ existe, entonces $\partial f(x)$ consiste exactamente de un único elemento.

Supongamos ahora que $\partial f(x)$ consiste de un único punto. El Lema 2.2.5 (3) nos dice que ∂f es norma-ω^* superiormente semicontinua en x. Similar a la parte final de la prueba del teorema anterior, la suposición de que $\partial f(x)$ consta de un único punto, conduce a que cualquier selección φ para ∂f es norma-ω^* continua en x. Entonces, por el Teorema 2.2.16, $df(x)$ existe. ■

Puesto que en espacios de Banach de dimensión finita la topología ω^* y la topología de la norma coinciden, la conclusión del siguiente corolario se deriva inmediatamente del Teorema 2.2.16.

Corolario 2.2.13. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión finita, entonces para cualquier función continua y convexa definida sobre él, las derivadas de Gâteaux y Fréchet coinciden.*

Prueba del Teorema de diferenciabilidad de Mazur. En primer lugar vamos a demostrar que el conjunto

$$F = \big\{x \in U : df(x) \ \textit{no existe}\big\}$$

es un F_σ de U. En efecto, como X es separable podemos elegir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ densa en la esfera unitaria S_X de X. Para cada par de enteros $n, m \geq 1$, definamos los conjuntos $F_{n,m}$ como

$$F_{n,m} = \big\{x \in U : \ \textit{existen } x^*, y^* \in \partial f(x) \textit{ satisfaciendo } \langle x^* - y^*, x_n\rangle \geq 1/m \ \big\}.$$

Notemos que $df(x)$ no existe si, y sólo si, $\partial f(x)$ contiene más de un punto. De esto se sigue que

$$df(x) \ \text{ no existe } \ \text{si, y sólo si,} \quad x \in \bigcup_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m}; \quad \text{ es decir,} \quad F = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m}.$$

Por esto, sólo debemos demostrar que cada $F_{n,m}$ es relativamente cerrado en U. Para demostrar esto último, sea $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ cualquier sucesión en $F_{n,m}$ tal que $z_k \to z \in U$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escojamos x_k^* y y_k^* en $\partial f(z_k)$ tal que $\langle x_k^* - y_k^*, x_n\rangle \geq 1/m$. Puesto que X es separable, los subconjuntos norma acotados de X^* son metrizables en la ω^*-topología y, en consecuencia, por el acotamiento local de la aplicación ∂f en z y la ω^*-compacidad de cada bola cerrada en X^*, no se pierde generalidad en asumir, y así lo haremos, que existen $x^*, y^* \in X^*$ tales que $x_k^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y $y_k^* \xrightarrow{\omega^*} y^*$. Usando estos hechos tenemos que, para cualquier $y \in U$,

$$\langle x^*, y - z\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, y - z_k\rangle \leq \lim_{k\to\infty} [f(y) - f(z_k)] = f(y) - f(z),$$

de modo que x^* (y similarmente y^*) está en $\partial f(z)$. Además, puesto que

$$\langle x^* - y^*, x_n\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k^* - y_k^*, x_n\rangle \geq 1/m,$$

se concluye que $z \in F_{n,m}$.

Finalmente, para hacer uso del Teorema de Categoría de Baire, tenemos que demostrar que cada $U \setminus F_{n,m}$ es denso en U. Veamos esto. Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ y sean $x_0 \in U$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Consideremos la función $g : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(r) = f(x_0 + r x_n) \quad (r \in I),$$

donde $I = \{r \in \mathbb{R} : x_0 + r x_n \in U\}$. Como g es convexa sobre el intervalo abierto I entonces, por el Teorema de diferenciabilidad real, tenemos que $g'(r)$ existe para todos los puntos $r \in I$ excepto, posiblemente, en un conjunto a lo sumo numerable. Sea $|r'| < \varepsilon$ tal que g es diferenciable en r' y pongamos $x' := x_0 + r' x_n$. Observemos que $\| x_0 - x' \| < \varepsilon$. Afirmamos que $x' \notin F_{n,m}$. En efecto, si $x' \in F_{n,m}$, entonces existen $x^*, y^* \in \partial f(x')$ tal que $\langle x^* - y^*, x_n\rangle \geq 1/m$. De esto se sigue que $\langle x^*, x_n\rangle \neq \langle y^*, x_n\rangle$ son las direcciones de dos líneas tangentes distintas al grafo de la función g en $(r', g(r'))$ lo cual es una contradicción por el hecho de que g es diferenciable en r'. Por consiguiente, $x' \in U \setminus F_{n,m}$ para $m = 1, 2, \ldots$ y, en consecuencia, toda bola abierta $U(x_0, r)$ intersecta a $U \setminus F_{n,m}$; es decir, $U \setminus F_{n,m}$ es un abierto denso en U. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos revela que

$$\bigcap_{n,m=1}^{\infty} (U \setminus F_{n,m})$$

es un G_δ-denso de U. ■

Un resultado similar al Teorema de diferenciabilidad de Mazur pero cambiando Gâteaux diferenciabilidad por Fréchet diferenciabilidad e imponiendo una condición adicional al espacio de Banach, fue obtenida por Asplund y generalizada por Lindenstrauss en los siguientes términos.

Teorema 2.2.17 (Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach tal que* X^* *es separable y sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *cualquier función convexa continua. Entonces* f *es Fréchet diferenciable sobre un subconjunto* G_δ*-denso de* X.

Prueba. Definamos el conjunto

$$F = \big\{x \in X : \ f \text{ no es Fréchet diferenciable en } x\big\}.$$

Vamos a demostrar que F es de primera categoría en X. Para ello consideremos el epígrafo de f, es decir, el subconjunto de $X \times \mathbb{R}$ definido por $\operatorname{epi}(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le t\}$. Siendo $\operatorname{epi}(f)$ un conjunto convexo cerrado con interior no vacío en $X \times \mathbb{R}$, el Teorema de separación de Hahn-Banach en $X \times \mathbb{R}$ nos garantiza la existencia, para cada $x \in X$, de un funcional $p_x \in X^*$ tal que $f(x+h) - f(x) \ge p_x(h)$ para cualquier $h \in X$. Puesto que f no es Fréchet diferenciable en los puntos de F, podemos seleccionar, para cada $x \in F$, un $m_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname*{lím\,sup}_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - p_x(h)}{\|h\|} > \frac{1}{m_x}.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos $F_m = \{x \in F : m_x = m\}$. Usemos ahora el hecho de que X^* es separable, para seleccionar una sucesión densa en X^*, digamos $(x_k^*)_{k=1}^\infty$ y pongamos $U_{m,k} := U(x_k^*, \frac{1}{24m})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Resulta claro entonces que $X^* = \bigcup_{k=1}^\infty U_{m,k}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$F_{m,k} = \big\{x \in F_m : p_x \in U_{m,k}\big\}.$$

Es una tarea fácil probar que $F = \bigcup_{m,k=1}^\infty F_{m,k}$. Por esto, sólo tenemos que demostrar que el conjunto $F_{m,k}$ es nunca-denso para cada $m,k \in \mathbb{N}$. Fijemos $m,k \in \mathbb{N}$ y supongamos, para arribar a una contradicción, que $\overline{F}_{m,k}$ tiene interior no vacío. Entonces existen un $x \in F_{m,k}$ y un entorno abierto U de x tal que $U \subseteq \overline{F}_{m,k}$. Para obtener nuestra contradicción es suficiente demostrar que existe un punto $y \in U$ poseyendo un entorno abierto V tal que $V \cap F_{m,k} = \varnothing$. Siendo f localmente Lipschitz, podemos suponer, sin perder generalidad, que el entorno U de $x \in F_{m,k}$ es de la forma $U = U(x,r)$, donde r se elige de modo tal que f es Lipschitz con constante $K > 1/m$ sobre $U(x,r)$. Observemos que esto implica que $\|p_x\| \le K$. En efecto, tenemos que

$$p_x(h) \ \le \ f(x+h) - f(x), \qquad -p_x(h) \ = \ p_x(-h) \ \le \ f(x-h) - f(x) \quad \text{siempre que } \|h\| < r,$$

y, por lo tanto,

$$|p_x(h)| \ \le \ \text{máx}\,|f(x+h) - f(x)|, |f(x-h) - f(x)| \ \le \ K\|h\| \quad \text{siempre que } \|h\| < r.$$

Ahora bien, como $x \in F_{m,k}$, existe $h \in X$, $\|h\| < r/2$ tal que

$$f(x+h) - f(x) \ge \frac{\|h\|}{m} + p_x(h). \tag{2.2.3}$$

Afirmamos que

$$U\Big(x+h, \frac{\|h\|}{12mK}\Big) \cap F_{m,k} = \varnothing.$$

Supongamos que existe $z \in U(x+h, \|h\|/12mK) \cap F_{m,k}$. Notemos que $z \in U(x,r)$, ya que $\|h\| < r/2$. Como $z \in F_{m,k}$ y $x \in F_{m,k}$, por la definición de $F_{m,k}$ tenemos que $\|p_x - p_z\| < 1/(12m)$. Por la elección de p_z se tiene que

$$f(x) - f(z) \ge p_z(x-z). \tag{2.2.4}$$

Sumando las desigualdades (2.2.3) y (2.2.4) nos da

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(z) &> p_z(x-z)+\frac{\|h\|}{m}+p_x(h) \\ &= p_x(x+h-z)+(p_z-p_x)(x-z)+\frac{\|h\|}{m}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Puesto que $\|x+h-z\| \leq \|h\|/12mK$ y $\|p_x\| \leq K$, tenemos que

$$|p_x(x+h-z)| \leq \frac{\|h\|}{12mK}.$$

Más aun,

$$\|z-x\| \leq \|z-(x+h)+h\| \leq \frac{\|h\|}{12mK}+\|h\| \leq 2\|h\| \qquad \text{y} \qquad \|p_x-p_z\| \leq \frac{1}{12m},$$

de donde se sigue que

$$|(p_x-p_z)(x-z)| \leq \|p_x-p_z\|\,\|x-z\| \leq \frac{1}{12m}\cdot 2\|h\| = \frac{\|h\|}{6m}.$$

Reemplazando estas desigualdades en (2.2.2) obtenemos finalmente que

$$f(x+h)-f(z) > -\frac{\|h\|}{12m}-\frac{\|h\|}{6m}+\frac{\|h\|}{m} > -\frac{\|h\|}{6m}-\frac{\|h\|}{3m}+\frac{\|h\|}{m} = \frac{\|h\|}{2m},$$

lo cual contradice el hecho de que

$$|f(x+h)-f(z)| \;\leq\; K\|x+h-z\| \leq \frac{\|h\|}{12m} \;\leq\; K\frac{\|h\|}{12mK} \;=\; \frac{\|h\|}{12m}.$$

Hemos probado que F es de primera categoría en X y, gracias al Teorema de Categoría de Baire, el conjunto de puntos donde f es Fréchet diferenciable, $G := X \setminus F$, es denso en X. De inmediato vamos a demostrar que, en realidad, G es un G_δ. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$G_n = \left\{ x \in X : \inf_{\delta>0}\sup_{y\in S_X} \frac{f(x+\delta y)+f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} < \frac{1}{n} \right\}.$$

Observemos que, por la convexidad de f, tenemos que para cada $x,y \in X$ y cada $0<\delta'<\delta$

$$\frac{f(x-\delta y)-f(x)}{-\delta} \;\leq\; \frac{f(x-\delta' y)-f(x)}{-\delta'} \;\leq\; \frac{f(x+\delta' y)-f(x)}{\delta'} \;\leq\; \frac{f(x+\delta y)-f(x)}{\delta}.$$

Se sigue de esto que f es Fréchet diferenciable si, y sólo si,

$$\inf_{\delta\downarrow 0}\sup_{y\in S_X} \frac{f(x+\delta y)-f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} \;=\; 0,$$

lo cual significa que $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. En particular, cada G_n es denso en X. La prueba terminará una vez que logremos demostrar que G_n es un conjunto abierto en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Para este fin, sea $n \in \mathbb{N}$ y tomemos cualquier $x \in G_n$. Siendo f continua en x, ella es localmente acotada en dicho punto y, por lo tanto, gracias al

Lema 2.2.5, localmente Lipschitz en x, lo cual significa que existe alguna bola abierta $U(x,r)$ sobre la cual f es L-Lipschitz. Además, como $x \in G_n$, existen un $\delta < r/2$ y $C < 1/n$ tal que

$$\sup_{y \in S_X} \frac{f(x+\delta y)+f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} < C.$$

Escojamos $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4L}(\frac{1}{n}-C)\}$. Afirmamos que $U(x,\varepsilon) \subseteq G_n$. En efecto, dado $z \in U(x,\varepsilon)$, tenemos que para cualquier $y \in S_X$,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+\delta y)+f(z-\delta y)-2f(z)}{\delta} \\
&\leq \frac{\big[f(z+\delta y)-f(x+\delta y)\big]+f(x+\delta y)+\big[f(z-\delta y)-f(x-\delta y)\big]+f(x-\delta y)-2\big[f(z)-f(x)\big]-2f(x)}{\delta} \\
&\leq \frac{L\|z-x\|+f(x+\delta y)+L\|z-x\|+f(x-\delta y)+2L\|z-x\|-2f(x)}{\delta} \\
&= \frac{f(x+\delta y)+f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} + 4L\frac{\|z-x\|}{\delta} \\
&< C + \frac{4L\varepsilon}{\delta} < C + \Big(\frac{1}{n}-C\Big) = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba. ■

Es importante destacar que la conclusión del Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss sigue siendo válido si la función f es convexa y continua sobre cualquier subconjunto abierto y convexo U de X (véase, por ejemplo, [181], Theorem 8, p. 153-154). La demostración que acabamos de dar se debe, fundamentalmente, a Preiss y Zajíček.

Los espacios de Banach que tienen la propiedad de que cualquier función convexa continua definida sobre un subconjunto abierto convexo de él es Fréchet (resp. Gâteaux) diferenciable sobre un subconjunto G_δ-denso reciben, por su importancia, nombres especiales.

Definición 2.2.5. *Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es un* ***espacio de Asplund*** *(respectivamente,* ***débilmente de Asplund****) si cualquier función convexa continua $f : U \to \mathbb{R}$, definida sobre un subconjunto abierto convexo U de X, es Fréchet diferenciable (respectivamente, Gâteaux diferenciable) en cada punto de algún subconjunto G_δ-denso de U.*

Comentario Adicional 2.2.11 1) Notemos que, con esta nueva terminología, el Teorema de diferenciabilidad de Mazur puede ser expresado en la forma:

(i) *Todo espacio de Banach separable es débilmente de Asplund.*

Mientras que el Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss nos dice que:

(ii) *Todo espacio de Banach con dual separable es de Asplund.*

Por otro lado ℓ_1, siendo separable, es, por el Teorema de diferenciabilidad de Mazur, un espacio débilmente de Asplund aunque *no es un espacio de Asplund*. En efecto, es un ejercicio aleccionador demostrar que el conjunto de los puntos de ℓ_1 donde la norma $\|\cdot\|_1$ es Gâteaux diferenciable, es

$$G = \big\{(\varsigma_k)_{k=1}^{\infty} : \varsigma_k \neq 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\big\}.$$

Es claro que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde cada $G_n = \big\{(\varsigma_k)_{k=1}^{\infty} : \varsigma_n \neq 0\big\}$ es abierto y denso en ℓ_1. Un poco más de trabajo se requiere para demostrar que $\|\cdot\|_1$ no es Fréchet diferenciable en ningún punto de

ℓ_1. En el otro extremo de los espacios ℓ_p, resulta que ℓ_∞ no es un espacio débilmente de Asplund (véase, por ejemplo, [351], Example 1.21). Sin embargo, c_0, por ser un espacio separable con dual separable es, por el Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss, un espacio de Asplund. También es claro que:

(iii) *Todo espacio de Asplund es débilmente de Asplund.*

Es bueno advertir que la noción de espacios débilmente de Asplund no está relacionado con la topología débil del espacio de Banach. Los conceptos de espacios de Asplund y débilmente de Asplund fueron introducidos por E. Asplund pero con nombres diferentes; de hecho él los llamó espacios de diferenciabilidad fuerte y débil, respectivamente. Fueron, sin embargo, Namioka y Phelps [332] los primeros en llamar a los espacios de diferenciabilidad fuerte espacios de Asplund, mientras que Larman y Phelps [279] usaron el término débilmente de Asplund para la diferenciabilidad débil. Todos estos hechos y más, pero mucho más, pueden ser consultados y ampliados, por ejemplo, en [71], [181] y [351].

2) En 1990, Dominikus Noll demuestra en [341] un resultado análogo al Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss pero sobre conjuntos más pequeños.

Teorema 2.2.18 (Noll). *Sea X un espacio de Asplund space y sea C un subconjunto G_δ y convexo de X que no está contenido en ningún hiperplano cerrado de X. Sea $\varphi : C \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semi-continua tal que φ es localmente Lipschitz sobre un subconjunto denso de C. Entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de C tal que φ es Fréchet diferenciable en cualquier punto $x \in G$.*

3) La parte final de la demostración del Teorema de diferenciabilidad de Asplund-Lindenstrauss dice que: *Si cada función convexa continua $f : X \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en cada punto de algún subconjunto denso de X, entonces ella es Fréchet diferenciable en cada punto de algún subconjunto G_δ-denso de X*. En consecuencia, *X es un espacio de Asplund si cada función convexa continua sobre X es Fréchet diferenciable sobre algún subconjunto denso de X (que depende de la función)*. Por otro lado, hasta hace muy poco tiempo se desconocía si el resultado anterior era válido para espacios débilmente de Asplund; es decir, *si cada función convexa continua sobre X es Gâteaux diferenciable sobre algún subconjunto denso de X* (esto es lo que se llama *Espacio de Gâteaux Diferenciabilidad*), ¿es cierto que dicho espacio es débilmente de Asplund? La respuesta, obtenida recientemente, es NO. En efecto, W. B. Moors y S. Somasundaram en [321], exhiben un espacio de Gâteaux diferenciabilidad que no es débilmente de Asplund.

4) Otro resultado interesante y, si se quiere, impresionante pues su exigencia es mínima aunque a veces difícil de verificar es el siguiente ([71],Theorem 5.6.2, p. 150):

Teorema de Ekeland-Lelourg. *Si existe una función diferenciable $f : X \to \mathbb{R}$ abollada sobre un espacio de Banach X, entonces X es un espacio de Asplund.*

Una *función diferenciable abollada* (bump) es una función $f : X \to \mathbb{R}$ la cual es Fréchet diferenciable en cada $x \in X$ y cuyo soporte es un subconjunto no vacío y acotado de X, donde el soporte de f es la clausura (en la norma) del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

5) Entre los espacios de Banach que son débilmente de Asplund están:

   a) *Los espacios de Banach X cuyo dual X^* admite una norma dual estrictamente convexa*. Una norma $\|\cdot\|$ sobre X bajo la cual $\left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| < 1$ siempre que $x_1, x_2 \in S_X$ con $x_1 \neq x_2$, se dice que es *estrictamente convexa*. En general, los espacios de Banach X cuya norma es

Gâteaux suave; es decir, una norma sobre X que es Gâteaux diferenciable en cada punto de X, son débilmente de Asplund. Ver, por ejemplo, [374].

b) Los *débilmente compacto generado*. Un espacio de Banach X se llama *débilmente compacto generado* (WCG) si existe un subconjunto débilmente compacto K de X tal que $X = \overline{[K]}$, donde $[K]$ denota el subespacio lineal generado por K. Tales espacios incluyen a los espacios de Banach separables, a los reflexivos, a los $L_1(\mu)$ si μ es σ-finita, a los $c_0(\Gamma)$ para cualquier conjunto Γ, a $C(\Omega)$ si Ω es Eberlein compacto, etc. Véase, por ejemplo, ([74], pág. 62-75) para una demostración de que estos espacios son WCG y, ([157], p. 19, Theorem 1.3.4) para la demostración de que todo espacio WCG es débilmente de Asplund.

c) Los *débilmente $\mathcal{K}$-analíticos*. Un espacio de Banach X se llama *débilmente $\mathcal{K}$-analítico* si (X,ω) es *$\mathcal{K}$-analítico*; lo cual significa que existe una aplicación superiormente semicontinua $F:\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}(X)$ tal que

$$\bigcup_{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} K(f) = X,$$

donde $\mathcal{K}(X)$ denota la colección de todos los subconjuntos débilmente compactos de X. Véase, por ejemplo, [157], p. 69, Corollary 4.1.3, para una demostración de este hecho.

d) La *clase de Stegall (para espacios de Banach)*, ([157], p. 56), etc.

6) Un hecho importante que se deriva de los espacios débilmente de Asplund es el siguiente:

Teorema. *Si X es un espacio débilmente de Asplund, entonces todo subconjunto norma-acotado K de X^* es relativamente secuencialmente ω^*-compacto; es decir, cualquier sucesión en K admite una subsucesión ω^*-convergente en X^**. (Véase, [157], Theorem 2.1.2, p. 38).

Existen varias caracterizaciones de los espacios de Asplund en términos de ciertas propiedades estructurales de los espacios de Banach las cuales pueden no estar directamente relacionadas a la diferenciabilidad. En este sentido, una de las caracterizaciones de mayor utilidad es la siguiente.

Teorema 2.2.19. *Para cualquier espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Asplund.*

(2) *Cada subespacio norma separable Y de X, su dual Y^* es norma separable.*

En [181], [351], [448] se puede ver la demostración de este resultado y, además, otras caracterizaciones geométricas de los espacios de Asplund que no abordaremos en estas notas.

2.2.3. ‖ ► Norma LUR, compacidad débil y puntos más lejanos

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La norma $\|\cdot\|$ se llama **localmente uniformemente rotunda** en $x_0 \in X$ si, siempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_0+x_n}{2} \right\| = \|x_0\|$, y

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$,

entonces $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$. Si la norma $\|\cdot\|$ es localmente uniformemente rotunda en cada punto de X, diremos que ella es **localmente uniformemente rotunda** o, brevemente, (**LUR**).

Notemos que la norma $\|\cdot\|$ es LUR en $x_0 \in S_X$ si, y sólo si, siempre que $x_n \in S_X$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0 + x_n\| = 2$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0 - x_n\| = 0$.

La siguiente caracterización nos será de utilidad en la demostración del Teorema 2.2.21.

Teorema 2.2.20. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X es* LUR.

(b) *Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in S_X$, existe un $\delta := \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que*

$$\|x - y\| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } x \in B_X \quad y \qquad \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta.$$

Prueba. Suponga que X es LUR pero que (b) no se cumple. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y un $x \in S_X$ tal que para cada $\delta > 0$ se cumple que $\|x - y\| \geq \varepsilon$, pero $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta$. De aquí se sigue la existencia de una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en S_X tal que $\|x - y_n\| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $\left\|\frac{1}{2}(x+y_n)\right\| \to 1$, lo que, evidentemente, contradice (a).

La otra implicación se deja como ejercicio al lector. ■

Recordemos, página 230, que una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio de Banach X tiene la propiedad de Kadec-Klee si la topología de la norma y la topología débil coinciden sobre la esfera unitaria S_X. Un hecho importante en la geometría de los espacio de Banach lo constituye el siguiente resultado.

Teorema 2.2.21. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si $\|\cdot\|$ es una norma* LUR, *entonces $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec-Klee.*

Prueba. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma LUR y que $x_0 \in S_X$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir un $\delta > 0$, tal que $\|x_0 - x\| < \varepsilon$ siempre que $x \in B_X$ y $\left\|\frac{1}{2}(x_0 + x)\right\| > 1 - \delta$. Seleccionemos, por el Teorema de Hahn-Banach, un $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x_0) = 1$ y que para cada $x \in B_X$ se cumpla que $x^*(x) > 1 - \delta$. Entonces

$$\left\|\frac{1}{2}(x_0 + x)\right\| \;\geq\; \frac{1}{2}x^*(x_0 + x) \;>\; 1 - \delta$$

y, por lo tanto, $\|x_0 - x\| < \varepsilon$. Esto nos dice que el conjunto

$$U \;=\; \left\{x \in B_X : x^*(x) \;>\; 1 - \delta\right\}$$

constituye un entorno básico de x_0 en la norma topología de B_X. ■

El resultado anterior combinado con el Ejemplo (**B**-16), página 230, nos dice que:

Corolario 2.2.14. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si la norma $\|\cdot\|$ es* LUR, *entonces (B_X, ω) es un espacio de Baire.*

Fijemos de nuevo un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y sea K un subconjunto débilmente compacto de X. Para cada $x \in X$, definimos la función

$$r(x) \;=\; \sup\left\{\|x - z\| : z \in K\right\},$$

a la que llamaremos la **distancia más larga de** x **a** K. Es fácil ver que la función r es convexa y 1-Lipschitz sobre X. Diremos que un punto $z \in K$ es el **punto más lejano a** x en K si $r(x) = \|x - z\|$.

Para cada $x \in X$, la subdiferencial de r en x, $\partial_r(x)$, vive en la bola unitaria de X^*; es decir, $\partial_r(x) \subseteq B_{X^*}$. En efecto, si $x^* \in \partial_r(x)$, entonces $x^*(y-x) \leq r(y) - r(x) \leq \|y-x\|$ para cualquier $y \in X$ y, por lo tanto, $\|x^*\| \leq 1$.

Teorema 2.2.22 (Lau). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces el conjunto*

$$G = \Big\{x \in X : \sup\{x^*(x-z) : z \in K\} = r(x) \text{ para algún } x^* \in \partial_r(x)\Big\}$$

es un G_δ-denso en X. Más aún, si $x \in G$, entonces K posee un punto más lejano a x.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_n = \Big\{x \in X : \inf_{y \in K} x^*(y-x) \geq -r(x) + \frac{1}{n}, \text{ para algún } x^* \in \partial_r(x)\Big\}.$$

Afirmamos que F_n es cerrado para cada n. En efecto, sea $(x_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión en F_n tal que $\lim x_j = x$ y para cada $j \in \mathbb{N}$, escojamos $x_j^* \in \partial_r(x_j)$ de acuerdo a la definición de F_n. Usando el hecho de que B_{X^*} es ω^*-compacto y teniendo en cuenta que $\partial_r(x_j) \subseteq B_{X^*}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, podemos asegurar que la sucesión $(x_j^*)_{j=1}^\infty$ posee un ω^*-punto de acumulación, al que llamaremos x^*. Consideremos las desigualdades

$$x_j^*(y - x_j) \geq -r(x_j) + \frac{1}{n}, \qquad y \in K \qquad \text{y} \qquad x_j^*(z - x_j) \leq r(z) - r(x_j), \qquad z \in X.$$

Puesto que $x_j \to x$ y $\| x_j^* \| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, resulta claro que los miembros izquierdos de las dos desigualdades anteriores poseen, respectivamente, a $x^*(y-x)$ y a $x^*(z-x)$ como puntos de acumulación. Se sigue de esto que

$$x^*(y - x) \geq -r(x) + \frac{1}{n}, \qquad y \in K \qquad \text{y} \qquad x^*(z - x) \leq r(z) - r(x), \qquad z \in X.$$

Esto prueba que $x \in F_n$ y así, F_n es cerrado.

Puesto que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, donde cada $G_n = X \setminus F_n$ es abierto, entonces sólo nos resta demostrar que G_n es denso en X, o equivalentemente, F_n es nunca-denso en X. Supongamos que para algún n, $\operatorname{int}(F_n) \neq \varnothing$ y elijamos un $\lambda > 0$ tal que la bola abierta $U := U\big(y_0, 2\lambda r(y_0)\big) \subseteq \operatorname{int}(F_n)$, para algún $y_0 \in F_n$. Pongamos $\varepsilon = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)n} \min\{1, r(y_0)\}$. Escojamos ahora un $z_0 \in K$ tal que $\|y_0 - z_0\| > r(y_0) - \varepsilon > r(y_0)/2$. Nótese que si definimos $x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0)$, entonces $\|x_0 - y_0\| = \lambda \|y_0 - z_0\| > \lambda r(y_0)/2 > \varepsilon$. Tomemos un punto x_1 en el segmento de línea $[x_0, y_0]$ tal que $\|x_0 - x_1\| = \varepsilon$. Puesto que $\|x_0 - y_0\| = \lambda\|y_0 - z_0\| \leq \lambda r(y_0)$, resulta que tanto x_0, así como x_1, están en $U \subseteq F_n$. Por la definición de F_n, existe un $x_1^* \in \partial_r(x_1)$ tal que

$\inf\{x_1^*(y-x_1) : y \in K\} \geq -r(x_1)+\frac{1}{n}$. Usando la desigualdad anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
r(y_0)-r(x_1) &< \|y_0-z_0\|+\varepsilon-r(x_1) \;=\; \frac{1}{1+\lambda}\|x_0-z_0\|+\varepsilon-r(x_1)\\
&\leq \frac{1}{1+\lambda}r(x_0)+\varepsilon-r(x_1) \;\leq\; \frac{1}{1+\lambda}r(x_1)+2\varepsilon-r(x_1)\\
&\leq \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big(x_1^*(z_0-x_1)-\frac{1}{n}\Big)+2\varepsilon \;\leq\; \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big(x_1^*(z_0-x_0)-\frac{1}{n}\Big)+3\varepsilon\\
&= \frac{1}{1+\lambda}\Big(x_1^*(\lambda z_0-\lambda x_0)-\frac{\lambda}{n}\Big)+3\varepsilon \;=\; \frac{1}{1+\lambda}x_1^*\big((1+\lambda)y_0-(1+\lambda)x_0\big)-\frac{\lambda}{(1+\lambda)n}+3\varepsilon\\
&= x_1^*(y_0-x_0)-\frac{\lambda}{(1+\lambda)n}+3\varepsilon \;\leq\; x_1^*(y_0-x_1)-\frac{\lambda}{(1+\lambda)n}+4\varepsilon\\
&\leq x_1^*(y_0-x_1).
\end{aligned}$$

Por esto, $r(y_0) < r(x_1)+x_1^*(y_0-x_1)$, lo cual es contrario al hecho de que $x_1^* \in \partial_r(x_1)$. Esta contradicción establece que cada F_n es nunca-denso en X. Por el Teorema de Categoría de Baire, G es un G_δ-denso en X. Con esto queda probada la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte, sea $x \in G$ y escojamos un $x^* \in \partial_r(x)$ según la definición de G. Como x^* es un funcional débilmente continuo, la compacidad débil de K nos permite hallar un $z_0 \in K$ tal que $x^*(x-z_0) = \sup\{x^*(x-z) : z \in K\}$. Entonces

$$r(x) \;=\; x^*(x-z_0) \;\leq\; \|x^*\|\cdot\|x-z_0\| \;\leq\; \|x-z_0\| \;\leq\; r(x).$$

De allí que $\|x-z_0\| = r(x)$ y termina la demostración. ■

2.2.4. ‖ ► Dentabilidad, la PRN y densidad de funcionales

En esta sección mostraremos una condición geométrica, aludida en la sección anterior, conocida como dentabilidad, que está estrechamente relacionada con la noción de diferenciabilidad. Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y A un subconjunto no vacío acotado de X. Como siempre, la notación $\overline{\mathrm{co}}(A)$, denota la clausura de la cápsula, o envoltura, convexa del conjunto A.

Definición 2.2.6. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y D un subconjunto no vacío acotado de X. Para cada $f \in X^*$, $f \neq 0$, escribamos $\mathrm{M}(D,f) = \sup\big\{f(x) : x \in D\big\}$. Dado $\alpha > 0$, el subconjunto de D,*

$$\mathrm{S}(D,f,\alpha) \;=\; \big\{x \in D : f(x) > \mathrm{M}(D,f)-\alpha\big\}$$

*se llama una **rebanada** de D. Diremos que D es **dentable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe un punto $x_\varepsilon \in D$ tal que $x_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon))$. Suponga ahora que $D \subseteq X$, pudiendo ser D no acotado. Diremos que D es **hereditariamente dentable** si cada subconjunto no vacío y acotado de D es dentable.*

Las nociones de dentabilidad y rebanadas están relacionadas por medio del siguiente resultado.

Teorema 2.2.23. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y D un subconjunto no vacío norma-acotado de X. Son equivalentes:*

(1) *D es dentable.*

(2) *D contiene rebanadas de diámetros arbitrariamente pequeños.*

Prueba. Suponga, en primer lugar, que D es dentable y sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un $x \in D$ tal que $x \notin \overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(x,\varepsilon))$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existen un $f \in B_{X^*}$ y un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\left\{ f(x) : x \in \overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(x,\varepsilon))\right\} < \lambda < f(x).$$

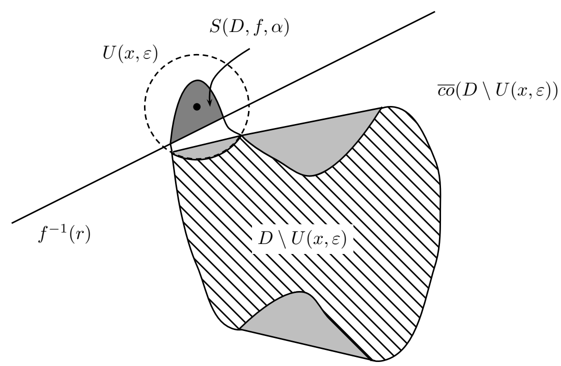


Figura 2.1:

Si ahora definimos $\alpha = \mathrm{M}(D,f) - \lambda$, entonces claramente

$$\mathrm{S}(D,f,\alpha) = \left\{ y \in D : f(y) > \mathrm{M}(D,f) - \alpha \right\} \subseteq U(x,\varepsilon) \cap D \tag{$\bigstar$}$$

tiene diámetro menor que 2ε.

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\mathrm{diam}\big(\mathrm{S}(D,f,\alpha)\big) \leq \varepsilon$. Definamos $\lambda = \mathrm{M}(D,f) - \alpha$ y seleccionemos $x \in S(D,f,\alpha)$. Como $\mathrm{diam}\big(\mathrm{S}(D,f,\alpha)\big) \leq \varepsilon$, resulta que

$$\mathrm{S}(D,f,\alpha) \subseteq U(x,\varepsilon) \cap D$$

y, en consecuencia,

$$\overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus U(x,\varepsilon)\big) \subseteq \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus \mathrm{S}(D,f,\alpha)\big) \subseteq f^{-1}\big((-\infty,\lambda]\big).$$

Es claro que $x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus U(x,\varepsilon)\big)$, pues si x estuviera en $D \setminus U(x,\varepsilon)$ tendríamos, por la desigualdad anterior, que $f(x) \leq \lambda$ lo cual es imposible pues $f(x) > \lambda$ por estar x en $\mathrm{S}(D,f,\alpha)$. Esto prueba que D es dentable. ■

Es importante resaltar, para referencia futura, lo que dice ($\bigstar$) en el teorema anterior.

Si D es un subconjunto dentable de X y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto ω-abierto $U \subseteq X$ tal que

$$U \cap D \neq \varnothing \quad \text{y} \quad \|\cdot\| - \mathrm{diam}(U \cap D) < \varepsilon. \tag{✠}$$

Corolario 2.2.15. *Sea D un subconjunto acotado de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$. Si $K = \overline{\mathrm{co}}(D)$ es dentable, entonces también lo es D.*

Prueba. Observemos que, para cada $f \in X^* \setminus \{0\}$, se cumple que

$$\mathrm{M}(D,f) = \sup_{x \in D} x^*(x) = \sup_{x \in K} x^*(x) = \mathrm{M}(K,f).$$

Por lo tanto, si $\alpha > 0$ y $f \in X^* \setminus \{0\}$, entonces $\mathrm{S}(D,f,\alpha) \subseteq \mathrm{S}(K,f,\alpha)$ y así, si K contiene rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño, también las posee D. ■

Si K es un subconjunto no vacío acotado de X^*, se define la **ω^*-rebanada** de K, como

$$\mathrm{S}(K,x,\alpha) = \{f \in K : f(x) > \mathrm{M}(K,x) - \alpha\}$$

donde $x \in X$ y $\alpha > 0$. Un subconjunto K de X^* se llama **ω^*-dentable** si éste contiene ω^*-rebanadas de norma-diámetros arbitrariamente pequeños. Un subconjunto K de X^* (K puede no estar acotado) se dice que **ω^*-hereditariamente dentable** si cada subconjunto no vacío y acotado de K es ω^*-dentable.

En la teoría de los espacios de Banach, la noción conocida como Propiedad de Radon-Nikodym, desarrollada intensamente en las décadas de los 70 y los 80 del siglo pasado, constituye uno de los pilares fundamentales de esa teoría. De las variadas y sorprendentes formas equivalentes que existen en la literatura en relación a dicha propiedad (véase, por ejemplo, las monografías de J. Diestel and J. Uhl [129] y R. D. Bourgin [71]), la siguiente nos será de gran utilidad a nuestros intereses.

Definición 2.2.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que X tiene la **Propiedad de Radon-Nikodým** (abreviado* **PRN***) si cada subconjunto no vacío acotado D de X es dentable, es decir, si X es hereditariamente dentable.*

Observe que, en virtud del Corolario 2.2.15, X tiene la PRN si cada subconjunto convexo y cerrado es dentable. En general, podemos definir la PRN para subconjuntos de X del modo siguiente.

Definición 2.2.8. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Diremos que K tiene la* **PRN** *si cada subconjunto convexo, cerrado y acotado de K es dentable.*

Es importante destacar las siguientes formas equivalentes de la PRN para un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X.

Teorema 2.2.24 ([71], Theorem 2.3.6). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Son equivalentes:*

(1) *K tiene la* PRN.

(2) *Cada subconjunto convexo, cerrado, acotado y separable de K tiene la* PRN.

(3) *K es hereditariamente dentable.*

(4) *Cada subconjunto de K posee rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeños.*

Prueba. Se deja como ejercicio al lector. ■

Definición 2.2.9. *Un **árbol infinito** en X es una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que*

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si además,

$$\|x_{2n} - x_n\| = \|x_{2n+1} - x_n\| \geq \delta$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $\delta > 0$, entonces se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es un **δ-árbol infinito**.*

Corolario 2.2.16. *Si $(X \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la* PRN*, entonces X no contiene δ-árboles infinitos acotados para ningún $\delta > 0$.*

Prueba. En efecto, si para algún $\delta > 0$ existiera un δ-árbol infinito acotado en X, entonces dicho conjunto no sería dentable y, por lo tanto, X no tendría la PRN. ■

Dos resultados fundamentales y que nos interesan en esta sección son los siguientes, cuya demostración se puede ver, por ejemplo, en [200], pág. 48-49:

Teorema de Krein-Milman. *Si K es un subconjunto no vacío convexo y compacto de un espacio vectorial topológico localmente convexo X, entonces*

$$\operatorname{ext}(K) \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad K = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext}(K)).$$

Teorema de Milman. *Si X es un espacio vectorial topológico localmente convexo, $K \subseteq X$ es convexo y compacto, y si $F \subseteq K$ es tal que $K = \overline{\operatorname{co}}(F)$, entonces*

$$\operatorname{ext}(K) \subseteq \overline{F}.$$

Fijemos un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y suponga que K es un subconjunto no vacío convexo, cerrado y acotado. El conjunto de los puntos extremales de K, $\operatorname{ext}(K)$, cuando es no vacío, constituye un conjunto de particular importancia en la geometría de los espacios de Banach. Existen ciertos subconjuntos especiales en $\operatorname{ext}(K)$ que permiten determinar ciertas propiedades del conjunto K que no se reflejan con el conjunto $\operatorname{ext}(K)$.

Para cada $f \in X^*$, denote por $\mathrm{K}_f = \{z \in K : f(z) = \sup_{y \in K} f(y)\}$. Recordemos que $x \in K$ es un llamado un **punto expuesto** de K si existe $f \in X^*$ tal que $\mathrm{K}_f = \{x\}$, es decir, si existe $f \in X^*$ para el cual

$$f(x) > f(y) \quad \text{para todo } y \in K,\ y \neq x.$$

Al funcional f se le dice que **expone** a x y se le llama un **funcional expuesto** de K. Denotaremos por $\exp(K)$ el conjunto de todos los puntos expuestos de K y por $\mathcal{E}(X^*, K)$ denotaremos el conjunto de todos los funcionales expuestos de K. Por último, diremos que $x \in K$ es un **punto fuertemente expuesto** de K si existe $f \in X^*$ tal que

(a) f expone a x, y

(b) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \operatorname{diam}(\mathrm{S}(K, f, \alpha)) = 0.$

En este caso diremos que f **expone fuertemente** a x y a dicho funcional se le llama **funcional fuertemente expuesto** de K. Escribiremos s-$\exp(K)$ para denotar el conjunto de todos los puntos fuertemente expuestos de K y por $\mathcal{SE}(X^*, K)$ denotaremos el conjunto de todos los funcionales fuertemente expuestos de K.

Las siguientes relaciones se cumplen:

$$\text{s-}\exp(K) \subseteq \exp(K) \subseteq \operatorname{ext}(K) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \mathcal{SE}(X^*, K) \subseteq \mathcal{E}(X^*, K).$$

En espacios de Banach de dimensión infinita se pueden dar ejemplos de conjuntos convexos, cerrados y acotados donde las inclusiones anteriores son estrictas en cada uno de los casos (véase, por ejemplo, [71], p. 43-44). Sin embargo, para la primera cadena de contenciones, si $\dim(X) < +\infty$, entonces s-$\exp(K) = \exp(K)$ (véase, por ejemplo, [7], Lemma 7.84, p. 306).

Si x es un punto de un subconjunto acotado K de X tal que

$$f(x) = \sup\{f(z) : z \in K\} := \mathrm{M}(K, f)$$

para algún $f \in X^* \setminus \{0\}$, entonces decimos que x es un **punto soporte** de K y a f lo llamaremos un **funcional soporte** de K. Definimos

$$\mathrm{NA}(K) \;=\; \big\{ f \in X^* \setminus \{0\} : \; f \textit{ es un funcional soporte de } K \big\}.$$

En el caso particular cuando $K = B_X$, escribiremos $\mathrm{NA}(X)$ en lugar de $\mathrm{NA}(B_X)$ y a los elementos de $\mathrm{NA}(X)$ los llamaremos **funcionales que alcanzan la norma**, debido a que si $f \in \mathrm{NA}(X)$, entonces $\|f\| = f(x_0)$ para algún $x_0 \in B_X$. En general, a $\mathrm{NA}(K)$ se le llama un **conjunto de Bishop-Phelps** debido fundamentalmente a un resultado fascinante de E. Bishop y R. R. Phelps ([53]) el cual establece que:

Teorema 2.2.25 (Bishop-Phelps). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada subconjunto convexo, cerrado y acotado K de X, el con junto* $\mathrm{NA}(K)$ *es norma-denso en X^*.*

Existen varias demostraciones hermosas y elegantes de éste resultado. Una de ellas usa el principio variacional de Ekeland (véase, por ejemplo, [125]). Otra demostración interesante del mismo teorema para el caso en que X es norma-separable es presentada en ([200], Theorem 370, p. 300). Nosotros abordaremos la demostración clásica de dicho teorema, la demostrada por E. Bishop y R. R. Phelps, por lo que vamos a requerir varios resultados adicionales.

Lema 2.2.6. *Sean $f, g \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$. Si*

$$x \in f^{-1}(0) \cap B_X \quad \textit{implica que} \quad |g(x)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces $\|f - g\| \leq \varepsilon$ o $\|f + g\| \leq \varepsilon$.

Prueba. Notemos en primer lugar que la restricción de g al subespacio cerrado $f^{-1}(0)$ es un funcional lineal de norma a lo sumo $\varepsilon/2$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe un $h \in X^*$ tal que $h = g$ sobre $f^{-1}(0)$ y $\|h\| \leq \varepsilon/2$. Ahora, puesto que $g - h \equiv 0$ sobre $f^{-1}(0)$, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g - h = \lambda f$. Por esto,

$$\big|1 - |\lambda|\big| \;=\; \big|\, \|g\| - \|g - h\| \,\big| \;\leq\; \|h\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\lambda \geq 0$, entonces

$$\|f - g\| \;=\; \|(1-\lambda)f - h\| \;\leq\; |1 - \lambda| + \|h\| = \big|1 - |\lambda|\big| + \|h\| \;\leq\; \varepsilon,$$

mientras que si $\lambda < 0$, entonces

$$\|f + g\| \;=\; \|(1+\lambda)f + h\| \;\leq\; |1 + \lambda| + \|h\| = \big|1 - |\lambda|\big| + \|h\| \;\leq\; \varepsilon.$$

■

La siguiente consecuencia técnica del Lema 2.2.6 será usada más adelante.

Lema 2.2.7. *Sean $f \in S_{X^*}$, $\lambda > 0$ y definamos $V_\lambda = f^{-1}(0) \cap B(0, \lambda)$. Sean $x_0, y \in X$ satisfaciendo*

$$f(x_0) \;>\; f(y) \qquad y \qquad \frac{2}{\lambda}\|x_0 - y\| \;\leq\; 1.$$

Si $g \in S_{X^*}$ y $g(x_0) \;>\; \mathrm{M}(y + V_\lambda, g)$, entonces $\|f - g\| \;\leq\; \frac{2}{\lambda}\|x_0 - y\|$.

Prueba. Para poder aplicar el Lema 2.2.6, tomemos $x \in f^{-1}(0) \cap B_X$. Entonces $y \pm \lambda x \in y + V_\lambda$ lo que garantiza que $g(y) \pm \lambda g(x) < g(x_0)$ pues $g(x_0) > \mathrm{M}(y+V_\lambda, g)$. Se sigue de esto que $g(x_0) - g(y) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{2}{\lambda}(g(x_0) - g(y))$. Entonces $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Un llamado al Lema 2.2.6 nos dice que

$$\| g - f \| \leq \varepsilon = \frac{2}{\lambda}\big(g(x_0) - g(y)\big) \leq \frac{2}{\lambda} \| x_0 - y \|$$

o bien

$$\| g + f \| \leq \frac{2}{\lambda}\big(g(x_0) - g(y)\big).$$

Pero si $\| g + f \| \leq \frac{2}{\lambda}\big(g(x_0) - g(y)\big)$, entonces, teniendo en cuenta que $f(x_0) > f(y)$, resultaría que

$$\begin{aligned} 0 < g(x_0) - g(y) &< g(x_0) - g(y) + f(x_0) - f(y) \\ &= (g+f)(x_0 - y) \\ &\leq \| f + g \| \, \| x_0 - y \| \\ &\leq \frac{2}{\lambda}\big(g(x_0) - g(y)\big) \| x_0 - y \| \end{aligned}$$

lo cual implicaría que $1 < \frac{2}{\lambda} \| x_0 - y \|$, una desigualdad que es contraria a nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\| f - g \| \leq \frac{2}{\lambda} \| x_0 - y \|$. ∎

Para cada $f \in S_{X^*}$ y $0 < \lambda < 1$, definamos

$$\mathrm{C}(f, \lambda) = \big\{ x \in X : \; f(x) \geq \lambda \| x \| \big\}.$$

Entonces $\mathrm{C}(f, \lambda)$ es un cono convexo cerrado con interior no vacío (y vértice 0).

Lema 2.2.8. *Sean* $f, g \in S_{X^*}$, $0 < \varepsilon < 1$ *y* $0 < \lambda < \varepsilon/(2+\varepsilon)$. *Si* $g(z) \geq 0$ *para cada* $z \in \mathrm{C}(f, \lambda)$, *entonces* $\| f - g \| \leq \varepsilon$.

Prueba. Sea $x \in X$ y supongamos que $x \in f^{-1}(0) \cap B_X$. Vamos a probar que $|g(x)| \leq \varepsilon/2$. Para este fin, escojamos $y \in S_X$ tal que $f(y) \geq \lambda(2+\varepsilon)/\varepsilon$. Entonces

$$\lambda \left\| y \pm \frac{2}{\varepsilon} x \right\| \leq \lambda \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) \leq f(y) = f\left(y \pm \frac{2}{\varepsilon} x\right)$$

y, en consecuencia, $y \pm \frac{2}{\varepsilon} x \in \mathrm{C}(f, \lambda)$. Como $g \geq 0$ sobre $\mathrm{C}(f, \lambda)$, entonces $\left|\frac{2}{\varepsilon} g(x)\right| \leq g(y) \leq 1$ o, lo que es lo mismo, $|g(x)| \leq \varepsilon/2$. Por el Lema 2.2.7, o bien $\| f - g \| \leq \varepsilon$ o $\| f + g \| \leq \varepsilon$. Veamos que esto último no puede ocurrir. En efecto, sea $z \in S_X$ con $f(z) > \varepsilon$. Entonces $f(z) > \lambda \| z \|$ tal que $z \in \mathrm{C}(f, \lambda)$. De aquí que $g(z) \geq 0$ y, por lo tanto, $\| f + g \| \geq (f+g)(z) \geq f(z) > \varepsilon$. ∎

Prueba del Teorema de Bishop-Phelps. Es suficiente demostrar que si $f \in S_{X^*}$ y si $0 < \varepsilon < 1$, entonces existe un $g \in \mathrm{NA}(K)$ tal que $\| f - g \| \leq \varepsilon$.

Sea $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)$. Definamos un ordenamiento parcial $\preceq$ sobre K del modo siguiente: para $x, y \in K$, diremos que

$$x \preceq y \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad \lambda \| y - x \| \leq f(y) - f(x).$$

Observemos que $x \preceq y$ si, y sólo si, $y - x \in \mathrm{C}(f, \delta)$.

Supongamos que L es un subconjunto totalmente (= linealmente) ordenado de $(K,\preceq)$. Si $x,y \in L$, satisfacen la relación $x \preceq y$, entonces $f(x) \leq f(y)$. Por consiguiente, como la red $(f(x))_{x\in L}$ es monótona no decreciente en $\mathbb{R}$ y acotada superiormente por $\mathrm{M}(K,f)$, ella converge. Pero ya que $\lambda \|y-x\| \leq f(y)-f(x)$ para $x \preceq y$, entonces la red $\{x : x \in L\}$ converge en la norma a un $z \in K$. Es claro que $x \preceq z$ para todo $x \in L$; es decir, L posee una cota superior y, entonces, el Lema de Zorn nos dice que $(K,\preceq)$ posee un elemento maximal, digamos x_0.

Si x es cualquier punto de $K \cap (x_0 + \mathrm{C}(f,\lambda))$, entonces $x - x_0 \in \mathrm{C}(f,\lambda)$. Puesto que tanto x como x_0 están en K, entonces nuestra definición de $\preceq$ nos dice que $x_0 \preceq x$ y, gracias a la maximalidad de x_0, se concluye que $x = x_0$. Lo anterior nos garantiza que

$$K \cap \big(x_0 + \mathrm{C}(f,\lambda)\big) \;=\; \{x_0\}.$$

Observemos ahora que, gracias al Teorema de Hahn-Banach, podemos seleccionar un $g \in S_{X^*}$ satisfaciendo

$$\sup g(K) \;=\; g(x_0) \;=\; \text{ínf}\, g\big(x_0 + \mathrm{C}(f,\lambda)\big),$$

de donde se sigue que $g \in \mathrm{NA}(K)$ y, además, g es no negativa sobre $\mathrm{C}(f,\lambda)$. Invocando el Lema 2.2.8, concluimos que $\|f-g\| \leq \varepsilon$. ■

Debemos destacar que *el Teorema de Bishop-Phelps no es válido para espacios de Banach sobre* $\mathbb{C}$. En efecto, en el año 2000, Victor Lomonosov ([296]) construyó un espacio de Banach complejo en donde no se cumple la conclusión del Teorema de Bishop-Phelps.

El siguiente resultado es geométricamente claro y será usado en lo que sigue.

Lema 2.2.9. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto acotado de X. Para cada $\alpha > 0$ y $f \in X^* \setminus \{0\}$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathrm{S}(K,g,\alpha/2) \;\subseteq\; \mathrm{S}(K,f,\alpha) \quad \textit{siempre que} \quad g \in X^* \quad \textit{y} \quad \|f-g\| \;\leq\; \varepsilon.$$

Prueba. Sea $m = \sup\{\|x\| : x \in K\}$ y elijamos $0 < \varepsilon < \alpha/(4m)$. Sea $g \in B(f,\varepsilon)$; es decir, $\|f-g\| \leq \varepsilon$. Si $y \in \mathrm{S}(K,g,\alpha/2)$, entonces $g(y) > \mathrm{M}(K,g) - \alpha/2$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} f(y) &\geq\; g(y) - |f(y)-g(y)| \\ &>\; \mathrm{M}(K,g) - \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\cdot m \\ &\geq\; \mathrm{M}(K,f) - \varepsilon\cdot m - \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\cdot m \\ &>\; \mathrm{M}(K,f) - \alpha \end{aligned}$$

lo cual significa que $\mathrm{S}(K,g,\alpha/2) \subseteq \mathrm{S}(K,f,\alpha)$. ■

Nuestro próxima tarea es demostrar que sobre cualquier conjunto convexo, cerrado y acotado con la PRN abundan suficientes funcionales fuertemente expuestos. Comencemos con el siguiente resultado.

Teorema 2.2.26 (Bishop). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto*

$$\mathcal{O}_\varepsilon \;=\; \big\{g \in X^* :\ g \textit{ determina una rebanada de } K \textit{ de diámetro a lo más } \varepsilon\big\}$$

es norma-denso en X^*, entonces $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso de X^*. En particular,

$$K \;=\; \overline{\mathrm{co}}\,(\text{s-exp})\,(K)$$

Prueba. Sea $f \in \mathcal{O}_\varepsilon$. El Lema 2.2.9 garantiza que si $g \in B(f,\delta)$ con $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces $g \in \mathcal{O}_\varepsilon$ y, por lo tanto, dicho conjunto es abierto y, además, por hipótesis, denso en X^*. Por el Teorema de Categoría de Baire,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{1/n} = \mathcal{SE}(X^*,K)$$

es un G_δ-denso de X^*.

Supongamos que K contiene propiamente a $\overline{\text{co}}\,(\text{s-exp})\,(K)$. Usemos el Teorema de Separación de Hahn-Banach para producir una rebanada de K, digamos $\mathrm{S}(K,f,\alpha)$, la cual es disjunta de $\overline{\text{co}}\,(\text{s-exp})\,(K)$. Puesto que $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es denso en X^*, el Lema 2.2.9 nos garantiza la existencia de un funcional $g \in \mathcal{SE}(X^*,K)$ tal que $\mathrm{S}(K,g,\alpha/2) \subseteq \mathrm{S}(K,f,\alpha)$. Evidentemente, si $x \in K$ es fuertemente expuesto por g, entonces dicho elemento debe pertenecer tanto a $\overline{\text{co}}\,(\text{s-exp})\,(K)$ como a $\mathrm{S}(K,g,\alpha/2)$, dos conjuntos disjuntos. Esta contradicción establece que $K = \overline{\text{co}}\,(\text{s-exp})\,(K)$. ■

En vista del Teorema 2.2.26, cabe entonces preguntarse ¿qué subconjuntos K de X poseen la propiedad de que $\mathcal{O}_\varepsilon$ es denso en X^*? Es un hecho conocido, véase [281], que si K es un subconjunto débilmente compacto en un espacio de Banach, entonces $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso de X^*. El mismo resultado fue obtenido un poco más tarde por J. M. Borwein [61] con una prueba distinta a la de Lau. El teorema de Lau-Borwein había sido obtenido previamente por Anantharaman [9] en el caso particular cuando K es la cápsula convexa cerrada del rango de una medida vectorial $\mu : \Sigma \to X$ (de allí que K es débilmente compacto), al demostrar que $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso de X^*. El resultado de mayor generalidad obtenido hasta el momento es el Teorema de Phelps-Bourgain, demostrado un poco más abajo, que afirma que: si K posee la PRN, entonces $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso de X^*, un resultado a todas luces más general que el Lau pues todo conjunto débilmente compacto en un espacio de Banach posee la PRN (véase el Teorema 2.2.31, página 272).

Para demostrar el Teorema de Phelps-Bourgain es preciso probar un resultado geométrico curioso, pero tremendamente importante, también conocido como el *Superlema* (véase, [129], p. 157), demostrado inicialmente por I. Namioka en la versión ω^* y posteriormente por J. Bourgain en su versión general.

Teorema 2.2.27 (Namioka-Bourgain). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que K, K_0 y K_1 son subconjuntos convexos, cerrados y acotados de X satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(1) $K \subseteq \overline{\text{co}}\,(K_0 \cup K_1)$.

(2) $K_0 \subseteq K$ *y* $\operatorname{diam}(K_0) < \varepsilon$.

(3) $K \nsubseteq K_1$.

Entonces existe una rebanada S de K tal que $S \cap K_0 \neq \varnothing$ y $\operatorname{diam}(S) < 2\varepsilon$.

Prueba. Para cada $r \in [0,1]$ definamos

$$C_r = \big\{x \in X : \; x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, \; x_0 \in K_0, \; x_1 \in K_1, \; r \leq \lambda \leq 1\big\}.$$

Observemos que $C_1 = K_1$ y que cuando r decrece de 1 a 0, los conjuntos convexos crecen de K_1 al conjunto $C_0 = \text{co}(K_0 \cup K_1)$ cuya clausura contiene, por hipótesis, a K. Estableceremos, en primer lugar, que

$$\text{si} \quad 0 < r \leq 1, \quad \text{entonces} \quad K \nsubseteq \overline{C}_r.$$

En efecto, usemos la hipótesis (3) para elegir un $x \in K$ tal que $x \notin K_1$. El Teorema de Hahn-Banach nos provee de la existencia de un $f \in X^*$ tal que

$$\mathrm{M}(K_1,f) < f(x) \leq \mathrm{M}(K,f) \tag{1}$$

Ahora bien, si ocurriera que $K \subseteq \overline{C}_r$ entonces, teniendo en cuenta que $K_0 \subseteq K$, tendríamos la desigualdad $\mathrm{M}(K_0, f) \leq \mathrm{M}(K, f)$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(K, f) &\leq \mathrm{M}(\overline{C}_r, f) \\
&= \mathrm{M}(C_r, f) \\
&\leq \sup\left\{(1-\lambda)\mathrm{M}(K_0, f) + \lambda \mathrm{M}(K_1, f) : \lambda \in [r,1]\right\} \\
&= (1-r)\mathrm{M}(K_0, f) + r\mathrm{M}(K_1, f) \\
&\leq (1-r)\mathrm{M}(K, f) + r\mathrm{M}(K_1, f)
\end{aligned}$$

lo cual conduce a la relación $\mathrm{M}(K, f) \leq \mathrm{M}(K_1, f)$ que, evidentemente, es contradictoria con (1).

Nuestro siguiente paso es demostrar que

$$\mathrm{diam}\big(K \setminus \overline{C}_r\big) < 2\varepsilon$$

para algún $r > 0$. Veamos esto. Como $K \subseteq \overline{C}_0$, tenemos que $K \setminus \overline{C}_r \subseteq \overline{C}_0 \setminus \overline{C}_r$. Además, puesto que $\overline{C}_r$ es cerrado, se sigue que $C_0 \setminus \overline{C}_r$ es denso en $\overline{C}_0 \setminus \overline{C}_r$. Tomemos $y \in K \setminus \overline{C}_r$. Entonces existe un $x \in C_0 \setminus \overline{C}_r$ tal que $\|y - x\| < \varepsilon/4$. Por otro lado, como $x \in C_0 \setminus \overline{C}_r$, existen $x_0 \in K_0$, $x_1 \in K_1$ y $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Pero ya que $x \notin C_r$, entonces $0 \leq \lambda < r$. De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\|y - x_0\| &\leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \lambda \|x_0 - x_1\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + r \sup\left\{\|y - z\| : y \in K_0,\ z \in K_1\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + rM
\end{aligned}$$

donde $m = \sup\left\{\|y - z\| : y \in K_0,\ z \in K_1\right\}$. Si elegimos $r < \varepsilon/4m$ tendremos que

$$\mathrm{diam}\big(K \setminus \overline{C}_r\big) \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + 2r \cdot m + \mathrm{diam}\big(K_0\big) < 2\varepsilon.$$

Finalmente, puesto que $K \setminus \overline{C}_r \neq \varnothing$, podemos escoger un $x_0 \in K_0$ tal que $x_0 \in K \setminus \overline{C}_r$. Gracias al Teorema de Separación de Hahn-Banach, existe una rebanada S de K disjunta de $\overline{C}_r$ y conteniendo a x_0. Por otro lado, como $K_1 \subseteq \overline{C}_r \subseteq K \setminus S$ y, por hipótesis, $K \subseteq \overline{\mathrm{co}}\,(K_0 \cup K_1)$ tenemos que $K_0 \cap S \neq \varnothing$ y termina la prueba. ■

Estamos ahora en posesión de las herramientas necesarias para demostrar el Teorema de Phelps-Bourgain.

Teorema 2.2.28 (Phelps-Bourgain). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Si K posee la* PRN, *entonces el conjunto $\mathcal{SE}(X^*, K)$ es un G_δ-denso de X^*. En particular, $K = \overline{\mathrm{co}}(\text{s-exp})(K)$.*

Prueba. Gracias al Teorema 2.2.26 es suficiente demostrar que el conjunto

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \left\{g \in X^* : \ g \ \textit{determina una rebanada de } K \textit{ de diámetro a lo más } \ \varepsilon\right\}$$

es denso en X^*.

Fijemos un $0 < \varepsilon < 1$ y sea $f \in S_{X^*}$. Lo que deseamos demostrar es la existencia de un $g \in \mathcal{O}_\varepsilon$ tal que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Puesto que K es acotado, existe un punto $y \in X$ tal que $f(y) < f(x) - 1$ para cada $x \in K$. Pongamos

$$m = \sup\{\|x - y\| : x \in K\}, \qquad \lambda = \frac{2m}{\varepsilon}, \qquad V = f^{-1}(0) \cap B(0, \lambda), \qquad \text{y} \qquad C = y + V.$$

Notemos que si $z \in C$ y $x \in K$, entonces $f(z) = f(y) < f(x) - 1$ por lo que $K \cap C = \varnothing$. En particular, $K \setminus C \neq \varnothing$. Definamos $J = \overline{\mathrm{co}}\,(K \cup C)$.

Afirmación: *Existe una rebanada S de J tal que $S \cap K \neq \varnothing$ y* $\mathrm{diam}(S) < \delta$.

Prueba de la Afirmación. Considere el conjunto

$$D = \big\{x \in J : \text{ existe } \; h \in X^* \; \text{ para el cual } \; h(x) = \mathrm{M}(J, h) > \mathrm{M}(C, h)\big\}. \tag{$\star$}$$

Veamos que $D \subseteq K$. En efecto, sea $x \in D$. Entonces existe un $h \in X^*$ tal que $h(x) = \mathrm{M}(J, h) > \mathrm{M}(C, h)$. Como $x \in J$, podemos seleccionar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathrm{co}(K \cap C)$ tal que $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. Supongamos que $x_n = \xi_n y_n + (1 - \xi_n) z_n$, donde $0 \leq \xi_n \leq 1$, $y_n \in K$, y $z_n \in C$. Por la compacidad del intervalo $[0, 1]$, podemos suponer que $\xi = \lim_n \xi_n$. Observemos que la condición $\xi < 1$ conduce a una contradicción pues, en tal caso,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(J, f) &= f(x) \\ &= \lim_{n \to \infty} \big(\xi_n f(y_n) + (1 - \xi_n) f(z_n)\big) \\ &\leq \xi \mathrm{M}(K, f) + (1 - \xi) \mathrm{M}(C, f) \\ &< \mathrm{M}(J, f). \end{aligned}$$

Por esto $\xi = 1$. Puesto que C es acotado, se sigue que $\lim_n \|x - y_n\| = 0$ y como K es cerrado, concluimos que $x \in K$.

Una vez establecido que $D \subseteq K$, tenemos que $\overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C) \subseteq J$. Lo que queremos probar es que tales conjuntos son iguales. Supongamos por un momento que $\overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C)$ sea un subconjunto propio de J. Entonces existe una rebanada S' de J tal que $S' \cap \overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C) = \varnothing$. Usemos el Teorema de Bishop-Phelps y el Lema 2.2.9 para encontrar un $g \in \mathrm{NA}(J)$ y un $\alpha > 0$ con $\mathrm{S}(J, g, \alpha) \subseteq S'$. Entonces g soporta a J en algún punto x. Claramente $x \notin \overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C) \supseteq D$ y como, $g(x) = \mathrm{M}(J, g) > \mathrm{M}(C, g)$, resulta que $x \in D$. Esta contradicción prueba que $J = \overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C)$. En particular $D \neq \varnothing$, pues $K \setminus C \neq \varnothing$.

Puesto que K tiene la PRN, el conjunto $D \subseteq K$ es dentable y, por lo tanto, existe un punto $x_0 \in D$ tal que $x_0 \notin \overline{\mathrm{co}}\,(D \setminus U(x_0, \varepsilon/5))$. Sean

$$K_0 = \overline{\mathrm{co}}\,\big(D \cap U(x_0, \varepsilon/5)\big) \qquad \text{y} \qquad K_1 = \overline{\mathrm{co}}\,\big((D \setminus U(x_0, \varepsilon/5)) \cup C\big)$$

Observemos que como $J = \overline{\mathrm{co}}\,(D \cup C)$, entonces

(1) $J = \overline{\mathrm{co}}\,(K_0 \cup K_1)$.

(2) $\mathrm{diam}(K_0) < \varepsilon/2$ y $K_0 \subseteq \overline{\mathrm{co}}\,(D) \subseteq J$.

(3) Probemos ahora que $x_0 \in J \setminus K_1$.

En efecto, suponga por un momento que $x_0 \in K_1$, y pongamos $D_1 = \overline{\mathrm{co}}\,(D \setminus U(x_0, \varepsilon/3))$. Nótese que, en este caso, $K_1 = \overline{\mathrm{co}}\,(D_1 \cup C)$. Puesto que $x_0 \in D$, existe un $h \in X^*$ tal que $h(x_0) = \mathrm{M}(J,h) > \mathrm{M}(C,h)$ y, como además, $x_0 \in K_1 \subseteq J$, resulta que $h(x_0) = \mathrm{M}(K_1,h) > \mathrm{M}(C,h)$. Si aplicamos el argumento anteriormente desarrollado para demostrar que $D \subseteq K$ a la situación actual con D_1 en lugar de D y K_1 en lugar de J, tendremos que $x_0 \in D_1$. Puesto que esto contradice la elección de x_0, se sigue que $x_0 \in J \setminus K_1$.

El Teorema de Namioka-Bourgain, Teorema 2.2.27, nos garantiza la existencia de una rebanada S de J de diámetro menor que ε, conteniendo un punto de K_0. Como $K_0 \subseteq K$, la prueba de nuestra afirmación es completa. □

Sea $S = \mathrm{S}(J,g,\alpha)$ para algún $g \in S_{X^*}$ y tomemos $x \in S \cap K$. Notemos, en primer lugar, que $S \cap C = \varnothing$ lo cual implica que $g(x) > \mathrm{M}(C,g)$. En efecto, si $w \in S \cap C$, entonces

$$1 \,>\, \varepsilon \,>\, \mathrm{diam}(S) \,\geq\, \|x-w\| \,\geq\, f(x)-f(w) \,=\, f(x)-f(y) \,>\, 1$$

lo que resulta contradictorio. En segundo lugar, observemos que $\mathrm{M}(K,g) > \mathrm{M}(C,g)$ pues, en caso contrario, tendríamos que $\mathrm{M}(J,g) = \mathrm{M}(C,g)$ y, en consecuencia, cada rebanada de J determinada por g contendría puntos de C. Como esto no ocurre para la rebanada $S = \mathrm{S}(J,g,\alpha)$, concluimos que $\mathrm{M}(K,g) > \mathrm{M}(C,g)$. Por esto,

$$\mathrm{M}(K,g) \,=\, \text{máx}\big\{\mathrm{M}(K,g), \mathrm{M}(C,g)\big\} \,=\, \mathrm{M}(J,g).$$

Puesto que $K \subseteq J$ se sigue que $\mathrm{S}(K,g,\alpha) \subseteq \mathrm{S}(J,g,\alpha)$ y, por consiguiente,

$$\mathrm{diam}(S(K,g,\alpha)) \,<\, \varepsilon$$

lo cual significa que $g \in \mathcal{O}_\varepsilon$. Observemos, por último, que las condiciones del Lema 2.2.7 se satisfacen:

$$f(x) \,>\, f(y), \qquad \frac{2}{\lambda}\,\|x-y\| \,\leq\, \frac{2m}{\lambda} = \varepsilon, \qquad g(x) \,>\, \mathrm{M}(C,g)$$

por lo que

$$\|g-f\| \,\leq\, \frac{2}{\lambda}\,\|x-y\| \,\leq\, \varepsilon.$$

Esto prueba que $\mathcal{O}_\varepsilon$ es denso en X^*. Un llamado al Teorema 2.2.26 nos revela que $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso de X^*. ■

El siguiente corolario es la versión ω^* del Superlema.

Corolario 2.2.17 (Namioka (Versión ω^*)). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que K, K_0 y K_1 son subconjuntos convexos y ω^*-compactos de X^* satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(1) $K \subseteq \mathrm{co}\,(K_0 \cup K_1)$.

(2) $K_0 \subseteq K$ *y* $\mathrm{diam}(K_0) < \varepsilon$.

(3) $K \nsubseteq K_1$.

Entonces existe una ω^*-rebanada S de K tal que $S \cap K_0 \neq \varnothing$ y $\mathrm{diam}(S) < 2\varepsilon$.

Prueba. Definiendo, para cada $r \in [0,1]$, los conjuntos C_r exactamente del mismo modo como se hizo en la demostración del Teorema 2.2.27, resulta que todos ellos, así como $\mathrm{co}\,(K_0 \cup K_1)$ (esta es una tarea fácil de verificar), son ω^*-compactos y, por lo tanto, $\|\cdot\|$-cerrados. La prueba procede como antes, con la diferencia de que al final, por ser C_r ω^*-compacto, el funcional que separa a x_0 de C_r puede tomarse ω^*-continuo. ■

La versión ω^* del Teorema de Phelps-Bourgain es como sigue, donde estamos identificando a X con un subespacio de X^{**} vía la aplicación canónica $J : X \to X^{**}$, dada por $Jx(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$.

Teorema 2.2.29 (Phelps-Bourgain (Versión-ω^*)). *Sea K un subconjunto convexo ω^*-compacto de X^* y suponga que K es ω^*-hereditariamente dentado. Entonces el conjunto $\mathcal{SE}(X^*,K)\cap X$ es un G_δ-denso de X.*

Prueba. La demostración es idéntica a la del Teorema de Phelps-Bourgain con la única diferencia de que los funcionales deben ser escogidos en X, visto como un subespacio de X^{**}. ■

Otra pregunta que podemos formularnos y que podría ser de utilidad es la siguiente: ¿qué propiedades topológicas interesantes, al menos desde el punto de vista de la categoría de Baire, posee el conjunto $\mathrm{NA}(K)$? Una respuesta es dada por el siguiente resultado el cual relaciona la PRN con el Teorema de Categoría de Baire.

Teorema 2.2.30 (Bourgain-Stegall). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y D un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *D tiene la* PRN*,*

(2) $\mathrm{NA}(K)$ *es residual en X^* para cada subconjunto convexo, cerrado y acotado K de D.*

Prueba. $(1)\Rightarrow(2)$. Puesto que $\mathcal{SE}(X^*,K)\subseteq \mathrm{NA}(K)$, el Teorema 2.2.28 nos dice que $\mathrm{NA}(K)$ es residual en X^* para cualquier subconjunto convexo, cerrado y acotado K de D.

$(2)\Rightarrow(1)$. Supongamos que (2) se cumple pero que D no tiene la PRN. Esto implica, en particular, la existencia de un subconjunto convexo, cerrado, acotado y separable K de D que no es dentable. Lo anterior nos revela que en alguna parte de $\mathbb{R}$ habita un cierto $\delta>0$ tal que cada rebanada de K tiene diámetro $\geq 5\delta$.

Escojamos ahora, por la separabilidad de K, una sucesión densa, digamos $(x_n)_{n=1}^\infty$, en dicho conjunto y, para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos

$$\begin{aligned} V_n &= K\cap B(x_n,\delta) \quad \text{y} \\ \mathcal{O}_n &= \big\{g\in X^* : \ g \ \textit{determina una rebanada de } K \textit{ disjunta de } V_n\big\}. \end{aligned}$$

Observemos que si $g\in\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{O}_n$ y $x\in K$, entonces como $K=\bigcup_{n=1}^\infty V_n$, resulta que $x\in V_k$ para algún $k\in\mathbb{N}$ y, en consecuencia, $g(x)<\mathrm{M}(K,g)$; es decir,

$$\mathrm{NA}(K)\ \subseteq\ X^*\setminus\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{O}_n.$$

Vamos probar que cada $\mathcal{O}_n$ es abierto y denso en X^*. Que $\mathcal{O}_n$ es abierto es consecuencia del Lema 2.2.9, por lo tanto, lo que tenemos que chequear es la densidad de $\mathcal{O}_n$. Sean entonces $f\in X^*$ y $0<\varepsilon<1$. Puesto que $\mathcal{O}_n$ es cerrado bajo multiplicación por escalares positivos, podemos suponer que $\|f\|=1$. Escojamos $y\in X$ tal que $f(x)-f(y)>0$ para cada $x\in K$ y sea $m=\sup\{\|x-y\| : x\in K\}$. Elijamos un $\lambda\geq 2m/\varepsilon$ y definamos

$$V\ =\ f^{-1}(0)\cap B(0,\lambda) \qquad \text{y} \qquad C\ =\ y+V.$$

Es claro que $V_n\setminus C\neq\varnothing$. Notemos que, por el Teorema de Namioka-Bourgain, Teorema 2.2.27, el conjunto $J=\overline{\mathrm{co}}\,(V_n\cup C)$ contiene una rebanada S con $\mathrm{diam}(S)<5\delta$ y $S\cap V_n\neq\varnothing$ pues $\mathrm{diam}(V_n)<2\delta$. Afirmamos que $K\setminus J\neq\varnothing$. Supongamos por un momento que $K\subseteq J$. Entonces, teniendo en cuenta que por definición $V_n\subseteq K$, tendríamos que $S\cap K$ sería una rebanada de K de diámetro menor que 5δ, lo cual contradice la elección de δ. Esto prueba que $K\setminus J\neq\varnothing$. Sea $x\in K\setminus J\neq\varnothing$. Escojamos $g\in S_{X^*}$ tal que $g(x)>\mathrm{M}(J,f)$ y notemos que de la desigualdad

$$\frac{2}{\lambda}\,\|x-y\|\ \leq\ \frac{2}{\lambda}m\ \leq\ \varepsilon\ <\ 1$$

y el Lema 2.2.7, se concluye que $\| f - g \| \leq \varepsilon$. Puesto que evidentemente g determina una rebanada disjunta de V_n, se sigue que $g \in \mathcal{O}_n$. Esto demuestra que $\mathcal{O}_n$ es denso en X^* por lo que invocando el Teorema de Categoría de Baire tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ es denso en X^* y, así, $\mathrm{NA}(K)$ sería de primera categoría. Esta contradicción establece que C tiene la PRN. ■

Teorema 2.2.31 (Lindenstrauss-Troyanski). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto convexo y débilmente compacto de X, entonces K posee la* PRN. *En particular, $K = \overline{\mathrm{co}}\,(\text{s-exp}(K))$.*

Prueba. En primer lugar vamos a suponer que K es norma-separable. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión norma-densa en K. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y definamos $D = \overline{\mathrm{ext}(K)}^{\omega}$. Observemos que

$$D \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(B(x_n, \varepsilon/3) \cap D \Big).$$

Como D es débilmente compacto y $B(x_n, \varepsilon/3) \cap D$ es débilmente cerrado en D, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza la existencia de un subconjunto débilmente abierto V de X tal que $\varnothing \neq V \cap D \subseteq B(x_n, \varepsilon/3) \cap D$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$K_0 \,=\, \overline{\mathrm{co}}\,\big(V \cap D\big) \qquad \text{y} \qquad K_1 \,=\, \overline{\mathrm{co}}\,\big(K \setminus V\big).$$

Notemos que

(1) $K \subseteq \overline{\mathrm{co}}\,(K_0 \cup K_1)$

(2) $K_0 \subseteq K$ y $\mathrm{diam}(K_0) < \varepsilon$

(3) $K \nsubseteq K_1$

Observe que sólo (3) requiere de una prueba. Como $V \cap D \neq \varnothing$, podemos elegir un $x \in V \cap \mathrm{ext}(K)$ y, en consecuencia, como se puede demostrar fácilmente, $x \notin \overline{K \setminus V}^{\omega}$. Un llamado al Teorema de Milman nos revela que $x \notin K_1$. Invocando el Teorema de Namioka-Bourgain (Teorema 2.2.27), existe una rebanada S de K de diámetro $< \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces K tiene la PRN. El caso general ahora es consecuencia del Teorema 2.2.24. ■

Teorema 2.2.32 (Lau). *Si K es un subconjunto convexo y débilmente compacto de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces el conjunto $\mathcal{SE}(X^*, K)$ es un G_δ-denso de X^*.*

Prueba. Suponga que $K \subseteq X$ es convexo y débilmente compacto. Por el Teorema de Lindenstrauss-Troyanski, K posee la PRN. Un llamado al Teorema de Phelps-Bourgain finaliza la prueba. ■

Observe que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $K \subseteq X$ es convexo y norma-compacto, entonces K posee la PRN. En efecto, por el Teorema de Krein-Milman, $\mathrm{ext}(K) \neq \varnothing$ y, en consecuencia podemos seleccionar un $x \in \mathrm{ext}(K)$. Para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $B = K \setminus U(x, \varepsilon)$ es norma-compacto y así también lo es $A := \overline{\mathrm{co}}\,(B)$. Por el Teorema de Milman, $\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}\,(B)) \subseteq \overline{B}^{\|\cdot\|} = B$. Esto prueba que $x \notin \overline{\mathrm{co}}\,(K \setminus U(x, \varepsilon))$ de donde resulta que K es dentable y el resultado sigue del Teorema 2.2.24. ■

Comentario Adicional 2.2.12 La demostración del Corolario 2.2.32 se debe a Ka-Sing Lau [281] usando un resultado de S. L. Troyanski y otro del mismo Lau (véase el Teorema 2.2.22) que dice:

Teorema de Lau. *Si K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$, entonces el conjunto*

$$F_K \;=\; \big\{x\in X:\; \|x-z\| \;=\; \sup\{\|x-y\|: y\in K\} \text{ para algún } z\in K\big\}$$

es un G_δ-denso en X.

No es difícil establecer que $\mathrm{NA}(B_{c_0})$ no es residual en c_0^* (véase, por ejemplo, [158]) y, por lo tanto, c_0 no tiene la PRN. Siguiendo con los conjuntos de Bishop-Phelps y en ausencia de la propiedad de Radon-Nikodym, Kenderov, Moors y Sciffer demuestran en [262] que:

Teorema de Kenderov-Moors-Sciffer. *Si K es un espacio de Hausdorff compacto infinito, entonces el conjunto de Bishop-Phelps* $\mathrm{NA}(C(K))$ *es de primera categoría en $C(K)^*$.*

2.2.5. $\|$ ► Abundantes medidas que no poseen átomos

En esta sección desarrollaremos algunas de las herramientas sobre Teoría de la Medida que necesitaremos en estas notas. Las demostraciones de los resultados expuestos que no se prueban se pueden consultar, por ejemplo, en [216], [113], [365] o [142].

Sea Ω un conjunto no vacío. Recordemos que una **σ-álgebra** de Ω es una familia Σ de subconjuntos de Ω que cumplen con las siguientes propiedades:

(a) $\Omega\in\Sigma$,

(b) $\Omega\setminus E\in\Sigma$ para todo $E\in\Sigma$, y

(c) $\bigcup_{n=1}^\infty E_n\in\Sigma$ para cualquier colección numerable $(E_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de Σ.

Al par (Ω,Σ) se le llama un **espacio medible**, y a los elementos de Σ se les denominan **conjuntos medibles**. Observe que, dada cualquier familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, siempre existe una σ-álgebra de Ω, denotada por $\sigma(\mathcal{A})$, con las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{A}\subseteq\sigma(\mathcal{A})$, y

(2) $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra más pequeña conteniendo a $\mathcal{A}$.

En efecto, si consideramos la familia

$$\mathfrak{S} \;=\; \Big\{\Sigma^*:\Sigma^* \text{ es una } \sigma\text{-álgebra de } \Omega \text{ conteniendo a } \mathcal{A}\Big\},$$

entonces $\mathfrak{S}$ es no vacío pues $\mathcal{P}(\Omega)\in\mathfrak{S}$ y así, $\sigma(\mathcal{A})=\bigcap_{\Sigma^*\in\mathfrak{S}}\Sigma^*$ posee las propiedades requeridas. A $\sigma(\mathcal{A})$ se le llama la **σ-álgebra generada** por $\mathcal{A}$. En general, si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, la σ-álgebra generada por la familia de todos los subconjuntos abiertos de X será denotada por $\mathcal{B}_0(X)$ y a los elementos de $\mathcal{B}_0(X)$ los llamaremos **conjuntos medibles Borel** o, simplemente, **borelianos**.

Denotemos por $\mathrm{long}(I)$ la longitud de cualquier intervalo acotado I de $\mathbb{R}$, es decir, si $a,b\in\mathbb{R}$ son los extremos de I con $a<b$, entonces $\mathrm{long}(I)=b-a$, mientras que si I no es acotado, entonces $\mathrm{long}(I)=+\infty$. Para cada conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$, considere la colección $\mathfrak{I}(A)$ de todas las sucesiones $(I_n)_{n=1}^\infty$ de subintervalos abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup_{n=1}^\infty I_n\supseteq A$. Definamos la función de conjuntos $\lambda^*:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,+\infty]$ por

$$\lambda^*(A) \;=\; \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \mathrm{long}(I_n):\; (I_n)_{n=1}^\infty\in\mathfrak{I}(A)\right\}, \qquad A\subseteq\mathbb{R}.$$

Recordemos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ se llama **medible Lebesgue** si

$$\lambda^*(A) \;=\; \lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c) \qquad \text{para todo } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Es un hecho ya establecido que la familia Σ_0, formada por todos los conjuntos medibles Lebesgue, es una σ-álgebra. Más aun, $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}) \subsetneqq \Sigma_0 \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$; es decir, todo conjunto medible Borel es medible Lebesgue, aunque existen conjuntos medibles Lebesgue que no son medibles Borel, así como también existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son medibles Lebesgue. La restricción de λ^* a Σ_0 se llama la **medida de Lebesgue** y será denotada, en lo que sigue, por λ.

Sea Ω un conjunto no vacío y sea Σ una σ-álgebra de Ω. Una función de conjuntos $\mu : \Sigma \to [0,+\infty]$ es llamada una **medida no-negativa** o, simplemente, una **medida** si se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$, y

(2) μ es *numerablemente aditiva* (o σ-*aditiva*), es decir, si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Σ, disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\biggr) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A la tripleta (Ω,Σ,μ) la llamaremos un **espacio de medida**. Observe que toda medida μ es **finitamente aditiva** en el sentido de que

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\biggr) \;=\; \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n),$$

se cumple para cualquier colección finita $\{E_1,\ldots,E_k\}$ de elementos de Σ, disjuntos dos a dos. Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces diremos que μ es una **medida finita** y, entonces, a la tripleta (Ω,Σ,μ) se le denomina un **espacio de medida finita**. Cuando $\mu(\Omega) = 1$, diremos simplemente que μ es una **medida de probabilidad**. Nótese que si μ es una medida finita, entonces ella es monótona, esto es, para cualesquiera $A,B \in \Sigma$ con $B \subseteq A$, $\mu(B) \le \mu(A)$. Además, se cumple que,

$$\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

En general, si μ es una medida no-negativa y si la sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ no es necesariamente disjunta, entonces siempre vale la desigualdad

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\biggr) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

conocida como la **subaditividad** de μ. Si permitimos que la función de conjuntos μ también tome valores negativos, tendremos un tipo muy importantes de "medidas". Una función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ es llamada una **medida con signo** si ella es numerablemente aditiva, $\mu(\varnothing) = 0$, y $\mu(A) < +\infty$ para todo $A \in \Sigma$ o bien $\mu(A) > -\infty$ para todo $A \in \Sigma$. Esta última condición lo que establece es que una medida con signo sólo puede asumir uno de los valores $\{-\infty,+\infty\}$, pero no ambos. Si μ es un medida con signo y si ocurre que $|\mu(E)| < +\infty$ para cualquier $E \in \Sigma$, entonces a μ se le llama una **medida con signo finita** o simplemente una **medida real**. Nótese que, a diferencia de las medidas no-negativas, una medida con signo μ no es, en general monótona, es decir, es posible hallar conjuntos medibles E,F con $F \subseteq E$ pero tal que $\mu(F) > \mu(E)$. Sin embargo, la siguiente propiedad es compartida tanto por una medida no-negativa así como por cualquier medida con signo, vale decir, si μ es una medida con signo y si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente en Σ, entonces siempre se cumple que

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\biggr) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Similarmente, si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente en Σ y si $|\mu(E_1)| < +\infty$, entonces

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Un resultado clave acerca de cualquier medida con signo es el siguiente: *Si μ es una medida con signo sobre un espacio medible (Ω,Σ), entonces existen conjuntos $L,M \in \Sigma$ tales que*

$$\mu(L) = \text{ínf}\big\{\mu(A) : A \in \Sigma\big\} \qquad \text{y} \qquad \mu(M) = \sup\big\{\mu(A) : A \in \Sigma\big\}.$$

De este hecho se deduce inmediatamente que si μ es una medida real, entonces

$$-\infty \;<\; \text{ínf}\big\{\mu(A) : A \in \Sigma\big\} \;\leq\; \sup\big\{\mu(A) : A \in \Sigma\big\} \;<\; +\infty.$$

Sea μ una medida no-negativa sobre (Ω,Σ). Un conjunto $E \in \Sigma$ se llama un **átomo** para μ si

(a) $\mu(E) > 0$, y

(b) si $F \subseteq E$, $F \in \Sigma$, entonces $\mu(F) = 0$ o bien $\mu(F) = \mu(E)$.

Es claro que si E_1 y E_2 son átomos, entonces $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ o $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$. También se cumple que si $\mu(\Omega) < +\infty$, entonces sólo puede haber una cantidad a lo más numerable de átomos disjuntos. En efecto, sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los átomos en Ω que son disjuntos dos a dos. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere la familia

$$\mathcal{A}_m \;=\; \big\{E \in \mathcal{A} : \mu(E) > 1/m\big\}$$

y sean $E_1,\ldots,E_k$ elementos arbitrarios en $\mathcal{A}_m$. Como la colección $\{E_1,\ldots,E_k\}$ es disjunta, resulta que

$$\infty \;>\; \mu(\Omega) \;\geq\; \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \;>\; k/m,$$

de donde se sigue que $\mathcal{A}_m$ contiene a lo sumo $m \cdot \mu(\Omega)$ elementos y, en consecuencia, $\mathcal{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m$ es a lo más numerable.

Sean μ una medida con signo sobre (Ω,Σ) y $P \in \Sigma$. Diremos que P es un **conjunto positivo** (para μ) si $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \Sigma$ con $E \subseteq P$. Similarmente, un subconjunto $N \in \Sigma$ se llama **negativo** (para μ) si $\mu(E) \leq 0$ para todo $E \in \Sigma$ con $E \subseteq N$. El Teorema de Descomposición de Hahn establece que:

Teorema 2.2.33 (Teorema de Descomposición de Hahn). *Si μ es una medida con signo sobre (Ω,Σ), entonces existe un conjunto positivo $P \in \Sigma$ y un conjunto negativo $N \in \Sigma$ tales que:*

(a) $\Omega \;=\; P \cup N$, *y*

(b) $P \cap N \;=\; \varnothing$.

El par (P,N) obtenido en el Teorema de Descomposición de Hahn se le llama una **descomposición de Hahn** de Ω para μ. . Dicha descomposición es única en el siguiente sentido: si (P_1,N_1) es otra descomposición de Hahn para Ω, entonces

$$\mu\big(P \triangle P_1\big) \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad \mu\big(N \triangle N_1\big) \;=\; 0.$$

Sea μ una medida con signo sobre (Ω,Σ) y suponga que (P,N) es una descomposición de Hahn de Ω para μ. Defina μ^+,μ^- y $|\mu|$ sobre Σ por:

$$\mu^+(E) \;=\; \mu(E \cap P), \qquad \mu^-(E) \;=\; -\mu(E \cap P), \qquad \text{y} \qquad |\mu|(E) \;=\; \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

para todo $E \in \Sigma$. Cada una de las funciones μ^+, μ^- y $|\mu|$ constituyen medidas no negativas y son llamadas, respectivamente, la **variación positiva**, la **variación negativa** y la **variación total** de μ. Es fácil establecer que $\mu(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y, además, que

$$|\mu|(E) \;=\; \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)| \;:\; \{E_1, E_2 \ldots\} \in \mathcal{P}_\infty(E) \right\},$$

para todo $E \in \Sigma$, donde $\mathcal{P}_\infty(E)$ es la familia de todas las particiones medibles numerables de E. La definición anterior no cambia si se considera, en lugar de $\mathcal{P}_\infty(E)$, la familia $\mathcal{P}_f(E)$ de todas las particiones medibles finitas de E. Si $|\mu|(\Omega) < \infty$, diremos que μ es de **variación finita** o **acotada**. Si μ es una medida real sobre (Ω, Σ), entonces siempre se cumple que

$$\sup_{E\in\Sigma} |\mu(E)| \;\leq\; |\mu|(\Omega) \;\leq\; 2\sup_{E\in\Sigma} |\mu(E)| \;<\; +\infty,$$

por lo que, $|\mu|(\Omega) < \infty$ y, en consecuencia, $\|\mu\|_{\mathrm{va}} := |\mu|(\Omega)$ define una norma sobre $\mathrm{ca}(\Omega, \Sigma)$, el espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ formado por todas las medidas reales definidas sobre (Ω, Σ). A $\|\mu\|_{\mathrm{va}}$ la llamaremos la **norma variación** de μ. No es difícil demostrar que $(\mathrm{ca}(\Omega, \Sigma), \|\cdot\|_{\mathrm{va}})$ es, en realidad, un espacio de Banach. Definiendo

$$\|\mu\|_\infty \;=\; \sup_{E\in\Sigma} |\mu(E)|$$

para cada $\mu \in \mathrm{ca}(\Omega, \Sigma)$, entonces $\|\cdot\|_\infty$ también es una norma sobre $\|\mu\|_\infty$ la cual es equivalente a $\|\cdot\|_{\mathrm{va}}$.

Sean μ y ν medidas con signos sobre (Ω, Σ). Diremos que:

(1) μ es **absolutamente continua** con respecto a ν, y escribiremos, $\mu \ll \nu$, si cualquier $E \in \mathcal{B}_0(X)$ para el cual se cumple que $|\nu|(E) = 0$, entonces $\mu(E) = 0$. Es fácil verificar que

$$\mu \ll \nu \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad |\mu| \ll \nu.$$

Si ν es no negativa, entonces $\mu \ll \nu$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, cualquiera que sea $E \in \Sigma$ para el cual $\nu(E) < \delta$, entonces $|\mu(E)| < \varepsilon$.

La relación $\mu \ll \nu$ no es, en general, simétrica, es decir, no siempre se cumple que $\nu \ll \mu$.

(2) μ y ν se llaman **equivalentes**, en notación, $\nu \equiv \mu$, cuando $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ se cumplen simultáneamente.

(3) μ y ν se dice que son **mutuamente singulares**, que denotaremos por $\mu \perp \nu$, si existe un conjunto $E_0 \in \Sigma$ tal que

$$|\mu|(E_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad |\nu|(X \setminus E_0) = 0.$$

Observe que $\mu \perp \nu$ si, y sólo si, $|\mu| \perp |\nu|$.

Dos de los resultados importantes de la Teoría de la Medida e Integración que usaremos en esta sección son los siguientes:

Teorema 2.2.34 (Teorema de Descomposición de Lebesgue). *Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida finita y sea μ una medida real sobre (Ω, Σ). Entonces existen dos únicas medidas reales sobre (Ω, Σ), digamos μ_1 y μ_2, tales que:*

$$\mu \;=\; \mu_1 + \mu_2, \qquad \mu_1 \ll \nu \qquad y \qquad \mu_2 \perp \nu.$$

Si (Ω,Σ,ν) es un espacio de medida finita y si $f\in L_1(\nu)$, entonces la función de conjuntos $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}$ definida por

$$\mu(E) \;=\; \int_E f\,d\nu, \qquad E\in\Sigma,$$

es una medida real que satisface $\mu\ll\nu$. El Teorema de Radon-Nikodým es la afirmación en la dirección contraria, es decir,

Teorema 2.2.35 (Teorema de Radon-Nikodým). *Sean* (Ω,Σ,ν) *un espacio de medida finita y* μ *una medida real sobre* (Ω,Σ) *tal que* $\mu\ll\nu$*. Entonces existe una función integrable* $f\in L_1(\nu)$ *para la cual se verifica la igualdad*

$$\mu(E)=\int_E f\,d\nu, \quad \textit{para todo } E\in\Sigma. \tag{3}$$

La función f, obtenida por intermedio del Teorema de Radon-Nikodym, se le llama la **derivada de Radon-Nikodým** y suele denotarse por $f:=\dfrac{d\mu}{d\nu}$, mientras que la igualdad (3) en ocasiones se abrevia por $\mu=f\nu$.

Una de las tantas propiedades relevantes que posee la medida de Lebesgue λ sobre $[0,1]$, es que dicha medida no posee átomos. Esta propiedad, que resulta ser muy natural para la medida de Lebesgue, podría hacer pensar al lector que "muchas" medidas definidas, no sobre la σ-algebra los conjuntos medibles Lebesgue, sino sobre la σ-álgebra más pequeña de los borelianos de $[0,1]$, no la comparten. Lo que vamos probar un poco más abajo es que el conjunto de todas las medidas finitas de Borel que no poseen átomos constituye, en realidad, un conjunto muy abundante en el sentido de categoría de Baire.

En esta sección sólo estaremos interesados en un tipo especial de espacios topológicos: los espacios métricos compactos. En lo que sigue, (X,d) denotará un espacio métrico compacto. En este caso, (X,d) resulta ser un espacio Polaco, es decir, un espacio métrico completo y separable. Como ya hemos mencionado, $\mathcal{B}_0(X)$ denota la σ-álgebra de Borel, esto es, la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de X.

Como (X,d) es un espacio métrico, sabemos (véase, [348], Theorem 1.1, p. 26) que toda medida de Borel finita μ sobre X es **regular** en el sentido de que, para cada $E\in\mathcal{B}_0(X)$ y cada $\varepsilon>0$, existe un conjunto abierto U_ε y un conjunto cerrado F_ε tales que:

(1) $F_\varepsilon\subseteq E\subseteq U_\varepsilon$, y

(2) $\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$.

Lo anterior es equivalente a afirmar que, para cada conjunto de Borel E,

$$\begin{aligned}\mu(E) \;&=\; \sup\big\{\mu(F):\ F\subseteq E,\ F \text{ es cerrado}\big\}\\ &=\; \text{ínf}\big\{\mu(U):\ U\supseteq E,\ U \text{ es abierto}\big\}.\end{aligned}$$

Además, manteniendo la hipótesis de que (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces μ es una medida **tensa**, esto quiere decir que, para cada $\varepsilon>0$, existe un compacto $K_\varepsilon\subseteq X$ tal que

$$\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon.$$

(Véase, [348], Theorem 3.2, p. 20). Como consecuencia de lo anterior se tiene que si μ es una medida de Borel finita y, por consiguiente, tensa, entonces se verifica que, para todo conjunto $E\in\mathcal{B}_0(X)$,

$$\mu(E)=\sup\big\{\mu(K):K\subseteq E,\,K \text{ compacto}\big\}.$$

En general, una medida real $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to \mathbb{R}$, donde (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff arbitrario, se dice que es regular si μ^+ y μ^- son ambas regulares, lo que equivale a decir que la variación total $|\mu|$ es regular. Volvamos de nuevo a nuestros inicios y supongamos que (X,d) es un espacio métrico compacto. Denotemos por $\mathrm{rca}(X)$ el espacio de Banach formado por todas las medidas reales (las cuales son regulares) definidas sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_0(X)$ con la norma de la variación total:

$$\|\mu\|_{\mathrm{va}} := |\mu|(X) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|, \qquad \mu \in \mathrm{rca}(X),$$

supremo tomado sobre todas las particiones numerables $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de X, con $E_n \in \mathcal{B}_0(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Una razón de peso importante en considerar el espacio de Banach $(\mathrm{rca}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{va}})$, es que el dual (topológico) de $C(X)$, $(C(X)^*, \|\cdot\|)$, se identifica isométricamente con $(\mathrm{rca}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{va}})$ asociando, a cada funcional lineal continuo $x^* \in C(X)^*$, una única medida $\mu \in \mathrm{rca}(X)$, (esto es lo que afirma el Teorema de Representación de Riesz), de modo tal que:

$$x^*(f) := \langle f, \mu\rangle = \int_X f\,d\mu, \quad \text{para toda } f \in C(X) \qquad \text{y} \qquad \|x^*\| = \|\mu\|_{\mathrm{va}}.$$

Con esta identificación, $\mathrm{rca}(X)$ y $C(X)^*$ son, desde el punto de vista algebraico así como desde el punto de vista topológico, idénticos. Por este motivo, $\mathrm{rca}(X)$ hereda todas las topologías de $C(X)^*$, en particular, la ω^*-topología. De manera que, dotando a $\mathrm{rca}(X)$ con la ω^*-topología proveniente de $C(X)^*$, resulta que si $\mu \in \mathrm{rca}(X)$, entonces los conjuntos de la forma

$$V(\mu, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathrm{rca}(X) \,:\, \left| \int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu \right| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

donde $\varepsilon > 0$, y $f_1, \ldots, f_n \in C(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, forman una base de entornos básicos abiertos de cada $\mu \in \mathrm{rca}(X)$ en la ω^*-topología, y en consecuencia, dada cualquier sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathrm{rca}(X)$ y cualquier $\mu \in \mathrm{rca}(X)$,

$$\mu_n \xrightarrow{\omega^*} \mu \quad \text{si, y sólo, si} \quad \langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu\rangle \quad \text{para toda } f \in C(X).$$

En lo que sigue, denotaremos por $\mathrm{rca}^+(X)$ el subconjunto de $\mathrm{rca}(X)$ formado por todas las medidas de Borel (no negativas) y por $\mathrm{P}(X)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $\mathrm{rca}^+(X)$; es decir, la medida $\mu \in \mathrm{P}(X)$ si, y sólo si, $\mu \geq 0$ y $\mu(X) = 1$. Puesto X es un espacio métrico compacto, resulta que $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ es, por el Teorema 1.4.19, norma-separable, y se sigue del Teorema de Banach-Alaoglu, Teorema 2.2.1, página 209, que $B_{\mathrm{rca}(X)}$, la bola unitaria norma-cerrada de $\mathrm{rca}(X)$, es ω^*-compacta y metrizable. En particular, $\mathrm{P}(X)$, por ser un subconjunto ω^*-cerrado de $B_{\mathrm{rca}(X)}$, es un espacio métrico compacto cuando la ω^*-topología se restringe a dicho conjunto y, en consecuencia, $(\mathrm{P}(X), \omega^*)$ resulta ser un espacio de Baire.

Recordemos que si $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$ y si $U_0 = \bigcup \{U : U \textit{ es abierto y } \mu(U) = 0\}$, entonces de la regularidad de μ se deduce fácilmente que $\mu(U_0) = 0$, de donde resulta que U_0 es el conjunto abierto más grande en X para el cual $\mu(U_0) = 0$. Por esta razón, se define el **soporte** de μ, $\mathrm{sop}(\mu)$, como

$$\mathrm{sop}(\mu) = X \setminus U_0.$$

Es evidente que $\mathrm{sop}(\mu)$ es el conjunto cerrado más pequeño de X tal que $\mu(\mathrm{sop}(\mu)) = \mu(X)$. Una medida $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$ se dice que es **estrictamente positiva** si $\mathrm{sop}(\mu) = X$, o de forma equivalente: si $\mu(U) > 0$ para todo conjunto abierto no vacío U de X.

Es oportuno aclarar que no es verdad que en cualquier espacio topológico de Hausdorff (ni aun si dicho espacio es compacto) existe una medida de Borel estrictamente positiva (véase, por ejemplo, [7], Example 12.15, p. 442). Sin embargo, como nuestro espacio es un compacto metrizable, una tal medida existe si dicho espacio no posee puntos aislados, hecho que probaremos más abajo.

Lema 2.2.10. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto, $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$ y $A \in \mathcal{B}_0(X)$ un átomo de μ. Entonces existe un $x \in A$ tal que $\mu(\{x\}) > 0$. En otras palabras, μ no posee átomos si, y sólo si, $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.*

Prueba. Como (X,d) es un espacio métrico compacto, él satisface el segundo axioma de numerabilidad, es decir, X posee una base numerable. Fijemos entonces una tal base para la topología de X, digamos, $\{V_1, V_2, \ldots\}$ y defina el conjunto de índices $I = \{n \in \mathbb{N} : \mu(A \cap V_n) = 0\}$. Considere ahora el conjunto

$$B = A \setminus \bigcup_{n \in I} V_n.$$

Entonces B es un conjunto medible incluido en A y se cumple que $\mu(B) = \mu(A) > 0$. En efecto, como

$$A = \Big(A \setminus \bigcup_{n \in I} V_n\Big) \cup \Big(A \cap \bigcup_{n \in I} V_n\Big) = B \cup \bigcup_{n \in I} (A \cap V_n),$$

y $\mu(A \cap V_n) = 0$ para todo $n \in I$, entonces la numerabilidad aditiva de μ nos dice que $\mu(B) = \mu(A) > 0$. En particular, $B \neq \varnothing$.

Afirmamos que B consta de un único punto. Para ver esto, supongamos, por contradicción, que B posee dos puntos distintos, digamos a y b. Puesto que X es de Hausdorff, existen conjuntos abiertos básicos disjuntos V_i y V_j tales que $a \in A \cap V_i$ y $b \in A \cap V_j$. Si $\mu(A \cap V_i) = 0$, entonces $i \in I$ lo cual es imposible pues $a \in B = A \setminus \bigcup_{n \in I} V_n$. Si ahora hacemos uso del hecho de que A es un átomo y teniendo en cuenta que $\mu(A \cap V_i) \neq 0$, resulta entonces que $\mu(A \cap V_i) = \mu(A)$. Con un argumento enteramente similar se prueba que $\mu(A \cap V_j) = \mu(A)$. Sin embargo, ya que $(A \cap V_i) \cap (A \cap V_j) = \varnothing$, entonces ni $A \cap V_i$, así como tampoco $A \setminus V_i$, tienen medida cero, lo cual evidentemente contradice el hecho de que A es un átomo. Por esta razón B se reduce a un punto. ■

El resultado anterior permite formular la siguiente definición:

Definición 2.2.10. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Una medida $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$ se dice que es* ***no-atómica****, o* ***continua****, si $\mu(\{x\}) = 0$ para cualquier $x \in X$.*

Se sigue del resultado anterior que cualquier media no-atómica $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$ no posee átomos. Si ocurre que μ posee al menos un átomo, entonces se dice que μ es **atómica**. Notemos que si $\mu \in \mathrm{P}(X)$ no posee átomos y D es cualquier subconjunto a lo más numerable de X, entonces la numerabilidad aditiva de μ garantiza que $\mu(D) = 0$. Observemos también que si $\mu \in \mathrm{P}(X)$ es atómica, entonces $\mu(\{x\}) > 0$ para algún $x \in X$. Si denotamos por δ_x la medida de Dirac en $x \in X$, es decir,

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

para cada $E \in \mathcal{B}_0(X)$, entonces δ_x siempre es atómica. Además, para toda $f \in C(X)$ y todo $x \in X$ se cumple que

$$\langle f, \delta_x \rangle = \int_X f \, d\delta_x = f(x).$$

En general, una medida $\mu \in \mathrm{P}(X)$ se llama **puramente atómica** si existe una sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \, \delta_{x_n}(E), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}_0(X).$$

Es un hecho ya establecido que

Teorema 2.2.36. *Si $\mu \in \mathrm{P}(X)$, entonces,*

$$\mu \,=\, \mu_{\mathrm{c}} \,+\, \mu_{\mathrm{pa}},$$

donde μ_{c} es una medida de Borel continua y μ_{pa} es una medida de Borel puramente atómica.

Prueba. Si μ no tiene átomos, entonces definimos $\mu := \mu_{\mathrm{c}}$ y $\mu_{\mathrm{pa}} := 0$. Supongamos que μ posee átomos y sea $A = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$. Nos proponemos, en lo inmediato, demostrar que A es a lo más numerable. Para ver esto, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = \{x \in X : \mu(\{x\}) \geq 1/n\}$. Entonces

$$A \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y cada conjunto A_n contiene a lo sumo de n elementos. En efecto, supongamos que A_n contiene N elementos, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, con $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, y usemos la numerabilidad aditiva así como la monotonicidad de μ para obtener

$$\frac{N}{n} \,\leq\, \sum_{j=1}^{N} \mu(x_j) \,=\, \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} \{x_j\}\right) \,\leq\, \mu(X) \,=\, 1.$$

Esto prueba que $N \leq n$, de donde se concluye que A es a lo más numerable. Representemos al conjunto A como $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y definamos la media $\mu_{\mathrm{pa}} : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu_{\mathrm{pa}}(E) \,=\, \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x_j\})\, \delta_{x_j}(E), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}_0(X).$$

Entonces μ_{pa} es una medida puramente atómica, y para cualquier conjunto de Borel E, se cumple que

$$\mu_{\mathrm{pa}}(E) \,=\, \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x_j\})\, \delta_{x_j}(E) \,=\, \sum_{\substack{x_j \in E \\ j \in \mathbb{N}}} \mu(\{x_j\}) \,=\, \mu(E \cap \{x_1, x_2, \ldots\}) \,\leq\, \mu(E),$$

es decir, $\mu_{\mathrm{pa}} \leq \mu$, lo cual nos permite definir $\mu_{\mathrm{c}} : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu_{\mathrm{c}}(E) \,=\, \mu(E) - \mu_{\mathrm{pa}}(E), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}_0(X).$$

Es claro que $\mu_{\mathrm{c}} \in \mathrm{rca}^{+}(X)$. Veamos que μ_{c} no posee átomos. En efecto, sea $x \in X$. Si $x = x_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $\mu_{\mathrm{pa}}(\{x_j\}) = \mu(\{x_j\})$ y así, $\mu_{\mathrm{c}}(\{x\}) = 0$. Por otro lado, si $x \neq x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces necesariamente $\mu_{\mathrm{pa}}(\{x\}) = 0 = \mu(\{x\})$ y, de nuevo, $\mu_{\mathrm{c}}(\{x\}) = 0$. Esto termina la prueba. ■

Recordemos que si X es un espacio topológico de Hausdorff, el conjunto de los **puntos límites** o **puntos de acumulación** de X se define como

$$X' = X \setminus \{x \in X \,:\, x \ \text{ es un punto aislado de X}\}.$$

Usando inducción transfinita definimos, para cada número ordinal α, el **derivado de Cantor-Bendixson**, $X^{(\alpha)}$, como sigue:

1. $X^{(0)} = X$;
2. $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, si α es un ordinal, y
3. $X^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha<\beta} X^{(\alpha)}$, si β es un límite ordinal.

Es claro que $X^{(\alpha)}$ es cerrado en X para todo $\alpha < \omega_1$ y que la familia $(X^{(\alpha)})_{\alpha<\omega_1}$ es no-creciente, es decir, $X \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq X^{(\alpha)} \supseteq \cdots \supseteq X^{(\beta)} \supseteq \cdots$, para todo $\alpha < \beta$. Más aun,

$$X = \bigcup_{\alpha<\beta} \left(X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} \right) \cup X^{(\beta)}$$

para cualquier ordinal $\beta > 0$. En efecto, si $x \notin X^{(\beta)}$, existe un primer ordinal $\gamma < \beta$ tal que $x \notin X^{(\gamma)}$. Este γ no puede ser un ordinal límite, pues si lo fuera tendríamos que $X^{(\gamma)} = \bigcap_{\alpha<\gamma} X^{(\alpha)}$, y en consecuencia, $x \notin X^{(\alpha)}$ para algún $\alpha < \gamma$. Entonces γ tiene la forma $\gamma = \alpha + 1$ y por consiguiente, $x \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. También es oportuno observar que si $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$ para algún α, entonces $X^{(\alpha)} = X^{(\beta)}$ para todo $\beta > \alpha$.

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff X se llama **disperso** si cada subconjunto cerrado no vacío F de X posee al menos un punto aislado. El siguiente resultado es bien conocido y será demostrado sólo por razones didácticas.

Lema 2.2.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff.*

(1) *X es disperso si, y sólo si, $X^{(\alpha)} = \varnothing$ para algún ordinal α.*

(2) *Si X es disperso y, además, compacto y si α es el primer ordinal para el cual se cumple que $X^{(\alpha)} = \varnothing$, entonces α no es un ordinal límite.*

(3) *Si X es disperso y posee una base numerable, entonces $\alpha < \omega_1$, donde α es el primer ordinal para el cual $X^{(\alpha)} = \varnothing$ y ω_1 representa el primer ordinal no numerable.*

Prueba. (1) Si X es disperso, entonces $\{X^{(\alpha)} : \alpha \text{ es un ordinal}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados estrictamente decreciente y se sigue que $X^{(\alpha)} = \varnothing$ siempre que card(α) >card(X). Por otro lado, suponer que X no es disperso significa que X posee un subconjunto perfecto no vacío, digamos F. Evidentemente se tiene que $F \subseteq \bigcap \{X^{(\alpha)} : \alpha \text{ es un ordinal}\}$, de modo que $X^{(\alpha)} \neq \varnothing$ para todo α.

(2) Suponga que α es un ordinal límite, entonces

$$\varnothing = X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}.$$

Como X es compacto, la familia $\{X^{(\beta)} : \beta \text{ es un ordinal}\}$ es una colección de subconjuntos compactos decreciente, de donde resulta que $\bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ es no vacía. Esta contradicción establece que α no puede ser un ordinal límite.

(2) Sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de X. Puesto que los $X^{(\beta)}$, con $\beta < \alpha$, son cerrados y no vacíos, y decrecen estrictamente, podemos definir una aplicación inyectiva $\varphi : \{\beta : \beta < \alpha\} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera: para cada $\beta < \alpha$, sea $\varphi(\beta) \in \mathbb{N}$ tal que $U_{\varphi(\beta)} \cap X^{(\beta)} \neq \varnothing$ pero $U_{\varphi(\beta)} \cap X^{(\beta+1)} = \varnothing$. Esto prueba que $\alpha < \omega_1$. ■

Como una consecuencia inmediata del lema anterior se tiene que

Corolario 2.2.18. *Si (X,d) es un espacio métrico compacto disperso, entonces existe un ordinal no límite $\alpha < \omega_1$ tal que $X^{(\alpha)} = \varnothing$.*

El siguiente resultado, probado por W. Rudin, establece que en espacios métricos compactos dispersos la única medida no-atómica que existe sobre dicho espacio es la medida idénticamente nula.

Teorema 2.2.37 (Rudin). *Sea (X,d) un espacio métrico compacto disperso. Si $\mu \in \mathrm{P}(X)$ no posee átomos, entonces $\mu = 0$.*

Prueba. Sea μ una medida de probabilidad no-atómica y supongamos que $\mu \neq 0$. Por el Corolario 2.2.18, existe un ordinal α para el cual $X^{(\alpha)} = \varnothing$. Como α no es un ordinal límite, existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$ y $X^{(\beta)} \neq \varnothing$. De la compacidad de $X^{(\beta)}$ se sigue que dicho conjunto debe ser finito y, entonces, $\mu(X^{(\beta)}) = 0$ pues μ es no-atómica. Esto prueba que el conjunto $\mathcal{A} := \{\beta : \mu(X^{(\beta)}) < \mu(X)\}$ es no vacío. Sea β_0 el primer ordinal para el cual $\mu(X^{(\beta_0)}) < \mu(X)$. Vamos a probar que, en este caso, β_0 es un ordinal límite. En efecto, supongamos que para algún ordinal γ, $\beta_0 = \gamma + 1$. De esto se sigue que la igualdad $\mu(X^{(\gamma)}) = \mu(X^{(\beta_0)}) + \mu(X^{(\gamma)} \setminus X^{(\beta_0)})$ se cumple. Por la definición de conjunto derivado, resulta que $X^{(\gamma)} \setminus X^{(\beta_0)}$ no puede contener subconjuntos compactos infinitos. Apoyándonos ahora en la regularidad y continuidad de μ, resulta que $\mu(X^{(\gamma)} \setminus X^{(\beta_0)}) = 0$ y, por lo tanto, $\mu(X^{(\gamma)}) = \mu(X^{(\beta_0)})$, lo cual contradice nuestra elección de β_0. Por esto, β_0 es un ordinal límite. Por un simple argumento de compacidad se deduce que, para cada conjunto abierto G conteniendo a $X^{(\beta_0)}$, existe un ordinal $\gamma < \beta_0$ tal que $X^{(\gamma)} \subseteq G$. Pero como $\gamma < \beta_0$, resulta que $\mu(X^{(\gamma)}) = \mu(X)$ y, en consecuencia, $\mu(G) = \mu(X)$ para cada conjunto abierto G conteniendo a $X^{(\beta_0)}$. De nuevo, por la regularidad de μ tenemos que $\mu(X^{(\beta_0)}) = \mu(X)$ lo que origina una contradicción. Esto prueba que $\mu = 0$ y termina la prueba. ■

El Teorema 2.2.37 nos garantiza que sobre cualquier espacio métrico compacto disperso (X,d), toda medida de probabilidad continua definida sobre $\mathcal{B}_0(X)$ es idénticamente nula. La misma conclusión se obtiene si reemplazamos el espacio métrico compacto disperso por cualquier conjunto de Luzin. La demostración de este hecho requiere del siguiente resultado clásico.

Lema 2.2.12. *Sean (X,d) un espacio métrico separable y $\mu \in \mathrm{P}(X)$ una medida continua. Entonces existe un conjunto $A \subseteq X$ el cual es un F_σ de primera categoría tal que $\mu(X \setminus A) = 0$.*

Prueba. Usemos la separabilidad del espacio métrico (X,d) para hallar un conjunto denso numerable de X, digamos $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y fijemos un número natural k. Puesto que μ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un entorno abierto $V_k(x_n)$ de x_n tal que $\mu\big(V_k(x_n)\big) < 1/2^{k+n}$. Pongamos $V_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_k(x_n)$. Entonces V_k es un subconjunto abierto denso de X y se cumple, además, que

$$\mu(V_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(V_k(x_n)\big) < 1/2^k.$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ resulta ser un G_δ-denso en X. Si ahora definimos $A = X \setminus G$, tendremos que A es un conjunto F_σ de primera categoría en X y como μ es finita se cumple que $\mu(X \setminus A) = \mu(G) = \lim_{k\to\infty} \mu(V_k) = 0$. La prueba es completa. ■

Observe que el lema anterior establece que X se puede escribir en la forma $X = G \cup A$, donde G es un G_δ-denso con $\mu(G) = 0$, A es un F_σ de primera categoría y $G \cap A = \varnothing$.

Teorema 2.2.38. *Sea X un conjunto de Luzin. Si $\mu \in \mathrm{P}(X)$ es continua, entonces $\mu = 0$.*

Prueba. Puesto que $(X, |\cdot|)$ es un espacio métrico separable y $\mu \in \mathrm{P}(X)$ es continua, podemos elegir, por el lema anterior, un conjunto A de primera categoría en X tal que $\mu(X \setminus A) = 0$. Como A también es de primera categoría en $\mathbb{R}$, usando el hecho de que X es un conjunto de Luzin resulta que $\mathrm{card}(X \cap A) = \mathrm{card}(A) \leq \aleph_0$. Esto nos dice que A es a lo más numerable y como μ es continua se concluye que $0 \leq \mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\}) = 0$. Por consiguiente, $\mu(X) = \mu(X \setminus A) + \mu(A) = 0$ y termina la prueba. ■

En contraste con el resultado de Rudin, la ausencia de puntos aislados en un espacio métrico compacto, conduce a la existencia de abundantes medidas no-atómicas. Comenzaremos con la demostración del siguiente resultado.

Lema 2.2.13. *Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto ω^*-compacto de $\mathrm{rca}^+(X)$. Entonces*

$$\mathcal{K}^{\bullet} = \left\{ \mu \in \mathrm{rca}^+(X) \ : \ \nu \leq \mu \ \ \textit{para alguna}\ \nu \in \mathcal{K} \right\}$$

es ω^*-cerrado de $\mathrm{rca}^+(X)$.

Prueba. Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en $\mathcal{K}^{\bullet}$ convergiendo (en la ω^*-topología) a $\mu \in \mathrm{rca}^+(X)$. Veamos que $\mu \in \mathcal{K}^{\bullet}$. En efecto, por definición, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe un $\nu_\alpha \in \mathcal{K}$ tal que $\nu_\alpha \leq \mu_\alpha$. Siendo $\mathcal{K}$ ω^*-compacto, existe una subred (ν_{α_d}) de $(\nu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ con limite $\nu \in \mathcal{K}$. De esto se sigue que, para cada $f \in C(X)$, $f \geq 0$,

$$\langle \mu, f \rangle \ = \ \lim_d \langle \mu_{\alpha_d}, f \rangle \ \geq \ \lim_d \langle \nu_{\alpha_d}, f \rangle \ = \ \langle \nu, f \rangle$$

de modo que $\mu \in \mathcal{K}^{\bullet}$. ■

Lema 2.2.14. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, K un subconjunto compacto de X y $a > 0$. Entonces el conjunto $\mathcal{K}_a = \left\{ a \cdot \delta_x : \ x \in K \right\}$ es ω^*-compacto en $\mathrm{rca}^+(X)$.*

Prueba. Puesto que la aplicación $\varphi : (X, d) \to (\mathrm{rca}^+(X), \omega^*)$ definida por $\varphi(x) = \delta_x$ para cada $x \in X$, es claramente continua, se sigue que el conjunto $\varphi(X) = \{\delta_x : x \in X\}$ es ω^*-compacto en $\mathrm{rca}^+(X)$. En particular, el conjunto $\mathcal{K}_a = \{a \cdot \delta_x : \ x \in K\}$ también es ω^*-compacto en $\mathrm{rca}^+(X)$. ■

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $A \subseteq X$, entonces el **aniquilador** de A se define como

$$A^{\perp} = \left\{ x^* \in X^* : \ x^*(x) = 0 \ \textit{para todo}\ x \in A \right\},$$

mientras que si $B \subseteq X^*$, entonces el **pre-aniquilador** de B se define como

$$B_{\perp} = \left\{ x \in X : \ x^*(x) = 0 \ \textit{para todo}\ x^* \in B \right\},$$

Una de las buenas propiedades importantes que poseen las medidas de Dirac es que ellas sirven para aproximar cualquier medida de Borel a valores reales; es decir, si $\mu \in \mathrm{rca}(X)$ entonces existe una cierta combinación lineal de medidas de Dirac que aproximan a μ en la ω^*-topología. Para demostrar este hecho, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema B ([7], Corolary 5.108, p. 219). *Sea B un subespacio lineal de $\mathrm{rca}(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $B_{\perp} = \{0\}$.

(2) B *es* ω^**-denso en* $\mathrm{rca}(X)$.

Teorema 2.2.39. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X. Entonces $\left[\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}\right]$, el subespacio lineal generado por $\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$, es ω^*-denso en* $\mathrm{rca}(X)$.

Prueba. En primer lugar notemos que $\left\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\right\}_{\perp} = \{0\}$. En efecto, sea $f \in \left\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\right\}_{\perp}$. Entonces

$$0 = \langle f, \delta_{x_n} \rangle = \int_X f\,\delta_{x_n} = f(x_n),$$

y la densidad de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, así como la continuidad de f, garantizan que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Esto prueba nuestra afirmación. Por otro lado, como $\left\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\right\}_{\perp} = \left[\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}\right]_{\perp}$, se sigue del **Teorema B** que $\left[\{\delta_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}\right]$ es ω^*-denso en $\mathrm{rca}(X)$. ■

El resultado anterior establece que, para cualquier medida $\mu \in \mathrm{rca}(X)$, existen escalares $a_1, \dots, a_n$ y vectores $z_1, \dots, z_n$ en $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que la medida $\upsilon = a_1\delta_{z_1} + \cdots + a_n\delta_{z_n}$ aproxima a μ en la ω^*-topología. Si los coeficientes a_i se eligen no-negativos y tales que $a_1 + \ldots + a_n = 1$, entonces la colección de todas las medidas $\upsilon = a_1\delta_{z_1} + \cdots + a_n\delta_{z_n}$ aproximan a las medidas $\mu \in \mathrm{P}(X)$ en la ω^*-topología. Cualquier medida $\mu \in \mathrm{P}(X)$ de la forma

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i},$$

donde los a_i son números reales no negativos satisfaciendo $a_1 + \cdots + a_n = 1$, se llama una **medida finitamente soportada**. En este caso decimos que μ es **soportada** por $\{x_1, \dots, x_n\}$. En general, si D es un subconjunto no vacío de X, denotaremos por $\mathrm{P}_{fs}(D,X)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad finitamente soportadas por elementos de D; es decir,

$$\mathrm{P}_{fs}(D,X) = \left\{\mu \in \mathrm{P}(X) : \ \mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}, \ \ a_1 + \cdots + a_n = 1, \ \ a_i \geq 0, \ \ x_i \in D, \ \ i = 1, \dots, n, \ \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Lema 2.2.15. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y D un subconjunto denso en X. Entonces* $\mathrm{P}_{fs}(D,X)$ *es ω^*-denso en* $\mathrm{P}(X)$.

Prueba. Vamos a demostrar que cualquier conjunto no vacío y ω^*-abierto V de $\mathrm{P}(X)$ intersecta al conjunto $\mathrm{P}_{fs}(D,X)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que V es un entorno ω^*-abierto de $\mu \in \mathrm{P}(X)$ de la forma:

$$V := V(\mu, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \left\{\nu \in \mathrm{P}(X) \ : \ \left|\int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu\right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\right\},$$

donde $\varepsilon > 0$, y $f_1, \dots, f_n \in C(X)$. Veamos que existe una medida de probabilidad finitamente soportada por elementos de D perteneciente a V. En efecto, como las funciones $f_1, \dots, f_n$ son uniformemente continuas, existe un $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

para cualquier $x,y \in X$ e $i = 1, \dots, n$. De aquí se sigue la existencia de una partición finita $F_1, \dots, F_k$ de X por conjuntos medibles Borel de medida positiva con $\mathrm{int}(F_j) \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, k$, tal que

$$x,y \in F_j \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \qquad j = 1, \dots, k; \ \ i = 1, \dots, n.$$

Puesto que D es denso en X, cada intersección $\mathrm{int}(F_i) \cap D$ es no vacía. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escojamos $x_i \in \mathrm{int}(F_i) \cap D$ y pongamos $a_i = \mu(F_i)$. Finalmente defina $\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}$. Entonces $\nu \in \mathrm{P}_{fs}(D,X)$ y para

$f \in \{f_1, \dots, f_n\}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| &= \left| \int_X f d\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \right| \ \text{(puesto que } \int_X f d\delta_x = f(x)\text{)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{F_i} f d\mu - \int_{F_i} f(x_i) d\mu \right) \right| \ \text{(puesto que } \mu(F_i) = a_i\text{)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} (f(x) - f(x_i)) d\mu \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} |f(x) - f(x_i)| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} \varepsilon \, d\mu \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que $\nu \in V$ y, en consecuencia, $\nu \in V \cap \mathrm{P}_{fs}(D,X)$. ■

La existencia de medidas de Borel que no poseen átomos y que son estrictamente positivas se puede demostrar por una aplicación del Teorema de Categoría de Baire tal y como se prueba en [348], Theorem 8.1, p. 53. Otra demostración que no utiliza el Teorema de Categoría de Baire se puede ver en [7], Theorem 12.22, p. 446, donde, en su lugar, se hace uso del Teorema de Banach-Alaoglu y del Lema de Uryshon. Véase también [289].

Lema 2.2.16. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Entonces* $\mathrm{rca}^+(X)$ *contiene al menos una medida no-atómica estrictamente positiva.*

Prueba. Nuestra primera tarea es demostrar la siguiente:

> **Afirmación**. *Para cada bola cerrada B en X con radio positivo, existe una medida no-atómica $\mu_B \in \mathrm{P}(X)$ tal que* $\mathrm{sop}(\mu_B) \subseteq B$.

Prueba de la Afirmación. Sea $B = B(x,r)$ una bola cerrada con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$. Puesto que X no posee puntos aislados, la bola cerrada $B(x,r/4)$ no se reduce a un punto; es decir, ella contiene infinitos puntos. Sean $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$ dos puntos distintos de $B(x,r/4)$ y pongamos $\varepsilon_1 := d(x_1^{(1)},x_2^{(1)})/4$. Considere ahora las bolas cerradas disjuntas $B(x_1^{(1)},\varepsilon_1)$ y $B(x_2^{(1)},\varepsilon_1)$. De nuevo, por la ausencia de puntos aislados en X, cada una de esas bolas contienen dos puntos diferentes, digamos $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ en $B(x_1^{(1)},\varepsilon_1)$ y $x_3^{(2)}$, $x_4^{(2)}$ en $B(x_2^{(1)},\varepsilon_1)$. Sea $\varepsilon_2 := \mathrm{mín}\{d(x_i^{(2)},x_j^{(2)})/4 : \ i,j = 1,2,3,4\}$. Entonces las bolas cerradas $B(x_j^{(2)},\varepsilon_2)$, $j = 1,2,3,4$ son disjuntas. Continuando inductivamente con este proceso se construyen, para cada $n \in \mathbb{N}$, un $\varepsilon_n > 0$ y un conjunto

$$X_n = \{x_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)}\}$$

con 2^n elementos tal que

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n}{2}, \qquad X_n \subseteq B,$$

y para cada $y \in B$ y cada k con $k \leq n$, la bola $B(y,\varepsilon_k)$ contiene a lo más 2^{n-k} puntos de X_n. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, la medida

$$\mu_n := \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \delta_{x_j^{(n)}}.$$

Con esta definición resulta que cada μ_n es una medida de probabilidad cuyo soporte yace en B y, además, se cumple que

$$\mu_n\big(B(y,\varepsilon_k)\big) \leq \frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-k} = \frac{1}{2^k} \tag{1}$$

para todo $n \geq k$ y cualquier $y \in X$. Puesto que (X,d) es un espacio métrico compacto, sabemos que $(C(X),\|\cdot\|_\infty)$ es separable (Teorema 1.4.19, página 30) y, por consiguiente, por el Teorema de Banach-Alaoglu, $(\mathrm{P}(X),\omega^*)$ es un compacto metrizable. Por esto, la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ posee una subsucesión, a la que seguiremos denotando del mismo modo, que converge a una medida $\mu \in \mathrm{P}(X)$.

Veamos ahora que $\mathrm{sop}(\mu) \subseteq B$. En efecto, por ser μ una medida tensa, tenemos que

$$\mu(X\setminus B) \;=\; \sup\big\{\mu(K):\; K\subseteq X\setminus B,\; K \text{ compacto}\big\}.$$

Fijemos $K \subseteq X \setminus B$ con K compacto. Por el Lema de Urysohn , existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f = 1$ sobre K y $f = 0$ sobre B. Es claro que

$$\mu(K) \;\leq\; \int_X f\,d\mu \;\leq\; \mu(X\setminus B). \tag{2}$$

Puesto que $\mu_n \to \mu$ (en la topología ω^*) y como $\mathrm{sop}(\mu_n) \subseteq B$, entonces

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_X f\,d\mu_n \qquad \text{y} \qquad 0 \;\leq\; \int_X f\,d\mu \;\leq\; \mu_n(X\setminus B) \;=\; 0$$

de donde se deduce que $\int_X f\,d\mu = 0$, y así, por (2), $\mu(K) = 0$. Puesto que $K \subseteq X\setminus B$ era un compacto arbitrario, se tiene que también $\mu(X\setminus B) = 0$. Esto prueba que $\mathrm{sop}(\mu) \subseteq B$. Más aun, por (1), μ es continua y termina la prueba de nuestra afirmación. $\square$

Para finalizar la demostración del lema, sea D un subconjunto denso numerable de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in D$, existe, por la afirmación anterior, una medida de probabilidad continua $\mu_{n,x} := \mu_{B(x,1/n)}$ con soporte contenido en $B(x,1/n)$. Seleccionemos, arbitrariamente, números $c_{n,x} > 0$ tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\,x\in D} c_{n,x} < +\infty.$$

Entonces

$$\upsilon := \sum_{n\in\mathbb{N},\,x\in D} c_{n,x}\,\mu_{n,x}$$

es una medida continua cuyo soporte contiene a todos los $x \in D$. Es claro que

$$\mathrm{sop}(\upsilon) \;\supseteq \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ x\in D}} \mathrm{sop}(\mu_{n,x})$$

y también que el último conjunto es denso en X por la densidad de D. Se sigue que $\mathrm{sop}(\upsilon) = X$. Esto prueba que υ es una medida estrictamente positiva. $\blacksquare$

Teorema 2.2.40. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Entonces $\mathrm{P_c}(X)$, el subconjunto de $\mathrm{P}(X)$ formado por todas las medidas que no poseen átomos, es un G_δ-denso en $(\mathrm{P}(X),\omega^*)$.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n = \Big\{\mu \in P(X) \,:\, \mu(\{x\}) < 1/n \;\textit{ para cada } x \in X\Big\}.$$

Evidentemente, $\mathrm{P_c}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Afirmamos que

(1) *G_n es ω^*-abierto en* $\mathrm{P}(X)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $\mu \in G_n$. Para cada $x \in X$ existe, por la regularidad de μ, un número $r_x > 0$ tal que $\mu(U(x,r_x)) < 1/n$. Usemos el Lema de Urysohn para determinar, para el x dado, una función continua $f_x : X \to [0,1]$ tal que

$$f_x = 1 \quad \text{sobre} \quad B(x,r_x) \qquad \text{y} \qquad f_x = 0 \quad \text{sobre} \quad X \setminus U(x,r_x).$$

Observe que

$$\langle f_x, \mu\rangle \;\leq\; \mu(U(x,r_x)) \;<\; 1/n \quad \text{para todo } x \in X.$$

Aprovechando el hecho de que X es compacto, escojamos $x_1,\ldots,x_n$ en X de modo que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \frac{1}{2}r_{x_i})$. Consideremos a continuación el entorno ω^*-abierto de μ dado por

$$W \;:=\; \big\{\upsilon \in P(X) : \langle f_{x_i}, \upsilon\rangle \;<\; 1/n,\;\; i = 1,\ldots,n\big\}.$$

Para cualquier $\upsilon \in W$ tenemos que

$$\upsilon\big(U(x_i, r_{x_i}/2)\big) \;\leq\; \langle f_{x_i}, \upsilon\rangle \;<\; \frac{1}{n}, \qquad i = 1,\ldots,n$$

lo cual implica que $\upsilon(\{x\}) < 1/n$ para cualquier $x \in U(x_i, \frac{1}{2}r_{x_i})$. Teniendo en cuenta que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \frac{1}{2}r_{x_i})$, resulta que la desigualdad $\upsilon(\{x\}) < 1/n$ vale para todo $x \in X$ y, en consecuencia, $W \subseteq G_n$. Esto termina la prueba de (1).

(2) $\mathrm{P_c}(X)$ *es* ω^**-denso en* $\mathrm{P}(X)$. Escojamos, por el Lema 2.2.16, una medida $\mu \in \mathrm{P}(X)$ que no posea átomos y sea, a su vez, estrictamente positiva. Fijemos $x \in X$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos la medida $\mu_k \in \mathrm{P}(X)$ por

$$\mu_k(E) \;:=\; \frac{\mu\big(E \cap B(x,1/k)\big)}{\mu(B(x,1/k))}, \quad E \in \mathcal{B}_0(X).$$

Es claro que $\mu_k \in \mathrm{P_c}(X)$ y, además, $\mu_k \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$. Esto prueba que $\overline{\mathrm{P_c}(X)}^{\omega^*}$ contiene a todas las medidas de Dirac δ_x, $(x \in X)$ y, por consiguiente, a todas las medidas de probabilidad finitamente soportadas. Pero éstas últimas son, en virtud del Lema 2.2.15, ω^*-densas en $\mathrm{P}(X)$, de donde se sigue que $\overline{\mathrm{P_c}(X)}^{\omega^*} = \mathrm{P}(X)$. Esto prueba (2). Teniendo en cuenta que $\mathrm{P_c}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, entonces (1) y (2) nos revelan que $\mathrm{P_c}(X)$ es un G_δ-denso en el espacio de Baire $(\mathrm{P}(X), \omega^*)$. ■

Fijemos ahora una medida de Borel sin átomos $\nu \in \mathrm{P}(X)$ que podemos elegir estrictamente positiva gracias al Teorema 2.2.40. Por el Teorema de Descomposición de Lebesgue, cada medida real $\mu \in \mathrm{rca}(X)$ admite una única representación en la forma $\mu = \mu^a + \mu^s$, donde $\mu^a \ll \nu$ y $\mu^s \perp \nu$. De hecho, ν induce una descomposición de $\mathrm{rca}(X)$ en suma directa $M_\nu^a \oplus M_\nu^s = \mathrm{rca}(X)$, donde

$$M_\nu^a = \big\{\mu \in \mathrm{rca}(X) : \mu \ll \nu\big\} \qquad \text{y} \qquad M_\nu^s = \big\{\mu \in \mathrm{rca}(X) : \mu \perp \nu\big\}$$

son subespacios lineales de $\mathrm{rca}(X)$. Una aplicación del Teorema de Radon-Nikodym permite identificar, isométricamente, al subespacio lineal M_ν^a con $L_1(\nu)$. Como ν es estrictamente positiva, resulta entonces que $\mathrm{sop}(\nu) = X$ y, por consiguiente, $M_\nu^{a\perp} = \{0\}$. Se sigue del **Teorema B** que M_ν^a es ω^*-denso en $\mathrm{rca}(X)$. Con esto hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.41. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y ν una medida de Borel sin átomos estrictamente positiva en* $\mathrm{P}(X)$. *Entonces el conjunto*

$$M_\nu^a = \big\{\mu \in \mathrm{rca}(X) : \mu \ll \nu\big\}$$

es ω^**-denso en* $\mathrm{rca}(X)$.

2.2.6. $\|$ ► El Teorema de Vitali-Hahn-Saks

El Teorema de Vitali-Hahn-Saks afirma que si $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas reales que converge puntualmente a una función de conjuntos μ, entonces μ es una medida real. Existen varias pruebas de éste resultado. Una de las más conocidas se debe al propio Saks el cual usa el Teorema de Categoría de Baire como una herramienta fundamental en su demostración (véase, [129], aunque también existe una demostración por S. Banach, obtenida de manera independiente, en la versión pólaca de su libro sobre teoría de operadores lineales usando el mismo método de categoría de Baire). Para lograr tal objetivo, Saks tuvo que construir un espacio métrico completo especial asociado a un espacio de medida finita para desarrollar su prueba. Nuestra tarea es presentar los pasos del programa seguido por Saks.

La siguiente caracterización de la numerabilidad aditiva de una función de conjuntos es, con frecuencia, de mucha utilidad:

Lema 2.2.17. *Sea $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ una función finitamente aditiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *μ es numerablemente aditiva.*

(2) *Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de elementos de Σ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.*

(3) *Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de elementos de Σ, entonces*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que μ es numerablemente aditiva y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de elementos de Σ. Pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Los conjuntos B_n pertenecen a Σ, son disjuntos dos a dos, y $A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Por la numerabilidad aditiva de μ resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ converge. Entonces, como $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m$, se concluye que $\mu(A_n) = \sum_{m=n}^{\infty} B_n$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

$(2) \Leftrightarrow (3)$. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de elementos de Σ y suponga que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces $(A \setminus A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de elementos de Σ cuya intersección es vacía. Se sigue de (2) y del hecho de que μ es finita, que $\mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \setminus A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual prueba (3).

$(3) \Rightarrow (1)$. Suponga ahora que la condición (3) se satisface. Sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Σ disjunta dos a dos. Hagamos $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_m$. Es claro que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos en Σ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B$ y, en consecuencia, por nuestra hipótesis $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Finalmente, como μ es finitamente aditividad concluimos que,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(B_m) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m\right) \;=\; \mu(B)$$

y termina la prueba. ■

Sea X un conjunto no vacío y sean E y F subconjuntos de X. La **diferencia simétrica** $E \bigtriangleup F$ se define por

$$\begin{aligned} E \bigtriangleup F \;&=\; \big(E \setminus F\big) \cup \big(F \setminus E\big) \\ &=\; \big(E \cup F\big) \setminus \big(E \cap F\big). \end{aligned}$$

Es fácil establecer que si $E, F, G \in \mathcal{P}(X)$, entonces

(D_1) $E \triangle E = \varnothing$.

(D_2) $E \triangle F = F \triangle E$.

(D_3) $E \triangle F \subseteq \big(E \triangle G\big) \cup \big(G \triangle F\big)$.

Vamos ahora a asociar, a cada espacio de medida finita, un espacio métrico completo. Fijemos, entonces, un espacio de medida finita (Ω,Σ,μ) y para cada par $E,F \in \Sigma$ defina

$$d_\mu(E,F) \;=\; \mu(E \triangle F).$$

Usando las propiedades $(D_1),(D_2)$ y (D_3) se prueba que la función d_μ es una pseudo-métrica sobre Σ comúnmente llamada la **pseudo-métrica de Fréchet-Nikodým**, es decir, se verifica que, cualesquiera sean $E,F,G \in \Sigma$:

(d_1) $d_\mu(E,E) = 0$,

(d_2) $d_\mu(E,F) = d_\mu(F,E)$, y

(d_3) $d_\mu(E,G) \leq d_\mu(E,F) + d_\mu(F,G)$

pero la condición: $d_\mu(E,F) = 0 \;\Rightarrow\; E = F$ no siempre se cumple. Para construir una métrica a partir de la pseudo-métrica, es necesario considerar la siguiente relación de equivalencia:

$$E \sim F \qquad \text{si} \qquad d_\mu(E,F) = 0.$$

Esta relación lo que hace es identificar todos los pares de conjuntos $E,F \in \Sigma$ que satisfagan la condición $\mu(E \triangle F) = 0$. Es fácil ver que $\sim$ es, realmente, una relación de equivalencia sobre Σ y, en consecuencia, podemos construir el conjunto cociente

$$\Sigma_\mu \;:=\; \Sigma/\sim \;=\; \big\{[\widetilde{E}\,] : E \in \Sigma\big\},$$

donde, para cada $E \in \Sigma$, $[\widetilde{E}\,] = \{F \in \Sigma : E \sim F\}$ constituye la clase de equivalencia determinada por E. Se verifica, sin dificultad, que las operaciones conjuntistas mantienen compatibilidad, lo cual quiere decir que si, $E' \in [\widetilde{E}\,]$ y $F' \in [\widetilde{F}\,]$, entonces $d_\mu(E',F') = d_\mu(E,F)$ por lo que la aplicación $\widetilde{d_\mu} : \Sigma_\mu \times \Sigma_\mu \to [0,+\infty)$ dada por

$$\widetilde{d_\mu}\big([\widetilde{E}\,],[\widetilde{F}\,]\big) \;=\; d_\mu(E,F), \qquad [\widetilde{E}\,],[\widetilde{F}\,] \in \Sigma_\mu$$

está bien definida, es decir, no depende sobre la elección de los representantes en las clases de equivalencias. De hecho, $\widetilde{d_\mu}$ constituye una métrica sobre Σ_μ. El espacio métrico $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$ se denomina **álgebra de Boole métrico** asociado a (Ω,Σ,μ). Asimismo, se comprueba la consistencia de las definiciones $[\widetilde{E}\,]^c := [\widetilde{E^c}]$, $[\widetilde{E}\,] \cup [\widetilde{F}\,] := [\widetilde{E \cup F}]$, etc.

Teorema 2.2.42 (Saks-Banach). *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita. Entonces:*

(1) *$(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$ es un espacio métrico completo.*

(2) *μ es uniformemente continua sobre $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$. En particular, una medida $\nu : \Sigma \to [0,+\infty)$ es uniformemente continua sobre $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$ si, y sólo si, $\nu \ll \mu$.*

(3) *Las aplicaciones $\varphi,\psi : \Sigma_\mu \times \Sigma_\mu \to \Sigma_\mu$ definidas por $\varphi(A,B) = A \cup B$ y $\psi(A,B) = A \cap B$ son continuas.*

Prueba. (1) Sea $\big([\widetilde{E}_n]\big)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\big(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu\big)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea E_n un representante de $[\widetilde{E}\,]_n$. Deseamos demostrar que existe $E \in \Sigma$ tal que $d_\mu(E_n, E) = \mu(E_n \triangle E) \to 0$. Como $\big([\widetilde{E}_n]\big)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $d_\mu(E_n, E_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n > n_{k+1}$. Por consiguiente, pasando a una subsucesión si fuese necesario, podemos asumir que

$$d_\mu(E_k, E_n) \,=\, \mu(E_k \triangle E_n) \,<\, 2^{-n} \qquad (\alpha_1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $k \geq n$. Sea

$$E \,=\, \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Puesto que Σ es una σ-algebra, el conjunto $E \in \Sigma$. Afirmamos que $d_\mu(E_n, E) \to 0$. En efecto, para cada $N \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$F_N \,=\, \bigcap_{k=1}^{N} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \,\cap\, \bigcup_{n=2}^{\infty} E_n \,\cap \cdots \cap\, \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \,=\, \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n.$$

Entonces $(F_N)_{N=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente en Σ cuya intersección es E, por lo que $\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \setminus E = \varnothing$. Se sigue del Lema 2.2.17 que

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{N} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \setminus E\right) \,=\, \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \setminus E\right) \,=\, \lim_{N\to\infty} \mu(F_N \setminus E) \,=\, 0,$$

y así, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \setminus E\right) \,=\, \mu\left(\bigcap_{k=1}^{N} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \setminus E\right) \,<\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que, para todo $m \geq N$, $\bigcup_{n=m}^{\infty} F_n \setminus E \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \setminus E$, resulta que

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \setminus E\right) \,<\, \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{para todo } m \geq N. \qquad (\alpha_2)$$

Si escojemos ahora un $m \geq N$ lo suficientemente grande de modo que $\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$, tendremos, por (α_1), que $\mu(E_k \setminus E_m) \leq \mu(E_m \triangle E_k) < 2^{-m}$ y, en consecuencia,

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \setminus E_m\right) \,\leq\, \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_m) \,\leq\, \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} \,<\, \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\alpha_3)$$

Finalmente, como $E, E_m \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$, resulta de (α_2) y (α_3) que para todo $m \geq N$,

$$\begin{aligned}
\mu(E_m \triangle E) \,&=\, \mu(E_m \setminus E) + \mu(E \setminus E_m) \\
&\leq\, \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \setminus E\right) + \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \setminus E_m\right) \\
&<\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración de que $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ es un espacio métrico completo.

(2) Puesto que

$$A \cup B \;=\; A \cup (A \triangle B) \;=\; B \cup (A \triangle B),$$

cualesquiera sean $A, B \in \Sigma$, entonces, por la subaditividad de μ, se tiene que

$$\mu(A) \;\leq\; \mu(A \cup B) \;\leq\; \mu(B) + \mu(A \triangle B) \qquad \text{y} \qquad \mu(B) \;\leq\; \mu(A \cup B) \;\leq\; \mu(A) + \mu(A \triangle B),$$

de donde se sigue que

$$|\mu(A) - \mu(B)| \;\leq\; \mu(A \triangle B). \tag{β_1}$$

Esto prueba que μ es uniformemente continua sobre Σ_μ. Suponga ahora que ν es uniformemente continua sobre $(\Sigma_\mu, \widetilde{d_\mu})$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, cualesquiera sean $A, B \in \Sigma$ se cumple que $|\nu(A) - \nu(B)| < \varepsilon$ siempre que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Tomando $B = \varnothing$, vemos que $\nu \ll \mu$. Recíprocamente, suponga que $\nu \ll \mu$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(E)| < \varepsilon$ siempre que $\mu(E) < \delta$. Sean ahora $A, B \in \Sigma$ y suponga que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Coma la desigualdad (β_1) es válida para cualquier medida finita, resulta que $|\nu(A) - \nu(B)| \leq \nu(A \triangle B) < \varepsilon$.

(3) Si A, A_1, B, B_1 son elementos arbitrarios de Σ, entonces las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \triangle (A_1 \cup B_1) \;&=\; (A \triangle A_1) \triangle (B \triangle B_1) \triangle A \cap (B \triangle B_1) \triangle B_1 \cap (A \triangle A_1) \\
(A \cap B) \triangle (A_1 \cap B_1) \;&=\; A \cap (B \triangle B_1) \triangle B_1 \cap (A \triangle A_1).
\end{aligned}$$

De lo anterior y del hecho de que

$$\mu(A \triangle B) \;\leq\; \mu(A) + \mu(B),$$

se sigue que las operaciones binarias $\varphi(A, B) = A \cup B$ y $\psi(A, B) = A \cap B$ son aplicaciones continuas de $\Sigma_\mu \times \Sigma_\mu$ en Σ_μ. ■

Estamos ahora en condiciones de formular y probar el Teorema de Vitali-Hahn-Saks al estilo Saks-Banach, esto es, demostrarlo usando el Teorema de Categoría de Baire.

Teorema 2.2.43 (Teorema de Vitali-Hahn-Saks). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita y suponga que $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de medidas reales definidas sobre Σ tal que*

(a) $\nu_n \ll \mu$ *para cada $n \in \mathbb{N}$ y,*

(b) *existe una función de conjuntos $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ para el cual*

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E), \quad E \in \Sigma.$$

Entonces:

(1) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) < \delta$, entonces $|\nu_n|(E) < \varepsilon$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, y*

(2) ν *es una medida real.*

Prueba. Sea $(\Sigma_\mu, \widetilde{d_\mu})$ el espacio métrico completo obtenido en el Teorema 2.2.42. Como $\nu_n \ll \mu$ para cada $n \in \mathbb{N}$, una nueva aplicación del Teorema 2.2.42, nos revela que cada ν_n es uniformemente continua sobre Σ_μ de modo que, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\Sigma_k \;=\; \bigcap_{m,n=k}^{\infty} \Big\{ E \in \Sigma_\mu : \, \big|\nu_n(E) - \nu_m(E)\big| \leq \varepsilon/3 \Big\}$$

es cerrado en $(\Sigma_\mu, \widetilde{d_\mu})$. Fijemos $E \in \Sigma_\mu$. Ya que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E)$, resulta que la sucesión $(\nu_n(E))_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, podemos hallar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\nu_n(E) - \nu_m(E)\right| \leq \varepsilon/3$ para todo $n, m \geq k$. Esto prueba que $E \in \Sigma_k$ y, por consiguiente,

$$\Sigma_\mu = \bigcup_{k=1}^\infty \Sigma_k.$$

Por le Teorema de Categoría de Baire, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\Sigma_{k_0}) \neq \varnothing$, es decir, existe un $r > 0$ y un $A \in \Sigma_\mu$ tal que

$$U(A,r) \;=\; \big\{E :\; \widetilde{d_\mu}(A,E) < r\big\} \;\subseteq\; \Sigma_{k_0}.$$

Esto implica que

$$\left|\nu_n(E) - \nu_m(E)\right| < \varepsilon/3 \qquad \text{para todo} \quad E \in U(A,r), \qquad m, n \geq k_0. \tag{β_2}$$

Como $\nu_n \ll \mu$ para $n = 1, 2, \ldots, k_0$, podemos seleccionar un $0 < \delta < r$ tal que, si $B \in \Sigma_\mu$ y $\mu(B) < \delta$, entonces

$$\left|\nu_n(B)\right| \;<\; \varepsilon/3, \qquad n = 1, 2, \ldots, k_0. \tag{β_3}$$

Observe que si B es cualquier elemento en Σ_μ para el cual $\mu(B) < r$, entonces B se puede escribir en la forma $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$, donde $A \cup B$, $A \setminus B \in U(A,r)$. En efecto,

$$\begin{aligned} d_\mu(A\cup B, A) \;&=\; \mu((A\cup B) \triangle A) \;=\; \mu(B \setminus A) \;\leq\; \mu(B) \;<\; r \qquad \text{y} \\ d_\mu(A\setminus B, A) \;&=\; \mu((A\setminus B) \triangle A) \;=\; \mu(A \cap B) \;\leq\; \mu(B) \;<\; r. \end{aligned}$$

Por esto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $B \in \Sigma_\mu$ tal que $\mu(B) < \delta$ se cumple, usando (β_2), (β_3) y la elección de δ, que

$$\begin{aligned} \left|\nu_n(B)\right| \;&=\; \left|\nu_{k_0}(B) + \big(\nu_n(B) - \nu_{k_0}(B)\big)\right| \\ &\leq\; \left|\nu_{k_0}(B)\right| + \left|\nu_n(A\cup B) - \nu_n(A\setminus B) - \big(\nu_{k_0}(A\cup B) - \nu_{k_0}(A\setminus B)\big)\right| \\ &\leq\; \left|\nu_{k_0}(B)\right| + \left|\nu_n(A\cup B) - \nu_{n_0}(A\cup B)\right| + \left|\nu_n(A\setminus B) - \nu_{k_0}(A\setminus B)\right| \\ &<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon. \end{aligned}$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, se concluye que

$$\lim_{\mu(B)\to 0} \nu_n(B) \;=\; 0 \qquad \text{uniformemente en} \quad n \in \mathbb{N}$$

quedando de esta forma establecida la prueba de (1).

Sea $(E_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión decreciente en Σ tal que $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \varnothing$. Para demostrar (2) es suficiente, de acuerdo al Lema 2.2.17, verificar que $\lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = 0$. Como μ es numerablemente aditiva, el Lema 2.2.17 nos garantiza que $\mu(E_n) \to 0$ y, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escoger un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(E_n)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Usemos ahora el hecho de que $\nu_n \ll \mu$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$ para, dado $\zeta > 0$, hallar un $0 < \delta_\zeta < \varepsilon$ y un $n_1 \geq n_0$ tal que $n \geq n_1$ implique que $\mu(B_n) < \delta_\zeta$ y, así, $|\nu_k(B_n)| < \zeta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Haciendo que $k \to \infty$, se obtiene que $|\nu(B_n)| < \zeta$ para todo $n \geq n_1$, lo cual prueba que ν es numerablemente aditiva. ∎

Comentario Adicional 2.2.13 La primera parte del Teorema de Vitali-Hahn-Saks sigue siendo válida si las medidas ν_n, en lugar de tomar valores reales, toman valores en un espacio de Banach arbitrario. Más aun, dicho resultado permanece cierto si μ es no-negativa, finitamente aditiva (no necesariamente numerablemente aditiva) y como antes, las ν_n toman valores en un espacio de Banach (véase, por ejemplo, [130], p. 23 y p. 29).

El siguiente resultado de J. Dieudonne pareciera ser inmediato, pero es mucho más difícil de demostrar de lo que parece.

Teorema de Dieudonne. *Sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas de Borel finitas definidas sobre un espacio Pólaco X. Si $\lim_{n\to\infty}\mu_n(G)$ existe para cada subconjunto abierto G de X, entonces $\lim_{n\to\infty}\mu_n(E)$ existe para cada conjunto de Borel $G\in\mathcal{B}_0(X)$.*

En particular, se sigue del Teorema de Vitali-Hahn-Saks que la función de conjuntos μ dada por

$$\mu(E) := \lim_{n\to\infty}\mu_n(E), \qquad E\in\mathcal{B}_0(X)$$

en el Teorema de Dieudonne, define una medida de Borel finita sobre $(X,\mathcal{B}_0(X))$.

2.2.7. $\|$ ► El Teorema de Acotación Uniforme de Nikodým

Uno de los resultados más importantes en la Teoría de la Medida conocido con el nombre de Teorema de Acotación Uniforme de Nikodým establece que cualquier subfamilia de $\mathrm{ca}(\Omega,\Sigma)$ puntualmente acotada es uniformemente acotada. Este resultado fue demostrado por O. Nikodym en 1933 y constituye un notable mejoramiento del Principio de Acotación Uniforme en el espacio de todas las medidas (numerablemente aditivas) a valores reales definidas sobre el espacio medible (Ω,Σ). S. Saks es el encargado de dar una demostración del Teorema de Nikodým teniendo como telón de fondo el Teorema de Categoría de Baire sobre el espacio métrico completo $(\Sigma_\mu,\widetilde{d}_\mu)$ obtenido en la sección anterior.

Teorema 2.2.44 (Teorema de Acotación Uniforme de Nikodým). *Sea (Ω,Σ) un espacio medible y suponga que $\mathcal{M}$ es una colección arbitraria de medidas en $\mathrm{ca}(\Omega,\Sigma)$ que es puntualmente acotada, es decir, para cada $E\in\Sigma$, existe una constante positiva K_E tal que*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}}|\mu(E)| \le K_E,$$

Entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente acotada, vale decir, existe una constante positiva K tal que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\|\mu\|_\infty \le K,$$

donde $\|\mu\|_\infty = \sup_{E\in\Sigma}|\mu(E)|$.

La prueba del Teorema de Acotación Uniforme de Nikodým descansa sobre el Teorema de Categoría de Baire y el siguiente:

Lema 2.2.18 (Saks). *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita. Si $\varepsilon>0$, entonces existe una colección finita de conjuntos disjuntos en Σ, digamos $\{E_1,\ldots,E_n\}$, tales que $\Omega=\bigcup_{i=1}^n E_n$ y, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ o bien E_i es un átomo o, en caso contrario, $\mu(E_i)>\varepsilon$.*

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\mu(\Omega) < +\infty$, sólo puede existir a lo más una familia finita, digamos $\{E_1, \ldots, E_k\}$, de átomos disjuntos con $\mu(E_i) > \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k$. Considere ahora el conjunto

$$Y \;=\; \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i.$$

Entonces Y no contiene ningún átomo que tenga medida mayor que ε. Nuestra tarea inmediata es demostrar la siguiente

> **Afirmación**. *Cualquier conjunto medible $E \subseteq Y$ con $\mu(E) > 0$, contiene un conjunto medible B tal que $0 < \mu(B) \leq \varepsilon$.*

Prueba de la Afirmación. Suponga que la conclusión es falsa. Esto quiere decir que: *existe un conjunto medible $E_0 \subseteq Y$ con $\mu(E_0) > 0$ con la siguiente propiedad: cualquier subconjunto medible $B \subseteq E_0$ satisface que $\mu(B) > \varepsilon$*. En particular, $\mu(E_0) > \varepsilon$ y, por consiguiente, E_0 no es un átomo. Esto último significa que existe un conjunto medible $B_1 \subseteq E_0$ tal que $0 < \mu(B_1) < \mu(E_0)$. Miremos ahora el conjunto $E_0 \setminus B_1$. Siendo $E_0 \setminus B_1$ un subconjunto medible de E_0, entonces, por nuestra suposición, $\mu(E_0 \setminus B_1) > \varepsilon$ y, de nuevo, un tal conjunto no puede ser un átomo. Como antes, podemos encontrar un conjunto medible $B_2 \subseteq (E_0 \setminus B_1)$ con $0 < \mu(B_2) < \mu(E_0 \setminus B_1)$. Continuando inductivamente con este procedimiento, se obtiene una sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales posee medida estrictamente positiva. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \;\leq\; \mu(\Omega) \;<\; +\infty,$$

entonces $\text{lím}_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$, por lo que podemos determinar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto, por supuesto, está en contradicción con nuestra suposición pues hemos hallado un conjunto medible $B_N \subseteq E_0$ que no cumple con $\mu(B_N) > \varepsilon$. Nuestra afirmación queda, en consecuencia, establecida. $\square$

Continuemos con la prueba de nuestro lema. Para cada $E \in \Sigma$, considere la siguiente subcolección $\mathcal{B}(E, \varepsilon) := \{F \in \Sigma : \, F \subseteq E, \, \mu(F) \leq \varepsilon\}$. Observe que si $E \subseteq Y$ con $\mu(E) > 0$, entonces, haciendo uso de nuestra afirmación anterior, E contiene un conjunto medible F tal que $\mu(F) \leq \varepsilon$ y, en consecuencia, $\mathcal{B}(E, \varepsilon) \neq \varnothing$. De esto se sigue que para cualquier conjunto medible $E \subseteq Y$ con $\mu(E) > 0$, el número

$$\beta(E) \;=\; \sup\Big\{\mu(F) : \, F \in \mathcal{B}(E, \varepsilon)\Big\},$$

está bien definido y satisface $0 < \beta(E) \leq \varepsilon$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $Y \in \Sigma$, de la definición de $\beta(Y)$ se sigue que podemos hallar un conjunto medible $F_1 \subseteq Y$ tal que

$$\frac{1}{2}\beta(Y) \;\leq\; \mu(F_1) \;\leq\; \varepsilon.$$

En general, usando inducción, podemos determinar una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos medibles de Y, disjuntos dos a dos, satisfaciendo las desigualdades:

$$\frac{1}{2}\beta\Big(Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) \;\leq\; \mu(F_{n+1}) \;\leq\; \varepsilon, \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Si ahora hacemos $F_0 := Y \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, resulta que F_0 es un subconjunto medible de Y y se sigue de las desigualdades anteriores que

$$\beta(F_0) \;\leq\; \beta\Big(Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) \;\leq\; 2\mu(F_{n+1}), \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Sin embargo, como $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i)\leq\mu(Y)<+\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0$ por lo que las desigualdades en (1) garantizan que $\beta(F_0)=0$ y, por consiguiente, $\mu(F_0)=0$. Finalmente, si m es el entero positivo más pequeño para el cual $\sum_{i=m+1}^{\infty}\mu(F_i)<\varepsilon$, entonces los conjuntos

$$E_1,\ \ldots\ ,E_k,\ F_1,\ \ldots\ ,F_m,\ \bigcup_{i=m+1}^{\infty}F_i\cup F_0$$

forman la deseada partición. ■

Prueba del Teorema de Acotación Uniforme de Nikodým. Suponga que la conclusión es falsa. Esto significa que para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una medida $\mu_n\in\mathcal{M}$ y existe un conjunto $G_n\in\Sigma$ tal que

$$|\mu_n(G_n)|>n. \tag{1}$$

Considere ahora la función de conjuntos $\mu:\Sigma\to[0,+\infty)$ definida por

$$\mu(E)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\mu_n|(E)}{|\mu_n|(\Omega)},\qquad E\in\Sigma.$$

Claramente μ es una medida de probabilidad, de modo que podemos considerar el espacio métrico completo $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$ obtenido en el Teorema 2.2.42. Puesto que $\mu_n\ll\mu$ para todo $n\in\mathbb{N}$, un nuevo llamado al Teorema 2.2.42 nos revela que μ_n es uniformemente continua sobre $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$, por lo que el conjunto

$$H_m\ =\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big\{E\in\Sigma_\mu:\ \big|\mu_n(E)\big|\leq m\Big\}$$

es cerrado en $(\Sigma_\mu,\widetilde{d_\mu})$ para cada $m\in\mathbb{N}$. ¿Cuándo es que entra en escena el Teorema de Categoría de Baire? Pues ahora. Observe que como $\Sigma_\mu=\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$, entonces el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que, para algún m_0, el conjunto $\mathrm{int}(H_{m_0})$ es no vacío. Esto quiere decir que existe un conjunto $B_0\in\Sigma_\mu$ así como también un número $\varepsilon>0$ tal que la bola abierta $U(B_0,\varepsilon)$ está contenida en $\mathrm{int}(H_{m_0})$, lo cual es equivalente a afirmar que:

$$\textit{si}\quad E\in\Sigma_\mu\quad\textit{y}\quad\mu(E\triangle B_0)<\varepsilon,\ \ \textit{entonces}\ \ \big|\mu_n(E)\big|\leq m_0\ \ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Sea $A\in\Sigma_\mu$. Afirmamos que: *si A es un átomo de μ, entonces A es un átomo de $|\mu_n|$ para todo $n\in\mathbb{N}$.* En efecto, suponga que para algún $n\in\mathbb{N}$, A no es un átomo de $|\mu_n|$. Esto significa que existe algún conjunto medible $F\subseteq A$ tal que $0<|\mu_n|(F)<|\mu_n|(A)$, de donde se deduce que $0<\mu(F)<\mu(A)$ lo que contradice el hecho de que A es un átomo de μ. Por otro lado, si A es un átomo de $|\mu_n|$ y si $F\subseteq A,\ F\in\Sigma$, con $\mu_n(F)\neq 0$, entonces debemos tener que $|\mu_n|(A\setminus F)=0$, de donde se sigue que $\mu_n(F)=\mu_n(A)$, esto es, A es un átomo de μ_n. Podemos concluir, por lo que acabamos de probar, que si A es un átomo de μ, entonces A es un átomo de μ_n para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para el $\varepsilon>0$ hallado, consideremos una partición medible finita de Ω, digamos $\{E_1,\ldots,E_m\}$, obtenida según el Lema 2.2.18. Si $\{E_1,\ldots,E_p\}$ son los átomos de la familia $\{E_1,\ldots,E_m\}$ para los cuales se cumple que $\mu(E_i)\geq\varepsilon$, entonces por nuestra observación anterior tenemos que cada E_k es un átomo para μ_n, con $k=1,\ldots,p$. Tomemos ahora cualquier $E\in\Sigma_\mu$ y sea $F_k=E\cap E_k$ para $k=1,\ldots,m$. Fijemos un k tal que $1\leq k\leq p$. Como $F_k\subseteq E_k$ y ya que μ_n es una medida real, entonces no podemos, en general, concluir que $\mu_n(F_k)\leq\mu_n(E_k)$; sin embargo, como E_k es un átomo para μ_n resulta que $\mu_n(F_k)=0$ o $\mu_n(F_k)=\mu_n(E_k)$, de donde tenemos, en cualquier caso, que

$$|\mu_n(F_k)|\ \leq\ |\mu_n(E_k)|\ =\ K_{E_k}, \tag{3}$$

para cualquier $k = 1, \dots, p$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese también que

$$\mu(E_k) < \varepsilon, \qquad k = p+1, \dots, m. \tag{4}$$

Escribiendo cada F_k, para cada $k = p+1, \dots, m$, en la forma

$$F_k \;=\; \big(B_0 \cup F_k\big) \setminus \big(B_0 \setminus F_k\big),$$

vemos que

$$\big(B_0 \cup F_k\big) \bigtriangleup B_0 \;=\; F_k \setminus B_0 \qquad \text{y} \qquad \big(B_0 \setminus F_k\big) \bigtriangleup B_0 \;=\; B_0 \cap F_k,$$

de donde se sigue, usando (4), que

$$\text{máx}\Big\{\mu\Big(\big(B_0 \cup F_k\big) \bigtriangleup B_0\Big),\, \mu\Big(\big(B_0 \setminus F_k\big) \bigtriangleup B_0\Big)\Big\} \;\leq\; \mu(F_k) \;\leq\; \mu(E_k) \;<\; \varepsilon, \qquad k = p+1, \dots, m.$$

Usando (2) vemos que $|\mu_n(B_0 \cup F_k)| \leq m_0$, así como también $|\mu_n(B_0 \setminus F_k)| \leq m_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto último se concluye que,

$$|\mu_n(F_k)| \;=\; \big|\mu_n(B_0 \cup F_k) - \mu_n(B_0 \setminus F_k)\big| \leq\; 2m_0, \qquad k = p+1, \dots, m, \tag{5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que como

$$E \;=\; \bigcup_{k=1}^{m} (E \cap E_k) \;=\; \bigcup_{k=1}^{m} F_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{p} F_k \,\cup\, \bigcup_{k=p+1}^{m} F_k,$$

entonces, por (3) y (5), se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\mu_n(E)| \;&=\; \left|\sum_{k=1}^{m} \mu_n(F_k)\right| \\ &\leq\; \sum_{k=1}^{p} |\mu_n(F_k)| + \sum_{k=p+1}^{m} |\mu_n(F_k)| \\ &\leq\; \sum_{k=1}^{p} K_{E_k} + 2m_0(m-p) := R. \end{aligned}$$

El lado derecho de ésta última desigualdad es claramente independiente de n, de modo que si tomamos cualquier $n > R$ y si reemplazamos a E por el correspondiente G_n en la desigualdad anterior se obtiene una contradicción pues, por (1) y la última desigualdad, $n < \mu_n(G_n) \leq R < n$. Esto termina la prueba. ■

2.2.8. ‖ ► Abundantes medidas de control: Rybakov-Walsh

Como antes Ω representa un conjunto no vacío y Σ una σ-álgebra de Ω. Fijemos ahora un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que, por conveniencia, siempre lo supondremos sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Todos los resultados de esta sección que no son demostrados se pueden consultar en la monografía de J. Diestel y J. J. Uhl Jr. [130].

Una función de conjuntos $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ se llama una **medida vectorial** si

$$\mathfrak{m}(E_1 \cup E_2) \;=\; \mathfrak{m}(E_1) + \mathfrak{m}(E_2),$$

cualesquiera sean $E_1, E_2 \in \Sigma$ disjuntos. Una medida vectorial $\mathfrak{m}$ se dice que es **numerablemente aditiva** si, para cualquier colección numerable y disjunta $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de Σ, se cumple que:

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n).$$

La convergencia de ésta serie es en la topología de la norma. Nótese que si π es cualquier permutación de $\mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\pi(n)}$, por lo que la convergencia de la serie es incondicional.

Si $\mathfrak{m}$ es una medida vectorial, entonces la **variación de** μ es la función de conjuntos $|\mathfrak{m}| : \Sigma \to [0, +\infty]$ definida por

$$|\mathfrak{m}|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|\,\mathfrak{m}(E_i)\,\| \right\},$$

donde el supremo se elige sobre todas las particiones medibles finitas $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de E. Si $|\mathfrak{m}|(\Omega) < +\infty$, entonces diremos que $\mathfrak{m}$ es de **variación acotada**. Observe que $|\mathfrak{m}|$ es finitamente aditiva y monótona.

La **semivariación de** $\mathfrak{m}$ es la función de conjuntos $\|\,\mathfrak{m}\,\| : \Sigma \to [0, +\infty]$ dada por

$$\|\,\mathfrak{m}\,\|(E) = \sup\left\{ |x^*\mathfrak{m}|(E) : \, x^* \in X^*, \, \|\,x\,\| \leq 1 \right\}$$

donde $|x^*\mathfrak{m}|$ es la variación total de la medida real $x^*\mathfrak{m}$. Si $\|\,\mathfrak{m}\,\|(\Omega) < +\infty$ entonces se dice que $\mathfrak{m}$ es de **semivariación acotada**. Gracias al Teorema de Hahn-Banach para espacios normados sabemos que $\|\,x\,\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \, \|\,x^*\,\| \leq 1\}$ para todo $x \in X$, de donde se obtiene que

$$\|\,\mathfrak{m}\,\|(E) \leq |\mathfrak{m}|(E)$$

para todo $E \in \Sigma$. Es fácil establecer que si $\mathfrak{m}$ es una medida vectorial de variación acotada, entonces $\mathfrak{m}$ es numerablemente aditiva si, y sólo si, su variación $|\mathfrak{m}|$ también es numerablemente aditiva.

Sea $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sea μ una medida (no-negativa) finita sobre (Ω, Σ). Diremos que $\mathfrak{m}$ es **absolutamente continua** con respecto a μ, en símbolos, $\mathfrak{m} \ll \mu$, si $\mathfrak{m}(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$ con $E \in \Sigma$. Esto es equivalente a afirmar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $E \in \Sigma$ satisface $\mu(E) < \delta$, entonces $\|\,\mathfrak{m}(E)\,\| < \varepsilon$. Cuando esto ocurre también se dice que $\mathfrak{m}$ es **μ-continua**.

Un resultado de Bartle-Dunford-Schwartz establece que (véase, por ejemplo, [130], p. 14):

Teorema 2.2.45 (Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, (Ω, Σ) un espacio medible y $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces, existe una medida no-negativa $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{m} \ll \mu$.*

La medida μ obtenida en el Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz se le acostumbra llamar una **medida de control**. Lo que el Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz no muestra es que la medida de control μ se puede elegir de la forma $|x^*\mathfrak{m}|$ para algún $x^* \in X^*$. Este es el Teorema de Rybakov ([130], Theorem 2, p. 268). Posteriormente, B. J. Walsh ([130], Corollary 3, p. 269) demuestra que existen abundantes funcionales en X^* satisfaciendo la conclusión del resultado de Rybakov. El objetivo de esta sección es presentar las demostraciones de los resultados de Rybakov y Walsh.

Comencemos con los preparativos. En primer lugar vamos a requerir del siguiente resultado:

Teorema 2.2.46 (Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, (Ω, Σ) un espacio medible y $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces, el rango de $\mathfrak{m}$,*

$$\mathfrak{m}(\Sigma) = \left\{ \mathfrak{m}(E) \in X : \, E \in \Sigma \right\},$$

es un subconjunto relativamente débilmente compacto de X.

Prueba. Sea $x^* \in X^*$. Puesto que $x^*\mathfrak{m}$ es una medida real, el Teorema de Descomposición de Hahn nos garantiza la existencia de un par de conjuntos en Σ, digamos P y N, tales que P es positivo, N es negativo, $P \cap N = \varnothing$ y $\Omega = P \cup N$. Claramente $x^*\mathfrak{m}$ es no-negativa sobre P y $-x^*\mathfrak{m}$ es no-negativa sobre N. Ahora bien, como x^* es débilmente continuo se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup\left\{x^*(x) : x \in \overline{\mathfrak{m}(\Sigma)}^{\,\omega}\right\} &= \sup\left\{x^*(x) : x \in \mathfrak{m}(\Sigma)\right\} \\
&= \sup\left\{x^*\big(\mathfrak{m}(E)\big) : E \in \Sigma\right\} \\
&= \sup\left\{x^*\big(\mathfrak{m}(E \cap P)\big) + x^*\big(\mathfrak{m}(E \cap N)\big) : E \in \Sigma\right\} \\
&= x^*\big(\mathfrak{m}(P)\big).
\end{aligned}$$

Lo que hemos demostrado es que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre el conjunto acotado y débilmente cerrado $\overline{\mathfrak{m}(\Sigma)}^{\,\omega}$. Se sigue del Teorema sup de James, Teorema 2.2.2, página 210, que dicho conjunto es débilmente compacto. ■

Sea K un subconjunto cerrado y acotado de X. Recordemos que $x \in K$ es un punto expuesto de K, si existe $x^* \in X^*$ tal que $K_{x^*} = \{x\}$, donde

$$K_{x^*} = \left\{z \in K : x^*(z) = \sup_{y \in K} x^*(y)\right\}.$$

Si $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva, donde X es un espacio de Banach, entonces sabemos que cualquier punto extremal de $\overline{\text{co}}\big(\mathfrak{m}(\Sigma)\big)$ es un punto extremal de $\mathfrak{m}(\Sigma)$ (véase, [130], Theorem 1, p. 269).

Teorema 2.2.47 (Anantharaman). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, (Ω, Σ) un espacio medible y suponga que $\mathfrak{m} : \Sigma \to X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva. Si un funcional lineal $x^* \in X^*$ expone a $\mathfrak{m}(\Sigma)$ en algún punto $\mathfrak{m}(E) \in \mathfrak{m}(\Sigma)$, entonces*

$$\mathfrak{m} \ll |x^*\mathfrak{m}|.$$

Prueba. Suponga que $\mathfrak{m} \not\ll |x^*\mathfrak{m}|$. Esto significa que existe al menos un conjunto $A \in \Sigma$ tal que

$$|x^*\mathfrak{m}|(A) = 0 \qquad \text{pero} \qquad \mathfrak{m}(A) \neq 0.$$

Sea (P, N) una descomposición de Hahn para $x^*\mathfrak{m}$. Como $0 \neq \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(A \cap P) + \mathfrak{m}(A \cap N)$, debemos tener entonces que $\mathfrak{m}(A \cap P) \neq 0$, o bien, $\mathfrak{m}(A \cap N) \neq 0$. Suponga que $\mathfrak{m}(A \cap P) \neq 0$. Puesto que $|x^*\mathfrak{m}|(A \cap P) = 0$, resulta que

$$x^*\mathfrak{m}(P \setminus (A \cap P)) = x^*\mathfrak{m}(P) = \sup x^*\mathfrak{m}(\Sigma).$$

Usando ahora el hecho de que x^* expone a $\mathfrak{m}(\Sigma)$ en $\mathfrak{m}(E)$, se tiene que

$$\mathfrak{m}(P \setminus (A \cap P)) = \mathfrak{m}(P).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathfrak{m}(A \cap P) \neq 0$, vemos que

$$\mathfrak{m}(P \setminus (A \cap P)) = \mathfrak{m}(P) - \mathfrak{m}(A \cap P) \neq \mathfrak{m}(P),$$

lo que conlleva a una contradicción. Si ahora se supone que $\mathfrak{m}(A \cap N)$ no es cero, entonces reemplazando a $A \cap P$ por $A \setminus P$ en el razonamiento anterior, se obtiene de nuevo una contradicción. Por esto, $\mathfrak{m} \ll |x^*\mathfrak{m}|$. ■

Teorema 2.2.48 (Rybakov). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, (Ω,Σ) un espacio medible y $\mathfrak{m}:\Sigma\to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces existe $x^*\in X^*$ tal que*

$$\mathfrak{m} \ll |x^*\mathfrak{m}|.$$

Prueba. Sea $K_0=\overline{\mathfrak{m}(\Sigma)}^{\,\omega}$. Por el Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz, K_0 es débilmente compacto y, así, por el Teorema de Krein-Šmulian, Teorema 2.2.2, página 210, $\overline{\text{co}}\,(K_0)$ también es débilmente compacto. En particular,

$$K:=\overline{\text{co}}\,\big(\mathfrak{m}(\Sigma)\big) \subseteq \overline{\text{co}}\,(K_0)$$

es convexo y débilmente compacto en X^*. El Teorema de Lindenstrauss-Troyanski, Teorema 2.2.31, nos garantiza que $K=\overline{\text{co}}\,(\text{s-exp}(K))$ y, por consiguiente, s-exp$\,(K)\neq\varnothing$. Ahora bien, como s-exp$\,(K)\subseteq\exp(K)$, resulta que $\exp(K)$ es no vacío y $K=\overline{\text{co}}\,(\exp(K))$. Sea $x\in\exp(K)$ y sea $x^*\in X^*$ un funcional lineal que expone a x. Observe que las igualdades

$$\sup x^*(K) = \sup x^*\overline{\text{co}}\,\big(\mathfrak{m}(\Sigma)\big) = \sup x^*(K_0) = \sup x^*\mathfrak{m}(\Sigma),$$

nos muestran que cualquier punto expuesto de K es un punto expuesto de K_0 y que los puntos expuestos de K_0 son puntos expuesto de $\mathfrak{m}(\Sigma)$. Por esto, y teniendo en cuenta que cualquier punto extremal de K pertenece a $\mathfrak{m}(\Sigma)$, se concluye que el punto expuesto x, por ser un punto extremal de K, pertenece a $\mathfrak{m}(\Sigma)$, es decir, $x=\mathfrak{m}(E)$ para algún $E\in\Sigma$. Un llamado al Teorema de Anantharaman no revela que $\mathfrak{m}\ll|x^*\mathfrak{m}|$ con lo cual termina la prueba. ■

Teorema 2.2.49 (Walsh). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, (Ω,Σ) un espacio medible y $\mathfrak{m}:\Sigma\to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el conjunto*

$$G_{\mathfrak{m}} = \big\{x^*\in X^*:\ \mathfrak{m}\ll|x^*\mathfrak{m}|\big\}$$

es residual en X^*.

Prueba. Sea $K_0=\overline{\mathfrak{m}(\Sigma)}^{\,\omega}$. Como en la prueba del Teorema de Rybakov, tenemos que el conjunto $K:=\overline{\text{co}}\,\big(\mathfrak{m}(\Sigma)\big)$ es convexo y débilmente compacto. Por el resultado de Lau, Teorema 2.2.32, página 272, el conjunto $\mathcal{SE}(X^*,K)$ es un G_δ-denso en X^*, en particular, $\mathcal{E}(X^*,K)$ es residual en X^*. La prueba finaliza teniendo en cuenta que $\mathcal{E}(X^*,K)\subseteq G_{\mathfrak{m}}$ gracias al resultado de Anantharaman. ■

Comentario Adicional 2.2.14 Fijemos un conjunto no vacío Ω, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Una medida vectorial $\mathfrak{m}:\Sigma\to X$ se dice que es **no-atómica** si para cualquier $E\in\Sigma$ con $\mathfrak{m}(E)\neq 0$, existe un subconjunto medible $A\subseteq E$ tal que $\mathfrak{m}(A)\neq 0$ y $\mathfrak{m}(E\setminus A)\neq 0$. Consideremos ahora el conjunto $\mathfrak{M}$ de todas las medidas vectoriales $\mathfrak{m}:\Sigma\to X$ que satisfacen:

(a) $\mathfrak{m}$ es no-atómica y numerablemente aditiva, y

(b) el rango de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}(\Sigma)$, es relativamente norma-compacto.

Si dotamos a $\mathfrak{M}$ con la norma

$$\|\mathfrak{m}\|_{sv} := \sup\big\{\|\mathfrak{m}(E)\|:\ E\in\Sigma\big\},\quad \mathfrak{m}\in\mathfrak{M},$$

entonces se puede demostrar que $(\mathfrak{M},\|\cdot\|_{sv})$ es un espacio de Banach. Similarmente, si definimos

$$\mathfrak{M}_v := \big\{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}:\ |\mathfrak{m}|(\Omega)<+\infty\big\},$$

entonces $(\mathfrak{M}_v, \|\cdot\|_v)$ también resulta ser un espacio de Banach, donde $\|\mathfrak{m}\|_v = |\mathfrak{m}|(\Omega)$ para cada medida $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_v$.

El conjunto de todas las medidas no-negativas, finitas y no-atómicas definidas sobre (Ω, Σ) será denotado por $\mathrm{ca}(\Sigma)$. Para cada $\mu \in \mathrm{ca}(\Sigma)$, considere los conjuntos

$$\mathfrak{M}_{ac}(\mu) \;=\; \big\{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M} : \; \mathfrak{m} \ll \mu\big\}, \qquad\qquad \mathfrak{M}_v(\mu) \;=\; \mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{ac}(\mu),$$

y

$$\mathfrak{M}_{RN}(\mu) \;=\; \left\{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_v : \; \exists \; f \in L_1(\mu, X) \text{ tal que } \; \mathfrak{m}(E) = \int_E f\, d\mu \; \text{ para cada } E \in \Sigma\right\}.$$

Se puede demostrar que los subespacios lineales $\mathfrak{M}_{ac}(\mu)$ y $\mathfrak{M}_v(\mu)$ son cerrados, respectivamente, en los espacios de Banach $(\mathfrak{M}, \|\cdot\|_{sv})$ y $(\mathfrak{M}_v, \|\cdot\|_v)$ y, en consecuencia, ellos también son espacios de Banach. Similarmente, $\mathfrak{M}_{RN}(\mu)$ es un subespacio lineal cerrado de $(\mathfrak{M}_v, \|\cdot\|_v)$.

En [10], R. Anantharaman y K. M. Garg demuestran, entre otras cosas, los siguientes resultados:

Teorema 2.2.50 (Anantharaman-Garg). *Sea $\mu \in \mathrm{ca}(\Sigma)$. En cada uno de los espacios de Banach $\mathfrak{M}_{ac}(\mu), \mathfrak{M}_v(\mu)$ y $\mathfrak{M}_{RN}(\mu)$ las medidas vectoriales $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ que son **equivalentes** a μ forman un conjunto G_δ-denso.*

Una medida $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ se dice que **nunca es de variación finita** si para cualquier $E \in \Sigma$, ocurre que $|\mathfrak{m}|(E) = 0$ o bien $|\mathfrak{m}|(E) = +\infty$.

Teorema 2.2.51 (Anantharaman-Garg). *Sea λ la medida de Lebesgue sobre la σ-álgebra de los borelianos $\mathcal{B}_0$ de $[0,1]$. Si el espacio de Banach X es de dimensión infinita, entonces las medidas vectoriales en $\mathfrak{M}$ que nunca son de variación finita forman un conjunto G_δ-denso en $\mathfrak{M}_{ac}(\lambda)$.*

2.2.9. ‖ ► Fragmentabilidad y espacios de Asplund

Fragmentabilidad es una noción modelada sobre una generalización del concepto de dentabilidad. Ella hace su debut por primera vez en un artículo de J. E. Jayne y C. A. Rogers [239] donde los autores investigan la existencia de selecciones "adecuadas" para las aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente a valores compactos (USCO). Su importancia, a partir de ese momento, no ha dejado de crecer. Por ejemplo, fragmentabilidad ha resultado ser una herramienta muy conveniente en el estudio de ciertas propiedades geométricas de los espacios de Banach, en la diferenciabilidad genérica de funciones convexas, en la propiedad de Radon-Nikodým, en estabilidad genérica y la unicidad en el análisis no lineal relacionados con problemas de optimización, en programación matemática, en aplicaciones dinámicas, etc. Los artículos [232, 233, 234, 235, 236, 328, 372, 373] y las referencias allí citadas forman parte de la bibliografía sobre el tema.

Definición 2.2.11. *Sea d una métrica sobre un espacio topológico de Hausdorff (X, τ). El espacio (X, τ) se dice **fragmentado por la métrica** d o d-**fragmentado** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto no vacío D de X, existe un subconjunto τ-abierto no vacío U de X tal que*

$$U \cap D \neq \varnothing \qquad y \qquad d-\mathrm{diam}(U \cap D) < \varepsilon,$$

*es decir, cada subconjunto no vacío de X contiene subconjuntos no vacíos relativamente τ-abiertos de d-diámetro arbitrariamente pequeño. El espacio (X, τ) se dice **fragmentable** si existe una métrica sobre dicho espacio que lo fragmenta.*

En general, en la noción de fragmentabilidad, la topología original τ de X y la topología τ_d, generada por d, pueden no estar directamente relacionadas. Observe que si U es un abierto de X y $A \subseteq X$, entonces el Lema 1.4.1 nos dice que: $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$ si, y sólo si, $U \cap A \neq \varnothing$. De esto se deduce la siguiente afirmación: *para que (X,τ) sea d-fragmentado es necesario y suficiente que cada subconjunto no vacío y τ-cerrado de X contenga subconjuntos no vacíos relativamente τ-abiertos de d-diámetro arbitrariamente pequeño*. Por supuesto, cada espacio métrico es fragmentado por su propia métrica. Sin embargo, la clase de los espacios fragmentables es mucho más amplia que la clase de los espacios metrizables. Notemos, en particular, que si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach *norma-separable*, entonces *cada subconjunto norma-acotado y ω^*-cerrado de X^* (es decir, ω^*-compacto), es metrizable y, en consecuencia, fragmentado por esa métrica*.

Definición 2.2.12. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto no vacío de X^*, diremos que (K,ω^*) es* ***norma-fragmentado*** *si dicho conjunto es fragmentado por la métrica inducida por la norma del espacio dual X^*.*

El resultado que sigue, aunque elemental, es fundamental en el estudio de la noción de fragmentabilidad. Se trata de una caracterización de fragmentabilidad para espacios hereditariamente de Baire que resulta ser muy interesante y de una utilidad practica incuestionable.

Teorema 2.2.52. *Sean (X,τ) un espacio hereditariamente de Baire y d una métrica sobre X. Son equivalentes:*

(1) *X es fragmentado por d.*

(2) *Para cada conjunto no vacío y τ-cerrado K de X, la identidad $\mathrm{Id} : (K,\tau) \to (K,d)$ posee al menos un punto de continuidad.*

(3) *Para cada conjunto no vacío y τ-cerrado K de X, el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad $\mathrm{Id} : (K,\tau) \to (K,d)$ es un G_δ-denso de (K,τ).*

Prueba. Claramente $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Para demostrar que $(1) \Rightarrow (3)$ es suficiente considerar la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (X,\tau) \to (X,d)$. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos

$$G_\varepsilon = \bigcup \big\{ U \subseteq X : \ U \ \textit{es} \ \tau\textit{-abierto} \ \ y \ \ d - \mathrm{diam}(U) < \varepsilon \big\}.$$

Obviamente G_ε es τ-abierto. Veamos que él es τ-denso en X. En efecto, sea V un subconjunto τ-abierto no vacío de X. Como (X,τ) es d-fragmentado, existe un subconjunto τ-abierto no vacío W de X tal que $V \cap W \neq \varnothing$ y $d - \mathrm{diam}(V \cap W) < \varepsilon$. Esto nos dice que $V \cap W \in G_\varepsilon$ y como $V \cap W \subseteq V$, resulta que $\varnothing \neq V \cap W \subseteq V \cap G_\varepsilon$. Por esto, G_ε es τ-denso en X. Finalmente, siendo (X,τ) un espacio de Baire, podemos concluir que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n}$ es un G_δ-denso en (X,τ) y, por supuesto, dicho conjunto constituye el conjunto de los puntos de continuidad de Id. ■

Se sigue del Teorema 2.2.52 que, si X es un espacio hereditariamente de Baire el cual es fragmentado por una métrica d, entonces X es también fragmentado por cualquier métrica cuya topología sea idéntica a la generada por la métrica d.

Notemos que si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces (B_{X^*},ω^*) es un espacio compacto y, en consecuencia, un espacio hereditariamente de Baire. Así, en particular, tenemos que

Corolario 2.2.19. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *(B_{X^*},ω^*) es norma-fragmentado.*

(2) *Para cada conjunto no vacío y ω^*-compacto K de X^*, el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad* $\mathrm{Id} : (K,\omega^*) \to (K,\|\cdot\|)$ *es un G_δ-denso de (K,τ).*

Observemos que, por el corolario anterior, si (B_{X^*},ω^*) es norma-fragmentado, entonces la identidad $\mathrm{Id} : (B_{X^*},\omega^*) \to (B_{X^*},\|\cdot\|)$ es continua sobre un subconjunto G_δ-denso G de (B_{X^*},ω^*); esto significa que $\mathrm{Id}|_G : (G,\omega^*) \to (G,\|\cdot\|)$ es un homeomorfismo, pues la topología de la norma es más fuerte que la topología ω^* y, por consiguiente, G es metrizable. Por esto,

Corolario 2.2.20. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si (B_{X^*},ω^*) es norma-fragmentado, entonces la topología de la norma y la topología ω^*, restringidas ambas sobre B_{X^*}, coinciden sobre un subconjunto G_δ-denso de (B_{X^*},ω^*). En particular, (B_{X^*},ω^*) contiene un subconjunto G_δ-denso metrizable.*

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita y X^* su dual. Como se sabe, la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (X^*,\omega^*) \to (X^*,\|\cdot\|)$ no tiene porque poseer puntos de continuidad; sin embargo, si X^* es norma-separable, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.53. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita cuyo dual X^* también es separable. Entonces, para cada subconjunto ω^*-compacto K de X^*, existe un subconjunto G_δ-denso G de K tal que la aplicación identidad* $\mathrm{Id}_K : (K,\omega^*) \to (K,\|\cdot\|)$ *es continua en todo punto de G.*

Prueba. Para cada $\varepsilon > 0$, considere el conjunto

$$G_\varepsilon \;=\; \bigcup \Big\{ W \cap K \,:\, W \text{ es } \omega^*\text{-abierto en } X^* \;\text{ y }\; \|\cdot\| - diam(W\cap K) \leq \varepsilon \Big\}.$$

Claramente, cada G_ε es ω^*-abierto en K y, por supuesto, $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_{1/n}$ constituye exactamente los puntos donde Id_K es $\omega^* - \|\cdot\|$ continua. Veamos ahora que cada G_ε es ω^*-denso en K. En efecto, como X^* es separable, existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ en X^* tal que

$$K \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(K \cap \Big(x_n^* + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*} \Big) \Big).$$

Puesto que cada uno de los conjuntos $K \cap (x_n^* + (\varepsilon/2)\frac{\varepsilon}{2}B_{X^*})$ es ω^*-cerrado en K, el Teorema de Categoría de Baire nos asegura $\bigcup_{n=1}^\infty W_n$ es ω^*-denso en K, donde W_n es el ω^*-interior de $K \cap (x_n^* + (\varepsilon/2)\frac{\varepsilon}{2}B_{X^*})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que $\|\cdot\| - \mathrm{diam}(W_n) \leq \varepsilon$ para cada n, resulta que $W_n \in G_\varepsilon$ y termina la prueba de que cada G_ε es ω^*-denso en K. Una nueva aplicación del Teorema de Categoría de Baire nos revela que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_{1/n}$ es un G_δ que es ω^*-denso en K. ■

Una noción estrechamente relacionada a la noción de fragmentabilidad pero particularizada para los espacios de Banach es la siguiente.

Definición 2.2.13. *Un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ se dice que tiene la* ***Propiedad de Punto de Continuidad*** (PPC) *si para cada subconjunto acotado y débilmente cerrado K de X, la identidad* $\mathrm{Id}_K : (K,\omega) \to (K,\|\cdot\|)$ *posee al menos un punto de continuidad. Similarmente, diremos que $(X^*,\|\cdot\|)$ posee la* ω^*-***Propiedad de Punto de Continuidad*** *(*ω^*-PPC*) si para cada subconjunto ω^*-compacto K de X^*, la aplicación identidad* $\mathrm{Id}_K : (K,\omega^*) \to (K,\|\cdot\|)$ *posee al menos un punto de continuidad.*

El Teorema 2.2.53 nos muestra que si X es un espacio de Banach con dual separable, entonces X^* posee la ω^*-Propiedad de Punto de Continuidad. Un resultado análogo al Teorema 2.2.52, pero ahora trabajando con la topología débil del espacio de Banach en cuestión, es el siguiente:

Teorema 2.2.54. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *(B_X, ω) es norma-fragmentado.*

(2) *X tiene la propiedad de punto de continuidad.*

(3) *Para cada subconjunto acotado y ω-cerrado K de X, el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad* $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$ *es un G_δ-denso en (K, ω).*

Más aun, si una cualquiera de las tres condiciones equivalentes arriba mencionadas se cumple, entonces (B_X, ω) es hereditariamente de Baire.

Prueba. Claramente $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Para cerrar el ciclo de estas implicaciones sólo bastará demostrar que $(1) \Rightarrow (3)$. Suponga entonces que (B_X, ω) es norma-fragmentado y probemos que el conjunto de puntos de continuidad de $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$ es un G_δ-denso en (K, ω), donde K es cualquier subconjunto acotado y ω-cerrado de X. Comencemos por tomar cualquier subconjunto relativamente ω-abierto no vacío U_1 de K. Escojamos, haciendo uso de la norma-fragmentabilidad de (B_X, ω), un subconjunto ω-abierto V_1 de X tal que $V_1 \cap B_X \neq \varnothing$ y $\|\cdot\| - \mathrm{diam}(V_1 \cap B_X) < 1$. Usemos ahora la cuasi-regularidad de la topología débil para hallar un subconjunto relativamente ω-abierto $U_2 \subseteq U_1 \cap V_1$ de K tal que $\overline{U}_2^{\omega} \subseteq U_1$. Aplicando inducción podemos construir una sucesión decreciente $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos relativamente ω-abiertos de K tales que

$$\overline{U}_{n+1}^{\omega} \subseteq U_n \qquad \text{y} \qquad \|\cdot\| - \mathrm{diam}(V_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Del Teorema de Encaje de Cantor resulta que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n^{\omega} = \{x\}$, para algún $x \in U_1$. Es claro que x es un punto de continuidad de la identidad $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$. Si denotamos por G el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$, lo acabado de probar nos dice $U \cap G \neq \varnothing$ para cualquier conjunto relativamente ω-abierto no vacío U de K, lo cual quiere decir que G es ω-denso en K. Se ve, como antes, que G es un G_δ-denso en (K, ω). Con esto hemos demostrado que $(1) \Rightarrow (3)$.

Falta por ver que si, por ejemplo, (3) se cumple, entonces (B_X, ω) es hereditariamente de Baire. Sea entonces K un subconjunto ω-cerrado de B_X y, como antes, denotemos por G el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$. Observe que $(G, \|\cdot\|)$ es un G_δ en $(K, \|\cdot\|)$, ya que conjuntos ω-abiertos son $\|\cdot\|$-abiertos y, como tal, por el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, página 64, completamente metrizable, y por lo tanto, un espacio de Baire. Como (G, ω) y $(G, \|\cdot\|)$ son homeomorfos, resulta que (G, ω) también es un espacio de Baire que, además, es denso en (K, ω). Se sigue ahora del Teorema 1.8.3, página 48, que (K, ω) es un espacio de Baire, con lo cual termina la prueba. ■

Para ver cómo se vincula la noción de fragmentabilidad con los espacios de Asplund vamos a requerir de los siguientes dos resultados auxiliares.

Lema 2.2.19. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto ω^*-compacto de X^*. Si K no es norma-fragmentado, entonces existen un $\varepsilon > 0$, una sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos relativamente ω^*-abiertos de K y una sucesión de vectores $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S_X tal que*

$$V_{2n} \cup V_{2n+1} \subseteq V_n \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y con

$$f(x_n) - g(x_n) \geq \varepsilon$$

siempre que $f \in V_{2n}$ y $g \in V_{2n+1}$. En particular, $f(x_n) - g(x_n) \geq \varepsilon$ siempre que $f \in \overline{V}_{2n}^{\omega^*}$ y $g \in \overline{V}_{2n+1}^{\omega^*}$.

Prueba. Supongamos que (K,ω^*) no es norma-fragmentado. Entonces existen un subconjunto no vacío y acotado B de K y un $\varepsilon > 0$ tal que $\|\cdot\|_{X^*} - \operatorname{diam}(V) > \varepsilon$ para cualquier subconjunto no vacío relativamente ω^*-abierto V de K. Sea V un subconjunto arbitrario, no vacío y relativamente ω^*-abierto de K tal que $V \cap B \neq \varnothing$. Entonces $\|\cdot\|_{X^*} - \operatorname{diam}(V \cap B) > \varepsilon$ y, en consecuencia, existen $f, g \in V \cap B$ tal que $\|f - g\| > \varepsilon$. Escojamos $x \in S_X$ tal que $(f-g)(x) = \varepsilon + \delta$ para algún $\delta > 0$. Si ahora definimos

$$V_0 = \big\{h \in V : h(x) > f(x) - \delta/2\big\} \qquad \text{y} \qquad V_1 = \big\{h \in V : h(x) < g(x) + \delta/2\big\}.$$

resulta que esos conjuntos son no vacíos, relativamente ω^*-abiertos de K, $V_0 \cup V_1 \subseteq V$ y se cumple que $(h_0 - h_1)(x) > \varepsilon$ siempre que $h_0 \in V_0$ y $h_1 \in V_1$ ya que $f \in V_0 \cap B$ y $g \in V_1 \cap B$, de modo que la construcción anterior se puede llevar a cabo indefinidamente, para así obtener las sucesiones deseadas. ∎

El siguiente resultado nos será de gran utilidad cuando tengamos que trabajar con un espacio de Banach X para el cual su dual X^* sea fragmentado por alguna métrica.

Teorema 2.2.55 (Jayne-Namioka-Rogers). *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff, y suponga que X es un espacio de Baire y que Y es fragmentado por una métrica d. Sea $F : X \to 2^{(Y,\tau_Y)}$ una aplicación* USCO *minimal. Entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que, para cualquier $x \in G$, el conjunto $F(x)$ consta de un único punto y $F : X \to (Y,d)$ es superiormente semicontinua en cada $x \in G$.*

Prueba. Para cada $n = 1,2,\ldots$ definamos los conjuntos

$$G_n = \bigcup \big\{U \subseteq X : \, U \textit{ es un abierto no vacío tal que } \; d - \operatorname{diam}(F(U)) < 1/n\big\},$$

Claramente, los G_n son subconjuntos abiertos de X. Veamos que ellos son también densos en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Por la fragmentabilidad de Y, existe un conjunto abierto $G \subseteq Y$ tal que $F(V) \cap G \neq \varnothing$ y $d - \operatorname{diam}\big(F(V) \cap G\big) < 1/n$. Ahora, puesto que F es USCO minimal existe, por el Teorema 2.2.14, un subconjunto abierto no vacío W de V tal que $F(W) \subseteq G$. Por esto, $F(W) \subseteq F(V) \cap G$ y, en consecuencia, $W \subseteq G_n$. Así, $V \cap G_n \neq \varnothing$ quedando establecido que cada G_n es denso en X. Si ahora definimos $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, vemos que G es un G_δ-denso en X gracias al Teorema de Categoría de Baire. Es claro que para cualquier $x \in G$, el conjunto $F(x)$ consiste de un único punto y que $F : X \to 2^{(Y,d)}$ es superiormente semicontinua en cada $x \in G$. ∎

Comentario Adicional 2.2.15 Recordemos que una métrica ρ sobre Y se llama **inferiormente semicontinua** si, para cada $r \geq 0$, el conjunto

$$\big\{(x,y) \in Y \times Y \, : \, \rho(x,y) \leq r\big\}$$

es cerrado en la topología producto de $Y \times Y$. Observe que la métrica-norma $d(x,y) = \|x - y\|$ sobre un espacio de Banach con su topología débil es siempre inferiormente semicontinua, similarmente lo es la métrica-norma sobre el dual de un espacio de Banach con su ω^*-topología. En el resultado anterior de Jayne, Namioka y Rogers podemos modificar la hipótesis sobre el espacio Y o la función multivaluada F para obtener la misma conclusión. En efecto, si d es una métrica inferiormente semicontinua sobre Y y si

(a) Y es σ-fragmentado por una métrica d, o

(b) F es fragmentada por d, (véase la Definición 2.2.14, página 309) entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que F es a un sólo valor y superiormente semicontinua en cualquier punto de G cuando a Y se le dota de la topología generada por d.

La condición (a) se debe a Jayne, Namioka y Rogers ([234], Theorem 3.1), mientras que (b) es un resultado de Čoban, Kenderov y Revalski ([101], Theorem 5.1). Véase también el artículo de Kenderov-Moors [260].

Estamos ahora en condiciones de demostrar el siguiente resultado, fundamentalmente obtenido por Namioka-Phelps [332] y Stegall.

Teorema 2.2.56 (Namioka-Phelps-Stegall). *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *X es un espacio de Asplund.*

(b) *Cada subconjunto ω^*-compacto de X^* con la ω^*-topología es norma-fragmentado.*

(c) (B_{X^*},ω^*) *es norma-fragmentado.*

(d) *El conjunto de los puntos de continuidad de la identidad* $\mathrm{Id}:(K,\omega^*)\to(K,\|\cdot\|)$ *es un G_δ-denso en* (K,ω^*) *para cada conjunto ω^*-compacto $K\subseteq X^*$.*

(e) *X^* tiene la* PRN.

Prueba. $(a)\Rightarrow(b)$. Supongamos que X es un espacio de Asplund pero que existe un conjunto $K\subseteq X^*$, ω^*-compacto, que no es norma-fragmentado. Por el Lema 2.2.19, existen un $\varepsilon>0$, una sucesión $(V_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos no vacíos relativamente ω^*-abiertos de K y una sucesión de vectores $(x_n)_{n=1}^\infty$ en S_X tales que

$$V_{2n}\cup V_{2n+1}\subseteq V_n \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N},$$

y además,

$$f(x_n)-g(x_n)\geq\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad f\in\overline{V}^{\omega^*}_{2n} \ \text{ y } \ g\in\overline{V}^{\omega^*}_{2n+1}.$$

Sea $Y=\overline{[(x_n)]}$, la clausura (en la norma) del subespacio lineal generado por $(x_n)_{n=1}^\infty$. Claramente Y es norma separable. Denotemos por Ξ la colección de todas las sucesiones $\alpha=(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ de números naturales tal que $\alpha_{n+1}-2\alpha_n\in\{0,1\}$ para cada n. La ω^*-compacidad de los $\overline{V}_n^{\omega^*}$ nos garantiza la existencia de algún

$$f_\alpha\in\bigcap_{n=1}^\infty\overline{V}^{\omega^*}_{\alpha_n}.$$

Si $\alpha=(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ y $\beta=(\beta_n)_{n=1}^\infty$ son elementos distintos de Ξ y si $\Lambda=\{n\in\mathbb{N}:\alpha_n\neq\beta_n\}$, entonces seleccionado los $x_n\in S_X$ correspondientes a los $n\in\Lambda$, se tiene que $\|f_\alpha|_Y-f_\beta|_Y\|\geq|f_\alpha(x_n)-f_\beta(x_n)|\geq\varepsilon$. Como el conjunto Ξ es no numerable, se concluye que Y^* no es norma-separable. El Teorema 2.2.19 nos dice que X no es de Asplund. Esta contradicción establece que (K,ω^*) es norma-fragmentado.

$(b)\Rightarrow(c)$. Es inmediato.

$(c)\Rightarrow(a)$. Supongamos que (B_{X^*},ω^*) es norma-fragmentado y sea $f:X\to\mathbb{R}$ una función convexa continua. Es suficiente demostrar que la subdiferencial ∂f de f es norma-norma superiormente semicontinua y a un sólo valor en los puntos de un subconjunto residual de X.

Tomemos una aplicación norma - ω^* USCO minimal $F:X\to 2^{X^*}$ tal que $F(y)\subseteq\partial f(y)$ para todo $y\in X$. Consideremos los conjuntos $H_n=\left\{x\in X:F(x)\cap nB_{X^*}\neq\varnothing\right\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por definición, cada H_n es norma-cerrado y puesto que $X=\bigcup_{n=1}^\infty H_n$, el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.8.6) nos dice que

$$\overline{\bigcup_{n\geq1}\mathrm{int}(H_n)}=X,$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\operatorname{int}(H_n) = \varnothing$, entonces lo que hacemos es definir $U_n = \varnothing$. Supongamos que $\operatorname{int}(H_n) \neq \varnothing$. Como F es USCO minimal, el Teorema 2.2.14 (2) nos revela que $F(\operatorname{int}(H_n)) \subseteq nB_{X^*}$. Pero como (nB_{X^*}, ω^*) es norma - fragmentado, el Teorema 2.2.55 nos muestra que F es a un sólo-valor y norma - norma superiormente semicontinua en cada punto de un conjunto U_n el cual es residual en $\operatorname{int}(H_n)$. Por esto, F es a un sólo-valor y norma - norma superiormente semicontinua en todos los puntos de $\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Sin embargo, por el Lema 1.8.1, $\mathcal{O}$ es residual en X. Se sigue entonces del Teorema 2.2.16, página 250, que f es Fréchet diferenciable en cada punto de $\mathcal{O}$. Esto prueba que X es un espacio de Asplund.

$(c) \Leftrightarrow (d)$. Es el Corolario 2.2.19.

$(d) \Rightarrow (e)$. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de X^*. Vamos a demostrar que A es dentable. Sean $K = \overline{\operatorname{co}}^{\,\omega^*}(A)$ y $\varepsilon > 0$. Afirmamos que:

Existe un subconjunto convexo y ω^*-compacto D de K tal que $K \setminus D \neq \varnothing$ y $\|\cdot\| - diam(K \setminus D) < \varepsilon$.

Prueba. En efecto, por el Teorema de Krein-Milman, el conjunto de los puntos extremales de K, $\operatorname{ext}(K)$, es no vacío y, además, $K = \overline{\operatorname{co}}^{\,\omega^*}(\operatorname{ext}(K))$. Sea $E = \overline{\operatorname{ext}(K)}^{\,\omega^*}$. La suposición (d) implica que $\operatorname{id} : (K, \omega^*) \to (K, \|\cdot\|)$ posee, al menos, un punto de continuidad y, por consiguiente, existe un subconjunto ω^*-abierto U de X^* tal que $E \cap U \neq \varnothing$ y $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(E \cap U) \leq \varepsilon/2$. Observemos que $U \cap \operatorname{ext}(K) \neq \varnothing$ pues $E \cap U \neq \varnothing$. Si ahora definimos

$$K_1 = \overline{\operatorname{co}}^{\,\omega^*}(E \setminus U) \qquad \text{y} \qquad K_2 = \overline{\operatorname{co}}^{\,\omega^*}(E \cap U),$$

entonces se comprueba sin dificultad que:

$$K_1 \subseteq K, \qquad K_2 \subseteq K, \qquad K = \operatorname{co}\big(K_1 \cup K_2\big) \qquad \text{y} \qquad \|\cdot\| - \operatorname{diam}(K_2) \leq \varepsilon/2.$$

El Corolario 2.2.17, nos garantiza la existencia de un subconjunto convexo y ω^*-compacto D de K para el cual $K \setminus D \neq \varnothing$ y $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(K \setminus D) < \varepsilon$. Esto termina la prueba de nuestra afirmación.

Notemos ahora que $A \nsubseteq D$, es decir, $A \setminus D \neq \varnothing$. En efecto, si ocurre que $A \subseteq D$ entonces, por ser D convexo y ω^*-compacto, resulta que $K = \overline{\operatorname{co}}^{\,\omega^*}(A) \subseteq D$ lo cual contradice el hecho de que $K \setminus D \neq \varnothing$. Sea $f \in A \setminus D \subseteq K \setminus D$. Entonces $U(f, \varepsilon) \supseteq K \setminus D$ ya que $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(K \setminus D) \leq \varepsilon/2$. De esto se sigue que $K \setminus U(f, \varepsilon) \subseteq D$ y así, $\overline{\operatorname{co}}(D \setminus U(f, \varepsilon)) \subseteq D$. En particular, $f \notin \overline{\operatorname{co}}(K \setminus U(f, \varepsilon))$. Esto prueba que K es dentable y, por consiguiente, A es dentable.

$(e) \Rightarrow (c)$. Supongamos que X^* tiene la PRN pero que (B_{X^*}, ω^*) no es norma-fragmentado. El Lema 2.2.19, nos garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$, de una sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos relativamente ω^*-abiertos de B_{X^*} y de una sucesión de vectores $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que

($\alpha1$) $\|x_n\| = 1$, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$,

($\alpha2$) $V_{2n} \cup V_{2n+1} \subseteq V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y

($\alpha3$) $f(x_n) - g(x_n) \geq \varepsilon$ si $f \in V_{2n}$ y $g \in V_{2n+1}$. En particular, $f(x_n) - g(x_n) \geq \varepsilon$ siempre que $f \in \overline{V}^{\,\omega^*}_{2n}$ y $g \in \overline{V}^{\,\omega^*}_{2n+1}$.

Veamos que las tres condiciones anteriores producen las dos siguientes: para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto K_n convexo y ω^*-compacto tal que

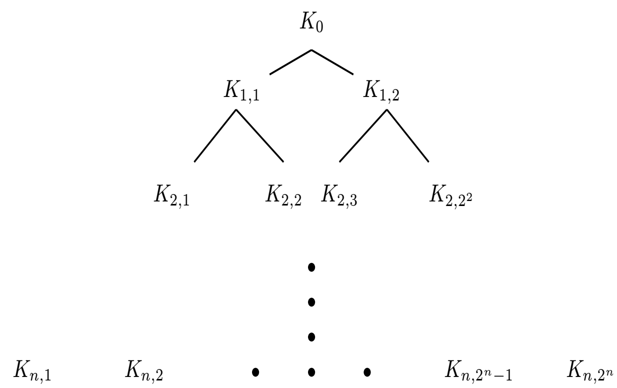
($\beta1$) $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subseteq K_n$, y (β2) $\| f-g \|_{X^*} \geq \varepsilon$ para cada $f \in K_{2n}$ y cada $g \in K_{2n+1}$.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = \overline{\mathrm{co}}^{\,\omega^*}(V_n)$. Entonces cada K_n es convexo, ω^*-compacto y se cumple, por (α2), que $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subseteq K_n$. Notemos que si $f \in K_{2n}$ y $g \in K_{2n+1}$, entonces

$$f-g \;\in\; K_{2n} - K_{2n+1} \;\subseteq\; \overline{\mathrm{co}}^{\,\omega^*}(V_{2n} - V_{2n+1})$$

y así, por (α3), $(f-g)(x_n) > \varepsilon$. Esto último, en conjunción con (α1), nos dice que $\| f-g \|_{X^*} \geq \varepsilon$.

(β1) y (β2) permiten construir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un δ-árbol finito de longitud n. Para hacer esto, es más conveniente cambiar la notación y enumerar los K_n, los x_n y los f_n del modo siguiente:



$\| x_{n,k} \| = 1$, $\big(f_{n,2k-1} - f_{n,2k}\big)(x_{n,k}) \geq \varepsilon$ para toda $f_{n,2k-1} \in K_{n,2k-1}$ y toda $f_{n,2k} \in K_{n,2k}$, $k = 1,2,\ldots,2^{n-1}$. Ahora bien, escoja $f_{n,1} \in K_{n,1}, \ldots, f_{n,2^n} \in K_{n,2^n}$ de forma arbitraria y defina, sucesivamente, para $m = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$

$$f_{m,k} \;=\; \frac{1}{2}\big(f_{m+1,2k-1} + f_{m+1,2k}\big), \qquad k = 1,\ldots,2^m.$$

El resultado es un ε-árbol $T^{(n)}$ de longitud n, cuyos elementos denotaremos por $f^{(n)}_{m,k}$, donde $m = 0,1,\ldots,n$; $k = 1,2,\ldots,2^m$. Consideremos a continuación el espacio producto compacto

$$\Xi \;=\; \prod_{\substack{m=1 \\ k\in\{1,\ldots,2^m\}}}^{\infty} \big(K_{m,k}, \omega^*\big).$$

Fijemos un punto $(c_{m,k})_{m\in\mathbb{N},\,k\in\{1,\ldots,2^m\}}$ en Ξ e identifiquemos cada $T^{(n)}$ con el punto de Ξ cuyas coordenadas son iguales a $f^{(n)}_{m,k}$ si $m \leq n$, y a $c_{m,k}$ si $m > n$. Por la compacidad de Ξ, la sucesión $(T^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ en Ξ posee un punto de acumulación, digamos $T = (f_{m,k})_{m\in\mathbb{N},\,k\in\{1,\ldots,2^m\}}$. Es un ejercicio fácil comprobar que

$$f_{m,k} \;=\; \frac{1}{2}\big(f_{m+1,2k-1} + f_{m+1,2k}\big), \qquad m \in \mathbb{N},\ k = 1,\ldots,2^m.$$

y que

$$\big(f_{m+1,2k-1} + f_{m+1,2k}\big)(x_{,,k}) \;\geq\; \varepsilon.$$

Por consiguiente $\| f_{m+1,2k-1} + f_{m+1,2k} \| \geq \varepsilon$. Con esto, hemos demostrado que T es un ε-árbol infinito en B_{X^*} lo cual contradice la PRN. ■

Comentario Adicional 2.2.16 1) Notemos, en particular, como consecuencia del resultado anterior, que si X es un espacio de Banach tal que (B_{X^*}, ω^*) es norma-fragmentado, entonces X es un espacio débilmente de Asplund. El recíproco es, en general, falso.

2) Si la norma $\|\cdot\|$ del espacio de Banach X es Gâteaux suave, entonces (X^*, ω^*) es fragmentable, ([374], Theorem 1.1).

3) Si la norma $\|\cdot\|$ del espacio de Banach X es Fréchet suave, entonces cada subconjunto norma acotado de (X^*, ω^*) es norma-fragmentable, ([374], Corollary 2.8).

Recordemos que si (Z, τ) es un espacio topológico de Hausdorff (Z, τ), un punto $x \in Z$ es llamado un **punto de condensación** de un conjunto $A \subseteq Z$ si cualquier entorno abierto U de x contiene una cantidad no numerable de puntos de A.

Corolario 2.2.21 (Asplund-Namioka). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach norma-separable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X^* *tiene la* PRN.

(2) X^* *es norma-separable.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que X^* tiene la PRN pero que no es norma-separable. En este caso tampoco es norma-separable la bola unitaria cerrada B_{X^*} y, en consecuencia, existen un $\varepsilon > 0$ y un conjunto no numerable A de B_{X^*} tal que

$$\text{para todo } f, g \in A,\ f \neq g \quad \Rightarrow \quad \| f - g \| \geq \varepsilon.$$

Por otro lado, como X es norma-separable, resulta que B_{X^*} es un espacio ω^*-compacto metrizable. Usemos ahora el Teorema de Cantor-Bendixson (véase, Corolario 3.1.1, página 474) para representar a B_{X^*} en la forma $B_{X^*} = P \cup N$, donde P es el conjunto perfecto de sus ω^*-puntos de condensación y N es el conjunto a lo más numerable de sus puntos aislados. Puesto que A es no numerable, entonces dicho conjunto sólo puede poseer a lo sumo una cantidad numerable de puntos aislados. Por esta razón (eliminando una cantidad a lo más numerable de puntos de A), podemos suponer (y así lo haremos) que cada punto de A es un ω^*-punto de condensación de A. Ahora bien, como X^* tiene la PRN, el Teorema 2.2.56 nos garantiza que (A, ω^*) es norma-fragmentado y, en consecuencia, existe un subconjunto ω^*-abierto U de X^* tal que

$$A \cap U \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad \|\cdot\| - \operatorname{diam}(A \cap U) < \varepsilon.$$

Observemos ahora que si $f, g \in A \cap U$, con $f \neq g$, entonces $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(A \cap U) \geq \| f - g \| \geq \varepsilon$. Esto nos dice que $A \cap U$ debe contener exactamente un punto, digamos f; pero como todos los puntos de A son ω^*-puntos de condensación, entonces $A \cap U$ es no numerable. Esta contradicción establece que B_{X^*} (y por lo tanto X^*) es norma-separable.
$(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que X^* es norma-separable y sea K un subconjunto no vacío, ω^*-compacto de X^*. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n^*, \varepsilon).$$

Puesto que cada bola $B(x_n^*, \varepsilon)$ es ω^*-cerrada, se sigue del Teorema de Categoría de Baire que existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap B(x_{n_0}^*, \varepsilon)$ tiene ω^*-interior relativo no vacío, y además, dicho conjunto tiene diámetro (en la norma) menor que 2ε. Esto nos muestra que (K, ω^*) es norma-fragmentado y de nuevo, por el Teorema 2.2.56, X^* tiene la PRN. ∎

La siguiente definición, la cual aparece por primera vez en [204], será de utilidad en el próximo resultado.

Definición 2.2.14. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y (Y,d) un espacio métrico. Una función $f:(X,\tau)\to(Y,d)$ se dice que es **fragmentada por** d si, para cada $\varepsilon>0$ y cada subconjunto no vacío A de X, existe un subconjunto abierto $V\subseteq X$ tal que $V\cap A\neq\varnothing$ y*

$$d-\operatorname{diam}\big(f(V\cap A)\big)<\varepsilon.$$

Un resultado interesante que relaciona fragmentabilidad con la existencia de puntos de Gâteaux (Fréchet) diferenciabilidad para funciones continuas convexas en ausencia de separabilidad del espacio de Banach, es el siguiente (véase, [371], Theorem 6.1).

Teorema 2.2.57 (Revalski). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que (X^*,ω^*) es fragmentado por alguna métrica d. Si $f:(X,\|\cdot\|)\to\mathbb{R}$ es una función convexa continua, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es Gâteaux diferenciable en cada punto de G. Si la métrica d es generada por la norma dual de X^*, entonces f es Fréchet diferenciable en cada punto de G.*

Prueba. Por ser f una función continua convexa, su subdiferencial $\partial f:(X,\|\cdot\|)\to 2^{(X^*,\omega^*)}$ es, gracias al Lema 2.2.5, una aplicación USCO y, por consiguiente, por Teorema 2.2.13 de la página 245, existe una aplicación USCO minimal $F:(X,\|\cdot\|)\to 2^{(X^*,\omega^*)}$ contenida en ∂f. Por el Teorema 2.2.55, existe un subconjunto G_δ-denso G de X en cuyos puntos F es univaluada y norma - τ_d superiormente semicontinua , donde τ_d es la topología generada por d. Sea φ una extensión univaluada de $F|_G$ a todo X tal que $\varphi(x)\in F(x)$ para cada $x\in X$. Lo anterior garantiza que φ es una selección para ∂f y como F es norma-ω^* superiormente semicontinua , resulta que φ es norma-ω^* continua en todo punto $x\in G$. Se sigue ahora del Teorema 2.2.16 que f es Gâteaux diferenciable en cada punto de G.

En el caso en que la métrica d es generada por la norma dual $\|\cdot\|_*$ de X^*, la función F resulta ser norma-norma superiormente semicontinua y univaluada en cada $x\in G$, lo que implica que φ es norma-norma continua en cada $x\in G$. Un nuevo llamado al Teorema 2.2.16 nos revela que f es Fréchet diferenciable en cada punto de G. ■

Notemos que el resultado anterior generaliza los Teoremas de diferenciabilidad de Mazur y de Asplund-Lindenstrauss y que pueden ser reestablecidos en términos de la noción de espacios de Asplund del modo siguiente:

(1) *Todo espacio de Banach X tal que (X^*,ω^*) es fragmentado por alguna métrica d, es un espacio débilmente de Asplund, y*

(2) *Todo espacio de Banach X tal que (X^*,ω^*) es fragmentado por la métrica generada por la norma dual, es un espacio de Asplund.*

Estos dos últimos resultados están incluidos en el Teorema de Namioka-Phelps-Stegall, Teorema 2.2.56, pero no hace daño volver a recordarlos.

Definición 2.2.15. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff. Una función $f:X\to Y$ se dice que es **escasamente continua** si, para cada subconjunto cerrado F de X, la restricción de f a F, $f|_F$, posee al menos un punto de continuidad.*

La condición (2) del Teorema 2.2.52 dice que, cuando X es un espacio hereditariamente de Baire que además es fragmentado por una métrica d, entonces la aplicación identidad $\mathrm{Id}:(X,\tau)\to(X,d)$ es escasamente continua. Más adelante veremos que toda función $f:X\to\mathbb{R}$ de la primera clase de Baire, donde X es un espacio de Baire, es escasamente continua (Teorema 3.1.3, página 479); de hecho, si nuestro espacio X es un espacio métrico completo separable, entonces vale el recíproco. En este caso, el conjunto de puntos donde f es continua constituye un subconjunto G_δ-denso de X y por consiguiente, *si* (X,d) *es un espacio métrico completo separable, la clase de todas las funciones* $f : X \to \mathbb{R}$ *que son escasamente continuas, puntualmente discontinuas y exclusivas coinciden*. Véase también la página 474.

El siguiente resultado, el cual generaliza el Teorema 2.2.52, establece la relación existente entre las funciones fragmentables y las escasamente continuas del modo siguiente:

Teorema 2.2.58. *Sean* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff y* (Y,d) *un espacio métrico. Toda aplicación* $f : X \to Y$ *escasamente continua es fragmentada por* d. *Si, además,* X *es hereditariamente de Baire, entonces vale el recíproco.*

Prueba. Supongamos que f es escasamente continua y consideremos un subconjunto no vacío A de X. Siendo $\overline{A}$ un subconjunto cerrado no vacío de X, se sigue de nuestra hipótesis que $f|_{\overline{A}}$ posee al menos un punto de continuidad, digamos $x_0 \in \overline{A}$. De allí que, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno abierto U de x_0 tal que $\operatorname{diam} f(U \cap \overline{A}) < \varepsilon$. Por otra parte, como $x_0 \in \overline{A}$ resulta que $U \cap A \neq \varnothing$, de donde obtenemos que

$$\operatorname{diam} f(U \cap A) \ \leq \ \operatorname{diam} f(U \cap \overline{A}) < \varepsilon.$$

Esto prueba que f es fragmentada por d.

Supongamos ahora que X es un espacio hereditariamente de Baire y que $f : X \to Y$ es fragmentada por d. Veamos que f es escasamente continua. Para obtener una contradicción suponga que f no es escasamente continua. Esto significa que en alguna parte de X existe un subconjunto cerrado no vacío F tal que $f|_F$ no posee puntos de continuidad. Usemos esta condición para definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$F_n = \left\{ x \in F : \ \textit{para cada entorno abierto } U \textit{ de } x, \ \operatorname{diam} f(U \cap F) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

y observemos que como f no posee puntos de continuidad en F, entonces $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Nos proponemos demostrar que cada F_n es cerrado. En efecto, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en F_n convergiendo a $x \in X$. Por ser F cerrado, se tiene que $x \in F$. Más aun, si U es un entorno abierto de x, entonces por ser x el límite de la red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tenemos que existe un $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$, lo cual nos dice que U es un entorno abierto de cada uno de esos $x_\alpha \in F_n$ por lo que se cumple que $\operatorname{diam} f(U \cap F) \geq 1/n$ y así, $x \in F_n$. Por otro lado, como X es hereditariamente de Baire, resulta que F es un espacio de Baire y, en consecuencia, gracias al Teorema de Categoría de Baire, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_F(F_n) \neq \varnothing$, donde $\operatorname{int}_F(F_n)$ denota el interior de F_n relativo a F. Escojamos ahora un abierto V en X tal que $V \cap F$ es no vacío y $V \cap F \subseteq F_n$. Finalmente, invocando el hecho de que f es fragmentada por d, para el conjunto $V \cap F$ y con $\varepsilon := 1/n$, existe un abierto U en X tal que $U \cap (V \cap F) \neq \varnothing$ y $\operatorname{diam} f(U \cap (V \cap F)) < 1/n$, lo cual es una contradicción, puesto que si $x \in V \cap (U \cap F) \subseteq F_n$, entonces $V \cap U$ es un entorno abierto de x y así, por definición, $\operatorname{diam} f((V \cap U) \cap F) \geq 1/n$. Esto termina la prueba. ■

Finalizamos esta sección con una caracterización “interna” de fragmentabilidad que resulta ser muy útil para demostrar ciertas propiedades de estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_d$ constituida por todos los espacios topológicos fragmentables (ver, por ejemplo, [157]).

Definición 2.2.16. *Una familia bien ordenada* $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *se dice que es una* ***partición de*** X ***relativamente abierta*** *si*

(a) U_ξ *está contenido y es relativamente abierto en* $X \setminus \Big(\bigcup_{\beta<\xi} U_\beta\Big)$, *para cualquier* ξ, *con* $0 < \xi < \xi_0$, *y* (*b*) $X = \bigcup_{\xi<\xi_0} U_\xi$.

Definición 2.2.17. *Sea* $\mathcal{W} = \{W_\xi : 0 < \xi \leq \xi_0\}$ *una familia bien ordenada de subconjuntos abiertos del espacio topológico de Hausdorff* X. *Se dice que* $\mathcal{W}$ *es* ***regularmente creciente*** *si*

(*a*) $W_\xi \subseteq W_\eta$ *siempre que* $0 < \xi < \eta \leq \xi_0$,

(*b*) $W_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta$ *para cualquier ordinal límite* $\xi \in (0,\xi_0]$, *y*

(*c*) $W_{\xi_0} = X$.

La siguiente proposición relaciona estos dos últimos conceptos.

Proposición 2.2.1. *Sea* X *un espacio topológico de Hausdorff.*

(1) *Sea* $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\}$ *una partición relativamente abierta de* X. *Si para cada* ξ, $0 < \xi \leq \xi_0$, *definimos*

$$W_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta,$$

entonces la familia $\mathcal{W} = \{W_\xi : 0 < \xi \leq \xi_0\}$ *es regularmente creciente de subconjuntos abiertos de* X *y* $U_\xi = W_{\xi+1} \setminus W_\xi$ *para cualquier* $\xi \in (0,\xi_0)$.

(2) *Sea* $\mathcal{W} = \{W_\xi : 0 < \xi \leq \xi_0\}$ *una familia de subconjuntos abiertos de* X. *Entonces la familia bien ordenada* $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\}$, *donde* $U_0 = W_1$ *y* $U_\xi = W_{\xi+1} \setminus W_\xi$ *para cualquier* $\xi \in (0,\xi_0)$, *es una partición relativamente abierta de* X *y se cumple que* $W_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta$ *para cualquier* $\xi \in (0,\xi_0]$.

Prueba. (1). Es una tarea fácil verificar que las condiciones (*a*) - (*c*) de la Definición 2.2.16 se cumplen y que, además, $U_\xi = W_{\xi+1} \setminus W_\xi$ para cada $\xi \in (0,\xi_0)$. Sólo nos queda por probar que cada W_ξ es abierto. Vamos a proceder por inducción transfinita. El conjunto W_1 es abierto puesto que es igual a U_0. Supongamos que W_η es abierto siempre que $\eta \in (0,\xi)$, donde ξ es cualquier elemento fijo de $(1,\xi_0]$. Si ξ es un ordinal límite, entonces $W_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta$ es claramente abierto. Si ξ no es un ordinal límite, entonces $\xi = \zeta + 1$ y

$$U_\zeta = G \cap \Big(X \setminus \bigcup_{\eta<\zeta} U_\eta\Big),$$

donde G es un abierto en X; así,

$$W_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta = W_\zeta \cup U_\zeta = W_\zeta \cup (G \setminus W_\zeta) = W_\zeta \cup G$$

es abierto. Esto completa el paso inductivo y termina la demostración de (1). Efectuando un proceso inductivo similar al anterior se puede demostrar igualmente la parte (2). ■

En lo que sigue, si $\mathcal{U}$ es una partición relativamente abierta de un espacio topológico de Hausdorff X, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{U})$ denotará la familia regularmente creciente obtenida en la Proposición 2.2.1.

Definición 2.2.18. *Sea un espacio topológico de Hausdorff y sean* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$ *dos particiones relativamente abiertas de* X*. Diremos que* $\mathcal{V}$ *es un* ***refinamiento*** *de* $\mathcal{U}$ *si* $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{V})$*. Similarmente, diremos que* $\mathcal{V}$ *es un* ***refinamiento fuerte*** *de* $\mathcal{U}$ *si* $\mathcal{V}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{U}$ *y para cualquier elemento* V *de* $\mathcal{V}$ *existe un elemento* U *de* $\mathcal{U}$ *tal que* $\overline{V} \subseteq U$*.*

Proposición 2.2.2. *Sea* X *un espacio topológico de Hausdorff. Sea* $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\}$ *una partición relativamente abierta de* X *y para cualquier* $\xi < \xi_0$*, suponga que*

$$\mathcal{U}^\xi \;=\; \left\{U_\eta^\xi : \; 0 \leq \eta < \eta_\xi\right\}$$

una partición relativamente abierta de U_ξ *con la topología heredada de* X*. Ordenemos el conjunto*

$$I \;=\; \left\{(\xi,\eta) : 0 \leq \xi < \xi_0,\;\; 0 \leq \eta < \eta_\xi\right\}$$

lexicográficamente. Entonces la familia $\mathcal{V} = \left\{U_\eta^\xi : \,(\xi,\eta) \in I\right\}$ *es una partición relativamente abierta de* X *la cual refina a* $\mathcal{U}$*.*

Prueba. Recordemos que el orden lexicográfico sobre I se define como:

$$(\xi_1,\eta_1) < (\xi_2,\eta_2) \qquad \text{si} \qquad \xi_1 < \xi_2 \qquad \text{o bien} \qquad \big(\xi_1 = \xi_2 \quad \text{y} \quad \eta_1 < \eta_2\big).$$

Con este orden $\mathcal{V}$ está bien ordenado. También es claro que la condición (b) de la Definición 2.2.16 se cumple, es decir, $X = \bigcup_{(\xi,\eta)\in I} U_\eta^\xi$, por lo que sólo resta verificar la condición (a) de la Definición 2.2.16. Tomemos cualquier $(\xi,\eta) \in I$. Puesto que $\mathcal{U}$ es una partición relativamente abierta, existe un conjunto abierto G de X tal que

$$U_\xi \;=\; G \cap \Big(X \setminus \bigcup_{\xi'<\xi} U_{\xi'}\Big) = G \setminus \bigcup_{\xi'<\xi} U_{\xi'}.$$

Por otro lado, como $\mathcal{U}^\xi$ es una partición relativamente abierta de U_ξ, existe un conjunto abierto G' de X tal que

$$U_\eta^\xi \;=\; G' \cap \Big(U_\xi \setminus \bigcup_{\eta'<\eta} U_{\eta'}^\xi\Big) \;=\; (G' \cap U_\xi) \setminus \bigcup_{\eta'<\eta} U_{\eta'}^\xi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
U_\eta^\xi &= \left(G' \cap \Big(G \setminus \bigcup_{\xi'<\xi} U_{\xi'}\Big)\right) \setminus \bigcup_{\eta'<\eta} U_{\eta'}^\xi = (G' \cap G) \setminus \Big(\bigcup_{\xi'<\xi} U_{\xi'} \cup \bigcup_{\eta'<\eta} U_{\eta'}^\xi\Big) \\
&= (G' \cap G) \setminus \bigcup \Big\{U_{\eta'}^{\xi'} : \,(\xi',\eta') < (\xi,\eta)\Big\},
\end{aligned}$$

lo cual verifica (a) de la Definición 2.2.16. Esto prueba que $\mathcal{V}$ es una partición relativamente abierta de X. Más aun, $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ ya que, para cualquier $\xi \in (0,\xi_0)$,

$$\bigcup_{\xi'<\xi} U_{\xi'} \;=\; \bigcup \Big\{U_{\eta'}^{\xi'} : \,(\xi',\eta') < (\xi,\eta)\Big\}.$$

Esto termina la prueba. ■

Proposición 2.2.3. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff regular y sea $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\}$ una partición relativamente abierta de X. Entonces existe una partición relativamente abierta $\mathcal{V}$ de X que es un refinamiento fuerte de $\mathcal{U}$.*

Prueba. La regularidad de X nos garantiza, para cualquier $\xi < \xi_0$ y cualquier $x \in U_\xi$, la existencia de un conjunto abierto V_x^ξ tal que

$$x \in V_x^\xi \qquad \text{y} \qquad \overline{V_x^\xi} \subseteq \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta.$$

Fijemos ahora un $\xi < \xi_0$ y démosle un buen orden al conjunto U_ξ, es decir, $U_\xi = \{x_\eta : 0 \leq \eta < \eta_\xi\}$. Entonces la familia $\mathcal{U}^\xi = \big\{U_\eta^\xi : 0 \leq \eta < \eta_\xi\big\}$, donde

$$U_\eta^\xi = V_{x_\eta}^\xi \setminus \Big(\bigcup_{\zeta<\xi} U_\zeta \cup \bigcup_{\zeta<\eta} V_{x_\zeta}^\xi\Big)$$

es una partición relativamente abierta de U_ξ, para la cual

$$\overline{U_\eta^\xi} \subseteq \overline{V_{x_\eta}^\xi \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} U_\zeta} \subseteq \overline{V_{x_\eta}^\xi} \bigcap \Big(X \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} U_\zeta\Big) \subseteq \bigcup_{\zeta\leq\xi} U_\zeta \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} U_\zeta = U_\xi.$$

Un llamado a la Proposición 2.2.2 termina la prueba. ■

Definición 2.2.19. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se dice que es una **σ-partición relativamente abierta** de X si existen particiones relativamente abiertas $\mathcal{U}_n$ de X, $n = 1,2,\ldots$ tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$. Si, además, para cada par de puntos distintos $x,y \in X$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x,y\} \cap U$ es un punto, entonces diremos que $\mathcal{U}$ **separa los puntos** de X.*

Proposición 2.2.4. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff (regular) y suponga que X admite una σ-partición relativamente abierta que separa sus puntos. Entonces existe una sucesión de particiones relativamente abiertas $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de X con las siguientes propiedades:*

(a) *$\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento (fuerte) de $\mathcal{U}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y*

(b) *$\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ separa los puntos de X.*

Prueba. Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{V}_n$ una σ-partición relativamente abierta de X que separa sus puntos. La prueba la haremos por inducción. Definamos $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}_1$ y supongamos que hemos construido $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_{i+1}$ es un refinamiento (fuerte) de $\mathcal{U}_i$ y de $\mathcal{V}_{i+1}$ para $i = 1,2,\ldots,n-1$. Escribamos

$$\mathcal{U}_n = \big\{U_\xi : 0 \leq \xi < \xi_0\big\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{V}_{n+1} = \big\{V_\eta : 0 \leq \eta < \eta_0\big\}$$

y dotemos al conjunto $I = [0,\xi_0) \times [0,\eta_0)$ con el orden lexicográfico. Entonces, para cada $\xi < \xi_0$, la familia $\big\{U_\xi \cap V_\eta : \eta \in [0,\eta_0)\big\}$ es una partición relativamente abierta de U_ξ, mientras que, para cada $\eta < \eta_0$, la familia $\big\{U_\xi \cap V_\eta : \xi \in [0,\xi_0)\big\}$ es una partición relativamente abierta de V_η. Se sigue de la Proposición 2.2.2, que

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{n+1} = \big\{U_\xi \cap V_\eta : (\xi,\eta) \in [0,\xi_0) \times [0,\eta_0)\big\}$$

es una partición relativamente abierta de X que refina a $\mathcal{U}_n$ y a $\mathcal{V}_{n+1}$. Definamos ahora y $\mathcal{U}_{n+1} = \widetilde{\mathcal{U}}_{n+1}$.

Si X es regular, entonces invocando a la Proposición 2.2.3, resulta que existe una partición relativamente abierta de X, digamos $\mathcal{U}_{n+1}^{\approx}$, la cual es un refinamiento fuerte de $\widetilde{\mathcal{U}}_{n+1}$ y, por consiguiente, un refinamiento fuerte de $\mathcal{U}_n$ y de $\mathcal{V}_{n+1}$. Poniendo $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1}^{\approx}$, damos por finalizada la inducción. Finalmente, el hecho de que $\mathcal{U}_n$ refina a $\mathcal{V}_{n+1}$, para $n = 1, 2, \ldots$ implica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ separa los puntos de X, ya que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, por hipótesis, lo hace. ■

Estamos ahora en posición de formular la caracterización de fragmentabilidad debida a N. K. Ribarska [373].

Teorema 2.2.59 (Ribarska). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es fragmentable.*

(2) *Existe una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X que es una σ-partición relativamente abierta de X que, además, separa los puntos de X.*

Prueba. $(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que el espacio topológico X posee una σ-partición relativamente abierta que separa sus puntos, digamos $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, con

$$\mathcal{U}_n = \Big\{ U_\zeta^n : \, \zeta \in \big[0, \zeta_0\big) \Big\}.$$

Usando la Proposición 2.2.4, podemos suponer que $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Definamos la aplicación $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ por

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ \big(\text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \text{card}(U \cap \{x,y\}) = 1 \text{ para algún } U \in \mathcal{U}_n\} \big)^{-1} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es una tarea no tan complicada verificar que, en realidad, ρ es una métrica sobre X. Veamos, por ejemplo, la desigualdad triangular. De hecho, vamos a probar la siguiente desigualdad, la cual implica la desigualdad triangular:

$$\rho(x,y) \;\leq\; \text{máx}\big\{\rho(x,z), \rho(z,y)\big\}, \quad \text{para todo } x,y,z \in X.$$

En efecto, sean $x,y,z \in X$ con $x \neq y$ y definamos $n = \rho(x,y)^{-1}$. Sea $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $\{x,y\} \cap U$ consta de un único punto. Si $\{x,y\} \cap U = \{x\}$, entonces $\rho(z,x) \geq 1/n (= \rho(x,y))$ si $z \notin U$, mientras que si $z \in U$ entonces $\rho(z,y) \geq 1/n$. Un hecho enteramente similar ocurre si $\{x,y\} \cap U = \{y\}$. Esto finaliza la prueba de nuestra desigualdad y, por consiguiente, de la desigualdad triangular.

Observemos ahora que el ρ-diámetro de U_ζ^n es menor que $1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\zeta \in [0, \zeta_n)$ debido al hecho de que $\mathcal{U}_{i+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_i$. Todo lo anterior nos permite concluir que sólo es necesario demostrar que X es fragmentado por ρ. Fijemos entonces un $\varepsilon > 0$ y un conjunto arbitrario no vacío $A \subseteq X$. Elijamos un entero $n > 1/\varepsilon$ y sea

$$\xi \;=\; \text{mín}\big\{\eta \in [0, \zeta_n) : \, A \cap U_\eta^n \neq \varnothing\big\}.$$

Entonces, el conjunto no vacío $A \cap U_\xi^n$ es igual a $A \cap \Big(\bigcup_{\eta \leq \xi} U_\eta^n\Big)$ y, en consecuencia, es abierto en A. Además,

$$\rho - \text{diam}\big(A \cap U_\xi^n\big) \;\leq\; \rho - \text{diam}(U_\xi^n) \;<\; 1/n \;<\; \varepsilon.$$

$(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos ahora que X es fragmentado por una métrica d. Para cada $n \in \mathbb{N}$, nuestra tarea consistirá en construir, por inducción transfinita, una partición relativamente abierta $\mathcal{U}_n$ de X. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y comencemos haciendo $U_0 = \varnothing$. Supongamos que un ordinal $\xi > 0$ ha sido obtenido de modo tal que, para cada $\zeta \in [0,\xi)$, existe un conjunto no vacío $U_\zeta \subseteq X$ que está contenido en $X \setminus \bigcup_{\eta<\zeta} U_\eta$ y que es relativamente abierto en dicho conjunto con $d-\mathrm{diam}(U_\zeta) < 1/n$. Si ocurre que $X = \bigcup_{\eta<\zeta} U_\eta$, paramos el proceso y hacemos $\mathcal{U}_n = \{U_\eta : \eta \in [0,\xi)\}$. Si por el contrario, $X \neq \bigcup_{\eta<\zeta} U_\eta$, entonces usamos de nuevo la fragmentabilidad de X para obtener un subconjunto U_ξ relativamente abierto en $X \setminus \bigcup_{\eta<\zeta} U_\eta$ con $d-\mathrm{diam}(U_\xi) < 1/n$. Este proceso debe, en algún momento, detenerse. Claramente, $\mathcal{U}_n$ es entonces una partición relativamente abierta de X. Queda por verificar que $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ separa los puntos de X. Sean entonces $x,y \in X$ con $x \neq y$ y escojamos un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(x,y) \geq 1/n$. De aquí se sigue la existencia de un $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$ y, como $d-\mathrm{diam}(U) < 1/n$, concluimos que $y \notin U$. ■

Notemos que si (X,τ) es un espacio compacto fragmentado por una métrica d, entonces la topología τ_d generada por d no necesita, como ya hemos mencionado, estar relacionada con τ. Un hecho interesante que se obtiene como consecuencia de la caracterización de Ribarska es el siguiente:

Teorema 2.2.60 (Ribarska). *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff compacto fragmentado por una métrica d. Entonces existe una métrica ρ sobre X tal que:*

(1) ρ *fragmenta a X,*

(2) (X,ρ) *es un espacio métrico completo,*

(3) ρ *genera una topología τ_ρ más fuerte que τ.*

(4) *Existe un subconjunto G_δ-denso G (completamente metrizable) en X tal que τ y τ_ρ coinciden sobre G.*

Prueba. (1) y (2). Puesto que X es fragmentable existe, por el Teorema 2.2.59, una σ-partición relativamente abierta de X, digamos,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n,$$

que separa sus puntos. Además, por la Proposición 2.2.4, podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento fuerte de $\mathcal{U}_n$. La métrica ρ, construida en la demostración del Teorema 2.2.59 por medio de $\mathcal{U}$, fragmenta a X y entonces (1) queda demostrado. Veamos que ρ es completa. En efecto, sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión ρ-Cauchy en X. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(i_m)_{m=1}^\infty$ en $\mathbb{N}$ tal que $\rho(x_{i_m},x_j) < 1/m$ para todo $j > i_m$. Como cada familia $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento de X, resulta que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un $U_m \in \mathcal{U}_m$ tal que $x_{i_m} \in U_m$. Observemos que $x_j \in U_m$ para todo $j > i_m$, pues si para algún $j > i_m$ ocurriera que $x_j \notin U_m$, entonces para ese j y por la definición de ρ tendríamos que $\rho(x_{i_m},x_j) \geq 1/m$ lo cual es imposible. Notemos ahora que para cualquier $m \in \mathbb{N}$,

$$x_{i_{m+1}} \in U_m \cap U_{m+1}$$

por lo que $U_{m+1} \subseteq U_m$ y así, $\overline{U}_{m+1} \subseteq U_m$ debido al hecho de que $\mathcal{U}_{m+1}$ es un refinamiento fuerte de $\mathcal{U}_m$. Por la compacidad de X resulta que

$$\bigcap_{m=1}^\infty \overline{U}_m = \bigcap_{m=1}^\infty U_m \neq \varnothing.$$

Sea $x_0 \in \bigcap_{m=1}^\infty U_m$. Entonces $\rho(x_j,x_0) < 1/m$ para todo $j > i_m$ y, en consecuencia, $x_j \xrightarrow{\rho} x_0$. Esto prueba la parte (2).

(3). Sea G un subconjunto τ-abierto no vacío de X y fijemos cualquier $x \in G$. De nuevo, haciendo uso del hecho de que cada $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento de X, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_n$.

Afirmamos que $U_n \subseteq G$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Supongamos lo contrario, es decir, que $U_n \setminus G \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $U_n \supseteq \overline{U}_{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la compacidad de X nos asegura que el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_{n+1} \setminus G$ es no vacío; tomemos algún x_0 en dicho conjunto. Entonces $x \neq x_0$, y como $\mathcal{U}$ separa los puntos de X, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que x_0 no pertenece a U_n. Sin embargo, de la relación $U_n \supseteq \overline{U}_{n+1}$ se concluye que $x_0 \notin \overline{U}_{n+1}$. Esta contradicción establece nuestra afirmación, es decir, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subseteq G$. Observemos que U_n coincide con el conjunto ρ-abierto $\{y \in X : \ \rho(x,y) < 1/n\}$. Esto muestra que G es ρ-abierto y que la ρ-topología es más fuerte que la topología original.

(4) Sea G el subconjunto G_δ-denso encontrado en el Teorema 2.2.55, página 304, para la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (X,\tau) \to (X,\tau)$. Entonces G también es un conjunto $\rho - G_\delta$ y se sigue de (2) y el Teorema de Alexandroff-Hausdorff (Teorema 1.11.3, página 64) que G es completamente metrizable. Finalmente, como la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (G,\tau) \to (G,\rho)$ es continua se deduce de (3) que ella es un homeomorfismo. ■

Comentario Adicional 2.2.17 Podemos usar de nuevo la caracterización de Ribarska para demostrar otro resultado del mismo autor [372]:

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach estrictamente convexo, entonces (B_X, ω) es fragmentable.

Recordemos que X es estrictamente convexo o rotundo si la esfera unitaria S_X de X no contiene segmentos no-triviales.

Consideremos la “cuasi” métrica $\rho : B_X \times B_X \to [0,+\infty)$ definida por

$$\rho(x,y) = \text{máx}\left\{ \|x\|, \|y\| \right\} - \frac{1}{2}\|x+y\|$$

para todo $x,y \in B_X$ (ρ no es una métrica pues la desigualdad triangular no se cumple en general). La estricta convexidad de la norma $\|\cdot\|$ nos garantiza que $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Sean ahora A un subconjunto no vacío de B_X y $\varepsilon > 0$. Si ponemos $\alpha = \sup\{\|x\| : x \in A\}$, entonces existe un $x^* \in B_{X^*}$ tal que la rebanada $U_\varepsilon^1 = \{x \in A : x^*(x) > \alpha - \varepsilon\} \neq \varnothing$. Claramente U_ε^1 es un subconjunto relativamente débilmente abierto de A. Si tomamos $x,y \in U_\varepsilon^1$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} - \frac{1}{2}\|x+y\| \\ &\leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} - x^*\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \\ &< \alpha - (\alpha - \varepsilon) = \varepsilon,\end{aligned}$$

lo cual prueba que ρ “fragmenta” a B_X (las comillas son necesarias, pues ρ no es una métrica). Definiendo inductivamente

$$\mathcal{U}_n = \left\{U_n^\zeta : \zeta \text{ es un ordinal}\right\}$$

donde U_n^ζ es un subconjunto relativamente abierto no vacío de $B_X \setminus \bigcup_{\gamma<\zeta} U_n^\gamma$ de ρ-diámetro menor que $1/n$, no es difícil probar que

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

es una partición σ-relativamente abierta que separa los puntos de B_X. Un llamado al Teorema de Ribarska nos dice que (B_X, ω) es fragmentable. ■

2) De manera similar, *si la norma dual de X^* es estrictamente convexa, entonces el conjunto (B_{X^*}, ω^*) es fragmentable.*

2.2.10. $\|$ ► Fragmentabilidad y compacidad débil

Dado un espacio de Hausdorff compacto K, podemos darnos a la tarea de buscar entre todos los espacios de Banach un subconjunto débilmente compacto que sea homeomorfo a K, si lo encontramos entonces decimos que K es un compacto de Eberlein; es decir, diremos que *K es un **compacto de Eberlein** si él es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto de algún espacio de Banach* $(X,\|\cdot\|)$. Sin embargo, D. Amir y J. Lindenstrauss mostraron en [8] que no hay que hurgar en todos los espacios de Banach ya que basta con husmear en el espacio de Banach $c_0(\Gamma)$ para algún conjunto Γ para encontrar un tal subconjunto débilmente compacto. Más recientemente, H. J. K. Junnila [242] demostró que es suficiente mirar en algún $C(\Omega)$. La clase de los espacios compactos de Eberlein es lo suficientemente rica que incluye a todos los subconjuntos débilmente compactos de cualquier espacio de Banach. Que todo espacio compacto de Eberlein es fragmentable se deduce del siguiente resultado (véase, por ejemplo, [328] Theorem 1.2).

Teorema 2.2.61 (Namioka). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada subconjunto débilmente compacto K de X, la aplicación identidad $\mathrm{Id}:(K,\omega)\to(K,\|\cdot\|)$ posee al menos un punto de continuidad. Consecuentemente, cada subconjunto débilmente compacto de $(X,\|\cdot\|)$, es norma-fragmentado.*

Antes de dar la demostración de este resultado, veamos el siguiente caso particular que se obtiene como consecuencia del Teorema de Categoría de Baire.

Lema 2.2.20. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto débilmente compacto y norma-separable de X, entonces K es norma-fragmentado.*

Prueba. Sea $\varepsilon>0$ y suponga que D es un subconjunto no vacío y débilmente cerrado de K. Siendo D un conjunto norma-separable, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en D tal que $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(B(x_n,\varepsilon/2)\cap D\big)$. Puesto que cada bola cerrada $B(x_n,\varepsilon/2)$, así como D, son ambos conjuntos débilmente cerrados, resulta que la intersección $B(x_n,\varepsilon/2)\cap D$ también es débilmente cerrado. Pero como (D,ω) es un espacio compacto (un conjunto cerrado viviendo en un compacto), en particular, un espacio de Baire, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que existe algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $B(x_n,\varepsilon/2)\cap D$ contiene un conjunto no vacío de la forma $U\cap D$, para algún conjunto débilmente abierto U. Es claro que $\|\cdot\|-\mathrm{diam}(U\cap D)<\varepsilon$ y concluye la prueba. ■

Existen varias maneras de demostrar el Teorema 2.2.61 (véase, por ejemplo, [330], p. 9). La prueba aquí presentada es tomada de [157]. Primero probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.62. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto ω^*-compacto de X^*. Si K es p_D-separable para cada subconjunto acotado y numerable D de X, entonces (K,ω^*) es norma-fragmentable, donde p_D es la pseudo-norma definida, para cada $x^*\in X^*$, por*

$$p_D(x^*)=\sup\big\{\,|x^*(x)|:x\in D\big\}.$$

Prueba. Supongamos que K es p_D-separable para cada subconjunto acotado y numerable D de X, pero que (K,ω^*) no es norma-fragmentable. Entonces existen un subconjunto no vacío (y acotado) B de K y un $\varepsilon>0$ tal que $\|\cdot\|_{X^*}-\mathrm{diam}\,(V)>\varepsilon$ para cualquier subconjunto no vacío relativamente ω^*-abierto V de B. Por el Lema 2.2.19, existe una sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos relativamente ω^*-abiertos de B y una sucesión de vectores $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S_X tal que

(1) $V_{2n}\cup V_{2n+1}\subseteq V_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$,

(2) $f(x_n)-g(x_n)\geq\varepsilon$ siempre que $f\in\overline{V}_{2n}^{\,\omega^*}$ y $g\in\overline{V}_{2n+1}^{\,\omega^*}$.

Sea $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ un subconjunto acotado y numerable de X. Por cada rama $V_1 \supseteq V_{n_1} \supseteq V_{n_2} \supseteq \cdots$, escojamos $f \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{V}_{n_j}^{\omega^*} \subseteq B$. Si f y g provienen de ramas diferentes, entonces existe un n tal que $f \in \overline{V}_{2n}^{\omega^*}$ y $g \in \overline{V}_{2n+1}^{\omega^*}$ o viceversa. En cualquier caso, por (2), $|(f-g)(x_n)| \geq \varepsilon$ y, en consecuencia, se tiene que $p_D(f-g) \geq \varepsilon$. Puesto que existe una cantidad no numerable de tales ramas, resulta que B y, entonces K, no pueden ser p_D-separables. ■

El recíproco del resultado anterior es válido pero no lo necesitamos aquí (véase, por ejemplo, [329], Theorem 3.4).

Prueba del Teorema 2.2.61. Puesto que todo subconjunto débilmente compacto viviendo en un espacio de Banach es un espacio hereditariamente de Baire, será suficiente, gracias al Teorema 2.2.52, demostrar que cualquier subconjunto débilmente compacto K de un espacio de Banach X es norma-fragmentado. Sin perder generalidad, podemos suponer que X es generado por K. Entonces X es un espacio débilmente compactamente generado (WCG) y, gracias a un resultado de Amir-Lindenstrauss ([200], Corollary 281, p. 224), (B_{X^*}, ω^*) es un compacto de Eberlein. Sea $J : X \to X^{**}$ la aplicación canónica, esto es, $Jx(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$. Entonces $J(K)$ es un subconjunto ω^*-compacto de X^{**}, y nuestra tarea es demostrar que $(J(K), \omega^*)$ es norma-fragmentado. Sea D un subconjunto numerable de B_{X^*} y definamos $B = \overline{D}^{\omega^*}$. Entonces (B, ω^*) es un espacio compacto de Eberlein separable y, por consiguiente, metrizable. Se sigue del Teorema 1.4.19 que $\big(C(B, \omega^*), \|\cdot\|_\infty\big)$, el espacio de Banach de las funciones continuas a valores reales definidas sobre (B, ω^*), es norma-separable. Por lo tanto, $J(K)$ es p_D-separable. Un llamado al Teorema 2.2.62 nos asegura que $(J(K), \omega^*)$ es norma-fragmentable lo cual es equivalente a afirmar que (K, ω) es norma-fragmentable. ■

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.61 tenemos que:

Corolario 2.2.22. *Si K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de K donde las topologías débil y de la norma coinciden. En particular, si K es un compacto de Eberlein, entonces K es fragmentable.*

Prueba. Sea G el conjunto de todos los puntos donde $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$ es continua. Puesto que K es norma-fragmentable, el Teorema 2.2.52 nos revela que G es un subconjunto G_δ-denso de (K, ω), de donde se sigue que las topologías débil y de la norma coinciden sobre G pues (G, ω) y $(G, \|\cdot\|)$ son homeomorfos. Lo segundo es consecuencia del hecho de que fragmentabilidad se preserva por homeomorfismo. ■

Comentario Adicional 2.2.18 Si uno mira dentro de X^* con el objeto de establecer un resultado análogo al encontrado en el Teorema 2.2.61 para subconjuntos ω^*-compactos de X^*, nos encontraremos con el hecho de que esto casi nunca ocurre. Sin embargo, en vista del Teorema de Namioka-Phelps, si X es un espacio de Asplund (lo cual es equivalente a que X^* tenga la propiedad de Radon-Nikodym) entonces un análogo al Teorema 2.2.61 existe. Por esta razón, *un espacio de Hausdorff compacto K se dice que es un **compacto de Radon-Nikodym** si existe un espacio de Asplund X tal que K es homeomorfo a un subconjunto ω^*-compacto de X^**. Entre los espacios compactos que son compactos de Radon-Nikodym se encuentran los compactos de Eberlein y los compactos dispersos (véase, por ejemplo, [329] Theorem 1.4).

La noción de espacio compacto de Radon-Nikodym fue introducida por Namioka en [328]. De hecho, uno de los primeros resultados obtenidos en este campo y reformulado después de la aparición del concepto de fragmentabilidad, es el siguiente que ya tuvimos oportunidad de probar en el Teorema 2.2.56.

Teorema de Namioka-Phelps-Stegall. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X^* *tiene la* PRN.

(2) *Cada subconjunto* ω^**-compacto de* X^* *es norma-fragmentado.*

Namioka caracterizó los espacios compactos de Radon-Nikodym de varias maneras.

Teorema de Namioka, [328]. *Sea* (K, τ) *un espacio de Hausdorff compacto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) *K es un compacto de Radon-Nikodym;*

(b) *K es homeomorfo a un subconjunto norma-fragmentado y* ω^**-compacto de algún espacio de Banach dual.*

(c) *K es fragmentado por una métrica inferiormente semicontinua.*

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y F es un subconjunto de X, entonces $\overline{F}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{F}^{\omega}$. Sin embargo, si F es, además, convexo, entonces un resultado de Mazur establece que $\overline{F}^{\|\cdot\|} = \overline{F}^{\omega}$. Un análogo a lo establecido por Mazur para subconjuntos ω^*-compactos de X^*, pero reemplazando la topología débil por la topología débil-$*$, es el siguiente.

Teorema ([329], Theorem 2.3). *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y K un subconjunto* ω^**-compacto de* X^**. Si K es norma-fragmentado, entonces la norma-clausura y la* ω^**-clausura de* $\mathrm{co}(K)$ *coinciden.*

Los espacios compactos fragmentables fueron estudiados en detalles por N. K. Ribarska [374] donde, entre otras cosas, ella demuestra que: *Cualquier espacio compacto de Gul'ko es fragmentado*.

2.2.11. $\|$ ► Fragmentabilidad y cuasi-continuidad

Ya hemos señalado que si (Y, τ) es un espacio topológico de Hausdorff fragmentado por una métrica d, entonces la topología τ_d generada por la métrica d y la topología original τ del espacio Y pueden no ser comparables. Sin embargo, vale el siguiente resultado el cual se puede considerar como una generalización del Teorema 2.2.52.

Lema 2.2.21. *Sean* (X, τ) *un espacio de Baire,* (Y, ν) *un espacio topológico de Hausdorff fragmentado por una métrica d y* $f : (X, \tau) \to (Y, \nu)$ *una función continua. Entonces, el conjunto G de todos los puntos donde la función* $f : (G, \tau) \to (Y, d)$ *es continua, es un* G_δ*-denso de* X.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$G_n = \bigcup \big\{ U \subseteq X : U \ \textit{ es abierto y } \ d - \mathrm{diam}(f(U)) < 1/n \big\}$$

Por definición, cada G_n es abierto en X. Vamos a demostrar que ellos son densos en X. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que $f(V)$ es un subconjunto no vacío de Y y como dicho espacio es fragmentado por la métrica d, entonces existe un subconjunto ν-abierto W de Y tal que

$$f(V) \cap W \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad d - \mathrm{diam}(f(V) \cap W) < 1/n.$$

Sea $y \in f(V) \cap W$ y escojamos $x \in V$ tal que $f(x) = y \in W$. Ya que $f : (X,\tau) \to (Y,\nu)$ es continua, existe un entorno abierto V' de x en X tal que $f(V') \subseteq W$. Entonces $O = V \cap V'$ es un subconjunto abierto no vacío contenido en G_n. Esto prueba que $G_n \cap V \neq \varnothing$ y, en consecuencia, G_n es denso en X.

Sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Siendo X es un espacio de Baire, resulta que G es un G_δ-denso en X y es claro que $f : (G,\tau) \to (Y,d)$ es continua. ■

Si en el resultado anterior prescindimos de la continuidad de la función f, podemos obtener la misma conclusión si le imponemos a f una condición más débil que la de la continuidad. En efecto, un resultado de E. Saab y P. Saab ([391]) establecen que toda función a valores reales definida sobre un espacio de Baire que es fragmentada por la métrica del valor absoluto es continua en un conjunto residual de su dominio. Compare con el Teorema 2.2.58.

Teorema 2.2.63 (Saab-Saab). *Sea (X,τ) un espacio de Baire. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función fragmentada por $|\cdot|$, entonces el conjunto de los puntos donde f es continua es un G_δ-denso de X.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n = \left\{x \in X \ : \ \textit{existe un entorno abierto } U \textit{ de } x \textit{ tal que } \ diam(f(U)) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Es claro que cada G_n es abierto en X. Vamos a demostrar que ellos son densos en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Como f es fragmentada por $|\cdot|$, para este V existe un subconjunto abierto U de X tal que $U \cap V \neq \varnothing$ y $\operatorname{diam}(f(U \cap V)) < 1/n$. De aquí se sigue que cualquier $x \in U \cap V$ pertenece a G_n y, así, $G_n \cap V \neq \varnothing$. Esto prueba la densidad de G_n en X. Puesto que X es un espacio de Baire, se sigue que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso de X. Notemos que G no es otra cosa sino el conjunto de puntos donde f es continua. ■

Otro resultado que aparece en la tesis de Baire el cual había sido probado por V. Volterra es el siguiente:

> **Teorema de Volterra-Baire**. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Para cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cada bola abierta U centrada en (x_0,y_0) y cualquier $\varepsilon > 0$, existe una bola abierta U_1 contenida en U tal que $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$, para cualquier $(x,y) \in U_1$.*

Esta noción, la cual es más débil que la noción de continuidad recibirá, posteriormente, el nombre de cuasi-continuidad [258]. La importancia de estudiar funciones cuasi-continuas es que ellas resultan ser una herramienta muy útil cuando se estudian puntos de continuidad de funciones separadamente continuas cuyos rangos son no-metrizables. Por ejemplo, Piotrowski y Szymańky (ver [356]) prueban que: *Si X y Y son espacios Čech-completos, Z es un espacio completamente regular y $f : X \times Y \to Z$ es separadamente continua, entonces f es cuasi-continua.*

Definición 2.2.20. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios topológicos de Hausdorff. Una función $f : X \to Y$ se dice que es **cuasi-continua** sobre X si para cada conjunto abierto V de Y y cada conjunto abierto U de X tal que $f(U) \cap V \neq \varnothing$, existe un conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ tal que $f(U') \subseteq V$.*

Observe la similitud entre función cuasi-continua y la noción de función multivaluada USCO minimal, la cual, de hecho, es una generalización de la anterior. Un ejemplo simple de una función cuasi-continua que no es continua en ningún punto de su dominio es el siguiente. Tomemos $X = [0,1)$ con la topología usual heredada de $\mathbb{R}$, $Y = [0,1)$ con la topología de Sorgenfrey y $f : X \to Y$ la aplicación identidad. Entonces f es cuasi-continua pero nunca continua. Aunque las funciones cuasi-continuas no están obligadas a poseer puntos de continuidad, resulta que imponiéndole ciertas condiciones adicionales al dominio y al rango de esas funciones se puede obtener abundantes puntos de continuidad. En efecto, W. W. Bledsoe [54], demuestra que:

Teorema de Bledsoe. *Si $f : X \to Y$ es una función cuasi-continua, donde X es un espacio de Baire y Y es un espacio métrico, entonces el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto residual en X.*

Kenderov, Kortezov y Moors ([259]) generalizan el resultado de Bledsoe reemplazando metrizabilidad por fragmentabilidad.

Teorema 2.2.64 (Kenderov-Kortezov-Moors). *Sean (X,τ_X) un espacio de Baire, (Y,τ) un espacio topológico de Hausdorff fragmentado por una métrica d y $f : X \to (Y,\tau)$ una función cuasi-continua. Entonces, el conjunto G de los puntos donde $f : (X,\tau_X) \to (Y,d)$ es continua es un G_δ-denso de X. En particular, si la topología generada por d contiene a la topología original de Y, entonces $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau)$ es continua en cualquier punto de G.*

Prueba. La prueba es muy similar a la del teorema anterior. En efecto, comencemos definiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$G_n = \bigcup \Big\{ U \subseteq X : U \textit{ es abierto y } d\text{-diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \Big\}.$$

Es claro que cada G_n es abierto y nos resta demostrar que ellos son también densos en X. Para alcanzar ese objetivo fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos un subconjunto abierto no vacío cualquiera U de X. Pongamos $A = f(U) \subseteq Y$. Como Y es d-fragmentado, existe un subconjunto abierto no vacío V de Y tal que $A \cap V \neq \varnothing$ y $d - \text{diam}(A \cap V) < 1/n$. Usemos ahora el hecho de que f es cuasi-continua para garantizar la existencia de un conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ tal que $f(U') \subseteq A \cap V = f(U) \cap V$. Esto muestra que $\varnothing \neq U' \subseteq G_n \cap U$, por lo que G_n es denso en X. Siendo X un espacio de Baire se cumple entonces que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso en X con la propiedad de que, en cada uno de sus puntos, f es continua. ■

Observemos que, por un resultado de Ribarska, Teorema 2.2.60 (3), si (Y,τ) es un espacio de Hausdorff compacto fragmentable, entonces existe una métrica completa ρ sobre Y cuya topología contiene a τ. De allí que el siguiente resultado es consecuencia del teorema anterior y del teorema ya mencionado de Ribarska.

Corolario 2.2.23 (Ribarska). *Sean (X,τ_X) un espacio de Baire, (Y,τ) un espacio de Hausdorff compacto fragmentable y $f : X \to (Y,\tau)$ una función cuasi-continua. Entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de G.*

2.2.12. ‖ ► Fragmentabilidad y principios variacionales

Es un hecho ya establecido que toda función inferiormente semicontinua a valores reales definida sobre un espacio de Hausdorff compacto K alcanza su mínimo en algún punto de K. Cuando uno se ve obligado a prescindir de la compacidad en el resultado anterior, entonces la conclusión no es, en general, válida. Los principios variacionales, en términos generales, afirman que cualquier función acotada, inferiormente semicontinua a valores reales definida sobre un espacio métrico completo X, no necesariamente compacto, se puede "perturbar" ligeramente de modo que, para la nueva función obtenida, se pueda asegurar la existencia de un mínimo (mínimo fuerte) sobre X. En el lenguaje de los espacios de Banach, si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice que alcanza su **mínimo fuerte** en el punto $x_0 \in X$ si $f(x_0) = \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$ y $\|x_n - x_0\| \to 0$ siempre que los $x_n \in X$ sean tales que $f(x_n) \to f(x_0)$. La formulación general del *principio o problema de minimización perturbada* es el siguiente:

(**PMP**). *Dado un espacio topológico de Hausdorff completamente regular Y, X una familia de funciones definidas sobre Y y $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función inferiormente semicontinua , acotada por debajo sobre Y y propia (lo cual quiere decir que $Dom(f) = \{y \in Y : f(y) < \infty\} \neq \varnothing$), el problema es investigar qué tipo de conjunto es*

$$X_1 = \{g \in X \,:\, f + g \text{ alcanza su mínimo (o mínimo fuerte) en } Y\}.$$

A X_1 se le conoce como *el conjunto de las buenas perturbaciones de* f y su existencia depende, fundamentalmente, tanto de f así como de una elección adecuada de la familia X. En general, dada una función arbitraria $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ inferiormente semicontinua , acotada por debajo sobre Y y propia, el **problema de minimización**, que denotaremos por (Y, f), consiste en encontrar un $y_0 \in Y$ tal que

$$f(y_0) \;=\; \inf\big\{ f(y) : y \in Y\big\} \;=\; \inf(Y, f).$$

El problema de minimización (Y, f) se llama **bien-formulado** o **Tykhonov bien-formulado** si éste tiene una única solución y_0 y, más aun, $y_n \to y_0$ siempre que $f(y_n) \to \inf(Y, f)$.

El primer objetivo en un principio variacional, como el formulado en (**PMP**), es probar que el conjunto X_1, de las buenas perturbaciones, es no vacío. Si, además, al espacio X se le dota con una métrica completa, entonces lo que se busca es demostrar la existencia de abundantes elementos en X_1, es decir, que X_1 sea residual en X.

Ya hemos mencionado que el primer problema de minimización perturbada fue el archiconocido e importante Teorema de Bishop-Phelps, pero el siguiente fortalecimiento de dicho resultado, dada por Bröndsted y Rockafellar, hace más transparente la conexión con nuestro objetivo en esta sección (una prueba del siguiente resultado podemos verla, por ejemplo, en [124]).

Teorema de Bröndsted-Rockafellar. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, C un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de X y $f : C \to \mathbb{R}$ una función convexa, inferiormente semicontinua y acotada por debajo sobre C. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| < \varepsilon$ y $f + x^*$ alcanza su mínimo en algún punto $x_0 \in C$.*

Posteriormente, bajo el esquema dado al comienzo de esta sección, han sido formulados los principios variacionales de Ekeland [152], Borewein-Preiss [63], Stegall [414], Čoban-Kenderov-Revalski [100], Deville-Godefroy-Zizler [128] y el de Ioffe-Zaslavski [229]. Con la excepción de los dos primeros principios, el conjunto de las buenas perturbaciones para los restantes principios variacionales contiene un subconjunto G_δ-denso en el espacio de todas las perturbaciones. El esquema de las demostraciones de los últimos tres principios han estado basadas sobre una construcción directa de una familia numerable de conjuntos abiertos densos para luego aplicar el Teorema de Categoría de Baire si se asume que el dominio de las funciones es un espacio de Baire. Para evitar repetir dicha construcción en cada caso, Marc Lassonde y Julian P. Revalski en su artículo [280] proponen una nueva técnica: la de la *fragmentabilidad de sucesiones de aplicaciones multivaluadas*, donde se construye un esquema común que sirve para demostrar dichos principios. Veamos cómo lo hicieron.

Comencemos fijando un espacio topológico de Hausdorff (X, τ) y un espacio métrico (Y, d). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ una función multivaluada. Diremos que la sucesión de funciones multivaluadas $(F_n)_{n=1}^\infty$ es **decreciente** si

$$F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x), \quad \text{para cualquier } x \in X \;\text{ y }\; \text{todo } n \geq 1.$$

Dada una sucesión decreciente de funciones multivaluadas $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, definimos la **función límite multivaluada** $F : X \to 2^Y$ por

$$F(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Notemos que la aplicación límite F puede tomar valores vacíos.

La siguiente definición, que difiere de la Definición 2.2.14, página 309, aun en el caso de considerar una única función, nos será de gran utilidad en esta sección.

Definición 2.2.21. *Sea $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones multivaluadas a valores no vacío de X en Y. Diremos que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es **fragmentada por abiertos por la métrica** d si, para cualquier conjunto abierto no vacío U en X y cualquier $\varepsilon > 0$, existen un entero $n' \geq 1$ y un conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ tal que $d\text{-diam}(F_{n'}(U')) < \varepsilon$.*

En este caso también se dice que la métrica d **fragmenta por abiertos a la sucesión** $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ o que la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es **d-fragmentada por abiertos**. Es claro que si d fragmenta por abiertos a la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, también fragmenta por abiertos a la aplicación límite F.

Ya hemos probado, Teorema 2.2.55, página 304, que si X es un espacio de Baire y Y es un espacio fragmentable con métrica fragmentadora d, entonces toda aplicación multivaluada F fragmentada por la métrica d, es univaluada sobre un subconjunto G_δ-denso de X. El próximo resultado generaliza este hecho para sucesiones decrecientes de funciones multivaluadas fragmentadas por abiertos.

Teorema 2.2.65 (Lassonde-Revalski). *Sean (X,τ) un espacio de Baire y (Y,d) un espacio métrico. Suponga que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de funciones multivaluadas de X en Y. Si d fragmenta por abiertos a $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que, para cualquier $x \in G$, la aplicación límite F satisface una, y sólo una, de las dos condiciones siguientes:*

(a) *$F(x) = \varnothing$, o bien*

(b) *$F(x)$ es un conjunto formado por un único punto, digamos z, en cuyo caso, para cada $\varepsilon > 0$, existen un conjunto abierto U conteniendo a x y un entero $n' \geq 1$ tal que*

$$F_{n'}(U) \subseteq U_Y(z,\varepsilon) = \{y \in Y : d(z,y) < \varepsilon\}.$$

Si la métrica d es completa y los $F_n(x)$ son subconjuntos cerrados de Y para todo $x \in X$ y cualquier $n \geq 1$, entonces (b) se satisface para todo $x \in G$.

Prueba. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$G_k = \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ es abierto no vacío y existe } n \geq 1 \text{ tal que } d\text{-diam}(F_n(U)) < 1/k\}.$$

Cada G_k es abierto en X. Mostraremos que cada uno de ellos es denso en X. En efecto, fijemos un $k \geq 1$ y sea U cualquier subconjunto abierto no vacío de X. Por la fragmentabilidad (por abiertos) de la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, existen $n' \geq 1$ y un conjunto abierto no vacío $U' \subseteq U$ tal que $d\text{-diam}(F_{n'}(U')) < 1/k$. Es claro que $U' \subseteq G_k$ y entonces $U \cap G_k \neq \varnothing$, quedando así establecido que G_k es denso en X.

Sea

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Puesto que X es un espacio de Baire, G es un G_δ-denso en X. Tomemos cualquier $x \in G$. Entonces $x \in G_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De la definición de G_k se deduce la existencia de una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ en X y de una sucesión estricta creciente de enteros $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que, para cualquier $k \geq 1$, se tiene que $x \in U_k$ y d-diam$(F_{n_k}(U_k)) < 1/k$. Es claro, debido al decrecimiento de la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ y al Teorema de Encaje de Cantor, que el conjunto $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}(U_k)$, o es vacío, o consta de un único punto y que, además,

$$F(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}(x) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}(U_k).$$

Si ahora suponemos que $F(x) \neq \varnothing$, entonces existe un único $z \in Y$ tal que

$$\{z\} = F(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}(U_k). \tag{2.2.6}$$

Notemos que si la métrica d es completa y $F_n(x)$ es cerrado en Y para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$, entonces el Teorema de Encaje de Cantor nos garantiza que (2.2.6) siempre se cumple para todo $x \in G$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos un $k \geq 1$ tal que $1/k < \varepsilon$ y pongamos $U = U_k$ y $n' = n_k$. Puesto que d-diam$(F_{n_k}(U_k)) < 1/k$, se concluye de (2.2.6) que $F_{n'}(U) \subseteq U_Y(z, \varepsilon)$. Esto termina la prueba. ■

Comentario Adicional 2.2.19 Es necesario hacer un breve comentario sobre el resultado anterior. La primero que debemos observar es que bajo las condiciones del Teorema 2.2.65, la aplicación F es no sólo univaluada sino que, además, ella es superiormente semicontinua con respecto a la métrica d en cualquier punto $x \in G$ donde $F(x) \neq \varnothing$. En particular, si la métrica d es completa y los valores de $F_n(x)$ son cerrados para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in X$, entonces F es univaluada y superiormente semicontinua en cualquier punto $x \in G$.

La segunda observación, la que resulta ser nueva e interesante en el resultado anterior, es la propiedad de continuidad establecida en (b) que, de hecho, es más fuerte que la semicontinuidad superior de la aplicación límite. Más aun, y este es otro rasgo distintivo de la contribución de ese teorema, es que se obtienen abundantes puntos (un G_δ-denso) donde la aplicación límite es a un sólo valor sin suponer que dicha aplicación tenga valores no vacíos. Este hecho es importante para aplicaciones donde la correspondiente función solución (del problema planteado) puede tener valores vacíos.

Para poder hacer uso del Teorema 2.2.65 tenemos que situarnos en un contexto apropiado. Sean entonces (Y, τ) un espacio topológico completamente regular, Y_1 un subespacio de Y completamente metrizable con métrica completa d y $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones continuas a valores reales definidas sobre Y las cuales están acotadas sobre Y_1 y satisfacen la siguiente condición:

(DGZ_0) *Existe* $M > 0$ *tal que, para cualquier* $g \in X$, $\sup\{|g(y)| : y \in Y_1\} \leq M\|g\|_X$.

Observe que las funciones en X no requieren, necesariamente, estar acotadas sobre Y. El espacio X servirá como un espacio de funciones perturbadas según el esquema formulado por el problema de minimización perturbada (**PMP**), pero trabajando con Y_1 en lugar de Y; es decir, considerando una función propia, inferiormente semicontinua $f : Y_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y acotada por debajo sobre Y_1, y estudiar el conjunto

$$X_1 = \{g \in X : f + g \textit{ alcanza su mínimo (o mínimo fuerte) sobre } Y_1\}.$$

Comencemos por definir la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de aplicaciones multivaluadas del modo siguiente: para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $F_n : X \to 2^{Y_1}$ viene dada por

$$F_n(g) = \left\{x \in Y_1 : f(x) + g(x) \leq \inf_{Y_1}(f+g) + 1/n\right\} \tag{2.2.7}$$

para toda $g \in X$. Observemos que la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y que todos los conjuntos $F_n(g)$ son no vacíos y cerrados en Y_1. Además, la función límite $F : X \to 2^{Y_1}$, definida por

$$F(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{ x \in Y_1 \, : \, f(x) + g(x) = \inf_{Y_1}(f+g) \Big\}$$

constituye, para cada $g \in X$, el conjunto de los puntos donde $f+g$ alcanza su mínimo en Y_1.

La siguiente notación nos será de utilidad. Dado $A \subseteq Y$, $h : Y \to \mathbb{R} \setminus \{\varnothing\}$ una función propia la cual está acotada por debajo sobre el conjunto A y $\alpha > 0$, denotaremos por $S(A,h,\alpha)$ el conjunto

$$S(A,h,\alpha) := \Big\{ y \in A \, : \, h(y) \le (\inf_A h) + \alpha \Big\}.$$

Con esta notación tenemos que $F_n(g) = S(Y_1, f+g, 1/n)$. Hacer viable una aplicación del Teorema 2.2.65 requiere encontrar condiciones que garanticen que la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ así definida sea fragmentada por abiertos por la métrica d. El siguiente resultado proporciona tales condiciones.

Lema 2.2.22 (Lassonde-Revalski). *Sean (Y,τ) un espacio topológico completamente regular, $Y_1 \subseteq Y$ un subespacio completamente metrizable con métrica completa d y sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones sobre Y satisfaciendo* (DGZ$_0$)*. Supongamos que $f : Y_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo sobre Y_1. Sea $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión decreciente de funciones multivaluadas construidas por (2.2.7). Si una de las siguientes dos condiciones se cumplen:*

(LR$_1$) *Para cada función propia $h : Y_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ inferiormente semicontinua y acotada por debajo en Y_1 y cada $\varepsilon > 0$, existen $g \in X$ y un $\alpha > 0$ tal que*

$$\|g\|_X \le \varepsilon \qquad y \qquad d - \mathrm{diam}\big(S(Y_1, h+g, \alpha)\big) < \varepsilon.$$

(LR$_2$) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\beta > 0$ tal que para cada $y_1 \in Y_1$, existe $g \in X$ con $\|g\|_X = 1$ y*

$$g(y_1) + \beta \le \inf\big\{ g(y) \, : \, y \in Y_1 \setminus U_{Y_1}(y_1, \varepsilon) \big\}.$$

Entonces la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es fragmentada por abiertos por la métrica d.

Prueba. Primero demostraremos que (LR$_1$) implica que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es fragmentada por abiertos por la métrica d. Sea U un subconjunto abierto no-vacío de X y sea $\varepsilon > 0$. Tome cualquier función $g_0 \in U$ y un $\rho > 0$ tal que $U_X(g_0, \rho) \subseteq U$. Puesto que $f + g_0$ es una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo en Y_1, la condición (LR$_1$), nos garantiza la existencia de una función $g \in X$ tal que $\|g\|_X \le \varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, \rho/2\}$ y de un $\alpha > 0$ para el cual se cumple que $d - \mathrm{diam}\big(S(Y_1, f+g_0+g, \alpha)\big) < \varepsilon_1$. Por otro lado, usando (DGZ$_0$) es fácil establecer la existencia de $\delta < \rho/2$ tal que

$$S(Y_1, f + g', \alpha/2) \subseteq S(Y_1, f + g_0 + g, \alpha), \quad \text{para cualquier } g' \in U_X(g_0 + g, \delta).$$

De esto se sigue que $d - \mathrm{diam}(F_{n'}(U')) < \varepsilon$ donde $U' = U_X(g_0+g, \delta) \subseteq U$ y n' se elige de modo que $1/n' < \alpha/2$, con lo cual concluye la prueba de que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es fragmentada por abiertos por la métrica d.

Lo que vamos a demostrar ahora es que (LR$_2$) implica (LR$_1$). Sea $h : Y_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función como en (LR$_1$) y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos β como en (LR$_2$), pongamos $\alpha := \varepsilon\beta/2$ y escojamos $y_1 \in Y_1$ tal que

$$h(y_1) < (\inf_{Y_1} h) + \alpha.$$

Sea ahora $g \in X$ la función proporcionada por (LR_2) para el punto y_1. Definamos $g_\varepsilon := \varepsilon \cdot g$ y seleccione cualquier $y \in S(Y_1, h+g_\varepsilon, \alpha)$. Tenemos entonces que

$$(h + g_\varepsilon)(y) \leq (h + g_\varepsilon)(y_1) + \alpha < \inf_{Y_1} h + g_\varepsilon(y_1) + 2\alpha \leq h(y) + g_\varepsilon(y_1) + 2\alpha,$$

de donde se deduce que $g(y) < g(y_1) + \beta$ y, en consecuencia, $y \in U_{Y_1}(y_1, \varepsilon)$ gracias a (LR_2). Esto prueba que el conjunto $S(Y_1, h+g_\varepsilon, \alpha)$ está contenido en $U_{Y_1}(y_1, \varepsilon)$ y, por lo tanto, su diámetro es menor que 2ε, mientras que $g_\varepsilon \in X$ con $\| g_\varepsilon \| = \varepsilon$. Esto demuestra que (LR_1) se cumple y termina la prueba. ■

Como una consecuencia de los resultados anteriores, tenemos el siguiente principio variacional de Lassonde y Revalski.

Teorema 2.2.66 (Principio Variacional de Lassonde-Revalski). *Sean Y un espacio topológico completamente regular, $Y_1 \subseteq Y$ un subespacio completamente metrizable con métrica completa d y sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones satisfaciendo* (DGZ_0) *y* (LR_2) *(o, de modo más general,* (DGZ_0) *y* (LR_1)*). Supongamos que $f : Y_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo sobre Y_1. Entonces el conjunto*

$$X_1 = \{g \in X : f + g \text{ alcanza su mínimo (o mínimo fuerte) en } Y_1\}$$

es residual en X.

Prueba. Ya hemos visto que la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, construida por medio de (2.2.7), es decreciente y que los conjuntos $F_n(g)$ son no-vacíos y cerrados en Y_1. Más aun, por el Lema 2.2.22, dicha sucesión es fragmentada por abiertos por la métrica d y como dicha métrica es completa, podemos invocar el Teorema 2.2.65, para obtener un subconjunto G_δ-denso G de X tal que, para cada $g \in G$, se cumpla (b) para la aplicación límite. La propiedad (b) para g evidentemente implica que el problema $(Y_1, f+g)$ está bien-formulado. ■

El principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler ([128], Lemma 2.5, p.10) es ahora una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.66.

Teorema 2.2.67 (Principio Variacional de Deville-Godefroy-Zizler). *Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones continuas acotadas a valores reales definidas sobre Y satisfaciendo* (DGZ_0) *con $Y_1 = Y$ y las siguientes propiedades adicionales:*

(DGZ_1) *Para cada $g \in X$ y cada $z \in Y$, la función $g_z : Y \to \mathbb{R}$ definida por $g_z(y) = g(y+z)$ para todo $y \in Y$, está en X y $\| g_z \|_X = \| g \|_X$.*

(DGZ_2) *Para cada $g \in X$ y cada $a \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto g(ax)$ está en X.*

(DGZ_3) *Existe una función abollada en X; es decir, una función $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ con soporte no vacío y acotado de Y.*

Si $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo sobre Y, entonces el conjunto

$$X_1 = \left\{g \in X : f + g \text{ alcanza un mínimo fuerte en } Y\right\}$$

es residual en X.

Prueba. Para poder hacer uso del Teorema 2.2.66 con $Y_1 = Y$, todo lo que tenemos que hacer es demostrar que las propiedades (DGZ_1), (DGZ_2) y (DGZ_3) implican (LR_2). En primer lugar notemos que gracias a las propiedades (DGZ_1) y (DGZ_2) podemos suponer que el soporte de la función abollada φ dada por (DGZ_3) está contenido en la bola abierta unitaria $U_Y(0,1)$ de Y y que $\varphi(0) = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideremos la función $h : Y \to \mathbb{R}$ definida por $h(y) = \varphi(y/\varepsilon)$ para todo $y \in Y$. Entonces $h \in X$ y su soporte está contenido en $U_Y(0,\varepsilon)$. Pongamos $\beta := 1/\|h\|_X$. Sea ahora $y_1 \in Y$ un punto arbitrario. Entonces, la función $g \in X$ definida por $g(y) = -\beta h(y - y_1)$ para todo $y \in Y$ satisface

$$\|g\|_X = \beta\|h\|_X = 1, \qquad g(y_1) + \beta = 0 \qquad \text{y} \qquad g(y) = 0 \ \text{ para todo } \ y \notin U_Y(y_1,\varepsilon).$$

Esto nos dice que (LR_2) se cumple y termina la prueba. ■

Es importante destacar que entre los espacios de funciones continuas, cuando las condiciones (DGZ_0), (DGZ_1), (DGZ_2) y (DGZ_3) se satisfacen, están: $C(Y)$, el espacio de Banach de todas las funciones continuas y acotadas sobre Y, el espacio de todas las funciones acotadas Lipschitz en Y y la familia de todas las funciones Lipschitzianas C^1-suaves definidas en un espacio de Banach admitiendo una función abollada Lipschitziana C^1-suave con la norma correspondiente. Este hecho permite que el principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler tengas varias aplicaciones, entre ellas, la posibilidad de derivar el principio variacional de Ekeland (en su forma débil) y probar la existencia de soluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (véase, por ejemplo, [128]).

Teorema 2.2.68 (Principio Variacional de Ekeland). *Sea* $(Y,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y suponga que* $f : Y \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *es una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe un* $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *tal que, para todo* $x \in Y$

$$f(x) \ \geq \ f(x_0) \ - \ \varepsilon\|x - x_0\| \qquad\qquad y \qquad\qquad f(x_0) \ \leq \ \inf_Y f \ + \ \varepsilon.$$

Prueba. El espacio de Banach $X = \mathrm{Lip}(Y)$ de todas las aplicaciones Lipschitzianas $g : Y \to \mathbb{R}$ equipado con la norma

$$\|g\|_X \ = \ \sup\big\{|g(x)| : x \in Y\big\} \ + \ \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{\|x - y\|} : x \neq y\right\},$$

satisface las condiciones (DGZ_0), (DGZ_1), (DGZ_2) y (DGZ_3) del Teorema 2.2.67. De allí que existen $g \in X$ y $x_0 \in Y$ tal que $\|g\|_X \leq \varepsilon/2$ y $f + g$ alcanza su mínimo en x_0. Por consiguiente, para cualquier $x \in Y$ se tiene que

$$f(x) \ \geq \ f(x_0) \ + \ g(x_0) \ - \ g(x) \ \geq \ f(x_0) \ - \ \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Más aun, puesto que $\|g\|_X \leq \varepsilon/2$, entonces

$$f(x) \ \geq \ f(x_0) \ + \ g(x_0) \ - \ g(x) \ \geq \ f(x_0) \ - \ \varepsilon,$$

y así,

$$f(x_0) \ \leq \ \inf_Y f \ + \ \varepsilon.$$

■

Una parte del principio variacional de Čoban-Kenderov-Revalski, se puede demostrar haciendo uso del resultado de Lassonde-Revalski, Teorema 2.2.66.

Teorema 2.2.69 (Principio Variacional de Čoban-Kenderov-Revalski). *Sean* (Y, τ_Y) *un espacio topológico de Hausdorff completamente regular conteniendo un subespacio denso completamente metrizable* Y_1 *y* $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función propia, inferiormente semicontinua , acotada por debajo sobre* Y_1 *y continua en cualquier punto de* $\mathrm{Dom}(f)$*. Entonces el conjunto*

$$X_1 = \big\{ g \in C(Y) : (Y, f+g) \text{ está bien-formulado} \big\}$$

contiene un subconjunto G_δ*-denso en el espacio* $(C(Y), \|\cdot\|_\infty)$*.*

Prueba. Observemos en primer lugar que las hipótesis sobre f y Y_1 nos dicen que el dominio de f, $\mathrm{Dom}(f)$, es abierto en Y y, más aun, $\mathrm{ínf}_Y(f+g) = \mathrm{ínf}_{Y_1}(f+g)$ para cualquier $g \in C(Y)$. En particular, f también es propia sobre Y_1. El espacio $(C(Y), \|\cdot\|_\infty)$ satisface (DGZ_0), y puesto que Y es completamente regular, la propiedad (LR_2) también se satisface. Así, por el Teorema 2.2.66, existe un subconjunto G_δ-denso G del espacio $(C(Y), \|\cdot\|_\infty)$ tal que para cada $g \in G$, el problema $(Y_1, f+g)$ está bien-formulado. Lo que nos queda por demostrar es que para todo $g \in G$, el problema de minimización $(Y, f+g)$ también está bien-formulado. En efecto, tomemos $g \in G$ y sea $y_0 \in Y_1$ el único mínimo del problema $(Y_1, f+g)$. Puesto que cualquier red minimizante para $(Y_1, f+g)$ también converge a y_0 y ya que Y_1 es denso en X, resulta que el problema de minimización $(Y, f+g)$ no puede tener otra solución que y_0. De allí que

$$y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n,$$

donde $O_n = \{y \in Y : f(y) + g(y) < \mathrm{ínf}_Y(f+g) + 1/n\}$. Veamos ahora a probar que la familia de conjuntos abiertos $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base local para y_0 en Y. De esto se seguirá el problema bien-propuesto $(Y, f+g)$.

Tomemos un entorno abierto V de y_0 en Y. Puesto que Y es completamente regular, existe un conjunto abierto W en Y con $y_0 \in W$ tal que $\overline{W} \subseteq V$. Afirmamos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $O_{n_0} \subseteq \overline{W} \subseteq V$. De no ser así, para cualquier $n \geq 1$, $O_n \setminus \overline{W} \neq \varnothing$ y como este último conjunto es abierto en Y y Y_1 es denso en Y, obtenemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \in (O_n \setminus \overline{W}) \cap Y_1$, $n \geq 1$. Es claro que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión minimizante para $(Y_1, f+g)$ la cual no converge a y_0. Esta contradicción completa la prueba. ■

Finalizamos esta sección mencionando el principio variacional de Stegall e invitando al lector a consultar el reciente artículo de Lassonde y Revalski [280] para una demostración de éste y los otros principios variacionales anteriormente mencionados que no han sido demostrados con la técnica ya expuesta.

Teorema 2.2.70 (Principio Variacional de Stegall). *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* C *un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de* X*. Suponga que* C *tiene la Propiedad de Radon-Nikodym y sea* $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función propia, inferiormente semicontinua y acotada por debajo sobre* C*. Entonces, el conjunto*

$$X_1 = \big\{ x^* \in X^* : (C, f+x^*) \text{ está bien-formulado} \big\}$$

es residual en X^**.*

Observemos que cuando el problema de maximización (C, x^*), para algún $x^* \in X^*$, está bien-formulado, entonces el único máximo en C se llama, como ya sabemos, un punto fuertemente expuesto (por x^*) y el funcional x^* un funcional fuertemente expuesto para C. Una consecuencia inmediata del Principio Variacional de Stegall (con $f \equiv 0$) es que el conjunto de todos los funcionales fuertemente expuesto para un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado C de X con la PRN es residual en X^*, un resultado que ya habíamos probado en el Teorema 2.2.30, página 271. Otra consecuencia importante que se deduce del Principio Variacional de Stegall es que cualquier subconjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado C de X con la PRN es la cápsula convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos (Teorema 2.2.28, página 268).

Comentario Adicional 2.2.20 Sea Y un espacio topológico de Hausdorff y denotemos por $\mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$ el conjunto formado por todas las funciones $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que son semicontinuas inferiormente, propias y acotadas por debajo sobre Y.

La utilidad de los principios variacionales ha sido demostrado en muchas direcciones, desde la amplia e indiscutible gama de aplicaciones del principio variacional de Ekeland en optimización, análisis variacional y no lineal, teoría de puntos críticos, ecuaciones diferenciales parciales, etc., hasta los más recientes como son los de Stegall, Borwein-Preiss y Deville-Godefroy-Zizler cuyo campo de aplicación incluye el análisis no suave, la geometría de los espacios de Banach, existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales, diferenciabilidad de funciones convexas, juegos topológicos, etc.

Mientras que en todos los principios anteriores el objetivo principal era, dada la función f en $\mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$, encontrar un espacio de funciones que contuviera en su seno un subconjunto de buenas perturbaciones, existe, sin embargo, otro enfoque que pudiéramos pensar como el opuesto al esquema dado anteriormente. En un artículo publicado en el año 2004, J. Borwein, L. Cheng, M. Fabian y J. P. Revalski [62] consideran el siguiente problema:

Dada la familia $\mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$, el objetivo ahora es encontrar una única función perturbación φ para esa familia; es decir, tal que $f + \varphi$ alcance su mínimo sobre Y para cualquier $f \in \mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$.

La libertad de perturbar, simultáneamente, por una función fija una familia arbitraria suficientemente grande de funciones, puede ser de mucha utilidad sobre los principios antes mencionados. Esta idea ya había sido usada por Tykhonov (ver [62]) para el caso de funciones convexas en el contexto de un espacio de Hilbert usando como φ la función cuadrado de la norma.

La prueba de la existencia de una única función φ haciendo que cada perturbación $f + \varphi$ alcance su mínimo para cualquier función inferiormente semicontinua f, no es tan difícil. Por ejemplo, si Y es un espacio de Banach y Y_1 es cualquier subespacio de dimensión finita de Y (incluyendo $Y_1 = \{0\}$), entonces basta con definir φ por

$$\varphi(y) = \begin{cases} \|y\|^2 & \text{si } y \in Y_1, \\ +\infty & \text{si } y \in Y \setminus Y_1. \end{cases}$$

Lo que no es inmediato, y merece ser estudiado, es el hecho de que imponiéndole a la función φ unas pocas exigencias se obtienen condiciones necesarias y suficientes para dicho principio variacional. En efecto, en [62] Borwein, Cheng, Fabian y Revalski demuestran los siguientes resultados:

Teorema 2.2.71 (Borwein-Cheng-Fabian-Revalski, [62], Theorem 2.1). *Sea Y un espacio topológico de Hausdorff y supongamos que existe una función propia, inferiormente semicontinua $\varphi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cuyos conjuntos de nivel $S(\varphi, r) = \{y \in Y : \varphi(y) \le r\}$ son todos compactos. Entonces, para cualquier función $f \in \mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$, la función $f + \varphi$ alcanza su mínimo sobre Y. En particular, si el dominio de φ, $\mathrm{Dom}(\varphi)$, es relativamente compacto, entonces la conclusión es la misma para cualquier función propia, inferiormente semicontinua f (no necesariamente acotada por debajo).*

Teorema 2.2.72 (Borwein-Cheng-Fabian-Revalski, [62], Theorem 2.4). *Sea $\varphi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia sobre un espacio métrico (Y, d) con la siguiente propiedad: para cualquier $f \in C(X)$, la función $f + \varphi$ alcanza su mínimo. Entonces $\varphi \in \mathcal{F}_{lsc}^{pb}(Y)$ y todos sus conjuntos de nivel son compactos.*

Finalizamos esta sección con un resultado demostrado por Bouras, Ferrahi y Saidou [66] que emula el principio variacional de Stegall.

Teorema 2.2.73 (Stegall-Bouras-Ferrahi-Saidou). *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si, y sólo si, para cada función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, inferiormente semicontinua y acotada por debajo en X, existe $x^* \in X^*$ tal que $f_{x^*} := f - x^*$ alcanza un mínimo fuerte.*

2.2.13. ‖ ► El juego de Banach-Mazur y espacios de Baire

La teoría de juegos infinitos entre dos personas es fascinante. Ha sido usada para caracterizar una amplia variedad de espacios topológicos y, además, nos provee de unas técnicas simples y sencillas para demostrar, en algunos casos, resultados profundos y difíciles en varios campos de las matemáticas (véase, por ejemplo, [422, 371, 367, 302, 263, 261, 127], etc.). En esta sección abordaremos fundamentalmente el juego de Banach-Mazur y algunas de sus variantes.

El juego de Banach-Mazur fue inventado por Stanisław Mazur para ilustrar la idea de categoría. El juego hace su debut en el famoso Scottish Book. Este libro de notas fue creado en el período comprendido entre 1935 al 1941 en el pueblo de Lwów (este es el nombre Polaco de la ciudad pues por mucho tiempo perteneció a Polonia, en la actualidad está anexada a Ucrania con el nombre de Lviv y, durante la era Soviética, en el período comprendido entre Septiembre de 1939 a Junio de 1941, el nombre ruso Lvov fue ampliamente usado). Un grupo de matemáticos que trabajaban en la Universidad de Lwów se reunían en uno de los "caffés", el Scottish Caffé House, cercano a la Universidad para discutir informalmente de matemáticas. Siguiendo una idea de Stefan Banach, algunos afirman que en realidad fue de su esposa, se decidió comprar un cuaderno de notas para escribir los problemas propuestos que se discutían en el café-bar, así como sus soluciones en caso de existir. El camarero de dicho café era el encargado de resguardar dicho cuaderno. Muchos de esos problemas iban acompañados de un premio el cual podía consistir de una botella de cerveza, de vino, o de un ganso (vivo). Entre los creadores del Scottish Book se encuentran los matemáticos polacos: Stefan Banach, Stanisław Mazur, Stanisław Ulam y Hugo Steinhauss. El problema No. 43 del Scottish Book, (véase, Mauldin [302]) propuesto por S. Mazur, era el siguiente:

> **Juego de Mazur**. *Se fija un subconjunto no vacío E de $\mathbb{R}$ y se considera la familia $\mathfrak{F}$ formada por todos los intervalos cerrados, acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$. Ahora se eligen dos jugadores* **A** *y* **B** *que jugarán el juego de Mazur según las siguientes reglas: el jugador* **A** *es quien siempre comienza el juego seleccionando, en su primer movimiento, un elemento $I_1 \in \mathfrak{F}$ y seguidamente el jugador* **B** *selecciona otro elemento $I_2 \in \mathfrak{F}$ incluido en I_1. En su siguiente movimiento un* **A** *elige $I_3 \in \mathfrak{F}$ incluido en I_2 y* **B** *responde de inmediato escogiendo un $I_4 \in \mathfrak{F}$ incluido en I_3 y se continua, ad infinitum, con este modo alternativo de selección. Por consiguiente, ambos jugadores generan una sucesión decreciente de intervalos cerrados y acotados no vacíos $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, donde el jugador* **A** *selecciona los intervalos con índices impares y el jugador* **B** *los de índices pares. Observe que, gracias al Teorema de Encaje de Cantor, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ es no vacío. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contiene al menos un punto en común con E, entonces al jugador* **A** *se le declara el ganador de dicha partida, en caso contrario, se declara como ganador al jugador* **B**.

La pregunta importante es la siguiente: *¿Puede uno de los jugadores, escogiendo sus intervalos adecuadamente, asegurar que él o ella siempre ganará cualquier partida que se juegue independientemente de cómo juegue su oponente?, es decir, ¿puede uno de los jugadores poseer una "estrategia" que le permita siempre ganar?* La respuesta a esa interrogante depende, fundamentalmente, del conocimiento que tengan ambos jugadores del conjunto E. Por ejemplo:

(a) Si el conjunto *E contiene un intervalo*, digamos J, entonces el jugador **A** ganará cualquier partida que se juegue, sin importar cómo juegue su oponente, con sólo elegir, en su primer movimiento, un subintervalo cerrado $I_1 \subseteq J$.

(b) Un caso menos trivial y donde el jugador **A** también posee una estrategia ganadora, es considerar el conjunto $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los *números irracionales*. En efecto, en primer lugar hagamos una lista de todos los números racionales de $\mathbb{R}$, digamos, $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$. La estrategia que deberá adoptar el jugador **A** para ganar cualquiera de las partidas es la siguiente: en su primer turno el jugador **A** elige un intervalo cerrado y acotado I_1 que no contenga el punto q_1. Es el turno del jugador **B** y éste elige un intervalo cerrado y acotado I_2 incluido en I_1. Veamos que ocurre con q_2: si $q_2 \notin I_2$, entonces la respuesta del jugador **A** consistirá en escoger cualquier intervalo cerrado y acotado I_3 incluido en I_2. Pero si $q_2 \in I_2$, entonces siempre se puede determinar un intervalo cerrado y acotado contenido en I_2 que no contiene a q_2. El jugador **A** elige un tal intervalo. Inductivamente, suponga que los intervalos $I_1, I_2, I_3 \ldots, I_{2n}$ han sido escogidos de acuerdo a las reglas del juego y que ahora le corresponde al jugador **A** hacer su elección. Puesto que el conjunto $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ es finito, existe un intervalo cerrado $I_{2n+1} \subseteq I_{2n}$ tal que $I_{2n+1} \cap \{q_1, \ldots, q_n\} = \varnothing$. El jugador **A** elige un tal intervalo I_{2n+1}. Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n \notin I_{2n+1}$, y que el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, el cual es no vacío, no contiene ningún número racional. De esto se sigue que $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap E \neq \varnothing$, lo cual significa que el jugador **A** si sigue dicha estrategia también, en este caso, ganará el juego.

(c) Por otro lado, si el conjunto *E es de primera categoría en* $\mathbb{R}$, entonces existe una simple estrategia para que el jugador **B** siempre gane, independientemente de cómo juegue su oponente. En efecto, si E es de primera categoría podemos escribirlo en la forma $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, donde cada E_n es cerrado y nunca-denso. Suponga que el primer movimiento del jugador **A** es el intervalo $I_1 = [a, b]$. Como E_1 tiene interior vacío, el intervalo (a, b) no puede estar enteramente contenido en E_1, de modo que el conjunto $(a, b) \setminus E_1$ es un abierto no vacío. La primera elección del jugador **B** es tomar cualquier intervalo cerrado $I_2 \subseteq (a, b) \setminus E_1 \subseteq I_1 \setminus E_1$. Observe que $I_2 \cap E_1 = \varnothing$. Por consiguiente, si el jugador **B** elige, para cada $n \in \mathbb{N}$, un intervalo cerrado $I_{2n} \subseteq I_{2n-1} \setminus E_n$, donde I_{2n-1} es el intervalo escogido, en el paso anterior, por el jugador **A**, entonces independientemente de cómo el jugador **A** juegue, **B** siempre ganará pues $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, que es un conjunto no vacío, no contiene ningún punto en común con E. Es importante destacar que si $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es cualquier conjunto numerable en $\mathbb{R}$, entones E es de primera categoría en $\mathbb{R}$ y, por lo anterior, existe un punto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq I_1$ tal que $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba, en particular, que:

Teorema de Cantor. *Ninguna sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ puede cubrir la totalidad de los puntos de un intervalo cerrado y acotado I, es decir, cualquier intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es no numerable.*

Mazur conjeturó que *sólamente* cuando el conjunto E es de primera categoría en $\mathbb{R}$, puede el jugador **B** estar seguro que ganará cualquiera de las partidas del juego que se juegue. Como premio, Mazur ofreció a quien resolviera el problema, una botella de vino. La respuesta, afirmativa, fue dada el 4 de Agosto de 1935 por Stefan Banach pero nunca apareció publicada. Posteriormente, el juego tomó los nombres de Banach-Mazur y parece ser el primer juego posicional infinito con información perfecta (ambos jugadores están en conocimiento de los movimientos efectuados en todos los pasos anteriores) estudiado por los matemáticos.

En 1956, en la revista *Bull. Acad. Polon. Sci.* v.4, pág. 485-488, J. Mycielski, S. Świerczkowski and A. Zieba publicaron por primera vez, en la forma de un teorema, el juego de Banach-Mazur anunciando que poseían una demostración de dicho teorema pero que en una próxima publicación la darían a conocer. Nunca apareció tal publicación. Finalmente, J. Oxtoby en 1957 [346] presentó una demostración del Teorema del juego de Banach-Mazur pero en un contexto más general.

Las reglas en el juego de Banach-Mazur.

Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y τ_* la familia de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X. El siguiente juego es un caso particular de un juego propuesto de Oxtoby (véase el Juego de Banach-Mazur-Oxtoby un poco más adelante). En primer lugar debemos precisar cuáles son las reglas de este nuevo juego; es decir, las condiciones que definen o determinan cómo le está permitido jugar a cada jugador y posteriormente definir bajo qué condiciones, si es que ellas existen, uno de ellos tiene el privilegio de ganar cualquiera de las partidas del juego que se juegue. Las reglas en este juego son las siguientes: los dos jugadores, a los que denotaremos de ahora en adelante por α y β escogen, alternativamente, elementos de τ_*,

$$\begin{array}{llllllll} \beta: & U_1 & & U_2 & & \cdots & U_n & & \cdots \\ \alpha: & & V_1 & & V_2 & \cdots & & V_n & \cdots \end{array}$$

formando la sucesión decreciente

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \cdots \tag{2.2.8}$$

donde el jugador β es quien siempre tiene el privilegio de efectuar el primer movimiento en el juego escogiendo, en su primera elección, un subconjunto abierto no vacío U_1 de X. Ahora el turno es para el jugador α quien elige un subconjunto abierto no vacío V_1 de U_1 y se continúa con este modo alternativo de selección. A este juego se le llama el **juego de Banach-Mazur** y se denotará en lo sucesivo por $\mathrm{BM}(X)$. (Algunos autores prefieren usar el término **juego de Choquet** en lugar de juego de Banach-Mazur). Cada sucesión encajada de subconjuntos abiertos no vacíos, como en (2.2.8), generada por ambos jugadores, se llamará una **partida** del juego $\mathrm{BM}(X)$ y denotada de ahora en adelante por $p=(U_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$. Al jugador α se le declara **ganador** de la partida $p=(U_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$ si

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing.$$

Si la intersección anterior es vacía, entonces el vencedor de dicha partida es el jugador β.

Juegos parciales

Fijemos $n\in\mathbb{N}$. Un **juego parcial de longitud** $2n-1$ en el juego $\mathrm{BM}(X)$ es cualquier sucesión finita $(U_1,V_1,\ldots,U_{n-1},V_{n-1},U_n)$ de conjuntos abiertos no vacíos satisfaciendo

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq U_{n-1} \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n,$$

y que representan los primeros n movimientos legales efectuados por el jugador β y los primeros $n-1$ movimientos legales efectuados por el jugador α. Similarmente, un **juego parcial de longitud** $2n$ en el juego $\mathrm{BM}(X)$ es una sucesión finita $(U_1,V_1,\ldots,U_n,V_n)$ de conjuntos abiertos no vacíos satisfaciendo

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq V_n,$$

y que representa los primeros n movimientos legales efectuados por ambos jugadores.

Con frecuencia resultará útil establecer un cierto orden parcial sobre el conjunto $\mathrm{JP}(X)$, formado por todos los juegos parciales en $\mathrm{BM}(X)$. En efecto, si r y s son elementos de $\mathrm{JP}(X)$ con longitudes m y n respectivamente, declaramos que:

$r \subseteq s$ *si, y sólo si,* $m \leq n$, *y los primeros m conjuntos de ambos juegos parciales son los mismos*.

Claramente la relación $\subseteq$ así definida es un orden parcial sobre $\mathrm{JP}(X)$. Si ocurre que $r \subseteq s$ con $r, s \in \mathrm{JP}(X)$, entonces diremos que el juego parcial s es una **continuación** o **extensión** del juego parcial r. En lo que sigue, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por JP^n la colección de todos los juegos parciales de longitud n en el juego $\mathrm{BM}(X)$. Observe que $\mathrm{JP}^1 = \tau_*$.

Las estrategias de los jugadores en el juego de Banach-Mazur.

El objetivo fundamental en el juego de Banach-Mazur es que uno de los jugadores pueda disponer de una estrategia que le brinde la posibilidad de ganar dicho juego en cualquier circunstancia (si es que tal ocurrencia es posible). Pero, ¿puede uno de los jugadores estar en posesión de un esquema o procedimiento que le permita ganar cualquier partida que se juegue independientemente de cómo juegue su oponente? Que ello sea posible depende de la siguiente noción de estrategia.

Una **estrategia** para el jugador α, que denotaremos en lo sucesivo por ε_α, es una sucesión de funciones $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $\alpha_n : \mathrm{Dom}(\alpha_n) \to \tau_*$ son definidas inductivamente como sigue:

(a) $\mathrm{Dom}(\alpha_1) = \tau_*$ y $\alpha_1 : \tau_* \to \tau_*$ se define exigiendo que

$$\alpha_1(U_1) \subseteq U_1, \quad \text{para todo } U_1 \in \tau_*.$$

(b) En general, si $n \geq 2$, el dominio de α_n, $\mathrm{Dom}(\alpha_n)$, consiste de todos los elementos

$$(U_1, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in JP^{2n-1},$$

tales que, para cualquier $k \leq n-1$,

(b_1) $(U_1, V_1, \ldots, U_k) \in \mathrm{Dom}(\alpha_k)$,

(b_2) $V_k = \alpha_k(U_1, V_1, \ldots, U_k)$ y

(b_3) U_n es un subconjunto (abierto no vacío) arbitrario incluido en V_{n-1}.

y la función $\alpha_n : \mathrm{Dom}(\alpha_n) \to \tau_*$ se define demandando que

$$\alpha_n(U_1, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \subseteq U_n$$

para todo $(U_1, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \mathrm{Dom}(\alpha_n)$.

Observe que si escribimos $\varepsilon_\alpha(U_1, V_1, \ldots, U_n)$ en lugar $\alpha_n(U_1, V_1, \ldots, U_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces *cualquier n-ésima jugada de* α *siguiendo su estrategia* ε_α *viene dada por*

$$V_n = \varepsilon_\alpha(U_1, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n),$$

donde $U_{k+1} \subseteq \varepsilon_\alpha(U_1, V_1 \ldots, U_k)$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Cuando α hace su elección con la ayuda de la estrategia ε_α, cualquier partida resultante $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ donde,

$$V_n = \varepsilon_\alpha(U_1, V_1, \ldots, V_{n-1}, U_n) \subseteq U_n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

se llama un ε_α**-juego** o una ε_α**-partida**. Los juegos parciales correspondientes a la estrategia ε_α (respectivamente, ε_β) serán llamados ε_α**-juegos parciales** (respectivamente, ε_β**-juegos parciales**).

La estrategia ε_α se llama **estrategia ganadora** para el jugador α (o **estrategia** α**-ganadora**) en el juego $\mathrm{BM}(X)$, si cualquier ε_α-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ es ganado por el jugador α. Esto significa que

$$T(p) := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$$

para cualquier ε_α-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^\infty$. De esta forma, *una **estrategia ganadora** para α es una regla que le indica a dicho jugador qué abierto jugar en cada turno y que, además, le garantiza que cada partida que se juegue siguiendo su estrategia, él, o ella, lo ganará no importa cómo juegue su oponente*. Para el jugador β se definen, similarmente, las nociones de estrategia y estrategia ganadora.

Definición 2.2.22. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se llama α-**favorable para** $\mathbf{BM}(X)$ o **espacio de Choquet**, si el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{BM}(X)$. *X se dice que es β-**desfavorable para** $\mathbf{BM}(X)$ si el jugador β no posee estrategia ganadora alguna en el juego* $\mathrm{BM}(X)$.

Algunos autores usan, en lugar de la expresión α-favorable para $\mathrm{BM}(X)$, el término *débilmente α-favorable* para $\mathrm{BM}(X)$.

Comentario Adicional 2.2.21 Es importante hacer mención de las siguientes dos observaciones en relación a la noción de estrategia. En primer lugar, notemos que:

Observación (1). *Si un espacio X es β-desfavorable para* $\mathrm{BM}(X)$ *y si ε_β es cualquier estrategia para el jugador β, entonces existe al menos un ε_β-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^\infty$ que es ganado por α.*

Prueba. En efecto, si ε_β es una estrategia para el jugador β y X es β-desfavorable para $\mathrm{BM}(X)$, entonces tal estrategia no puede ser ganadora por lo que existe al menos un ε_β-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^\infty$ que no puede ser ganado por β, es decir, $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \varnothing$ y, en consecuencia, α gana el ε_β-juego p. ■

La segunda observación en relación con nuestra definición de estrategia tiene que ver con los movimientos efectuados por los dos jugadores: es importante destacar que no hay ocultamiento de información en ningún momento de los movimientos efectuados por ambos jugadores, es decir, para cada $n > 1$, ambos jugadores están en conocimiento de todos los movimientos efectuados con anterioridad antes de ejecutar su elección en el n-ésimo movimiento. A este tipo de juego se le suele llamar *juego con información perfecta*. Por supuesto, también es de interés poseer estrategias que dependan únicamente del último movimiento del oponente. A estas estrategias se les denominan estrategias estacionarias, vale decir, una **estrategia estacionaria** (también llamada **táctica**) para el jugador α en el juego $\mathrm{BM}(X)$ es una aplicación $s_\alpha : \tau_* \to \tau_*$, donde τ_* es la familia de todos los subconjuntos abiertos y no vacíos de X, con la propiedad de que $s_\alpha(U) \subseteq U$ para cualquier conjunto $U \in \tau_*$. Diremos que s_α es una **estrategia estacionaria ganadora** para el jugador α si ocurre lo siguiente: si $(U_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X con la propiedad de que $U_{n+1} \subseteq s_\alpha(U_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \varnothing$. Análogamente, se definen las nociones de estrategia estacionaria y estrategia estacionaria ganadora para el jugador β.

El siguiente hecho permite simplificar, en algunos casos, la prueba de que un jugador posee un estrategia ganadora demostrando que dicho jugador posee una estrategia estacionaria ganadora:

Observación (2). *Cualquier estrategia estacionaria ganadora para uno de los jugadores en el juego* $\mathrm{BM}(X)$ *es también una estrategia ganadora para el mismo jugador en dicho juego.*

Prueba. En efecto, si s_α es una estrategia estacionaria ganadora para, digamos, el jugador α, entonces ella determina una estrategia ganadora ε_α para el mismo jugador si, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\varepsilon_\alpha(U_1, V_1, \ldots, U_n) = s_\alpha(U_n)$. ■

Aquí está un punto fundamental: *el recíproco del resultado anterior siempre es cierto para el jugador β, pero no para el jugador α*. En efecto, Galvin y Telgársky ([168], Corollary 1′) demostraron que:

Teorema de Galvin-Telgársky. *El jugador β tiene una estrategia estacionaria ganadora en el juego* $\mathrm{BM}(X)$ *si, y sólo si,* β *posee una estrategia ganadora en* $\mathrm{BM}(X)$.

La misma afirmación para el jugador α no es, en general, válida. Para un contraejemplo podemos mirar en [115], donde G. Debs construyó un espacio topológico de Hausdorff completamente regular X en el cual α admite una estrategia ganadora en $\mathrm{BM}(X)$ pero, al mismo tiempo, dicho jugador no posee ninguna estrategia estacionaria ganadora en el mismo juego.

En los dos ejemplos siguientes bastará, por lo probado más arriba, demostrar que dichos espacios poseen una estrategia estacionaria ganadora para el jugador α.

(a) *Cualquier espacio de Hausdorff compacto* (X,τ) *es un espacio* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(X)$.

En efecto, dado cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, definimos la estrategia estacionaria s_α para α por $s_\alpha(U)=V$, donde V es un abierto de X para el cual $\overline{V}\subseteq U$. Es fácil ver que dicha estrategia estacionaria es ganadora para α. Se sigue de (2) que X es un espacio α-favorable para $\mathrm{BM}(X)$.

(b) *Cualquier espacio métrico completo* (X,d) *es un espacio* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(X)$.

Para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, definimos la estrategia estacionaria s_α para α por $s_\alpha(U)=V$, donde V es una bola abierta en X tal que $\overline{V}\subseteq U$ y $\mathrm{diam}(\overline{V})<\mathrm{diam}(U)/2$. De nuevo, es fácil verificar que s_α es una estrategia estacionaria ganadora para el jugador α y gracias a (2) dicho espacio es α-favorable para $\mathrm{BM}(X)$.

(3). **Observación** (3). *En algunos casos puede ser ventajoso suponer, para ser consistente con el esquema ideado por Mazur, que el jugador* α *es quien comienza cada partida en el juego* $\mathrm{BM}(X)$ *seleccionando, en su primer movimiento, el conjunto* $V_0=E=X$. *Esto no restringe las elecciones del jugador* β *y, por consiguiente, no tiene influencia en el juego ya que una vez que* α *hace su primera elección, entonces* β *selecciona cualquier subconjunto abierto no vacío arbitrario* $U_1\subseteq X=V_0$.

Puede ser conveniente, en ciertos casos, asociar a cada estrategia ε_α del jugador α en el juego $\mathrm{BM}(X)$, el espacio métrico completo $(\mathfrak{G}(\varepsilon_\alpha),\rho)$, donde $\mathfrak{G}(\varepsilon_\alpha)$ es el conjunto formado por todos los ε_α-juegos $p=(U_n,V_n)_{n=1}^\infty$, y ρ es la métrica de Baire (completa) dada por:

$$\rho(p,p')=\begin{cases}0 & \text{si } \ p=p',\\ \dfrac{1}{n} & \text{si } \ n=\min\{k: V_k\neq V_k'\},\end{cases}$$

donde $p=(U_n,V_n)_{n=1}^\infty$ y $p'=(U_n',V_n')_{n=1}^\infty$ son elementos de $\mathfrak{G}(\varepsilon_\alpha)$.

El siguiente resultado es una caracterización de los espacios de Baire por la ausencia de estrategia ganadora para el jugador β en $\mathrm{BM}(X)$, el cual fue probado por Krom en 1974 [273] y por Saint Raymond en 1981 [392], aunque dicho resultado se debe, esencialmente, a Oxtoby [346].

Teorema 2.2.74 (Banach-Mazur). *Sea* (X,τ) *un espacio de Hausdorff. La siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X *es un espacio de Baire.*

(2) *El jugador* β *no posee ninguna estrategia ganadora en el juego de Banach-Mazur* $\mathrm{BM}(X)$.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Sea X un espacio de Baire y supongamos que el jugador β posee una estrategia ganadora ε_β en el juego $\mathrm{BM}(X)$. Sea U_1 un conjunto abierto no vacío de X la primera elección del jugador β según su estrategia. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{X}_n$ el conjunto formado por todos los ε_β-juegos parciales de longitud $2n-1$, es decir,

$$q \in \mathcal{X}_n \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad q = (U_1, V_1, U_2, V_2, \cdots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n),$$

donde $U_i = \varepsilon_\beta(U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_{i-1}, V_{i-1})$, para $2 \leq i \leq n$.

Sabemos que un ε_β-juego parcial de longitud $2n+k$, $(k \in \mathbb{N})$, es una *extensión* de un ε_β-juego parcial de longitud $2n-1$ si los primeros $2n-1$ conjuntos de ambas cadenas coinciden. La clase de todas los ε_β-juegos parciales se ordena por esta relación.

Procederemos a continuación a construir, inductivamente, las siguientes dos sucesiones de juegos parciales $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ y $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$ tales que $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{X}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(1) En primer lugar, defina $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1 = \mathcal{X}_1 = \{(U_1)\}$, donde U_1 es la primera elección del jugador β según su estrategia ε_β.

(2) Procediendo por inducción, supongamos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, tanto $\mathcal{A}_n$ así como $\mathcal{B}_n$ han sido construidos de modo que $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{X}_n$. Para definir $\mathcal{A}_{n+1}$ consideremos todas las extensiones de longitud $2n+1$ de elementos de $\mathcal{B}_n$, es decir,

$$\mathcal{A}_{n+1} = \big\{(U_1, V_1, \cdots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in \mathcal{X}_{n+1} \,:\, (U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{B}_n\big\}.$$

A continuación elijamos, usando el Lema de Zorn, un subconjunto maximal $\mathcal{B}_{n+1}$ de $\mathcal{A}_{n+1}$ tal que, si

$$(U_1, V_1, \cdots, U_{n+1}) \qquad \text{y} \qquad (U_1', V_1', \cdots, U_{n+1}')$$

son elementos distintos de $\mathcal{B}_{n+1}$, entonces $U_{n+1} \cap U_{n+1}' = \varnothing$.

De esta manera finaliza la construcción de nuestras sucesiones $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ y $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$. Observe que de la construcción anterior podemos derivar la siguiente:

Afirmación $(*)$. *Para cada* $(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{A}_n$, *existe* $(U_1', V_1', \cdots, U_n') \in \mathcal{B}_n$ *tal que* $U_n \cap U_n' \neq \varnothing$.

En efecto, sea $(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{A}_n$ y suponga que para todo $(U_1', V_1', \cdots, U_n') \in \mathcal{B}_n$, se cumple que $U_n \cap U_n' = \varnothing$. Entonces la maximalidad de $\mathcal{B}_n$ nos revela que $(U_1, V_1, \cdots, U_n)$ pertenece a $\mathcal{B}_n$ en cuyo caso, poniendo $(U_1', V_1', \cdots, U_n') = (U_1, V_1, \cdots, U_n)$, tenemos que $U_n \cap U_n' = U_n \neq \varnothing$. Esta contradicción establece nuestra afirmación. $\square$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$W_n = \bigcup_{(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{B}_n} U_n.$$

Obviamente cada W_n es un conjunto abierto y, por definición, W_1 denso en U_1. Veamos que W_n también es denso en U_1 para todo $n \geq 2$. Sea O un conjunto abierto no vacío contenido en U_1 y suponga que para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $O \cap W_n \neq \varnothing$. Por la definición de W_n existe un $(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{B}_n$ tal que $O \cap U_n \neq \varnothing$. Sea V_n un subconjunto abierto no vacío de $O \cap U_n \neq \varnothing$ y apliquemos la estrategia ε_β para hallar un abierto no vacío $U_{n+1} \subseteq V_n$ tal $(U_1, V_1, \cdots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in \mathcal{A}_{n+1}$. Usemos ahora la Afirmación $(*)$ para obtener un elemento $(U_1', V_1', \cdots, U_n', V_n', U_{n+1}') \in \mathcal{B}_{n+1}$ tal que $U_{n+1} \cap U_{n+1}' \neq \varnothing$. Por esto,

$$\varnothing \neq U_{n+1} \cap U_{n+1}' \subseteq O \cap W_{n+1}.$$

Con esto se concluye la prueba de que la sucesión $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ es abierta y densa en U_1. Puesto que U_1, como abierto en el espacio de Baire X, es un espacio de Baire (Teorema 1.7.3, página 41) resulta que $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ es denso en U_1. En particular, $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \neq \varnothing$. Fijemos $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $(U_1^n, V_1^n, \cdots, U_n^n) \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in U_n^n$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x \in U_{n+1}^{n+1} \subseteq U_{n+1}^{n},$$

de modo que $U_{n+1}^n \cap U_n^n \neq \varnothing$. De la manera como la colección $\mathcal{B}_n$ fue construida, tenemos que los elementos $(U_1^n, V_1^n, \cdots, U_n^n)$ y $(U_1^{n+1}, V_1^{n+1}, \cdots, U_n^{n+1})$ de $\mathcal{B}_n$, no pueden ser distintos, por lo que

$$(U_1^n, V_1^n, \cdots, U_n^n) = (U_1^{n+1}, V_1^{n+1}, \cdots, U_n^{n+1}).$$

Lo que acabamos de demostrar nos dice que ni U_j^n ni V_j^n dependen de n, de modo que hemos encontrado una sucesión $(U_1, V_1, U_2, V_2, \cdots)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{B}_n$ y $x \in U_n$. Pero ya que $(U_1, V_1, \cdots, U_n) \in \mathcal{X}_n$, resulta que la partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un ε_β-juego con $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, lo que resulta ser una flagrante contradicción pues habíamos supuesto que ε_β poseía una estrategia ganadora.

$(2) \Rightarrow (1)$. Sea X un espacio topológico de Hausdorff para el cual no existe estrategia ganadora alguna para el jugador β en el juego $\mathrm{BM}(X)$, pero suponga que X no es de Baire. Esto, por supuesto, significa que en X habita algún subconjunto abierto no vacío, digamos U_1, que es de primera categoría en X y, por consiguiente, existe una sucesión $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados nunca-densos en X tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = U_1$. Lo anterior nos permitirá definir la siguiente estrategia ganadora ε_β para el jugador β. En efecto, como β es quien siempre comienza todas las partidas, suponga que la primera elección de β es U_1. Para $n \geq 2$, dado cualquier conjunto abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$ pongamos $\varepsilon_\beta(U_1, V_1, \cdots, U_n, V_n) = V_n \setminus D_n$. Esto quiere decir que β comienza el juego eligiendo a U_1 y cuando α selecciona, en su n-ésimo movimiento, el conjunto $V_n \subseteq U_n$, entonces β responde escogiendo el abierto $U_{n+1} := V_n \setminus D_n$. Si β juega según esta estrategia ε_β, la sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ verifica

$$V_1 \subseteq U_1, \qquad V_{n+1} \subseteq U_{n+1} = V_n \setminus D_n, \quad n \geq 1,$$

por lo que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq U_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing.$$

Esta última condición nos asegura que β gana la partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ si sigue su estrategia ε_β. Hemos arribado a una contradicción puesto que nuestra hipótesis establecía que no existía estrategia ganadora alguna para el jugador β en el juego $\mathrm{BM}(X)$. Por esto, X es un espacio de Baire y concluye la prueba. ■

Aunque para el jugador α no existe una caracterización similar al Teorema de Banach-Mazur vale, sin embargo, el siguiente resultado demostrado por G. Choquet [97].

Teorema 2.2.75 (Choquet). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Si X es un espacio de Choquet, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Supongamos que α posee un estrategia ganadora ε_α en $\mathrm{BM}(X)$ pero que X no es un espacio de Baire. Entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos densos en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ no es denso en X. Esto implica, en consecuencia, la existencia de un conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ tal que $U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \varnothing$. Sea $U_1 := U$ el primer movimiento del jugador β y $V_1 = \varepsilon_\alpha(U_1) \subseteq U_1$ la elección del jugador α según su estrategia. Como G_1 es denso en X, resulta que $V_1 \cap G_1$ es un subconjunto abierto no vacío de X, por lo que la segunda elección de β es tomar $U_2 = V_1 \cap G_1$. Una vez que β ha hecho su elección, el jugador α, siguiendo su estrategia, responde eligiendo un conjunto $V_2 = \varepsilon_\alpha(U_1, V_1, U_2) \subseteq U_2$. De nuevo, por la densidad de G_2, tenemos que $V_2 \cap G_2 \neq \varnothing$ y entonces β elige en esta etapa el conjunto $U_3 = V_2 \cap G_2$ y se continua como antes. Con este proceso llevado a cabo indefinidamente se obtiene un ε_α-juego $(U_n, V_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathrm{BM}(X)$ satisfaciendo

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n \,=\, U \cap (V_1 \cap G_1) \cap \cdots \cap (V_{n-1} \cap G_{n-1}) \cap \cdots \,\subseteq\, U \cap \Big(\bigcap_{n=1}^\infty G_n\Big) \,=\, \varnothing. \qquad (\star)$$

Por otro lado, como ε_α es una estrategia ganadora en $\mathrm{BM}(X)$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \varnothing$, lo cual constituye una flagrante contradicción con $(\star)$. Esto nos muestra que X es un espacio de Baire. ■

‖ ► **¿Cuándo BM(X) es determinado?**

Es importante destacar que en el juego de Banach-Mazur no existe, por definición, la posibilidad de que ambos jugadores logren un empate y, menos aun, que los dos jugadores puedan tener, al mismo tiempo, estrategias ganadoras en dicho juego (esto es así, también, por definición). Pero, ¿puede ocurrir que si uno de ellos no posee una estrategia ganadora, el otro sí la tenga? Por ejemplo, ¿esa "desafortunada" circunstancia que se da para el jugador β cuando X es un espacio de Baire, en el Teorema de Banach-Mazur, es acaso una garantía para que el jugador α pueda ganar dicho juego? Tal vez el lector tenga, a primera vista, esa percepción, pero el hecho de que X sea un espacio de Baire no le da ventaja al jugador α en el juego $\mathrm{BM}(X)$: *Existen espacios de Baire en donde ninguno de los dos jugadores poseen estrategias ganadoras en dicho juego*. En efecto, si X es un conjunto de Bernstein en $[0,1]$, entonces dicho conjunto es un espacio de Baire que no admite estrategias ganadoras para ninguno de los dos jugadores en el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$ (véase [422], p. 234). Recordemos que $X \subseteq [0,1]$ es un **conjunto de Bernstein** *si cualquier conjunto cerrado no numerable de* $[0,1]$ *intersecta tanto a X como a su complemento*. En general, si sobre un espacio topológico de Hausdorff (X, τ) se define un juego topológico para los jugadores α y β, diremos que dicho juego es **determinado** si uno de los jugadores posee una estrategia ganadora. En caso contrario se dice que el juego es **no determinado** o **indeterminado**; es decir, si ninguno de los jugadores posee una estrategia ganadora.

Ya hemos visto que todo espacio métrico completo, así como todo espacio compacto de Hausdorff son α-favorables, pero que no todo espacio de Baire posee dicha propiedad. ¿Existe algún ingrediente adicional que al ser añadido a un espacio de Baire le sea favorable al jugador α para ganar el juego?, o de forma más general: ¿Para qué categoría de espacios topológicos X el juego $\mathrm{BM}(X)$ es determinado? Una respuesta parcial a dicha interrogante viene dada por los siguientes resultados.

Teorema 2.2.76. *Sea (X, τ) un espacio de Baire que, además, es σ-compacto. Entonces X es un espacio de Choquet.*

Prueba. Sea $(K_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Puesto que X es un espacio de Baire, el Teorema 1.8.6 nos dice que el conjunto $G := \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{int}(K_n)$ es abierto y denso en X que, además, tiene la propiedad de que todo punto $x \in G$ admite un entorno abierto cuya clausura es compacta, es decir, G es localmente compacto.

Sea U_1 cualquier conjunto abierto no vacío en X y suponga que dicho conjunto es la primera elección del jugador β. La densidad de G nos garantiza que $U_1 \cap G \neq \varnothing$ por lo que una respuesta adecuada del jugador α al movimiento U_1 de β es elegir un abierto no vacío V_1 tal que $\overline{V_1}$ sea compacto e incluido en $U_1 \cap G$. En general, si en el n-ésimo movimiento el jugador β ha seleccionado un abierto no vacío $U_n \subseteq V_{n-1}$, entonces la respuesta de α a ese movimiento de β es escoger un abierto no vacío $V_n \subseteq U_n \cap G$ cuya clausura sea compacta y esté contenida en $U_n \cap G$. Con esta estrategia es claro que el jugador α gana la partida $(U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ pues, al ser $(\overline{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de compactos, el Teorema de Encaje de Cantor nos garantiza que

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(U_n \cap G\big) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Esto prueba que la estrategia del jugador α es una estrategia ganadora y, en consecuencia, X es un espacio de Choquet. ■

El recíproco del resultado anterior es válido, aun sin la condición de que X sea σ-compacto, gracia al Teorema de Choquet, Teorema 2.2.75.

Sabemos que todo espacio Oxtoby-completo es un espacio de Baire. El siguiente resultado nos dice que el juego de Banach-Mazur es determinado para tales espacios. En particular, para los espacios métricos completos, los espacios de Hausdorff localmente compacto y, en general, para los espacios Čech-completos.

Teorema 2.2.77. *Si* (X, τ) *es un espacio Oxtoby-completo, entonces* X *es* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(X)$. *En particular,* X *es un espacio de Baire.*

Prueba. Suponga que X es un espacio de Oxtoby y sea $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de pseudo-bases con la propiedad de que si $W_n \in \mathcal{B}_n$ y $W_n \supseteq \overline{W}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \neq \varnothing$. Vamos a construir una estrategia ganadora ε_α para el jugador α del modo siguiente. Sea U un subconjunto abierto no vacío arbitrario de X y supongamos que $U_1 := U$ es la primera elección del jugador β. El jugador α, a quien le corresponde hacer su movimiento, elige el abierto no vacío V_1 obtenido siguiendo el siguiente procedimiento: puesto que $\mathcal{B}_1$ es una pseudo-base, existe un $W_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $W_1 \subseteq U_1$. La cuasi-regularidad de X nos permite, entonces, elegir un conjunto abierto no vacío V_1 tal que

$$V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq W_1 \subseteq U_1.$$

El conjunto V_1, obtenido en la construcción anterior, es la respuesta del jugador α a la elección que hizo β. En el n-ésimo paso, una vez que β ha elegido un conjunto abierto no vacío $U_n \subseteq V_{n-1}$, donde

$$V_{n-1} \subseteq \overline{V}_{n-1} \subseteq W_{n-1} \subseteq U_{n-1} \qquad \text{y} \qquad W_{n-1} \in \mathcal{B}_{n-1},$$

entonces, usando de nuevo el hecho de que $\mathcal{B}_n$ es una pseudo-base, existe un $W_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $W_n \subseteq U_n$ y se cumple además, gracias a la cuasi-regularidad de X, que $\overline{W}_n \subseteq W_{n-1}$. Aplicando una vez más la cuasi-regularidad de X podemos encontrar un conjunto abierto no vacío V_n tal que

$$V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq W_n \subseteq U_n.$$

α selecciona el abierto no vacío V_n como respuesta al movimiento U_n de β. Continuando de este modo obtenemos un ε_α-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo las condiciones

$$U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq W_n \subseteq U_n, \qquad W_n \in \mathcal{B}_n \qquad \text{y} \qquad \overline{W}_{n+1} \subseteq W_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por hipótesis, $\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ lo cual prueba que X es un espacio α-favorable para $\mathrm{BM}(X)$. ■

En la próxima sección veremos que ciertos espacios métricos con alguna propiedad adicional resultan ser también determinados.

Comentario Adicional 2.2.22 En [164], Fremlin considera un juego del tipo Banach-Mazur asociado a un espacio de medida finita (Ω,Σ,μ). En efecto, suponga que (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y sea $\Sigma^+ = \{E \in \Sigma : \mu(E) > 0\}$. El μ**-juego de Banach-Mazur** denotado por $\Gamma(\mu)$ consiste de dos jugadores J_1 y J_2 quienes escogen elementos $A_n, B_n \in \Sigma^+$ respectivamente tales que $A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$. El jugador J_2 gana la partida $P = (A_n, B_n)_{n=1}^\infty$ si $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \varnothing$. Fremlin llama a la medida μ **débilmente** α**-favorable** si el jugador J_2 posee una estrategia ganadora en el juego $\Gamma(\mu)$ y demuestra que si μ es débilmente α-favorable, entonces μ es perfecta. Más aun, Fremlin prueba que la clase de las medidas débilmente α-favorables está contenida propiamente en la clase de las medidas perfectas. Si Σ es una sigma-algebra contenida en $\mathcal{B}_0([0,1])$, entonces cualquier medida finita μ definida sobre Σ es débilmente α-favorable, hecho demostrado por Borodulin y Plebanek.

2.2.14. ‖ ► El juego de Banach-Mazur y Principios de selección

En lo que sigue (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff, mientras que $\mathcal{O}$ denotará la colección de todos los cubrimientos abiertos de X. Un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X se llama un γ**-cubrimiento** si éste es infinito y para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ es finita. Denotaremos por $\mathfrak{G}$ la familia de todos los γ-cubrimientos de X. En un esfuerzo por caracterizar σ-compacidad por medio de cubrimientos abiertos, W. Hurewicz [226] introduce la propiedad de Hurewicz o, en la terminología moderna, el principio de selección $\bigcup_{\text{fin}}(\mathcal{O},\mathfrak{G})$. Dos años antes, K. Menger había definido la siguiente propiedad.

Propiedad de la base de Menger. *Un espacio métrico (X,d) posee la **propiedad de la base de Menger** si, para cada base $\mathfrak{B}$ de X, existe una sucesión $(B_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathfrak{B}$ tal que:*

(1) $X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, y

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0$.

Cada espacio métrico σ-compacto posee dicha propiedad por lo que Menger formuló la siguiente conjetura: *un espacio métrico posee la propiedad de la base de Menger si, y sólo si, el espacio es un σ-compacto*. Hurewicz tenía la sospecha de que la conjetura de Menger era falsa y propone una nueva propiedad con la cual intenta demostrar que ella es equivalente a la σ-compacidad del espacio. Por supuesto, este nuevo principio [227] constituye una generalización del concepto de compacidad.

La propiedad de Menger o el Principio de selección $S_{\text{fin}}(\mathcal{O},\mathcal{O})$. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que tiene la **propiedad de Menger** si, para cualquier sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos de X, existe una sucesión $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ es finito, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ y la familia $\left\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un cubrimiento abierto de X.*

Una vez formulada la propiedad de Menger, Hurewicz logra demostrar el siguiente resultado:

Teorema de Hurewicz. *Un espacio métrico (X,d) posee la propiedad de la base de Menger si, y sólo si, X posee la propiedad de Menger.*

Nótese que cualquier espacio σ-compacto satisface la propiedad de Menger. Otros conjuntos que poseen la propiedad de Menger son los subconjuntos cerrados de un espacio métrico con la propiedad de Menger. Para ver esto, observe que si F es un subconjunto cerrado de un espacio métrico (X,d) con la propiedad de Menger, y si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto de F consistiendo de conjuntos abiertos en la topología relativa de F, es decir, $V \in \mathcal{V}$ si, y sólo si, existe un abierto no vacío U_V de X tal que $V = F \cap U_V$, entonces la familia

$\mathcal{U} = \{U_V \cup (X \setminus F) : V \in \mathcal{V}\}$ es un cubrimiento abierto de X. Se sigue de esto que F posee la propiedad de Menger. Más aun, es fácil ver que la propiedad de Menger se preserva bajo imágenes continuas y es también hereditaria para subconjuntos F_σ. Aunque Hurewicz no logra sortear con éxito la conjetura de Menger, él demuestra que la conjetura es cierta para conjuntos analíticos (= imágenes continuas de espacios Polacos). Sin embargo, como fue observado por Sierpiński en 1926, cualquier conjunto de Luzin (cuya existencia, como sabemos, se soporta sobre la Hipótesis del Continuo y el Teorema de Categoría de Baire) posee la propiedad de Menger pero no es un σ-compacto (una prueba muy sencilla de este hecho se puede ver, por ejemplo, en [431], Theorem 1.2). De esta forma se demostraba que la conjetura de Menger era falsa. En 1988, Fremlin y Miller demuestran de nuevo que la conjetura de Menger es falsa evitando el uso de la Hipótesis del Continuo.

En 1927 Hurewicz [226] consideró el siguiente principio que es más general que la propiedad de Menger.

> **Propiedad de Hurewicz o el Principio de selección $\bigcup_{\text{fin}}(\mathcal{O},\Gamma)$.** *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice que tiene la **propiedad de Hurewicz** si, para cualquier sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos de X, existe una sucesión $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ es finito, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ y la familia $\left\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un γ-cubrimiento de X.*

Como en el caso de la propiedad de Menger, se prueba sin mucha dificultad que los subconjuntos cerrados, así como los F_σ heredan la propiedad de Hurewicz en un espacio con la propiedad de Hurewicz. También resulta claro que la propiedad de Hurewicz implica la propiedad de Menger pero el recíproco no se cumple. Por ejemplo, cualquier conjunto de Luzin posee la propiedad de Menger pero no la propiedad de Hurewicz (véase, [431], Theorem 5.2 y también el Theorem 5.3). Igualmente es claro que cualquier espacio σ-compacto posee la propiedad de Hurewicz y que cada espacio con la propiedad de Hurewicz es un espacio de Lindelöf. El nuevo principio de selección propuesto por Hurewicz le permitió formular la siguiente conjetura: *un espacio métrico (no compacto) es un σ-compacto si, y sólo si, satisface la propiedad de Hurewicz.* Una vez más, la conjetura de Hurewicz resulta ser falsa para ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ ya que cualquier conjunto de Sierpiński posee la propiedad de Hurewicz pero no es un σ-compacto (véase, por ejemplo, [431]). En 1995 se demostró directamente (sin asumir la Hipótesis del Continuo) que la conjetura de Hurewicz es falsa (véase, por ejemplo, [399]).

Recordemos que un espacio métrico (X,d) se llama totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $\{x_1,\dots,x_n\}$ de X tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i,\varepsilon)$ donde, como siempre, $U(x,\varepsilon)$ representa la bola abierta con centro en x y radio ε. El espacio métrico X se llama **σ-totalmente acotado**, si X se puede escribir en la forma $X = \bigcup_{i=1}^\infty X_n$, donde cada X_n es un conjunto totalmente acotado. El siguiente resultado aclara un poco más el panorama sobre la propiedad de Hurewicz.

Teorema 2.2.78. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si X tiene la propiedad de Hurewicz, entonces X es σ-totalmente acotado.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la colección de bolas abiertas

$$\mathcal{U}_n = \left\{U(x,1/2^n) : x \in X\right\}.$$

Como evidentemente cada $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento abierto de X, podemos aplicar la propiedad de Hurewicz a la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ para obtener, de cada $\mathcal{U}_n$, una conjunto finito, digamos, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ tal que la familia $\left\{F \in \left\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\right\} : x \notin F\right\}$ es finita para cada $x \in X$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y defina

$$X_n = \bigcap_{k=n}^\infty \bigcup \mathcal{F}_k.$$

Observe que, fijado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, si $m \leq n$, entonces $X_m \subseteq X_n$ y como $\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un γ-cubrimiento de X, se deduce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ cubre a X. Veamos ahora que cada X_n está totalmente acotado. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y considere cualquier $n \in \mathbb{N}$. Escojamos ahora $m > n$ lo suficientemente grande de modo que $2 \cdot (1/2)^m \leq \varepsilon$. Como cada elemento de $\mathcal{F}_m$ es un conjunto abierto de la forma $U(x, 1/2^m)$ para algún $x \in X$, resulta que su diámetro es menor o igual que $2 \cdot (1/2)^m$ y, en consecuencia, $\mathcal{F}_m$ es un cubrimiento finito de X_n. Esto termina la prueba. ■

Es importante destacar que el resultado anterior sigue siendo válido para cualquier métrica ρ que sea equivalente a d. De hecho, si X es σ-totalmente acotado para cada métrica equivalente a d, entonces X posee la propiedad de Hurewicz (véase, [25]). El siguiente resultado de Marion Scheepers [398] se puede comparar con el Corolario 1.8.3:

Teorema 2.2.79 (Scheepers). *Sea (X,d) un espacio métrico separable con la propiedad de Hurewicz. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Baire.*

(2) *El conjunto $D = \{x \in X : x$ posee un entorno abierto con clausura compacta$\}$ es denso en X.*

(3) *α posee una estrategia ganadora en el juego de Banach-Mazur* $\mathrm{BM}(X)$.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que (1) se cumple pero que el conjunto D no es denso en X. Para obtener una contradicción con el Teorema 2.2.74, vamos demostrar que el jugador β posee una estrategia ganadora en el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$.

Puesto que D no es denso en X, existe un abierto no vacío U_1 tal que $U_1 \cap D = \varnothing$, esto es, $U_1 \subseteq X \setminus D$. Sea U_1 el primer movimiento del jugador β. Siendo X un espacio métrico y U_1 un abierto en X, tenemos que U_1 es un F_σ y, por consiguiente, U_1 posee la propiedad de Hurewicz. En particular, por el Teorema de Hurewicz, U_1 posee la propiedad de la base de Menger. Este último hecho nos permite elegir una base numerable de U_1, digamos $\mathfrak{B}_1 = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que:

(a) $\overline{B}_n \subseteq U_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(b) $d - \mathrm{diam}(B_n) < 1$, y

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(B_n) = 0$.

Como ningún $\overline{B}_n$ es compacto, podemos escoger, para cada $n \in \mathbb{N}$, un cubrimiento abierto $\mathcal{U}_n^1$ de $\overline{B}_n$ (en U_1) con la propiedad de que ninguna colección finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_n^1$ satisface $B_n \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathcal{U}_n = \big(U_1 \setminus \overline{B}_n\big) \cup \{U : U \in \mathcal{U}_n^1\}$$

es un cubrimiento abierto de U_1. Hasta ahora no hemos usado directamente el hecho de que U_1 posee la propiedad de Hurewicz. Este es el momento, en efecto, como U_1 posee la propiedad de Hurewicz, podemos elegir, de cada $\mathcal{U}_n$, un conjunto finito $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ tal que, para cada $x \in U_1$, $x \in \bigcup \mathcal{F}_n$ para todo n salvo un conjunto finito. Estamos ahora listo para definir una estrategia ganadora ε_β para el jugador β. En efecto, para cada conjunto abierto no vacío $V \subseteq U_1$, escojamos un $n := n(V) \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B}_n \subseteq V$. Por el resultado anterior podemos suponer, sin perder generalidad en el razonamiento, que V tiene diámetro finito y entonces también exigir que $\mathrm{diam}(B_n) < \frac{1}{2} \cdot \mathrm{diam}(V)$. Pues bien, una vez que el jugador α elige un abierto no vacío $V_1 \subseteq U_1$, entonces el jugador β responde tomando el conjunto

$$U_2 := \varepsilon_\beta(U_1, V_1) = B_{n(V_1)} \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n(V_1)}} \overline{F}.$$

En general, una vez que el jugador α especifica un abierto no vacío $V_k \subseteq U_k$, entonces β responde escogiendo

$$U_{k+1} := \varepsilon_\beta(U_1,V_1,\ldots,U_k,V_k) = B_{n(V_k)} \setminus \bigcup_{F\in\mathcal{F}_{n(V_k)}} \overline{F}.$$

Veamos que con esta estrategia el jugador β gana cualquier partida que se juegue. En efecto, sea $(U_k,V_k)_{k=1}^\infty$ una partida en el juego de Banach-Mazur siguiendo la estrategia de β. Para cada $V_k \subseteq U_k$, pongamos $m_k = n(V_k)$. Entonces, por la definición de la estrategia del jugador β,

$$\varepsilon_\beta(U_1,V_1,\ldots,U_k,V_k) = B_{m_k} \setminus \bigcup_{F\in\mathcal{F}_{m_k}} \overline{F} \subseteq V_{k+1}, \qquad \text{para todo } k \geq 1$$

y

$$\operatorname{diam}(V_{k+1}) < \frac{1}{2}\cdot \operatorname{diam}(B_{m_{k-1}}), \qquad \text{para todo } k > 1.$$

Esto implica que $\{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito, de modo que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{m_k}$ es un cubrimiento de U_1. Es claro que $\bigcap_{n=1}^\infty V_k = \varnothing$, lo cual significa que β gana dicha partida. Esto, por supuesto, está en franca contradicción con el Teorema 2.2.74, por lo que (1) implica (2).

$(2) \Rightarrow (3)$. Es suficiente demostrar, por la observación (2) de la página 334, que el jugador α posee una estrategia estacionaria ganadora en $\mathrm{BM}(X)$. Veamos esto. En el n-ésimo movimiento, una vez que el jugador β ha elegido un abierto no vacío $U_n \subseteq V_{n-1}$, el jugador α responde escogiendo, en primer lugar, un punto $x \in U \cap D$ (el cual es no vacío pues D es denso en X) y después, usando la definición de D, escoge un entorno abierto W de x con $\overline{W}$ compacto. Finalmente, la respuesta de α al movimiento U_n de β es elegir un abierto no vacío $V_n = \sigma(U_n)$ tal que $x \in V_n$ y $\overline{V}_n \subseteq U_n \cap W$. Para ver que σ es una estrategia estacionaria ganadora para α, observe que $\overline{V}_n$ es compacto y $V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq U_n$. Por esto, $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \varnothing$ por lo que σ resulta ser una estrategia estacionaria ganadora para el jugador α en $\mathrm{BM}(X)$. Uno invoca la observación (2) de la página 334 para concluir que el jugador α posee una estrategia ganadora en $\mathrm{BM}(X)$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Es el Teorema 2.2.75. ■

Como consecuencia del resultado anterior de Scheepers se obtiene que: *En espacios métricos separables con la propiedad de Hurewicz, el juego de Banach-Mazur es determinado.*

2.2.15. ‖ ► El juego de Banach-Mazur y límite puntual de funciones cuasi-continuas

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Sabemos que, en general, el límite puntual de una sucesión de funciones continuas $f_n : (X,\tau) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, no necesita ser continua, ni aun, cuasi-continua. Sin embargo, si la sucesión es equicontinua, entonces el límite puntual siempre es una función continua (véase, por ejemplo, [295], Theorem 3.2.1, p. 49). Recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas $f : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ se dice que es **equicontinua** en $x_0 \in X$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno abierto U de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para cualquier $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$. En general, se dice que $\mathcal{F}$ es **equicontinua en** X si ella es equicontinua en todo punto de X. El objetivo central de esta sección es obtener condiciones adicionales bajo la cual una sucesión de funciones cuasi-continuas convergiendo puntualmente, posee límite cuasi-continuo. Observe que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es cuasi-continua en $x_0 \in X$ si, dado $\varepsilon > 0$ y cualquier entorno abierto U de x_0, existe un conjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo $z \in V$.

Definición 2.2.23. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones a valores reales definidas sobre X. Se dice que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es* ***equi-cuasi-continua*** *en $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada entorno abierto U de x_0, existe un $N \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que*

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

para cualquier $x \in V$ y cualquier $n \geq N$.

Diremos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es equi-cuasi-continua (en X) si ella es equi-cuasi-continua en todo punto de X.

El siguiente teorema, demostrado por Holá y Holý [218], es el resultado principal de esta sección cuya prueba hace uso del juego de Banach-Mazur.

Teorema 2.2.80 (Holá-Holý). *Sea (X,τ) un espacio de Baire y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones cuasi-continuas definidas sobre X a valores reales convergiendo puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *f es cuasi-continua.*

(2) *La sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es equi-cuasi-continua.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que (1) se cumple, pero que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ no es equi-cuasi-continua, digamos en algún punto $x_0 \in X$. Esto significa que existe algún $\varepsilon > 0$ y un entorno abierto U de x_0 tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier conjunto abierto no vacío $O \subseteq U$, existe un $k > n$ y un punto $z \in O$ verificando

$$|f_k(z) - f_k(x_0)| > \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{O}_n = \big\{v \in U : \ \text{existe} \ \ k > n \ \ \text{para el cual} \ \ |f_k(v) - f_k(x_0)| > \varepsilon\big\}. \tag{α1}$$

Por lo dicho anteriormente, resulta que $\mathcal{O}_n$ es denso en U para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Usemos ahora el hecho de que f es cuasi-continua en x_0 para hallar un conjunto abierto no vacío $V_0 \subseteq U$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/4 \tag{α2}$$

para cualquier $x \in V_0$.

Vamos a hacer uso de la información anterior para definir una estrategia ε_β para el jugador β en el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$ del modo siguiente. Notemos, en primer lugar, que como $\mathcal{O}_1$ es denso en U y V_0 es un abierto contenido en U, entonces $\mathcal{O}_1 \cap V_0 \neq \varnothing$, por lo que podemos usar $(\alpha 1)$ para obtener un $k_1 > 1$ y un punto $x_1 \in V_0$ tal que

$$|f_{k_1}(x_1) - f_{k_1}(x_0)| > \varepsilon.$$

Por otro lado, como f_{k_1} es cuasi-continua en x_1, existe un conjunto abierto no vacío $W(k_1) \subseteq V_0$ tal que, para todo $z \in W(k_1)$,

$$|f_{k_1}(x_1) - f_{k_1}(z)| < \varepsilon/4.$$

Sea entonces $U_1 := W(k_1)$ el primer movimiento del jugador β y suponga que $V_1 \subseteq U_1$ es la respuesta del jugador α al primer movimiento de β. Para ver cómo β efectúa su próximo movimiento, usemos de nuevo el hecho de que $\mathcal{O}_{k_1}$ es denso en U y que V_1 es un abierto contenido en U para garantizar que $\mathcal{O}_{k_1} \cap V_1 \neq \varnothing$ y, así obtener, por $(\alpha 1)$, la existencia de un $k_2 > k_1$ y un punto $x_2 \in V_1$ tal que

$$|f_{k_2}(x_2) - f_{k_2}(x_0)| > \varepsilon.$$

Por la cuasi-continuidad de f_{k_2} en x_2, existe un conjunto abierto no vacío $W(k_2) \subseteq V_1$ tal que

$$|f_{k_2}(x_2) - f_{k_2}(z)| < \varepsilon/4$$

para cualquier $z \in W(k_2)$. La respuesta de β al movimiento V_1 de α es tomar $U_2 = W(k_2)$.

Suponga que la cadena $(U_1, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1})$ ha sido construida, donde $U_i = W(k_i)$, $0 < k_1 < \cdots < k_{n-1}$ y $k_i > i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Para definir U_n usemos, como antes, el hecho de que $\mathcal{O}_{k_{n-1}}$ es denso en U y que V_{n-1} es un abierto contenido en U para garantizar que $\mathcal{O}_{k_1} \cap V_1 \neq \varnothing$ y, así obtener, por $(\alpha 1)$, la existencia de un $k_n > k_{n-1}$ y un punto $x_n \in V_{n-1}$ tal que

$$|f_{k_n}(x_n) - f_{k_n}(x_0)| > \varepsilon.$$

Por la cuasi-continuidad de f_{k_n} en x_n, existe un conjunto abierto no vacío $W(k_n) \subseteq V_{n-1}$ tal que

$$|f_{k_n}(x_n) - f_{k_n}(z)| < \varepsilon/4 \tag{$\alpha 3$}$$

para todo $z \in W(k_n)$. Definamos $U_n = W(k_n)$. Con este procedimiento inductivo se finaliza la construcción de la estrategia ε_β para el jugador β. Observe que con cada ε_β-juego $(U_n, V_n)_{n=1}^\infty$ vienen asociadas dos sucesiones, una en $\mathbb{N}$, $(k_n)_{n=1}^\infty$, y la otra en U, $(x_n)_{n=1}^\infty$, tales que

(a) $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, de donde se sigue que $k_n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(b) $x_n \in V_{n-1}$ y $|f_{k_n}(x_n) - f_{k_n}(x_0)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como nuestro espacio X es un espacio de Baire, el Teorema 2.2.74 nos dice que la estrategia ε_β no puede ser una estrategia ganadora y, por consiguiente, usando la Observación (1) de la página 334, existe al menos un ε_β-juego, digamos, $(U_n, V_n)_{n=1}^\infty$ que es ganado por α, es decir, $\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \varnothing$. Sea $y \in \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. La convergencia puntual de $(f_n)_{n=1}^\infty$ a f nos garantiza la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq n$,

$$|f_k(y) - f(y)| < \varepsilon/4 \qquad \text{y} \qquad |f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/4. \tag{$\alpha 4$}$$

Observe que como $k_n > n$, entonces por $(\alpha 2)$ y $(\alpha 4)$ se tiene que

$$|f_{k_n}(y) - f_{k_n}(x_0)| \leq |f_{k_n}(y) - f(y)| + |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_{k_n}(x_0)| < 3\frac{\varepsilon}{4}$$

y, además, por $(\alpha 3)$ resulta que $|f_{k_n}(x_{k_n}) - f_{k_n}(y)| < \varepsilon/4$, pues $y \in W(k_n) = U_n$. Finalmente,

$$|f_{k_n}(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_0)| \leq |f_{k_n}(x_{k_n}) - f_{k_n}(y)| + |f_{k_n}(y) - f_{k_n}(x_0)| < \varepsilon$$

lo cual viola la condición (b). Esta contradicción establece que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es equi-cuasi-continua.

$(2) \Rightarrow (1)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea U un conjunto abierto no vacío con $x \in U$. Como la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es equi-cuasi-continua, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto no vacío $W \subseteq U$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(z)| < \varepsilon/3$$

para cualquier $n \geq n_0$ y cualquier $z \in W$.

Sea $w \in W$. La convergencia puntual de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a f implica la existencia de un $n_1 > n_0$ tal que, para todo $n \geq n_1$,

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon/3 \qquad \text{y} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

De lo anterior se deduce que

$$|f(x) - f(w)| < |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(w)| + |f_{n_1}(w) - f(w)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Esto termina la prueba. ■

2.2.16. ‖ ► El juego de Banach-Mazur-Oxtoby

El juego de Banach-Mazur no da ninguna información sobre el "tamaño" de los subconjuntos que viven en él. En contraste con ese resultado, el juego desarrollado por Oxtoby, al que denominaremos juego de Banach-Mazur-Oxtoby, se puede usar para indagar si un subconjunto dado G de X es o no "grande" en el sentido de Baire, a través de la existencia de una estrategia ganadora para uno de los jugadores. Como ya habíamos mencionado, Oxtoby, en 1957, consideró el siguiente escenario que contiene, por supuesto, el juego de Banach-Mazur como un caso particular:

Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff, G un subconjunto no vacío de X y $\mathfrak{J}$ una familia de subconjuntos de X verificando las dos propiedades siguientes:

(1) *cada $U \in \mathfrak{J}$ tiene interior no vacío, y*

(2) *$\mathfrak{J}$ es una pseudo base de X, es decir, cada subconjunto abierto no vacío de X contiene, al menos, un elemento de $\mathfrak{J}$.*

Dos jugadores, a los que seguiremos denotando por α y β escogen, alternativamente, elementos de $\mathfrak{J}$ formando una sucesión decreciente:

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, el jugador α elige los conjuntos V_n y mientras que los U_n son escogidos por el jugador β. El jugador α gana la partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ si $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq G$, pudiendo ser dicha intersección vacía. En otro caso la victoria se le otorga al jugador β. A este juego lo denotaremos por $\mathrm{BMO}(G,\mathfrak{J},X)$ y lo llamaremos **juego de Banach-Mazur-Oxtoby**. Oxtoby demostró el siguiente resultado:

> **Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby**. *El jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathfrak{J},X)$ si, y sólo si, el conjunto G es residual en X. Más aún, si X es un espacio métrico completo, entonces el jugador β posee una estrategia ganadora en dicho juego si, y sólo si, el conjunto G es de primera categoría en algún subconjunto abierto de X.*

Cuando $\mathfrak{J} = \tau_*$, la colección de todos los subconjuntos abiertos no vacíos del espacio topológico (X,τ), denotaremos el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathfrak{J},X)$ simplemente por $\mathrm{BMO}(G,X)$. Una demostración de la primera parte del resultado de Banach-Mazur-Oxtoby será dada en lo inmediato. La segunda parte puede ser consultada, por ejemplo, en [255], p. 51.

Teorema 2.2.81 (Banach-Mazur-Oxtoby). *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y $G \subseteq X$. El jugador α posee una estrategia ganadora en $\mathrm{BMO}(G,\mathfrak{J},X)$ si, y sólo si, G es residual en X.*

Prueba. Supongamos que G es un conjunto residual en X. Entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos densos en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq G$. Veamos cómo se construye una estrategia ganadora para el jugador α en $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$. Como el jugador β es quien siempre comienza la partida, su primer movimiento consistirá en elegir un conjunto U_1 en $\mathcal{J}$. Puesto que G_1 es un abierto denso en X, resulta que $\mathrm{int}(U_1)\cap G_1$ es abierto y no vacío. En base a esto, una respuesta adecuada del jugador α al primer movimiento de β es seleccionar un abierto no vacío $V_1 \subseteq \mathrm{int}(U_1)\cap G_1$. En general, la estrategia del jugador α consistirá en elegir, una vez que la sucesión $U_1,V_1,U_2,V_2,\ldots,U_n$ ha sido construida, un conjunto abierto no vacío $V_n := \varepsilon_\alpha(U_1,V_1,U_2,V_2,\ldots,U_n)$ del conjunto $\mathrm{int}(U_n)\cap G_n$ el cual es no vacío y abierto por ser G_n abierto y denso en X. Con esta estrategia se ve claramente que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq G,$$

lo cual nos dice que el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$.

La demostración de la otra implicación es casi idéntica a la dada en el Teorema de Banach-Mazur con muy pequeñas variaciones y que ofrecemos sólo por amor al arte. Supongamos que el jugador α posee una estrategia ganadora ε_α en el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$. Denotemos $\mathcal{X}_n$ el conjunto formado por todos los ε_α-juegos parciales de longitud $2n$, es decir,

$$q \in \mathcal{X}_n \quad \text{si, y sólo si,} \quad q=(U_1,V_1,U_2,V_2,\cdots,U_n,V_n), \quad \text{donde } V_i=\varepsilon_\alpha(U_1,V_1,U_2,V_2,\ldots,U_i), \quad 1\le i\le n.$$

Sabemos que un ε_α-juego parcial de longitud $2n+k$, $(k\in\mathbb{N})$, es una *extensión* de un ε_α-juego parcial de longitud $2n$ si los primeros $2n$ conjuntos de ambas cadenas son los mismos. Asumiremos que la clase de todos los ε_α-juegos parciales se ordena por esta relación.

Para demostrar que G contiene la intersección de alguna sucesión $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos densos en X, procederemos a construir, inductivamente, las siguientes dos sucesiones de juegos parciales $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ para luego, usando dichas sucesiones, definir $(W_n)_{n=1}^{\infty}$:

(1) En primer lugar defina $\mathcal{A}_1=\mathcal{X}_1$ y apliquemos el Lema de Zorn para obtener un subconjunto maximal $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{A}_1$ tal que, si (U_1,V_1) y (U_1',V_1') son *elementos distintos* de $\mathcal{B}_1$, entonces $\mathrm{int}(V_1)\cap\mathrm{int}(V_1')=\varnothing$.

(2) Procediendo por inducción, supongamos que tanto $\mathcal{A}_n$ así como $\mathcal{B}_n$ han sido construidos. Para definir $\mathcal{A}_{n+1}$ todo lo que tenemos que hacer es tomar todas las extensiones de longitud $2(n+1)$ de elementos de $\mathcal{B}_n$, es decir,

$$\mathcal{A}_{n+1}=\big\{(U_1,V_1,\cdots,U_{n+1},V_{n+1})\in\mathcal{X}_{n+1} \;:\; (U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{B}_n\big\}$$

y entonces elegir, usando una vez más el Lema de Zorn, un subconjunto maximal $\mathcal{B}_{n+1}$ de $\mathcal{A}_{n+1}$ tal que, si

$$(U_1,V_1,\cdots,U_{n+1},V_{n+1}) \qquad \text{y} \qquad (U_1',V_1',\cdots,U_{n+1}',V_{n+1}')$$

son elementos distintos de $\mathcal{B}_{n+1}$, entonces $\mathrm{int}(V_{n+1})\cap\mathrm{int}(V_{n+1}')=\varnothing$.

Esto termina la construcción de nuestras sucesiones $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$. Observe que de la construcción anterior podemos derivar la siguiente:

Afirmación $(**)$. *Para cada* $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{A}_n$ *existe* $(U_1',V_1',\cdots,U_n',V_n')\in\mathcal{B}_n$ *tal que* $\mathrm{int}(V_n)\cap\mathrm{int}(V_n')\neq\varnothing$.

En efecto, sea $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{A}_n$ y suponga que para todo $(U_1',V_1',\cdots,U_n',V_n')\in\mathcal{B}_n$, se cumple que $\mathrm{int}(V_n)\cap\mathrm{int}(V_n')=\varnothing$. La maximalidad de $\mathcal{B}_n$ nos revela que $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)$ pertenece a $\mathcal{B}_n$ en cuyo caso, poniendo $(U_1',V_1',\cdots,U_n',V_n')=(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)$, tenemos que $\mathrm{int}(V_n)\cap\mathrm{int}(V_n')=\mathrm{int}(V_n)\neq\varnothing$. Esta contradicción establece nuestra afirmación. $\square$

Una vez construidas las sucesiones $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ y $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$, procedamos a definir $(W_n)_{n=1}^\infty$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea

$$W_n=\bigcup_{(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{B}_n}\mathrm{int}(V_n).$$

Obviamente cada W_n es un conjunto abierto. Lo que deseamos demostrar es que ellos son densos en X. Sea O un subconjunto abierto no vacío de X. Usando la definición de $\mathcal{J}$ podemos hallar un $U_1\in\mathcal{J}$ contenido en O y también, usando la estrategia ε_α, podemos determinar un $V_1\in\mathcal{J}$ con $(U_1,V_1)\in\mathcal{A}_1=\mathcal{X}_1$. Por la Afirmación $(**)$, existe un $(U_1',V_1')\in\mathcal{B}_1$ con $\mathrm{int}(V_1)\cap\mathrm{int}(V_1')\neq\varnothing$, de donde se sigue que

$$\varnothing\neq\mathrm{int}(V_1)\cap\mathrm{int}(V_1')\ \subseteq\ V_1\cap\mathrm{int}(V_1')\ \subseteq\ U_1\cap\mathrm{int}(V_1')\ \subseteq\ O\cap W_1.$$

Lo anterior nos revela que la densidad de W_1 ha quedado establecida. Por inducción, supongamos que para algún $n\in\mathbb{N}$ hemos demostrado que $O\cap W_n\neq\varnothing$. Esto significa, por la definición de W_n, que existe un $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{B}_n$ tal que $O\cap\mathrm{int}(V_n)\neq\varnothing$. De nuevo, usando las propiedades de $\mathcal{J}$ podemos seleccionar un $U_{n+1}\in\mathcal{J}$ contenido en el abierto $O\cap\mathrm{int}(V_n)$ y luego aplicar la estrategia ε_α para hallar un $V_{n+1}\in\mathcal{J}$ tal que $(U_1,V_1,\cdots,U_{n+1},V_{n+1})\in\mathcal{A}_{n+1}$. Puesto que $(U_1,V_1,\cdots,U_{n+1},V_{n+1})\in\mathcal{A}_{n+1}$, la Afirmación $(**)$ nos garantiza la existencia de un elemento $(U_1',V_1',\cdots,U_{n+1}',V_{n+1}')\in\mathcal{B}_{n+1}$ tal que $\mathrm{int}(V_{n+1})\cap\mathrm{int}(V_{n+1}')\neq\varnothing$, de donde obtenemos que

$$\varnothing\neq\mathrm{int}(V_{n+1})\cap\mathrm{int}(V_{n+1}')\ \subseteq\ V_{n+1}\cap\mathrm{int}(V_{n+1}')\ \subseteq\ O\cap W_{n+1}.$$

Ya finalizada la demostración de la densidad de todos los conjuntos abiertos W_n, resta por demostrar que $\bigcap_{n=1}^\infty W_n\subseteq G$. Sea $x\in\bigcap_{n=1}^\infty W_n$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe un único $(U_1^n,V_1^n,\cdots,U_n^n,V_n^n)\in\mathcal{B}_n$ tal que $x\in\mathrm{int}(V_n^n)$. Por otro lado, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$x\in\mathrm{int}(V_{n+1}^{n+1})\ \subseteq\ \mathrm{int}(V_{n+1}^n),$$

de modo que $\mathrm{int}(V_{n+1}^n)\cap\mathrm{int}(V_n^n)\neq\varnothing$. Se sigue ahora del modo en que $\mathcal{B}_n$ fue construida, que los elementos $(U_1^n,V_1^n,\cdots,U_n^n,V_n^n)$ y $(U_1^{n+1},V_1^{n+1},\cdots,U_n^{n+1},V_n^{n+1})$ de $\mathcal{B}_n$, no pueden ser distintos, por lo que

$$(U_1^n,V_1^n,\cdots,U_n^n,V_n^n)\ =\ (U_1^{n+1},V_1^{n+1},\cdots,U_n^{n+1},V_n^{n+1}).$$

Lo que acabamos de demostrar nos dice que ni U_j^n ni V_j^n dependen de n, de modo que hemos encontrado una sucesión $(U_1,V_1,U_2,V_2,\cdots)$ tal que $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{B}_n$ y con $x\in\mathrm{int}(V_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Pero ya que $(U_1,V_1,\cdots,U_n,V_n)\in\mathcal{X}_n$, resulta que la sucesión $p=(U_n,V_n)_{n=1}^\infty$ es un ε_α-juego el cual es ganado por el jugador α ya que ε_α es una estrategia ganadora para dicho jugador, es decir, $\bigcap_{n=1}^\infty V_n\subseteq G$, lo que a su vez implica que

$$x\in\bigcap_{n=1}^\infty\mathrm{int}(V_n)\ \subseteq\ \bigcap_{n=1}^\infty V_n\ \subseteq\ G.$$

Esto termina la prueba. ■

Como acabamos de ver, es mucho más difícil demostrar que la existencia de una estrategia ganadora para el jugador α implica la residualidad del conjunto G que el recíproco. Esto significa que *construir una* *estrategia ganadora es más fácil que verificar la residualidad directamente.* También es importante observar que, como en el juego de Banach-Mazur, para ciertos conjuntos G de un espacio topológico X, el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$ puede ser indeterminado para ambos jugadores. En efecto, si $X=[0,1]$, $\mathcal{J}$ es la colección de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X y $G\subseteq[0,1]$ es un conjunto de Luzin, entonces el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},[0,1])$ es claramente no determinado para ambos jugadores.

El Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby tiene, como cabe esperar, su radio de aplicación cuando se presume que algún subconjunto no vacío G, viviendo en algún espacio topológico X, es sospechoso de ser residual en dicho espacio. Existen muchas aplicaciones de éste resultado. Una de ellas, como veremos de inmediato, es proveer otra demostración del Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos completos.

Corolario 2.2.24. *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Prueba. Sea (X,d) un espacio métrico completo y suponga que X no es un espacio de Baire. Esto significa, invocando el Teorema 1.6.3, página 37, que existe un conjunto residual $G\subseteq X$ que no es denso en X. Sea $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos en X tal que $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ y escojamos un abierto U de X tal que $U\cap G=\varnothing$.

Para poder aplicar el Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby, debemos saber quién es, en primer lugar, $\mathcal{J}$. En este caso, $\mathcal{J}=\tau_*$. Siendo G residual, el Teorema 2.2.81 nos asegura que el jugador α posee una estrategia ganadora ε_α en el juego $\mathrm{BMO}(G,X)$. Veamos cómo estos hechos conducen a una contradicción. En efecto, suponga que $U_1=U$ es la primera elección del jugador β y sea $V_1=\varepsilon_\alpha(U_1)\subseteq U_1$ la respuesta, siguiendo su estrategia, del jugador α al movimiento U_1 de β. Puesto que $V_1\cap G_1\neq\varnothing$, la siguiente elección del jugador β es tomar una bola abierta $U_2:=U(x_1,r_1)$ incluida en $V_1\cap G_1$ con $r_1<1$ de modo tal que $\overline{U(x_1,r_1)}\subset V_1\cap G_1$. En el movimiento $n+1$, una vez que el jugador α, siguiendo su estrategia, hace su elección tomando un conjunto abierto $V_n=\varepsilon_\alpha(U_1,\ldots,U_n)\subseteq U_n$, responde el jugador β eligiendo una bola abierta $U_{n+1}=U(x_n,r_n)$ en $U_n\cap G_n$, el cual es no vacío, con $r_n<r_{n-1}/2^n$ de modo que $\overline{U(x_n,r_n)}\subset V_n\cap G_n$. Se construye así una partida $p=(U_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$ que es ganada, por consiguiente, por el jugador α pues ε_α es una estrategia ganadora para dicho jugador. Esto significa que $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\subseteq G$. Sin embargo, como $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\subseteq U_1$ y ya que $U_1\cap G=\varnothing$, entonces debe ocurrir que $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\varnothing$. Por otro lado, gracias al Teorema de Encaje de Cantor, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U(x_n,r_n)}\neq\varnothing$ y, en consecuencia,

$$\varnothing\;\neq\;\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U(x_n,r_n)}\;\subseteq\;\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\cap G_n\;=\;\varnothing.$$

Esta contradicción establece que X es un espacio de Baire. ■

Por supuesto, un argumento enteramente similar puede ser llevado a cabo usando el Teorema de Banach-Mazur en la demostración del resultado anterior. Como antes, se parte del supuesto de que X no es un espacio de Baire y se invoca el Teorema de Banach-Mazur quien garantiza que el jugador β posee una estrategia ganadora y se procede como en la demostración anterior. Lo único que cambia es que ahora la elección de las bolas abiertas las elige el jugador α en lugar de β.

Otra aplicación interesante del juego de Banach-Mazur-Oxtoby es el siguiente.

Teorema 2.2.82. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, Z un espacio de Baire y $F:Z\to 2^{(X^*,\omega^*)}$ una aplicación multivaluada* USCO *minimal. El conjunto G, formado por todos los $z\in Z$ tal que la cápsula convexa de $F(z)$ está contenida en alguna bola cerrada alrededor del origen de X^*, es residual en Z*

Prueba. En virtud del Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby bastará con comprobarse que el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BMO}(G,Z)$. Sea $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente en $(0,1)$ convergiendo a 0. Sea U cualquier conjunto abierto no vacío de Z y suponga que $U_1 := U$ es la primera elección del jugador β. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$C_n = \{z \in U_1 \,:\, F(z) \cap nB_{X^*} \neq \varnothing\}.$$

Puesto que F es superiormente semicontinua , los C_n son cerrados en U_1 y se cumple que $U_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Siendo U_1 un espacio de Baire, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(C_{n_0}) \neq \varnothing$. Sea $V_1 := \operatorname{int}(C_{n_0})$ la respuesta del jugador α a la elección U_1 de β. Observe que como F es USCO minimal, el Teorema 2.2.14 nos garantiza que $F(V_1)$ es un subconjunto de nB_{X^*}.

Sea U_2 la respuesta del jugador β a la elección V_1 de α. Pongamos $\delta_2 = \sup\big\{\, \|x^*\| : x^* \in F(U_2)\big\}$. Si $\delta_2 = 0$, entonces es suficiente que el jugador α elija $V_n = U_n$ para cualquier $n \geq 2$ para ganar la partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$. Supongamos ahora que $\delta_2 > 0$. Existe, por la definición de δ_2, un $x^* \in F(U_2)$ tal que $\|x^*\| > \delta_2(1-\varepsilon_2)$. Para este x^* podemos, también, elegir un $x_2 \in S_X$ satisfaciendo $x^*(x_2) > \delta_2(1-\varepsilon_2)$. Si ahora definimos

$$\Omega = \big\{y^* \in X^* \,:\, y^*(x_2) > \delta_2(1-\varepsilon_2)\big\}$$

resultará que $F(U_2) \cap \Omega \neq \varnothing$. Puesto que Ω es ω^*-abierto, una nueva aplicación del Teorema 2.2.14 nos proporciona la existencia de un abierto no vacío $V_2 \subseteq U_2$ tal que $F(V_2) \subseteq \Omega$. Por esto,

$$\langle F(V_2), x_2\rangle := \operatorname{ínf}\big\{y^*(x_2) \,:\, y^* \in F(V_2)\big\} \;\geq\; \delta_2(1-\varepsilon_2) \;>\; 0.$$

La segunda elección que hace el jugador α en respuesta al movimiento U_2 de β es tomar el conjunto V_2. Continuando inductivamente con este procedimiento y suponiendo que para ningún $n \in \mathbb{N}$ se da el caso trivial de que $F(U_n) = \{0\}$, entonces se obtiene una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n, \ldots$ en Z, números positivos $\delta_2, \delta_3, \ldots$ y vectores $x_2, x_3, \ldots$ en S_X tales que

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \cdots, \qquad\qquad \delta_n = \sup\big\{\, \|x^*\| : x^* \in F(U_n)\big\}$$

y

$$\langle F(V_n), x_n\rangle \;\geq\; \delta_n(1-\varepsilon_n) \;>\; 0$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \varnothing$, el jugador α gana el juego y termina la prueba. Supongamos ahora que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$ y sea $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Como $\delta_2 \geq \delta_3 \geq \cdots > 0$, definamos $\delta = \operatorname{lím}_n \delta_n$. Veamos que $\|x^*\| = \delta$ para cualquier $x^* \in \operatorname{co}(F(z))$, donde $\operatorname{co}(A)$ denota la cápsula convexa de A. En efecto, sea $x^* \in \operatorname{co}(F(z))$. Entonces existen vectores $x_1^*, \ldots, x_m^*$ en $F(z)$ y escalares positivos $a_1, \ldots, a_m$ con $a_1 + \cdots + a_m = 1$ tales que $x^* = a_1x_1^* + \cdots + a_mx_m^*$. Como $x_j^* \in F(z) \subseteq F(V_n) \subseteq F(U_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_n \;&\geq\; a_1\|x_1^*\| + \cdots + a_m\|x_m^*\| \;\geq\; \|a_1x_1^* + \cdots + a_mx_m^*\| \\ &\geq\; \big(a_1x_1^* + \cdots + a_mx_m^*\big)(x_n) \;\geq\; \delta_n(1-\varepsilon_n) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo tender n a infinito se obtiene que $\delta = \|a_1x_1^* + \cdots + a_mx_m^*\| = \|x^*\|$. Esto prueba que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq G$, lo cual significa que α es el vencedor del juego. Un llamado al Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby nos conduce a que G es residual en Z. ■

Casi todos los resultados de la Sección 2.1 del Capítulo 2 se pueden demostrar por medio de un argumento que involucra el juego de Banach-Mazur-Oxtoby. Para dar una muestra de ello, repetiremos la demostración de los Teorema 2.1.1 y Teorema 2.1.13 usando el juego de Banach-Mazur-Oxtoby (véase también [78], Example 10.5, p. 415).

Teorema 2.2.83. *El conjunto* $\mathcal{ND}[0,1]$ *de todas las funciones continuas nunca diferenciables en* $[0,1]$ *es residual en* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Si queremos hacer uso del Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby es imprescindible que sepamos quiénes son X, G y $\mathcal{J}$. Para este resultado $X = C[0,1]$, $G = \mathcal{ND}[0,1]$ y $\mathcal{J} = \tau_*$. Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, los jugadores α y β han elegido los conjuntos

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq U_{n-1} \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n,$$

donde, como siempre, U_1 es la primera elección del jugador β. Para saber cuál debe ser la respuesta de α al movimiento U_n efectuado por β, escojamos una función $g_n \in U_n$ y un $\varepsilon_n > 0$ tal que la bola abierta $U(g_n, 4\varepsilon_n) \subseteq U_n$. Por otro lado, siendo g_n una función uniformemente continua, existe un $0 < \delta_n <$ mín$\{\varepsilon_n/n, 1/2\}$ tal que

$$\big|g_n(y) - g_n(x)\big| < \varepsilon_n \quad \text{siempre que} \quad |x-y| < \delta_n \tag{1}$$

Tomemos $b_n > 2\pi/\delta_n$ y definamos $h_n(x) = 3\varepsilon_n \operatorname{sen}(b_n x)$. La respuesta del jugador α a la elección U_n de β es elegir la bola abierta $V_n = U(g_n + h_n, \frac{1}{2}\varepsilon_n) \subseteq U_n$. Con esta estrategia, el jugador α gana la partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^\infty$, es decir, $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \subseteq G$. En efecto, suponga por un momento que $f \in \bigcap_{n=1}^\infty V_n$ pero que $f \notin G$. Esto significa que $f'(x)$ existe para algún $x \in [0,1]$. Escojamos un entero n lo suficientemente grande de modo que satisfaga $1 + |f'(x)| < n$. Puesto que $2\pi/b_n < \delta_n$ y $n\delta_n < \varepsilon_n$ tenemos que

$$\frac{2\pi\big(1 + |f'(x)|\big)}{b_n} \;<\; \big(1 + |f'(x)|\big)\delta_n \;<\; \varepsilon_n \tag{2}$$

Por otro lado, como $f'(x)$ existe, podemos determinar un $0 < \delta < \delta_n$ tal que

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x)\right| \;<\; 1 \tag{3}$$

para $0 < |y - x| < \delta$. Mirando en el intervalo de longitud 2π, $J_n = (b_n x - 2\pi, b_n x + 2\pi)$, podemos hallar un par de números $\xi_1, \xi_2 \in J_n$ tales que $|\xi_1 - \xi_2| = 2\pi$ y $|\operatorname{sen}(\xi_i) - \operatorname{sen}(b_n x)| \geq 1$, $i = 1,2$. Sea $y_i = \xi_i/b_n$ para $i = 1,2$. Entonces

$$|y_i - x| = \left|\frac{\xi_i - b_n x}{b_n}\right| \leq \frac{2\pi}{b_n} < \delta_n, \qquad i = 1,2, \tag{4}$$

de donde se sigue que al menos uno de los dos puntos y_1 o y_2 está en $[0,1]$. Elijamos uno de ellos, si ambos están, o el que esté en dicho intervalo, y llamémoslo y. Se tiene entonces

$$\big|g_n(y) - g_n(x)\big| < \varepsilon_n \qquad \text{y} \qquad \big|h_n(y) - h_n(x)\big| = 3\varepsilon_n \big|\operatorname{sen}(\xi_i/b_n) - \operatorname{sen}(x)\big| \geq 3\varepsilon_n,$$

Observemos finalmente que, por un lado, usando (3) y (4)

$$|f(y) - f(x)| = \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| |y - x| \leq \big(1 + |f'(x)|\big)|y - x| < \big(1 + |f'(x)|\big)\delta_n < \varepsilon_n,$$

mientras que por estar f en $V_n = U(g_n + h_n, \frac{1}{2}\varepsilon_n)$, se cumple que

$$|f(y) - f(x)| \geq \big|h_n(y) - h_n(x)\big| - \big|g_n(y) - g_n(x)\big| - \varepsilon_n > \varepsilon_n.$$

Esta contradicción establece que $f \in G$ y, en consecuencia, α gana la partida p. Esto prueba que α posee una estrategia ganadora en el juego BMO$(G, \mathcal{J}, X)$. Un llamado al Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby nos revela que G es residual en X. ■

Teorema 2.2.84. *El conjunto* $\mathcal{NM}[0,1]$, *de todas las funciones continuas nunca monótonas en* $[0,1]$, *es residual en* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Prueba. Para poder aplicar el Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby, debemos precisar quiénes son X, G y $\mathcal{J}$. Los conjuntos X y G so fáciles de determinar: $X = C[0,1]$ y $G = \mathcal{NM}[0,1]$. Determinar $\mathcal{J}$ es más sutil. $\mathcal{J}$ será la familia de todas las bolas cerradas $B(f,r)$ de $C[0,1]$ con $r > 0$ y cuyo centro f pertenece al conjunto $\mathrm{C_{LT}}[0,1]$ formado por todas las funciones en $C[0,1]$ que son lineales a trozos. Recuerde que dicho conjunto en norma-denso en $C[0,1]$ (Lema 2.1.1, página 118), de modo que $\mathcal{J}$ es una pseudo-base en X. Con estos ingredientes a mano, nos preparamos a demostrar que el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$.

Supongamos que en el n-ésimo movimiento los jugadores ya han elegidos los conjuntos

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n$$

de acuerdo a las reglas del juego. Por supuesto, el último movimiento de β es el conjunto $U_n = B(g_n, r_n)$ para alguna función continua lineal a trozo g_n y algún $r_n > 0$. ¿Cuál debe ser la respuesta del jugador α a este último movimiento de β? Es claro, según las reglas del juego, que α también debe elegir una bola cerrada $B(f_n, \varepsilon_n)$ incluida en U_n, con $f_n \in \mathrm{C_{LT}}[0,1]$. Lo importante, por supuesto, es cómo α debe escoger su función continua lineal a trozo f_n y su radio ε_n de modo que le permita ganar dicha partida. Veamos cómo debe hacerlo.

1. Escojamos una partición $P_n = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1\}$ del intervalo $[0,1]$ de modo tal que:

   (a) $\max\{x_{i+1} - x_i : i = 0,1,2,\ldots,k-1\} < 1/n$, (esto permite que las particiones se hagan más finas a medida que el juego progrese) y

   (b) $\max\{|g_n(x) - g_n(y)| : x,y \in [x_i, x_{i+1}]\} < r_n/3$, para $i = 0,1,2,\ldots,k-1$ (lo cual es posible debido al hecho de que g_n es uniformemente continua).

2. Definamos una función continua lineal a trozo f_n del modo siguiente: para cada $i = 0,1,2,\ldots,k$ pongamos $f_n(x_i) = g_n(x_i)$ y en los puntos internos $x_i + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_i)$ y $x_i + \frac{2}{3}(x_{i+1} - x_i)$ definamos

$$f_n\left(x_i + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_i)\right) = g_n(x_i) - \frac{1}{3}r_n \qquad \text{y} \qquad f_n\left(x_i + \frac{2}{3}(x_{i+1} - x_i)\right) = g_n(x_i) + \frac{1}{3}r_n.$$

   Completamos la definición de f_n haciendo que ella sea lineal en los intervalos $[x_i, x_i + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_i))$, $[x_i + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_i), x_i + \frac{2}{3}(x_{i+1} - x_i))$ y $[x_i + \frac{2}{3}(x_{i+1} - x_i), x_{i+1}]$. Es fácil ver que $\|g_n - f_n\| < 2r_2/3$, de modo que $B(f_n, r_n/3) \subseteq B(g_n, r_n)$.

3. Además, se verifica sin problemas, que cualquier $f \in B(f_n, r_n/9)$ es no-monótona en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de P_n. Pongamos entonces $\varepsilon_n = r_n/3$ y definamos $V_n := B(f_n, \varepsilon_n)$.

Continuando con este proceso obtenemos una partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^\infty$. Puesto que la norma de P_n tiende a cero, se sigue de (3) que cualquier función $f \in \bigcap_{n=1}^\infty V_n$ es nunca-monótona, es decir, $f \in G$ y, por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \subseteq G$. Esto prueba que α gana la partida p y, en consecuencia, dicho jugador posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BMO}(G,\mathcal{J},X)$. Por el Teorema de Banach-Mazur-Oxtoby, el conjunto G es residual en X. ∎

El siguiente corolario puede resultar útil en algunos casos.

Corolario 2.2.25. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff. Si* X *es* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(X)$ *y si* H *es un subconjunto de primera categoría en* X*, entonces existe una estrategia* ε_α *para el jugador* α *tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing \qquad y \qquad H \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) = \varnothing, \tag{$\star$}$$

para cualquier ε_α*-juego* $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$.

Prueba. Observemos, en primer lugar, que por el Teorema 2.2.75, X es un espacio de Baire y en consecuencia, $H \neq X$. Escribamos $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es un subconjunto cerrado nunca-denso de X. Sea ε'_α una estrategia para el jugador α y defina esta otra estrategia de α del modo siguiente:

$$\varepsilon_\alpha(U_1,\ldots,U_n) = \varepsilon'_\alpha(U_1 \setminus F_1, V_1, U_2 \setminus F_2, V_2, \ldots, U_n \setminus F_n), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Con esta estrategia, la condición $(\star)$ se cumple para cualquier ε_α-juego $(U_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$. En efecto, si $(U_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un ε_α-juego, entonces $(U_n \setminus F_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un ε'_α-juego por la definición de ε_α. Siendo ε'_α una estrategia ganadora, se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(U_n \setminus F_n\big) \neq \varnothing$, lo cual implica que $H \cap \big(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\big) = \varnothing$. ■

2.2.17. || ► El juego de Choquet

Si uno modifica ligeramente la forma cómo los jugadores, en el juego $\mathrm{BM}(X)$, hacen su elección, uno obtiene un nuevo juego que permite caracterizar a los espacios metrizables que son Čech-completos. Las reglas para dicho juego se especifican del modo siguiente: como siempre, el jugador β es quien tiene el privilegio de comenzar cualquiera de las partidas del juego eligiendo, en su primer movimiento, además de un subconjunto abierto no vacío U_1 de X, un punto $x_1 \in U_1$ (su movimiento es, entonces, el par (U_1,x_1)). Le toca el turno al jugador α y él, o ella, escoge un entorno abierto V_1 de x_1 con $V_1 \subseteq U_1$. En general, si (U_n,x_n) es la elección de β en el n-ésimo movimiento, entonces α responde eligiendo un abierto $V_n \subseteq U_n$ conteniendo a x_n. Continuando de este modo uno obtiene un nuevo juego al que llamaremos **juego de Choquet** y que designaremos por $\mathrm{Ch}(X)$. Diremos que α gana la partida $p = (U_n,x_n,V_n)_{n=1}^{\infty}$ si $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$, en caso contrario el vencedor de la partida es el jugador β. Es importante destacar que en este juego al jugador α no le está permitido elegir otros puntos distintos de los seleccionados por el jugador β. Las nociones de estrategia (estrategia estacionaria) y de estrategia ganadora (estrategia estacionaria ganadora) para ambos jugadores se definen de modo similar como se hizo en el juego de Banach-Mazur.

Definición 2.2.24. *Un espacio topológico de Hausdorff* (X,τ) *se llama* α***-favorable para* Ch**(X) *o* ***espacio fuertemente de Choquet****, si el jugador* α *posee una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{Ch}(X)$*. Si el jugador* β *no posee estrategia ganadora alguna en el juego* $\mathrm{Ch}(X)$*, entonces diremos que* X *es* β***-desfavorable para* Ch**(X).

Es claro que todo espacio fuertemente de Choquet es un espacio de Choquet. Más aun, todo espacio métrico completo así como todo espacio de Hausdorff localmente compacto son espacios fuertemente de Choquet. Sin embargo, un espacio métrico que no es completo pero que posee un subconjunto denso de puntos aislados es un espacio de Choquet que no es fuertemente de Choquet. Estos hechos demuestran que, en general, los conceptos de espacio fuertemente de Choquet y de espacio de Choquet son distintos. Según nuestra definición de los juegos de Banach-Mazur y de Choquet, es fácil ver que el juego $\mathrm{Ch}(X)$ es "*más favorable*" para el jugador β (y "*menos favorable*" para el jugador α) que el juego $\mathrm{BM}(X)$: una estrategia ganadora ε_β para β en el juego $\mathrm{BM}(X)$, al agregarsele a ella puntos $x_n \in U_n$ de alguna manera, sigue siendo ganadora en $\mathrm{Ch}(X)$, ya que las posibilidades para α se reducen. Por otro lado, una estrategia ε_β ganadora en $\mathrm{Ch}(X)$, al suprimirsele los puntos x_n, no necesariamente sigue siendo ganadora en $\mathrm{BM}(X)$, ya que las posibilidades de α aumentan. Lo anterior se puede escribir en la forma:

Teorema 2.2.85 (Debs). *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff.*

(1) *Si* X *es* α*-favorable para* $\mathrm{Ch}(X)$*, entonces* X *es* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(X)$.

(2) *Si* X *es* β*-desfavorable para* $\mathrm{Ch}(X)$*, entonces* X *es* β*-desfavorable para* $\mathrm{BM}(X)$.

Prueba. Es inmediata.

En particular, combinando el Teorema 2.2.75 con (1) del resultado anterior o el Teorema 2.2.74 con (2) del teorema anterior, tenemos que:

Corolario 2.2.26. *Si* (X,τ) *es un espacio topológico de Hausdorff el cual es* α*-favorable (o* β*-desfavorable) para* $\mathrm{Ch}(X)$*, entonces* X *es un espacio de Baire.*

Recordemos que el producto de dos espacios de Baire no es necesariamente un espacio de Baire. Sin embargo, si X y Y son espacios fuertemente de Choquet, entonces su producto cartesiano es un espacio fuertemente de Choquet. Con estos resultados a la mano podemos concluir que si $\mathcal{CH}$ denota la familia de todos los espacios fuertemente de Choquet, entonces todo elemento de $\mathcal{CH}$ es un espacio de Baire; es decir, $\mathcal{CH} \subseteq \mathfrak{B}a$ y dicha familia es hereditaria por subconjuntos G_δ (véase la demostración del próximo resultado) y por productos cartesianos finitos.

El siguiente resultado establece que los subconjuntos G_δ viviendo en un espacio fuertemente de Choquet heredan esa propiedad.

Lema 2.2.23. . *Sea* (X,τ) *un espacio fuertemente de Choquet. Si* G *es un subconjunto* G_δ *de* X*, entonces* G *es un espacio fuertemente de Choquet.*

Prueba. Supongamos que G es un G_δ. Entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de abiertos en X tal que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Indiquemos por ε_α una estrategia ganadora del jugador α en el juego $\mathrm{Ch}(X)$, la cual existe debido a que X es un espacio fuertemente de Choquet. Denotemos, además, por α_1 y β_1 los jugadores en el juego $\mathrm{Ch}(G)$. Nuestro objetivo es construir una estrategia ganadora ε_{α_1} para el jugador α_1 partiendo de la estrategia ε_α. Veamos cómo se hace.

Imaginemos que el jugador β_1 comienza la partida escogiendo el par (U_1', x_1'), donde U_1' es un abierto en G y $x_1' \in U_1'$. Veamos cuál debe ser la respuesta de α_1 a esa elección de β_1. Siendo U_1' un abierto de G, existe un abierto U_1 en X tal que $U_1' = U_1 \cap G$.

Supongamos ahora que, paralelamente, el jugador β comienza la partida en el juego $\mathrm{Ch}(X)$ eligiendo el par $(U_1 \cap G_1, x_1')$ y sea V_1 un entorno abierto de ${x_1}'$ incluido en $U_1 \cap G_1$ la respuesta del jugador α, de acuerdo con su estrategia, al movimiento anterior de β. Puesto que $x_1' \in V_1$, el conjunto $V_1' = V_1 \cap G$ es no vacío y entonces el jugador α_1 deberá elegir el conjunto V_1' en respuesta al primer movimiento de β_1. Observe que $x_1' \in V_1'$.

El turno ahora es para el jugador β_1 y él, o ella, elige el par (U_2', x_2') con U_2' un abierto no vacío de G contenido en V_1' y con $x_2' \in U_2'$. De nuevo, sea U_2 un abierto en X tal que $U_2' = U_2 \cap G$. Reemplazando a U_2 por $U_2 \cap V_1$ si fuera necesario, podemos suponer que $U_2 \subseteq V_1$. Sea $(U_2 \cap G_2, x_2')$ el siguiente movimiento del jugador β en $\mathrm{Ch}(X)$. Entonces α, siguiendo con su estrategia, elige un abierto V_2 tal que ${x_2}' \in V_2 \subseteq U_2 \cap G_2$. Ya que $x_2' \in V_2$, resulta que el conjunto $V_2' = V_2 \cap G$ es no vacío, y entonces el jugador α_1 deberá responder a la elección efectuada por su adversario β_1 con el abierto V_2'. Si se continua inductivamente con este procedimiento se obtiene una ε_{α_1}-partida $p' = (U_n', x_n', V_n')_{n=1}^{\infty}$ en el juego $\mathrm{Ch}(G)$ obtenida de la ε_α-partida $p = (U_n, x_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$. Puesto que ε_α es una estrategia ganadora, la ε_α-partida p es ganada por el jugador α lo cual significa que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$. Pero como $V_n \subseteq G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G$, de donde resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n' = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap G) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap G = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing.$$

Esto prueba que α_1 gana la partida p' y termina la demostración del Lema. ■

El resultado fundamental que caracteriza a los espacios métricos α-favorables en el juego de Choquet es el siguiente ([97], Theorem 8.7):

Teorema 2.2.86 (Choquet). *Sea* (X,τ) *un espacio de Hausdorff completamente regular y considere las siguientes condiciones:.*

(1) *X es un espacio fuertemente de Choquet.*

(2) *X es Čech-completo.*

Entonces $(2) \Rightarrow (1)$. *Si, además, X es metrizable, entonces* $(1) \Rightarrow (2)$.

Prueba. $(2) \Rightarrow (1)$. Sabemos, por el Teorema 1.11.10, página 69, que (2) es equivalente a: X es un G_δ en βX. Ahora bien, como βX es compacto, resulta que él es un espacio fuertemente de Choquet y, por consiguiente, aplicando el Lema 2.2.23, tenemos que X es un espacio fuertemente de Choquet.

Suponga ahora que X es un espacio métrico. La prueba de que $(1) \Rightarrow (2)$ se puede ver, por ejemplo, en Kechris [256], Theorem 8.17 (ii), p. 45-46. ■

2.2.18. ‖ ► El juego de Kenderov-Moors y fragmentabilidad

Kenderov y Moors [261] modificando de nuevo las reglas del juego de Banach-Mazur, desarrollan un nuevo juego con el cual establecen una caracterización de la posesión de estrategias ganadoras para el jugador α con la noción de fragmentabilidad en dicho juego.

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. El juego de Kenderov-Moors involucra, como en el juego de Banach-Mazur, a dos jugadores α y β que en cada partida eligen, alternativamente, subconjuntos *no vacíos* de X. El jugador β, como siempre, es quien comienza cada partida seleccionando un subconjunto arbitrario A_1 de X. Le toca el turno a α y su elección es un subconjunto B_1 de A_1 el cual es relativamente abierto en A_1. En el n-ésimo paso del desarrollo de la partida, β elige cualquier subconjunto A_n del último movimiento B_{n-1} efectuado por α y entonces α responde tomando un subconjunto relativamente abierto B_n del conjunto A_n. Continuando de este modo, los jugadores producen una sucesión encajada de conjuntos no vacíos

$$A_1 \supseteq B_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq B_n \supseteq \cdots$$

a la que llamaremos, como antes, una partida y denotada por $p = (A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$. Al jugador α se le declara el ganador de la partida p si

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

es vacío o bien consta de un único punto. En caso contrario, se declara vencedor de la partida p al jugador β. A este juego lo llamaremos **juego de Kenderov-Moors** y lo denotaremos por $\mathrm{KM}(X)$. Como en el juego de Banach-Mazur, todos los otros conceptos relacionados con este juego tales como estrategia y estrategia ganadora para cada jugador en el juego de Kenderov-Moors se definen de modo enteramente similar.

Definición 2.2.25. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X es **α-favorable para el juego** $\mathrm{KM}(X)$ si existe una estrategia ganadora para el jugador α en $\mathrm{KM}(X)$ y **β-desfavorable** si no existe estrategia ganadora alguna para el jugador β en $\mathrm{KM}(X)$.*

El siguiente resultado caracteriza a los espacios fragmentables por medio de la existencia de estrategias ganadoras para el jugador α en el juego de Kenderov-Moors.

Teorema 2.2.87 (Kenderov-Moors, [261]). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) *X es fragmentable.*

(2) *El jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{KM}(X)$.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que X es fragmentado por alguna métrica d. Sin perder generalidad podemos asumir que d es acotada (en caso contrario, usamos $d' = d/(1+d)$ la cual también fragmenta a X). Nuestro objetivo es definir una estrategia ε_α para α y demostrar que ella es una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{KM}(X)$. El jugador β comienza la partida eligiendo un subconjunto arbitrario no vacío A_1 de X. Debido a la fragmentabilidad de X, existe un subconjunto no vacío relativamente abierto B_1 de A_1 tal que

$$\operatorname{diam}(B_1) \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A_1).$$

Pongamos $\varepsilon_\alpha(A_1) = B_1$. En general, la estrategia ε_α para el jugador α asigna, a cada juego parcial $A_1 \supseteq B_1 \supseteq \cdots \supseteq A_k$, el conjunto $B_k = \varepsilon_\alpha(A_1, B_1, \ldots, A_k)$ relativamente abierto de A_k, donde los conjuntos A_k y B_k cumplen con la relación $\operatorname{diam}(B_k) \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A_k)$. Si α juega de acuerdo a esta estrategia, él o ella ganará todos los ε_α-juegos debido al hecho de que el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ tendrá diámetro cero y, por consiguiente, contendrá a lo sumo un punto. Esto prueba que α posee una estrategia ganadora en $\mathrm{KM}(X)$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que el jugador α tiene una estrategia ganadora ε_α para el juego $\mathrm{KM}(X)$. Usaremos ε_α para construir una σ-partición relativamente abierta del espacio X que, además, separe los puntos de X. Comencemos definiendo

$$A_1^1 = X \qquad \text{y} \qquad B_1^1 = \varepsilon_\alpha(A_1^1).$$

Sea $\xi > 1$ un ordinal tal que, para cada $\eta < \xi$, los conjuntos A_1^η y $B_1^\eta = \varepsilon_\alpha(A_1^\eta)$ han sido construidos y pongamos

$$A_1^\xi = X \setminus \bigcup_{\eta<\xi} B_1^\eta.$$

Si $A_1^\xi \neq \varnothing$, entonces definimos $B_1^\xi = \varepsilon_\alpha(A_1^\xi)$ y continuamos nuestra construcción. Es claro que, en algún paso de la construcción, debemos alcanzar el vacío; es decir, tendremos que encontrarnos con un ordinal ξ, al que llamaremos ξ_θ, tal que $A_1^{\xi_\theta} = \varnothing$ y entonces paramos el proceso. Cuando este último paso ha sido alcanzado obtenemos una familia de ε_α-juegos parciales

$$\left(A_1^\xi, B_1{}^\xi\right)_{1\leq\xi<\xi_\theta}.$$

Para cada $\xi < \xi_\theta$, pongamos $W_1^\xi = \bigcup_{\eta\leq\xi} B_1^\eta$. Dos hechos debemos destacar en relación a los conjuntos $B_1{}^\xi$, donde $1 \leq \xi < \xi_\theta$, obtenidos anteriormente:

- lo primero es que la familia $\{B_1^\xi : 1 \leq \xi < \xi_\theta\}$ es disjunta y cubre a X. La ventaja de esta observación es que ella nos permite asociar a cada $x \in X$, un único ε_α-juego parcial (A_1^ξ, B_1^ξ). En efecto, notemos que si $x \in X = \bigcup_{1 \leq \xi < \xi_\theta} B_1^\xi$, entonces existe un único $\xi < \xi_\theta$ tal que $x \in B_1^\xi \subseteq A_1^\xi$ y entonces asociamos al punto elegido x, el ε_α-juego parcial (A_1^ξ, B_1^ξ).

- lo segundo es que, para cualquier $\xi < \xi_\theta$, el conjunto W_1^ξ es abierto en X.

Nuestro próximo paso es construir, para cada ordinal ξ con $1 \leq \xi < \xi_\theta$, una familia

$$\big(A_2^{\xi\gamma}, B_2^{\xi\gamma}\big)_\gamma$$

de extensiones o continuaciones del ε_α-juego parcial (A_1^ξ, B_1^ξ). Para lograrlo, sea ξ tal que $1 \leq \xi < \xi_\theta$ y definamos

$$A_2^{\xi 1} = B_1^\xi \qquad \text{y} \qquad B_2^{\xi 1} = \varepsilon_\alpha\big(A_1^\xi, B_1^\xi, A_2^{\xi 1}\big).$$

donde $\xi 1$ es un índice que consiste de los dos símbolos ξ y 1. Supongamos que para algún ordinal $\gamma > 1$, todos los pares $(A_2^{\xi\eta}, B_2^{\xi\eta})_{\eta<\gamma}$ han sido construidos y pongamos

$$A_2^{\xi\gamma} = B_1^\xi \setminus \bigcup_{\eta<\gamma} B_2^{\xi\eta}.$$

Si $A_2^{\xi\gamma} \neq \varnothing$, definimos

$$B_2^{\xi\gamma} = \varepsilon_\alpha\big(A_1^\xi, B_1^\xi, A_2^{\xi\gamma}\big)$$

y continuamos nuestra construcción. De modo enteramente similar al caso anterior, tendrá que ocurrir que, en algún paso, debamos alcanzar el vacío, es decir, deberá existir un ordinal γ_ξ, tal que

$$A_2^{\xi\gamma_\xi} = \varnothing$$

y entonces paramos el proceso. Como antes, una vez alcanzado este punto, obtenemos una familia

$$\big(A_1^\xi, B_1^\xi, A_2^{\xi\gamma}, B_2^{\xi\gamma}\big)_{1\leq\gamma<\gamma_\xi}$$

de ε_α-juegos parciales la cual extiende a los ε_α-juegos parciales $(A_1^\xi, B_1^\xi)_\xi$. De nuevo, debemos observar dos aspectos que son importantes destacar. El primero es que la familia

$$\big\{B_2^{\xi\gamma} : 1 \leq \gamma < \gamma_\xi\big\}$$

es disjunta y cubre a B_1^ξ y, por lo tanto,

$$X = \bigcup_{1\leq\xi<\xi_1} B_1^\xi = \bigcup_{1\leq\xi<\xi_1} \bigcup_{1\leq\gamma<\gamma_\xi} B_2^{\xi\gamma}.$$

Esto permite, como antes, asociar a cada $x \in X$, un único ε_α-juego parcial $(A_1^\xi, B_1^\xi, A_2^{\xi\gamma}, B_2^{\xi\gamma})$ tal que $x \in B_2^{\xi\gamma}$. En efecto, si $x \in X$ entonces existe un único $\xi < \xi_\theta$ tal que $x \in B_1^\xi \subseteq A_1^\xi$; para este ordinal ξ, existe a su vez un único índice $\gamma < \gamma_\xi$ tal que $x \in B_2^{\xi\gamma} \subseteq A_2^{\xi\gamma}$. De este modo asociamos a x el ε_α-juego parcial $(A_1^\xi, B_1^\xi, A_2^{\xi\gamma}, B_2^{\xi\gamma})$ tal que $x \in B_2^{\xi\gamma}$. El segundo aspecto es que los conjuntos

$$\bigcup_{\eta<\gamma} B_2^{\xi\eta}, \quad 1 \leq \gamma < \gamma_\xi$$

son abiertos en B_1^ξ.

Si continuamos con este proceso usando, en cada paso, la estrategia ε_α del jugador α podemos construir, inductivamente, una sucesión de familias de ε_α-juegos parciales

$$\left\{ \left(A_1^{\xi_1}, B_1^{\xi_1}, A_2^{\xi_1\xi_2}, B_2^{\xi_1\xi_2}, \ldots, A_n^{\xi_1\cdots\xi_n}, B_n^{\xi_1\cdots\xi_n} \right)_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\Gamma_n} \right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

donde Γ_n denota el conjunto de todas las n-tuplas de ordinales que aparecen en el n-ésimo paso de nuestra construcción, el cual resultará un conjunto bien ordenado si le imponemos el orden lexicográfico. Es importante que resumamos algunas de las propiedades de los conjuntos B_k^ν, con $\nu \in \Gamma_k$, que son de nuestro interés:

(α_1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Gamma_n$ se tiene que

$$B_n^{\xi_1\cdots\xi_n} = \bigcup_{(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1})\in\Gamma_{n+1}} B_{n+1}^{\xi_1\cdots\xi_n\xi_{n+1}}.$$

Partiendo del hecho de que $X = \bigcup_{\xi_1\in\Gamma_1} B_1^{\xi_1}$, se sigue, por inducción, que

(α_2) para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia

$$\left(B_n^{\xi_1\cdots\xi_n} \right)_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\Gamma_n}$$

es un cubrimiento de X. Más aun, por el método de construcción que hemos usado, vemos que

(α_3) para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Gamma_n$ se cumple que

$$B_n^{\xi_1\cdots\xi_n} \quad \text{es relativamente abierto en} \quad B_{n-1}^{\xi_1\cdots\xi_{n-1}} \setminus \bigcup_{1\leq\eta<\xi_n} B_n^{\xi_1\cdots\xi_{n-1}\eta},$$

de donde se deduce (véase la Proposición 2.2.1, página 311) que

(α_4) para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Gamma_n$,

$$\bigcup_{1\leq\eta<\xi_n} B_n^{\xi_1\cdots\xi_{n-1}\eta} \quad \text{es relativamente abierto en} \quad B_{n-1}^{\xi_1\cdots\xi_{n-1}}.$$

De $(\alpha_3), (\alpha_4)$ e inducción, se obtiene que

(α_5) para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Gamma_n$, el conjunto $W_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}$ definido por

$$W_n^{\xi_1 \cdots \xi_n} = \bigcup_{(\eta_1,\ldots,\eta_n) \leq (\xi_1,\ldots,\xi_n)} B_n^{\eta_1 \cdots \eta_n}$$

es abierto en X.

Nótese que (α_2) y (α_5) nos revelan que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}\right)_{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \Gamma_n} \quad \text{es una partición relativamente abierta de } X,$$

y, por lo tanto,

$$\left\{\left(B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}\right)_{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \Gamma_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{es una } \sigma\text{-partición relativamente abierta de } X.$$

Veamos que ésta σ-partición separa los puntos de X. En efecto, nuestra construcción implica que cada $x \in X$ determina, de manera única, un ε_α-juego

$$\left(A_1^{\xi_1}, B_1^{\xi_1}, A_2^{\xi_1 \xi_2}, B_2^{\xi_1 \xi_2}, \ldots, A_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}, B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}, \ldots\right)$$

tal que $x \in B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que la estrategia ε_α es ganadora, resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n} = \{x\}.$$

De aquí se deduce que si $y \in X$ con $y \neq x$, entonces $y \notin B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}$ para algún n suficientemente grande, lo cual prueba que $\left\{\left(B_n^{\xi_1 \cdots \xi_n}\right)_{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \Gamma_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ separa los puntos de X.

Uno puede trazar dos caminos para llegar a la conclusión de que el espacio X es fragmentable. En efecto, uno de esos caminos es invocar el Teorema 2.2.59 para concluir que X es fragmentable. El otro camino es construir una métrica que fragmenta a X. Veamos esto último. Notemos que la aplicación $x \to p(x)$ es uno-a-uno. Para cada $x', x'' \in X$ sean

$$p(x') = (A_i{}', B_i{}') \qquad \text{y} \qquad p(x'') = (A_i{}'', B_i{}'')$$

donde $p(x)$ es el juego unívocamente determinado por x. Si ahora definimos

$$d(x', x'') = \begin{cases} 0 & \text{si } B_i{}' = B_i{}'' \text{ para todo } i \geq 1, \\ \\ n^{-1} & \text{donde } n = \text{mín}\{i : B_i{}' \neq B_i{}''\}. \end{cases}$$

resulta que $d(\cdot,\cdot)$ es, en realidad, una métrica sobre X. Veamos que ella fragmenta a X. En efecto, sean A un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$. Escojamos algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ y pongamos $\xi^* = \text{mín}\{\xi \in \Gamma_{n_0} : B_{n_0}^{\xi} \cap A \neq \varnothing\}$. Para el conjunto abierto

$$W = \bigcup_{\substack{\eta \leq \xi^* \\ \eta \in \Gamma_{n_0}}} B_{n_0}^{\eta}$$

tenemos que

$$W \cap A = B_{n_0}^{\xi^*} \cap A$$

lo que nos muestra que $B_{n_0}^{\xi^*} \cap A$ es un subconjunto relativamente abierto de A. Por otro lado,

$$d(x', x'') \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

siempre que $x', x'' \in B_{n_0}^{\xi^*} \cap A$; es decir, $d - \mathrm{diam}(B_{n_0}^{\xi^*} \cap A) < \varepsilon$. Esto prueba que X es fragmentado por la métrica d y con ello termina la prueba. ■

Comentario Adicional 2.2.23 En [261], Kenderov y Moors usan el resultado anterior para demostrar que:

(1) *Si* $(X\,\|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach y si las topologías débil y débil-*$*$ *en el dual* X^* *de* X *coinciden sobre* S_{X^*}, *entonces* (B_X, ω) *es fragmentable*.

(2) *Si* $(X\,\|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach* WCD, *entonces* (X^*, ω^*) *es fragmentable*.

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es WCD, *débilmente numerablemente determinado*, si existe una familia numerable $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de (X^{**}, ω^*) tal que, para cada $x \in X$, existe una subfamilia encajada $F_{n_1} \supseteq F_{n_2} \supseteq \cdots$, con $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{n_i} \subseteq X$.

(3) $(\ell^{\infty}/c_0, \omega)$ *no es fragmentable.*

(4) Si se modifica la regla ganadora para el jugador α en el juego de Kenderov-Moors, se obtiene un nuevo juego ideado por F. Topsøe y generalizado por E. Michael (véase, [310], p. 519) con el que obtiene una caracterización de los espacios topológicos de Hausdorff que poseen una criba exhaustiva completa. Los detalles se pueden ver en [310], p.519. El **juego de Topsøe-Michael** TM(X) se define igual que el juego de Kenderov-Moors pero cambiando la regla ganadora. El jugador α se declara ganador en el juego TM(X) si la sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ es completa (véase la definición de sucesión completa en la página 76, Definición 1.11.9) para cualquier partida $p = (A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ jugada por ambos jugadores.

Teorema de Topsøe-Michael. *Para un espacio topológico de Hausdorff* (X, τ) *las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) X *tiene una criba exhaustiva completa*.

(2) *El jugador* α *posee una estrategia estacionaria ganadora en el juego* TM(X).

(3) *El jugador* α *posee una estrategia ganadora en el juego* TM(X).

La clase de los espacios de Stegall. *Un espacio topológico de Hausdorff* (Y, τ) *pertenece a la clase* $\mathcal{S}$ *de los* ***espacios de Stegall*** *(respectivamente, a la clase* $\mathcal{S}_\omega$ *de los* ***espacios débilmente de Stegall****) si, para cualquier espacio de Baire (respectivamente, cualquier espacio métrico completo)* X *y cualquier aplicación multivaluada* USCO *minimal* $F : X \to 2^Y$, *existe un subconjunto residual* G *de* X *tal que* F *es a un sólo valor en todo punto de* G.

El estudio de estos tipos de espacios es muy natural, especialmente en el contexto de los espacios de Banach, pues: *si* X *es un espacio de Banach y* $(X^*, \omega^\star)$ *es un espacio débilmente de Stegall, entonces* X *es un espacio de Gâteaux diferenciabilidad, pero no necesariamente un espacio débilmente de Asplund*. Este resultado es particularmente interesante y significativo ya que por mucho tiempo se mantuvo, como un problema abierto, saber si todo espacio débilmente de Asplund era un espacio de Gâteaux diferenciabilidad. Hoy en día sabemos, gracias a W. B. Moors y S. Somasundaram, que tal cosa no es verdad. En efecto, en [321], los autores exhiben un espacio de Gâteaux diferenciabilidad que no es débilmente de Asplund. Similarmente, O. Kalenda en [252] demuestra la existencia de un espacio de Banach X que es débilmente de Asplund pero no está en la clase $\mathcal{S}$.

Es fácil demostrar que todo espacio métrico pertenece a la clase $\mathcal{S}$ y que todo compacto K que esté en la clase $\mathcal{S}$ es secuencialmente compacto y, además, contiene un G_δ-denso que es completamente metrizable, ([157], p. 54-55). Más aun, por el Teorema 2.2.55, página 304, todo espacio (compacto) fragmentable está en la clase de Stegall y cuando la bola cerrada unitaria (B_{X^*}, ω^*) del dual de un espacio de Banach X está en la clase de Stegall, entonces X es un espacio débil de Asplund, ([157], p. 56). Kalenda, en [251], usando herramientas adicionales de la Teoría de Conjuntos, ha podido construir espacios compactos pertenecientes a la clase $\mathcal{S}$ que no son fragmentables.

Para el jugador β existe el siguiente resultado demostrado por Kenderov, Kortezov, Moors [259] y Moors, Somasundaram [321] (véase también, [82]) el cual caracteriza a los espacios débilmente de Stegall.

Teorema 2.2.88 (Kenderov-Kortezov-Moors-Somasundaram). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. X pertenece a la clase de los espacios débilmente Stegall si, y sólo si, el jugador β no posee estrategia ganadora alguna en el juego* $\mathrm{KM}(X)$.

Los teoremas de Kenderov-Moors y Kenderov-Kortezov-Moors-Somasundaram permiten establecer una relación interesante entre los espacios débilmente de Stegall y los fragmentables. En efecto, *la distinción entre ser fragmentable y ser débilmente de Stegall es precisamente la distinción de poseer el jugador α una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{KM}(X)$ *y la de no tener el jugador β estrategia ganadora alguna en el mismo juego.*

Juego de Deville-Matheron. Existe otra interesante caracterización de fragmentabilidad usando otro tipo de juego topológico debido a R. Deville y É. Matheron [127]. Sean (X,d) un espacio métrico y τ una topología sobre X. Para cada $x \in X$, considere $\mathcal{N}(x)$ la familia de todos los subconjuntos τ-abiertos de X conteniendo a x. Sea $\mathcal{A}$ la unión disjunta de todas las familias $\mathcal{N}(x)$ y definamos el juego $\mathbf{G}(X,\mathcal{A})$ del modo siguiente: existen, como antes, dos jugadores β y α. El jugador β elige puntos $x_1, x_2, \ldots$ de X, y el jugador α escoge subconjuntos $A_1, A_2, \ldots$ de $\mathcal{A}$. Como siempre es β quien primero elige un punto x_1 en X. En el n-ésimo paso, una vez que el jugador β ha seleccionado el punto x_n, el jugador α elige un conjunto $U_n \in \mathcal{N}(x_n)$, y entonces responde el jugador β tomando un punto x_{n+1} de U_n. El jugador α gana el juego si la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es d-Cauchy, en caso contrario el ganador es el jugador β. El juego $\mathbf{G}(X,\mathcal{A})$ también se le llama el (τ,d)**-juego** para X o **juego de Deville-Matheron**.

Teorema de Deville-Matheron. *El espacio topológico (X,τ) es fragmentado por la métrica d si, y sólo si, el jugador α posee una estrategia ganadora en el (τ,d)-juego para X.*

Cuando $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, tenemos el siguiente:

Corolario de Deville-Matheron. *El espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ tiene la* PCP *(Propiedad de Punto de Continuidad) si, y sólo si, el jugador α posee una estrategia ganadora en el $(\omega,\|\cdot\|)$-juego para B_X.*

2.2.19. ‖ ► El juego de Banach-Mazur y problemas de optimización

En esta sección (X,τ) denotará un espacio topológico de Hausdorff completamente regular y como siempre, $(C(X),\|\cdot\|_\infty)$ es el espacio de Banach de todas las funciones continuas y **acotadas** $f : X \to \mathbb{R}$, donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo. Desde el punto de vista de la geometría de los espacios de Banach ha sido de interés, desde hace algún tiempo, estudiar la naturaleza del conjunto de las funciones $f \in C(X)$ para las cuales la norma $\|\cdot\|_\infty$ es Gâteaux (o Fréchet) diferenciable. Ya fue establecido por Čoban y Kenderov que cuando X es compacto, entonces la Gâteaux diferenciabilidad de la norma $\|\cdot\|_\infty$ en una función particular $f \in C(X)$, está íntimamente relacionado con el **problema de minimización** determinado por f. Dicho problema, que denotaremos por (X, f), se formula del modo siguiente: dada $f \in C(X)$,

$$\textit{encontrar un } x_0 \in X \ \textit{ tal que } \ f(x_0) = \operatorname{ínf}\left\{ f(x) : x \in X \right\} := \operatorname{ínf}(X, f) \tag{$\blacklozenge$}$$

Si en lugar del ínfimo tomamos el supremo en $(\blacklozenge)$, entonces hablaremos del **problema de maximización** (X, f) determinado por f.

El más importante de los teoremas de existencia y, probablemente, uno de los resultados más elegante en análisis, es un teorema de Weierstrass el cual puede ser establecido del modo siguiente:

Teorema 2.2.89 (Weierstrass). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff completamente regular y sea $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función acotada por debajo en X. Si*

(1) *$S(f,a) = \{x \in X \,:\, f(x) \leq a\}$ es cerrado para todo $a \leq r$, donde $r > \operatorname{ínf} f$, y*

(2) *$S(f,r)$ es compacto,*

entonces el problema de minimización (X, f) tiene solución.

Prueba. Sea $M(f) := \{x \in X \,:\, f(x) = \operatorname{ínf}(X, f)\}$. Entonces $M(f) = \bigcap_{a>\operatorname{ínf} f} S(f,a)$, y como dicha intersección consiste de una familia encajada de subconjuntos cerrados no vacíos con uno de ellos compacto, tenemos que $M(f)$ es no vacío. ■

Entre las diferentes propiedades del problema de minimización (X, f) que existen en la actualidad, las siguientes son de especial interés en la teoría de optimización:

(a) (X, f) posee, por lo menos, una solución,

(b) (X, f) posee una única solución, o

(c) el conjunto solución de (X, f) "depende continuamente" (en un sentido que se puede precisar) sobre la data (las funciones de $C(X)$).

Las siguientes propiedades para el problema (X, f) da origen a lo que se llama el problema de *Tykhonov bien-formulado*.

Definición 2.2.26. *El problema de minimización (resp. de maximización) (X, f) se llama **Tykhonov bien-formulado** si:*

(a) *(X, f) posee una única solución $x_0 \in X$, y*

(b) *si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $f(x_n) \to \operatorname{ínf}(X, f)$ (resp. $f(x_n) \to \sup(X, f)$), entonces $x_n \to x_0$.*

Usaremos, por brevedad, la expresión (X, f) **está bien-formulado** en lugar de la expresión "(X, f) es Tykhonov bien-formulado". Cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (respectivamente, cualquier red (x_λ)) en X tal que $f(x_n) \to \text{ínf}(X, f)$ (respectivamente, $f(x_\lambda) \to \text{ínf}(X, f)$) se llama una **sucesión** (respectivamente, **red**) **minimizante** para f. De modo similar se define sucesión maximizante y red maximizante. Es un hecho ya establecido que si el problema (X, f) está bien-formulado, entonces cualquier red minimizante (x_λ) (no sólo cualquier sucesión minimizante) converge a la única solución (ver, [100]).

Es conocido que el *problema de maximización* determinado por $f \in C(X)$, para el caso en que X es compacto, está caracterizado por el siguiente resultado (véase, [98, 99]).

> **Teorema de Čoban-Kenderov**. *Si X es compacto, entonces la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(X)$ es Gâteaux diferenciable en $f \in C(X)$, $f \neq 0$, si, y sólo si, el problema de maximización $(X, |f|)$ tiene una única solución.*

y entonces surge, como natural, la pregunta: *¿Bajo qué condiciones (necesarias y(o) suficientes) sobre X, el conjunto*

$$\text{Dom}(M) = \big\{ f \in C(X) : f \textit{ alcanza su supremo en } X \big\}$$

es residual en $C(X)$? Observemos que si X es compacto, entonces $\text{Dom}(M) = C(X)$.

El primer problema de maximización conocido es, por supuesto, el celebre Teorema de Bishop-Phelps, ya demostrado (Teorema 2.2.25, página 264).

> **Teorema de Bishop-Phelps**. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de X. Entonces el conjunto M_C de todos los elementos de X^* que alcanzan su supremo sobre C es norma-denso en X^*.*

Usando el juego de Banach-Mazur, Kenderov y Revalski ([263], Theorem 3.1) lograron demostrar un hermoso resultado para el caso en que X es completamente regular y que se expresa del modo siguiente: *Si X es un espacio de Hausdorff completamente regular, entonces el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BM}(X)$ si, y sólo si, $\mathrm{Dom}(M)$ es residual en $C(X)$.*

Para demostrar el resultado de Kenderov y Revalski vamos introducir ciertas notaciones y algunos resultados para alcanzar nuestro objetivo. Para cada $f \in C(X)$ denotemos por $M(f)$ el conjunto (posiblemente vacío) de los maximizadores de f en X; es decir,

$$M(f) = \Big\{ x \in X : f(x) = \sup\{ f(y) : y \in X \} \Big\}.$$

Observemos que M es una aplicación multivaluada de $C(X)$ sobre X que asocia a cada $f \in C(X)$ el conjunto $M(f)$. Como sabemos, el dominio de M es el conjunto $\text{Dom}(M) = \big\{ f \in C(X) : M(f) \neq \varnothing \big\}$, es decir, $\text{Dom}(M)$ consta de todas las funciones en $C(X)$ que alcanzan su supremo en algún punto de X. Recordemos que para cualquier subconjunto U de X, $M^{\#}(U) = \big\{ f \in C(X) : M(f) \subseteq U \big\}$, y si $W \subseteq C(X)$, entonces $M(W) = \bigcup \big\{ M(f) : f \in W \big\}$. Más aun, dado f en $C(X)$ y cualquier $\varepsilon > 0$, denotemos por $\Psi_f(\varepsilon)$ el conjunto $\Psi_f(\varepsilon) = \big\{ x \in X : f(x) > \sup(X, f) - \varepsilon \big\}$. Estos conjuntos son, para cada $\varepsilon > 0$, abiertos y no vacíos. Además, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $\Psi_f(\varepsilon_1) \subseteq \Psi_f(\varepsilon_2)$.

La siguiente proposición recoge algunas de las propiedades de la aplicación M que usaremos en estas notas.

Proposición 2.2.5. *La aplicación multivaluada $M : C(X) \to 2^X$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) $\text{Dom}(M)$ *es un subconjunto denso en* $C(X)$,

(b) *M es una aplicación abierta; es decir, si W es abierto en $C(X)$, entonces $M(W)$ es abierto en X,*

(c) *para cualquier par de conjuntos abiertos $W \subseteq C(X)$ y $U \subseteq X$ con $M(W) \cap U \neq \varnothing$, existe un conjunto abierto no vacío $W' \subseteq W$ tal que $M(W') \subseteq U$; es decir, M es minimal,*

(d) *int$(M^{\#}(U)) \neq \varnothing$ para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X,*

(e) *si $g \in C(X)$ es tal que $\{g\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos en $C(X)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0$, entonces $M(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M(B_n)$.*

Prueba. (a) Sean $f \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Si para cada $x \in X$, definimos $f_\varepsilon(x) = \inf\{f(x), \sup(X, f) - \varepsilon/2\}$, entonces el conjunto $M(f_\varepsilon)$ es no vacío y, en consecuencia, $f_\varepsilon \in \operatorname{Dom}(M)$. Claramente, $\| f - f_\varepsilon \|_\infty < \varepsilon$ con lo cual queda establecido que $\operatorname{Dom}(M)$ es denso en $C(X)$.

(b) Sea W un subconjunto abierto no vacío de $C(X)$. Para demostrar que $M(W)$ es un subconjunto abierto (no vacío) de X, sea $x_0 \in M(g)$ para algún $g \in W$. Como W es abierto, existe una bola abierta $U(g,\varepsilon) \subseteq W$ para algún $\varepsilon > 0$. Notemos que, para cada $x \in \Psi_g(\varepsilon)$, existe una función $f \in U(g,\varepsilon)$ (por ejemplo, la función $f = g_\varepsilon$ definida en (a)) tal que $f(x) = \sup(X, f)$. Así,

$$\Psi_g(\varepsilon/2) \ \subseteq\ M(f) \ \subseteq\ M(U(g,\varepsilon)) \ \subseteq\ M(W).$$

Puesto que $\Psi_g(\varepsilon/2)$ es un abierto conteniendo a x_0, se concluye que $M(W)$ es abierto.

(c) Sean W y U subconjuntos abiertos no vacíos de $C(X)$ y X respectivamente con $M(W) \cap U \neq \varnothing$. Como el conjunto $M(W) \cap U$ es no vacío, existe $f_0 \in W$ tal que $M(f_0) \cap U \neq \varnothing$. Sea $x_0 \in M(f_0) \cap U$. Puesto que X es completamente regular, existe una función $g \in C(X)$ tal que $g(x_0) = 0$, $\ g(X \setminus U) = \{1\}$, y $\| g \|_\infty \leq 1$. Escojamos ahora un $\delta > 0$ de modo que $f_0 - \delta g \in W$. Sea $W' \subseteq W$ un conjunto abierto en $C(X)$ conteniendo a $f_0 - \delta g$ y tal que $\|\cdot\|_\infty - \operatorname{diam}(W') \leq \delta/3$. Tomemos $f \in W'$ y veamos que $M(f) \subseteq U$. En efecto, suponga que $x \in X \setminus U$ y probemos que $x \notin M(f)$. Si ocurriera que $x \in M(f)$, entonces tendríamos que $f(z) \leq f(x)$ para todo $z \in X$; en particular, $f(x_0) \leq f(x)$. Sin embargo, como $|f(z) - (f_0 - \delta g)(z)| \leq \| f - (f_0 - \delta g) \|_\infty \leq \delta/3$ para todo $z \in X$, resultaría que

$$\begin{aligned} f(x) \ &\leq\ (f_0 - \delta g)(x) + \frac{\delta}{3} \ =\ f_0(x) - \frac{2\delta}{3} \\ &\leq\ f_0(x_0) - \frac{2\delta}{3} \ =\ (f_0 - \delta g)(x_0) - \frac{2\delta}{3} \\ &<\ (f_0 - \delta g)(x_0) - \frac{\delta}{3} \leq f(x_0) \end{aligned}$$

lo cual es contradictorio. Por esto, $x \notin M(f)$ y, por lo tanto, $M(f) \subseteq U$.

(d) Es consecuencia de (c).

(e) Es claro que $M(g) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M(B_n)$. Supongamos, por otro lado, que $x \in M(B_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $f_n \in B_n$ con $\| f_n - g \|_\infty \leq \operatorname{diam}(B_n)$ tal que $x \in M(f_n)$. De esto se sigue que $x \in \overline{\Psi_g(2 \cdot \operatorname{diam}(B_n))}$ y, por lo tanto, $M(B_n) \subseteq \overline{\Psi_g(2 \cdot \operatorname{diam}(B_n))}$; es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M(B_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Psi_g(2 \cdot \operatorname{diam}(B_n))} = M(g).$$

■

Aunque, como acabamos de ver, $\operatorname{Dom}(M)$ es siempre denso en $C(X)$, dicho conjunto no está obligado a ser residual en $C(X)$. Sin embargo, ello es posible cuando (y sólo en este caso) el jugador α posee una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BM}(X)$.

Teorema 2.2.90 (Kenderov-Revalski). *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El jugador* α *posee una estrategia ganadora en el juego de Banach-Mazur* $\mathrm{BM}(X)$.

(2) *El conjunto* $\mathrm{Dom}(M) = \{f \in C(X) : f \text{ alcanza su supremo sobre } X\}$ *es residual en* $C(X)$.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Suponga que ε_α es una estrategia ganadora para el jugador α en el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$ y sea $M : C(X) \to 2^X$ la aplicación multivaluada considerada anteriormente. Para demostrar que $\mathrm{Dom}(M)$ es residual en $C(X)$, debemos hacer uso del siguiente resultado:

Lema 2.2.24. *Sea* ε_α *cualquier estrategia ganadora para el jugador* α *en el juego de Banach-Mazur* $\mathrm{BM}(X)$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $(U_1,V_1,\ldots,U_n,V_n)$ *un* ε_α*-juego parcial en* $\mathrm{BM}(X)$ *y supongamos que* W_n *es un subconjunto abierto no vacío de* $C(X)$ *tal que* $M(W_n) \subseteq V_n$. *Entonces existe una familia* $\Gamma(W_n)$ *de tripletas* $(U_{n+1},V_{n+1},W_{n+1})$ *tales que*

(I) U_{n+1} *es un subconjunto abierto no vacío de* $M(W_n)$,

(II) $V_{n+1} = \varepsilon_\alpha(U_1,V_1,\ldots,U_n,V_n,U_{n+1})$,

(III) W_{n+1} *es un subconjunto abierto no vacío de* $C(X)$ *tal que*

$$\mathrm{diam}(W_{n+1}) < \frac{1}{n+1}, \qquad \overline{W}_{n+1} \subseteq W_n \qquad y \qquad M(W_{n+1}) \subseteq V_{n+1};$$

(IV) *la familia*

$$\gamma(W_n) = \{W_{n+1} : (U_{n+1},V_{n+1},W_{n+1}) \in \Gamma(W_n)\}$$

es disjunta, y

(V) *el conjunto* $H(W_n) = \bigcup\{W_{n+1} : W_{n+1} \in \gamma(W_n)\}$ *es denso en* W_n.

Prueba del Lema. Observemos que $M(W_n)$ es un conjunto abierto por ser M una aplicación abierta. En el paso $n+1$, el jugador β elige cualquier abierto $U_{n+1} \subseteq M(W_n)$, y entonces α responde, siguiendo su estrategia, escogiendo $V_{n+1} = \varepsilon_\alpha(U_1,V_1,\ldots,U_n,V_n,U_{n+1}) \subseteq U_{n+1}$. Usemos la cuasi-regularidad del espacio $C(X)$ y la minimalidad de M para hallar un subconjunto abierto no vacío $W_{n+1} \subseteq C(X)$ tal que

$$\mathrm{diam}(W_{n+1}) < 1/(n+1), \qquad \overline{W}_{n+1} \subseteq W_n \qquad \text{y} \qquad M(W_{n+1}) \subseteq V_{n+1}.$$

El Lema de Zorn nos permite construir la familia maximal $\Gamma(W_n)$ satisfaciendo las propiedades (I)-(IV) del Lema. Vamos a probar (V). Supongamos que ello no es verdad. Entonces existe un subconjunto abierto no vacío G de $C(X)$ tal que $G \subseteq W_n$ y $G \cap H(W_n) = \varnothing$. Puesto que M es una aplicación abierta, resulta que el conjunto $M(G)$ es un conjunto abierto (no vacío) de X. Más aun, $M(G) \subseteq M(W_n) \subseteq V_n$. Sean

$$U^\bullet_{n+1} = M(G) \qquad \text{y} \qquad V^\bullet_{n+1} = \varepsilon_\alpha(U_1,V_1,\ldots,U_n,V_n,U^\bullet_{n+1}).$$

Por la minimalidad de M, existe un subconjunto abierto no vacío $W^\bullet_{n+1} \subseteq C(X)$ tal que

$$W^\bullet_{n+1} \subseteq G \qquad \text{y} \qquad M(W^\bullet_{n+1}) \subseteq V^\bullet_{n+1}.$$

Podemos, además, suponer que $\overline{W}^\bullet_{n+1} \subseteq W_n$ y $\mathrm{diam}(W^\bullet_{n+1}) < 1/n+1$. Si ahora consideramos la nueva familia $(\Gamma'(W_n))_{n=1}^\infty$ definida por $\Gamma'(W_n) = \Gamma(W_n) \cup \{(U^\bullet_{n+1},V^\bullet_{n+1},W^\bullet_{n+1})\}$, vemos que ella es estrictamente más grande que $\Gamma(W_n)$ y aun satisface (I)-(IV). Esta contradicción establece que $H(W_n)$ es denso en W_n. $\square$

Es oportuno advertir que el lema anterior también es válido en el caso $n=0$ siempre que definamos $U_0 = V_0 = X$.

Regresemos a la demostración del teorema y comencemos con lo siguiente: pongamos

$$\gamma_0 = \{C(X)\}, \qquad W_0 = C(X) \qquad \text{y} \qquad U_0 = V_0 = X$$

y apliquemos el lema anterior para obtener una familia de tripletas $\Gamma_1 = \Gamma_1(W_0)$ satisfaciendo las condiciones (I)-(IV) de dicho lema. Hagamos ahora

$$\gamma_1 = \gamma(W_0) \qquad \text{y} \qquad H_1 = H(W_0).$$

Por (V), el conjunto H_1 es abierto y denso en $C(X)$. Usemos ahora (IV) para determinar, para cada $W_1 \in \gamma_1$, un único par (U_1, V_1) con $(U_1, V_1, W_1) \in \Gamma_1$. Aplicando de nuevo el lema anterior a ésta tripleta, obtenemos, para cada $W_1 \in \gamma_1$, una familia de tripletas $\Gamma(W_1)$ con las propiedades (I)-(IV) asociadas al par (U_1, V_1) correspondientes a W_1. Sean

$$\Gamma_2 = \bigcup_{W_1 \in \gamma_1} \Gamma(W_1), \qquad \gamma_2 = \bigcup_{W_1 \in \gamma_1} \gamma(W_1), \qquad \text{y} \qquad H_2 = \bigcup_{W_1 \in \gamma_1} H(W_1).$$

Puesto que γ_1 es disjunta y ya que cada $\gamma(W_1)$ es, también, una familia disjunta, resulta que γ_2 también lo es. Más aun, por (V), cualquier $H(W_1)$ es denso en W_1 y como H_1 es denso en $C(X)$, concluimos que H_2 es abierto y denso en $C(X)$.

Procediendo de este modo obtenemos una familia $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ de tripletas y una sucesión $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ de conjuntos abiertos en $C(X)$, con $\gamma_0 = \{C(X)\}$, tales que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\Gamma_n = \bigcup\{\Gamma(W_{n-1}) : W_{n-1} \in \gamma_{n-1}\}$, donde $\Gamma(W_{n-1})$ se obtiene del lema anterior para algún juego ε_α-parcial $(U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1})$ unívocamente determinado;

(2) γ_n es la unión de las familias $\gamma(W_{n-1})$ obtenidas de la condición (V) del lema, y

(3) el conjunto $H_n = \bigcup\{W_n : W_n \in \gamma_n\}$ es abierto y denso en $C(X)$.

Sea

$$H_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, el conjunto H_0 es un G_δ-denso en $C(X)$. Lo que queremos demostrar es que $H_0 \subseteq \mathrm{Dom}(M)$. Veamos esto. Sea $f_0 \in H_0$. Por las propiedades anteriores, este f_0 determina una única sucesión $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $n \geq 1$:

$$W_n \in \gamma_n, \qquad f_0 \in W_n, \qquad \overline{W}_{n+1} \subseteq W_n \qquad \text{y} \qquad \mathrm{diam}(W_n) < \frac{1}{n}.$$

En consecuencia, $\{f_0\} = \bigcap_{n01}^{\infty} W_n$. Por las propiedades (I)-(IV) del Lema 2.2.24 y las condiciones $(1)-(3)$ determinadas anteriormente, se sigue que existe un ε_α-juego $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $U_{n+1} \subseteq M(W_n) \subseteq V_n$ para cualquier $n \geq 1$. Un llamado a la Proposición 2.2.5 (e) nos dice que

$$M(f_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M(W_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

y puesto que ε_α es una estrategia ganadora, entonces $M(f_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$; es decir, $f_0 \in \mathrm{Dom}(M)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Para probar la otra dirección, supongamos que $\mathrm{Dom}(M)$ es residual en $C(X)$. Entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos densos de $C(X)$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \mathrm{Dom}(M)$. Si ahora definimos $F_n = C(X) \setminus G_n$, $n = 1, 2, \ldots$, resulta que cada conjunto F_n es cerrado y nunca-denso en $C(X)$.

Vamos a demostrar que el jugador α posee una estrategia ganadora ε_α en el juego $\mathrm{BM}(X)$. Comencemos tomando un subconjunto cualquiera, digamos U_1, que sea abierto y no vacío en X. Supongamos que U_1 es la primera elección del jugador β. Haciendo uso de la Proposición 2.2.5 (d), resulta que $\mathrm{int}(M^\#(U_1))$ es no vacío. Puesto que F_1 es subconjunto cerrado y nunca-denso en $C(X)$, el conjunto $\mathrm{int}(M^\#(U_1)) \setminus F_1$ es abierto y no vacío en $C(X)$. Escojamos ahora una bola abierta B_1 en $C(X)$ de radio $r_1 \leq 1$ tal que $B_1 \subseteq \mathrm{int}(M^\#(U_1)) \setminus F_1$. La respuesta del jugador α a la elección de β es escoger el conjunto abierto V_1 dado por $V_1 := M(B_1)$. El turno es ahora de β y su elección es U_2, un subconjunto arbitrario, abierto no vacío de V_1. Puesto que $U_2 \subseteq M(B_1) = \bigcup\{M(f) : f \in B_1\}$, existe al menos una función $f \in B_1$ tal que $M(f) \cap U_2 \neq \varnothing$. Se sigue entonces de la Proposición 2.2.5 (c) la existencia de un conjunto abierto no vacío $W \subseteq B_1$ tal que $M(W) \subseteq U_2$. Como antes, $W \setminus F_2$ es abierto y no vacío en $C(X)$. Tomemos B_2, una bola abierta de radio $r_2 \leq 1/2$, que satisfaga $\overline{B}_2 \subseteq W \setminus F_2 \subseteq B_1$. La respuesta de α a la elección de β es tomar el conjunto $V_2 := M(B_2)$. Claramente V_2 es un subconjunto abierto no vacío de U_2. Es indudable cómo continuar con este proceso inductivamente y, así, completar la definición de la estrategia ε_α. Sea $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ cualquier ε_α-juego y sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de bolas abiertas en $C(X)$ asociadas con $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ en la construcción de ε_α. Entonces, para cualquier $n \geq 1$,

a) $\overline{B}_{n+1} \subseteq B_n$ y $B_n \cap F_n = \varnothing$,

b) $\mathrm{diam}(B_n) < \dfrac{1}{n}$ y

c) $V_n = M(B_n)$.

Observemos ahora que las condiciones *a*) y *b*) nos garantizan que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ consta de un único punto, digamos $f_0 \in C(X)$. Además, *a*) nos muestra que $f_0 \in C(X) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq \mathrm{Dom}(M)$. De allí que *c*) y la Proposición 2.2.5 (e) nos revelan que

$$\varnothing \neq M(f_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M(B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Esto prueba que ε_α es una estrategia ganadora para el jugador α en el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$. ■

Puesto que toda estrategia estacionaria ganadora es un estrategia ganadora, tenemos el siguiente resultado demostrado por Ch. Stegall ([415], Theorem 5).

Corolario 2.2.27 (Stegall). *Sea* (X, τ) *un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Si el jugador* α *posee una estrategia estacionaria ganadora en el juego de Banach-Mazur* $\mathrm{BM}(X)$*, entonces el conjunto* $\mathrm{Dom}(M)$ *contiene un subconjunto* G_δ*-denso en* $C(X)$*.*

Una ligera modificación en la prueba del Teorema 2.2.90 nos da la posibilidad de caracterizar los espacios topológicos de Hausdorff X para los cuales el conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{PM}_u &= \big\{ f \in C(X) : f \text{ alcanza su máximo en exactamente un punto de } X \big\} \\ &= \big\{ f \in C(X) : M(f) = \{x_f\} \text{ para un único } x_f \in X \big\} \end{aligned}$$

es residual en $C(X)$.

Teorema 2.2.91 (Kenderov-Revalski). *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. El conjunto* PM_u *es residual en* $C(X)$ *si, y sólo si, el jugador* α *posee una estrategia ganadora* ε_α *en el juego* $\mathrm{BM}(X)$ *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ *consta de un único punto, para cualquier* ε_α*-juego* $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$.

La prueba, que es muy similar a la del Teorema 2.2.90, se deja como ejercicio al lector. Como una consecuencia del resultado anterior, veremos que los espacios fragmentables son adecuados para la solución del problema de maximización única en presencia de estrategias ganadoras para el jugador α en el juego de Banach-Mazur.

Corolario 2.2.28 (Kenderov-Revalski). *Sea* (X,τ) *un espacio topológico de Hausdorff fragmentable. Si el jugador* α *posee una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{BM}(X)$*, entonces el conjunto* PM_u *es residual en* $C(X)$.

Prueba. Sea d la métrica que fragmenta a X. Sean $U_1, V_1, \ldots, V_{n-1}, U_n$ los primeros n movimientos del jugador β y los primeros $n-1$ movimientos del jugador α en el juego $\mathrm{BM}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$. Usemos la definición de fragmentabilidad para obtener, para cada $n \geq 1$, un subconjunto abierto no vacío $U_n' \subseteq U_n$ tal que $d - \mathrm{diam}(U_n') < 1/n$. Definamos ahora

$$\varepsilon_\alpha'(U_1, V_1, \ldots, U_n) = \varepsilon_\alpha(U_1, V_1, \ldots, U_n'),$$

donde ε_α es una estrategia ganadora para α. Es fácil establecer que ε_α' también es una estrategia ganadora para α en el juego $\mathrm{BM}(X)$ y que para cualquier ε_α'-juego, digamos $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$, resulta que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Un llamado al Teorema 2.2.91 concluye la prueba. ■

Comentario Adicional 2.2.24 La existencia de subespacios densos completamente metrizables dentro de un espacio completamente regular puede ser demostrado cuando el problema de minimización (X, f), con $f \in C(X)$, está *bien-formulado*. En efecto, en [100], Čoban, Kenderov y Revalski obtuvieron los siguientes resultados:

Teorema 2.2.92 (Čoban-Kenderov-Revalski). *Para cualquier espacio topológico de Hausdorff completamente regular* (X,τ)*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X contiene un subespacio denso completamente metrizable.*

(2) $W = \{f \in C(X) : (X, f)$ *está bien-formulado*$\}$ *es residual en* $C(X)$.

(3) *La norma* $\|\cdot\|_\infty$ *en* $C(X)$ *es Gâteaux diferenciable en los puntos de un subconjunto* G_δ*-denso de* $C(X)$.

La situación para la derivada de Fréchet de la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(X)$ es muy diferente al resultado anterior.

Teorema 2.2.93 (Čoban-Kenderov-Revalski). *Para cualquier espacio topológico de Hausdorff completamente regular* (X,τ)*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El conjunto de los puntos aislados de X es denso en X.*

(b) *La norma* $\|\cdot\|_\infty$ *en* $C(X)$ *es Fréchet diferenciable en los puntos de un subconjunto abierto y denso de* $C(X)$.

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Una familia $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X se llama una **malla** (o *network*, en inglés) para X si, para cualquier $x \in X$ y cualquier conjunto abierto $U \subseteq X$, con $x \in U$, existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subseteq U$. El espacio X posee una *malla* σ*-discreta* si existe una colección numerable $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ de familias discretas de X tal que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ es una malla para X. Recordemos que una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X se dice *discreta* si cualquier punto $x \in X$ posee un entorno abierto U de X que intersecta a lo sumo a un elemento de la familia $\mathcal{D}$. Cualquier espacio métrico posee una malla σ-discreta. En [263] Kenderov y Revalski obtienen el siguiente resultado.

Teorema 2.2.94 (Kenderov-Revalski). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff con una malla σ-discreta. Son equivalentes:*

(1) *X contiene un subespacio denso completamente metrizable.*

(2) *α posee una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{BM}(X)$.

(3) *α posee una estrategia estacionaria ganadora en el juego* $\mathrm{BM}(X)$.

En 1976, K. S. Lau [282] demostró el siguiente resultado:

Teorema 2.2.95 (Lau). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo cuya norma es de Kadec-Klee. Dado cualquier subconjunto cerrado K de X, existe un subconjunto residual G de X tal que, para cada $x \in G$, el problema de mejor aproximación de x a K está bien-formulado.*

Más recientemente, M. Fabian y J. Revalski [159] obtienen una contraparte analítica de dicho resultado al demostrar

Teorema 2.2.96 (Fabian-Revalski). *Para un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El espacio X es reflexivo y la norma $\|\cdot\|$ es de Kadec-Klee.*

(b) *Para cada función de Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, existe un conjunto residual $G \subseteq X$ tal que: para cada $z \in G$, existe un conjunto residual $R_z \subseteq [0,+\infty)$ tal que para cada $c \in R_z$, el problema de minimización (X,g) está bien-formulado, donde $g(x) := f + c\,\|x - z\|$ para cada $x \in X$.*

(c) *Para cualquier función inferiormente semicontinua $f : X \to (-\infty,+\infty]$, con $\inf f > -\infty$, existe un conjunto residual $G \subseteq X$ tal que: para cada $z \in G$, existen un $a_z \in (0,+\infty]$ y un conjunto residual $R_z \subseteq (0,a_z)$ tal que para cada $c \in R_z$, el problema de minimización (X,g) está bien-formulado, donde $g(x) := f + c\,\|x - z\|$ para cada $x \in X$.*

2.2.20. ‖ ► El Teorema Grande de Namioka

Sean X, K y Z espacios topológicos de Hausdorff y $f : X \times K \to Z$ una aplicación. Diremos que:

(1) f es **continua** en $G \times F$, donde $G \subseteq X$ y $F \subseteq K$, si para cualquier $(x,y) \in G \times F$, f es continua en (x,y) con respecto a la topología producto de $X \times K$ restringida a $G \times F$.

(2) f es **separadamente continua** en $X \times K$ si para cualquier $(x_0,y_0) \in X \times K$, las aplicaciones asociadas

a) $f^{y_0} : X \to Z$ definida por $f^{y_0}(x) = f(x,y_0)$, para todo $x \in X$ y

b) $f_{x_0} : K \to Z$ definida por $f_{x_0}(y) = f(x_0,y)$, para todo $y \in K$

son continuas en X y K respectivamente.

En 1821, el matemático francés Augustin-Louis Cauchy publicó un libro que posteriormente se haría famoso titulado: "*Cours d'Analyse*". En él, Cauchy afirmaba erróneamente que una función de varias variables la cual es continua en cada variable separadamente, es continua como una función de todas las variables juntas. Parece ser que J. Thomae en [*Abriss einer Theorie der complexen Funktionen*, 2nd. ed. Halle 1873, p.15], fue el primero (véase, Z. Piotrowski, [356]) en percatarse del error de Cauchy 26 años antes del ejemplo producido por R. Baire. Sin embrago, Thomae reconoce a E. Heine como el autor de su contraejemplo. El ejemplo de Heine consistía de una función separadamente continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, pero discontinua en $(0,0)$. En coordenadas cilíndricas esta función tiene la forma:

$$F(r,\theta)=\begin{cases}\operatorname{sen}(4\theta), & \text{si } r>0\\ 0, & \text{si } r=0,\end{cases}$$

y la siguiente simplificación

$$f(r,\theta)=\operatorname{sen}(2\theta), \qquad \text{si } r>0,$$

también es un contraejemplo a la afirmación de Cauchy. En el sistema rectangular, la última función se puede representar como

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{si } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Este ejemplo, sin embargo, fue el que Giussepe Peano publicó en 1884. El caso de las funciones separadamente continuas a valores reales contrasta dramáticamente con el caso especial cuando dichas funciones son separadamente analíticas y a valores complejos. Una función $f:U\to\mathbb{C}$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$, es *separadamente analítica* si f es analítica en cada variable z_j cuando las otras coordenadas z_k para $k\neq j$ son fijas. Hartogs demostró el siguiente resultado.

Teorema de Hartogs. *Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y $f:U\to\mathbb{C}$ una función. Si f es separadamente analítica, entonces f es analítica sobre U.*

El responsable de imprimirle un cambio radical al tratamiento de las funciones separadamente continuas es René Baire cuando publica su tesis doctoral [28]. En dicha tesis, Baire traza un nuevo rumbo con su método de categoría, le pone punto final al estatus de privilegio que poseían para ese momento las funciones continuas y obliga a los matemáticos a mirar y estudiar detenidamente su revolucionaria forma de jerarquizar las clases de las funciones discontinuas.

Aunque, como ya hemos mencionado, existen funciones separadamente continuas que no son necesariamente continuas en todo punto de su dominio, ocurre frecuentemente que para ciertos espacios de Hausdorff compactos, ellas poseen abundantes puntos de continuidad. De hecho, fue Baire quien primero demostró que:

(α_1) *Para cualquier función separadamente continua $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, existe un conjunto G_δ-denso G de $[0,1]$ tal que f es continua en todo punto de $G\times[0,1]$* y

(α_2) *Cualquier función separadamente continua $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire.*

Uno de los resultados importantes generalizando (α_1) es el siguiente debido a M. M. Mirzojan ([354], p. 300).

Teorema de Mirzojan *Sean (X,d) un espacio métrico compacto, (K,τ) un espacio topológico metrizable $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto y (Z,ρ) un espacio métrico compacto. Para cualquier función separadamente continua $f:X\times K\to Z$, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de $G\times K$.*

Sin duda alguna es I. Namioka quien provoca una entusiasta y renovada investigación del problema de continuidad separada versus continuidad (conjunta) al investigar, en su artículo fundamental [328], el siguiente problema general:

Encuentre condiciones sobre los espacios topológicos X, K y Z tal que cualquier función separadamente continua $f : X \times K \to Z$ sea continua en los puntos de algún subconjunto "importante" (en algún sentido topológico) de $X \times K$.

El Teorema Grande de Namioka, demostrado por I. Namioka en [328], consistió en generalizar el resultado de Mirzojan evitando toda noción de metrizabilidad o alguna condición de numerabilidad de los espacios X y K en dicho teorema pero sólo exigiendo que el espacio Z sea metrizable. En efecto, en el artículo ya mencionado de Namioka [328], él demuestra el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.2.97 (El Teorema Grande de Namioka). *Sean X un espacio numerablemente Čech completo, K un espacio de Hausdorff compacto y Z un espacio metrizable. Si $f : X \times K \to Z$ es una función separadamente continua, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de $G \times K$.*

Existen varias demostraciones del Teorema Grande de Namioka comenzado por la del propio Namioka [328]. Una demostración de dicho teorema para el caso en que $Z = \mathbb{R}$, usando juegos topológicos, fue dada por Saint Raymond en [392] y será exhibida en la siguiente sección, Teorema 2.2.111. La conexión de la teoría de juegos infinitos con el estudio de la propiedad de Namioka fue llevada a cabo por Christensen en [94]. Una buena dosis de información sobre las funciones separadamente continuas y su relación con las funciones conjuntamente continuas puede ser consultada en [354, 355, 356, 357] y las referencias allí citadas.

La siguiente demostración del Teorema Grande de Namioka se debe a G. Hansel y J. P. Troallic [205]. Antes de abordar los permoneres de dicha prueba, vamos a requerir algunas definiciones y ciertos resultados auxiliares.

Sean K un espacio de Hausdorff compacto, (Z,d) un espacio métrico y $C(K,Z)$ el conjunto de todas las funciones continuas de K en Z. Denotemos por $(C(K,Z),\tau_p)$ el conjunto $C(K,Z)$ equipado con la topología de la convergencia puntual τ_p y por $(C(K,Z),d_\infty)$ el mismo conjunto provisto de la topología de la convergencia uniforme, es decir, la topología generada por la métrica del supremo d_∞. Como siempre, cualquier bola cerrada en $(C(K,Z),d_\infty)$ será denotada por $B(f,r)$, donde $f \in C(K,Z)$ y $r > 0$. Puesto que la topología de la convergencia uniforme es más fina que la topología de la convergencia puntual, se sigue que $B(f,r)$ también es cerrado en $(C(K,Z),\tau_p)$, lo que equivale a afirmar que la norma $\|\cdot\|_\infty$ es τ_p-inferiormente semicontinua .

Toda función $f : X \times K \to Z$ tiene asociada una función $F : X \to Z^K$ definida por $F(x) = f_x$ para cualquier $x \in X$, donde Z^K denota el conjunto de todas las funciones de K en Z. El siguiente resultado, aunque elemental, es importante en esta sección.

Lema 2.2.25. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y K un espacio de Hausdorff compacto. Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función y consideremos su función asociada $F : X \to \mathbb{R}^K$ definida por $F(x)(k) = f(x,k)$ para todo $x \in X$ y todo $k \in K$. Entonces*

(1) *f es separadamente continua si, y sólo si, $F : X \to (C(K),\tau_p)$ es continua.*

(2) *f es continua si, y sólo si, $F : X \to (C(K),\|\cdot\|_\infty)$ es continua.*

Prueba. (1) es inmediata. Para ver (2) observe, en primer lugar, que si $F : X \to (C(K),\|\cdot\|_\infty)$ es continua también lo es f. Veamos la otra implicación. Suponga que f es continua y sea $\varepsilon > 0$. La continuidad de f en cada punto de $\{x_0\} \times K$, nos garantiza que, para cada $y \in K$, existen entornos abiertos $U(y)$ y $V(y)$ de x_0 y de y respectivamente, tales que

$$d\big(f(x,y'), f(x_0,y)\big) < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in U(y) \text{ y todo } y' \in V(y).$$

De la familia $\{V(y) \ : \ y \in K\}$, la cual es un cubrimiento abierto del compacto K, se puede extraer un subcubrimiento finito, digamos $\{V(y_1), \ldots, V(y_n)\}$. Se sigue de esto que $U(x_0) = \bigcap_{j=1}^{n} U(y_j)$ es un entorno abierto de x_0 tal que para todo $x \in U(x_0)$ se cumple que

$$\begin{aligned} d_\infty(F(x), F(x_0)) &= \sup_{y \in K} d\big(F(x)(y), F(x_0)(y)\big) \\ &= \sup_{y \in K} d\big(f(x,y), f(x_0,y)\big) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Sea I un conjunto arbitrario y denotemos, como antes, el espacio lineal de todas las funciones acotadas $g : I \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{B}_\infty(I)$ el cual, como sabemos, se convierte en un espacio métrico completo si se le provee de la métrica del supremo $\rho_\infty(g,h) = \sup\{|g(x) - h(x)| : x \in I\}$, donde $g, h \in \mathcal{B}_\infty(I)$. La usual relación de orden en $\mathbb{R}$ induce sobre los espacios $\mathcal{B}_\infty(I)$ y $C(K, \mathcal{B}_\infty(I))$ relaciones de orden que hacen que dichos espacios sean retículos (esto significa que cualquier par de elementos en esos espacios poseen tanto supremo como ínfimo). Así, si $g, h \in C(K, \mathcal{B}_\infty(I))$, entonces

$$\begin{aligned} g \leq h \ &\Leftrightarrow \ g(y) \leq h(y) \quad \text{para todo } y \in K \\ &\Leftrightarrow \ g(y)(i) \leq h(y)(i) \quad \text{para todo } y \in K \text{ y todo } i \in I. \end{aligned}$$

Lema 2.2.26. *Sean K un espacio topológico de Hausdorff compacto, I un conjunto arbitrario y H un subretículo de $C(K, \mathcal{B}_\infty(I))$. Sean $g \in C(K, \mathcal{B}_\infty(I))$ y $\varepsilon > 0$. Suponga que para cada $(y,y') \in K \times K$, existe una función $h_{yy'} \in H$ tal que*

$$\rho_\infty\big(h_{yy'}(y), g(y)\big) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \rho_\infty\big(h_{yy'}(y'), g(y')\big) < \varepsilon. \tag{2.2.9}$$

Entonces existe una función $h \in H$ tal que $d_\infty(g,h) \leq \varepsilon$.

Prueba. Para cada $(y,y') \in K \times K$, sea

$$U_{yy'} = \Big\{ z \in K \ : \ \rho_\infty\big(h_{yy'}(z), g(z)\big) < \varepsilon \Big\}.$$

Los conjuntos $U_{yy'}$ son abiertos y no vacíos ya que por (2.2.9) ellos contienen tanto a y, así como, a y'. Fijemos $y \in K$. Entonces la familia $\{U_{yy'} \ : \ y' \in K\}$ es un cubrimiento abierto del espacio compacto K, por lo que existen $y'_1, \ldots, y'_n$ en K tal que

$$K \subseteq U_{yy'_1} \cup \ldots \cup U_{yy'_n}.$$

Por hipótesis, existen funciones $h_{yy'_1}, \ldots, h_{yy'_n}$ en H satisfaciendo las desigualdades

$$\rho_\infty\big(h_{yy'_j}(y), g(y)\big) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \rho_\infty\big(h_{yy'_j}(y'_j), g(y'_j)\big) < \varepsilon$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Definamos ahora $h_y = \sup\{h_{yy'_1}, \ldots, h_{yy'_n}\}$. Puesto que H es un retículo, se cumple que $h_y \in H$.

Sea $z \in K$. Entonces existe un $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $z \in U_{yy'_j}$ y, en consecuencia, para cada $i \in I$

$$g(z)(i) - h_{yy'_j}(z)(i) \;\le\; \sup_{k\in I}\left|g(z)(k) - h_{yy'_j}(z)(k)\right| \;=\; \rho_\infty\big(h_{yy'_j}(z), g(z)\big) < \varepsilon.$$

Esto último, combinado con la definición de h_y, nos asegura que

$$g(z)(i) \;<\; h_{yy'_j}(z)(i) \,+\, \varepsilon \;\le\; h_y(z)(i) \,+\, \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K \text{ y todo } i \in I. \tag{2.2.10}$$

Más aun, se sigue de (2.2.9) que

$$\rho_\infty(h_y(y), g(y)) \;<\; \varepsilon. \tag{2.2.11}$$

Usemos la última desigualdad para definir, para cada $y \in K$, el conjunto abierto

$$U_y = \big\{z \in K \;:\; \rho_\infty(h_y(z), g(z)) \;<\; \varepsilon\big\}.$$

Resulta que, gracias a (2.2.11), el conjunto abierto U_y contiene a y. La familia $\big\{U_y : y \in K\big\}$ es, entonces, un cubrimiento abierto del compacto K y, por lo tanto, existen $y_1,\ldots,y_m$ en K tal que $K \subseteq U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_m}$. Como antes, las funciones $h_{y_1},\ldots,h_{y_m}$ están en el retículo H y satisfacen las desigualdades

$$\rho_\infty(h_{y_j}(y_j), g(y_j)) \;<\; \varepsilon, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Finalmente, definiendo $h = \text{ínf}\big\{h_{y_1},\ldots,h_{y_m}\big\}$ tenemos que $h \in H$ y se cumple que

$$h(z)(i) \;<\; g(z)(i) \,+\, \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K \text{ y todo } i \in I. \tag{2.2.12}$$

Más aun, se sigue de (2.2.10) que

$$g(z)(i) \;<\; h(z)(i) \,+\, \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K \text{ y todo } i \in I. \tag{2.2.13}$$

La combinación de las desigualdades (2.2.12) y (2.2.13) implican que $d_\infty(h,g) \;<\; \varepsilon$. ■

Ya hemos visto que todo espacio métrico no completo admite una completación. Dicha completación se puede llevar a cabo por varias vías. Una de ellas es la siguiente, que en combinación con el lema anterior, es adecuada para la demostración del Teorema Grande de Namioka cuando éste se interpreta bajo la óptica de los espacios funcionales.

Teorema 2.2.98 (Teorema de Completitud). *Todo espacio métrico (Z,d) se puede sumergir isométricamente en algún espacio métrico completo de funciones acotadas.*

Prueba. En efecto, fijemos un $z_0 \in Z$, elegido arbitrariamente, y para cada $a \in Z$ definamos la función $\varphi_a : Z \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_a(z) = d(z,a) - d(z,z_0), \;\text{ para todo } z \in Z.$$

Se sigue de la desigualdad triangular que

$$|d(z,a) - d(z,b)| \le d(a,b), \;\text{ para todo } a,b,z \in Z,$$

de donde, tomando $b = z_0$, resulta que la función $\varphi_a \in \mathcal{B}_\infty(Z)$. Lo anterior permite definir, sin ambigüedad, la aplicación

$$\Phi : (Z,d) \to (\mathcal{B}_\infty(Z), \rho_\infty)$$

dada por

$$\Phi(a) = \varphi_a, \quad \text{para todo } a \in Z.$$

Veamos que ella es una isometría. En efecto, para todo $a,b \in Z$

$$\begin{aligned}\rho_\infty(\Phi(a),\Phi(b)) &= \rho_\infty(\varphi_a,\varphi_b)\\ &= \sup_{z\in Z}\big|\varphi_a(z)-\varphi_b(z)\big|\\ &= \sup_{z\in Z}\big|d(z,a)-d(z,b)\big|\\ &\leq d(a,b)\end{aligned}$$

y como en $z = b$ dicho supremo se alcanza, tenemos que $\rho_\infty(\Phi(a),\Phi(b)) = d(a,b)$ para todo $a,b \in Z$. Esto prueba que $\Phi(Z) \subsetneqq \mathcal{B}_\infty(Z)$. De esto se sigue que $\big(\overline{\Phi(Z)},\rho_\infty\big)$ es isométrico con la completación $\big(\widehat{Z},\widehat{d}\,\big)$ de (Z,d). En efecto, puesto que el espacio métrico $(\mathcal{B}_\infty(Z),\rho_\infty)$ es completo, sabemos que $\big(\overline{\Phi(Z)},\rho_\infty\big)$, por cerrado, también es completo. El resultado se deduce de la unicidad, salvo isometría, de la completación $\big(\widehat{Z},\widehat{d}\,\big)$. ■

Vale la pena observar que, efectivamente, (Z,d) se sumerge isométricamente en $C(Z,\mathbb{R})$.

El siguiente resultado, que es la versión en término de espacios de funciones del Teorema Grande de Namioka, es una reformulación útil y muy práctica de dicho teorema tal y como lo veremos en el transcurso de estas notas.

Teorema 2.2.99 (Teorema Grande de Namioka). *Sean X un espacio numerablemente Čech completo, K un espacio de Hausdorff compacto y (Z,d) un espacio metrico. Si $F : X \to (C(K,Z),\tau_p)$ es una función continua, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G en X tal que $F : X \to (C(K,Z),d_\infty)$ es continua en todo punto de G.*

Prueba. Por el Teorema de Completitud podemos suponer, y así lo haremos, que $Z = \mathcal{B}_\infty(I)$, donde I es un conjunto. Para cada $x \in X$, denotemos por $\operatorname{osc}(F,x)$ la oscilación de la función $F : X \to (C(K,Z),d_\infty)$ en x. Recordemos que

$$\operatorname{osc}(F,x) = \operatorname{ínf}\Big\{\sup\big\{d_\infty(F(y),F(z)) \ : \ y,z \in U\big\} \ : \ U \text{ es un entorno abierto de } x\Big\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$G_k = \big\{x \in X \ : \ \operatorname{osc}(F,x) < 1/k\big\}.$$

Como la función $x \to \operatorname{osc}(F,x)$ es superiormente semicontinua , tenemos que cada uno de los conjuntos G_k es abierto en X. Queremos demostrar que ellos también son densos en X. Supongamos, por un momento, que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{G}_{k_0} \neq X$ y defínanse

$$V := X \setminus \overline{G}_{k_0} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon := 1/2k_0.$$

Puesto que X es numerablemente Čech-completo, existe una colección numerable $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos de X con la propiedad de que cualquier familia numerable y decreciente $\mathfrak{F} = \big\{F_m : m = 1,2,\dots\big\}$ de subconjuntos cerrados de X que es $\mathcal{U}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\bigcap_{m=1}^\infty F_m \neq \varnothing$. Considere ahora el conjunto $\mathcal{P}$ constituido por todos los pares (U,x) para los cuales U es un subconjunto abierto no vacío de X contenido en V y $x \in U$. Vamos a construir, por medio de un proceso inductivo, una sucesión $(U_k,x_k)_{k=1}^\infty$ de elementos de $\mathcal{P}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$\overline{U}_{k+1} \subseteq U_k \qquad \text{y} \qquad \overline{U}_{k+1} \text{ es } \mathcal{U}_{k+1}\text{-pequeño}.$$

En primer lugar escojamos un punto $x_1 \in V$ y un entorno abierto U_1 de x_1 de modo tal que $\overline{U}_1 \subseteq V$ y se cumpla, además, que $\overline{U}_1$ sea $\mathcal{U}_1$-pequeño. Supongamos que hemos construido $(U_j, x_j) \in \mathcal{P}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Sea H_k el subretículo finito de $C(K,Z)$ generado por el conjunto $\{F(x_1), \ldots, F(x_k)\}$ y consideremos

$$M_k = \bigcup_{f \in H_k} F^{-1}(B(f, \varepsilon)).$$

Como la bola $B(f,\varepsilon)$ es cerrada en $(C(K,z), \tau_p)$, la continuidad de $F : X \to (C(K,Z), \tau_p)$ nos garantiza que $F^{-1}(B(f,\varepsilon))$ es cerrado en X y, por lo tanto, M_k también es cerrado en X. Observemos ahora que, siendo U_k un abierto no vacío contenido en V, dicho conjunto no puede estar contenido en M_k, pues si ocurriera que $U_k \subseteq M_k$, entonces M_k tendría interior no vacío y, por consiguiente, para algún $f \in H_k$, el conjunto $F^{-1}(B(f,\varepsilon))$, también tendría interior no vacío. Pero si x es punto interior de $F^{-1}(B(f,\varepsilon))$, resultaría entonces que $\operatorname{osc}(F,x) \leq 2\varepsilon < 1/k_0$ por lo que $x \in G_{k_0}$ lo cual sería contradictorio ya que $x \in V$. Por esto, $U_k \nsubseteq M_k$. Escojamos finalmente un $x_{k+1} \in U_k \setminus M_k$ y un entorno abierto U_{k+1} de x_{k+1} en X tal que $\overline{U}_{k+1} \subseteq U_k$ y se cumpla, además, que $\overline{U}_{k+1}$ sea $\mathcal{U}_{k+1}$-pequeño. Esto completa la construcción de la sucesión $(U_k, x_k)_{k=1}^{\infty}$ con las propiedades establecidas.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k = \overline{\{x_j \,:\, j \geq k\}}$. Entonces la sucesión de conjuntos cerrados $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y puesto que $F_k \subseteq \overline{U}_k$ y los conjuntos $\overline{U}_k$ son $\mathcal{U}_k$-pequeño, se concluye que cada conjunto F_k también es $\mathcal{U}_k$-pequeño. De esto se sigue (usando el hecho de que X es numerablemente Čech-completo) que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing,$$

o, dicho de otro modo, la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ posee un punto de acumulación, digamos, x_0. Siendo la función $F : X \to (C(K,Z), \tau_p)$ continua, resulta que $F(x_0)$ es un punto de acumulación de la sucesión $(F(x_k))_{k=1}^{\infty}$ en $(C(K,Z), \tau_p)$ y, por consiguiente, pertenece a la clausura de $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ en $(C(K,Z), \tau_p)$. Pero como H es un subretículo de $C(K,Z)$, se sigue del Lema 2.2.26, que existe $g \in H$ tal que $d_\infty(g, F(x_0)) \leq \varepsilon$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $g \in H_p$. Entonces $x_0 \in M_p$, mientras que, por otro lado, para todo $k > p$, tenemos que $x_k \in \overline{U}_{p+1} \subseteq U_p \setminus M_p$, de donde se deduce que $x_0 \in U_p \setminus M_p$ obteniéndose así una contradicción. Esto prueba que cada G_k es conjunto denso en X y como éste último es un espacio de Baire resulta que

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{x \in X \,:\, \operatorname{osc}(F,x) = 0\}$$

es denso en X y, por supuesto, dicho conjunto constituye el conjunto de todos los puntos de continuidad de la función $F : X \to (C(K,Z), d_\infty)$. Esto termina la prueba. ■

La razón por la cual hemos llamado a los Teorema 2.2.97 y Teorema 2.2.99 "*El Teorema Grande de Namioka*" es que dichos teoremas son equivalentes. En efecto, la prueba de la equivalencia de los Teorema 2.2.97 y Teorema 2.2.99 es consecuencia inmediata del Lema 2.2.25.

2.2.21. ‖ ► Las propiedades de Namioka y co-Namioka

Lo que el Teorema Grande de Namioka motivó, en términos generales, fue investigar el siguiente problema: ¿qué tipos de espacios X y K, que sean los más generales posibles, hay que asumir en las hipótesis del Teorema Grande de Namioka para que su conclusión se cumpla? Por ejemplo, se sabe que:

(a) existen espacios métricos completos X y K para los cuales la conclusión del Teorema Grande de Namioka deja de ser cierta, un hecho demostrado por J. B. Brown (véase, por ejemplo, [354]), y

(b) existen un espacio de Baire X y un espacio compacto K para los cuales no se cumple la conclusión del Teorema Grande de Namioka, un hecho que fue demostrado por M. Talagrand [420].

En el transcurso de la investigación de ese problema se descubrió que los "buenos candidatos" para X en las hipótesis del Teorema Grande de Namioka deben ser espacios que se parezcan o pertenezcan a alguna subclase de los espacios de Baire, como por ejemplo, ciertos espacios definidos por medio de juegos topológicos. Por otro lado, "los mejores candidatos" para K en dicho teorema deben ser tipos muy especiales de espacios compactos. Lo anterior dio origen a la siguiente definición introducida por Gabriel Debs en [116].

Definición 2.2.27. *Sean X y K espacios topológicos de Hausdorff. La notación $\mathcal{N}(X,K,\mathbb{R})$ significa que: para cualquier función separadamente continua $f: X\times K\to\mathbb{R}$, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en cada punto de $G\times K$.*

Por otro lado, J. P. R. Christensen [94] y G. Debs [116] son los responsables, respectivamente, de formular las siguientes propiedades (véase también [328, 367]).

Definición 2.2.28. (1) *Un espacio topológico de Hausdorff X se dice que tiene la **propiedad de Namioka**, o que es un **espacio de Namioka**, o está en la clase $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}(X,K,\mathbb{R})$ se cumple para cualquier espacio de Hausdorff compacto K.*
(2) *Un espacio de Hausdorff compacto K se dice que tiene la **propiedad de co-Namioka**, o que es un **espacio de co-Namioka**, o está en la clase $\mathcal{N}^*$, si $\mathcal{N}(X,K,\mathbb{R})$ se cumple para cualquier espacio Baire X.*

Observemos que como el Teorema Grande de Namioka se cumple para cualquier espacio metrizable Z uno pudiera exigir, en la definición de la propiedad de Namioka, que $\mathcal{N}(X,K,Z)$ se cumpla para todo espacio metrizable Z. Sin embargo, Namioka y Pol en [333], y posteriormente Bouziad en [72] demostraron, por métodos distintos, el siguiente resultado.

> **Teorema (Bouziad [72], Proposition 3.1)**. *Para todo espacio de Baire X y todo espacio de Hausdorff compacto K, las condiciones siguientes son equivalentes*:
>
> (1) $\mathcal{N}(X,K,\mathbb{R})$ *se cumple,*
>
> (2) $\mathcal{N}(X,K,M)$ *se cumple para todo espacio métrico M.*

Más aun, Namioka y Pol [333] hacen notar que:

> **Teorema de Namioka-Pol ([333], A.2 Theorem)**. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Si $\mathcal{N}(E,K,\mathbb{R})$ se cumple para cada espacio de Baire completamente regular E, entonces $\mathcal{N}(X,K,M)$ se cumple para todo espacio de Baire X y cada espacio metrizable M.*

Sabemos que, gracias al Teorema Grande de Namioka, *todo espacio numerablemente Čech-completo es un espacio de Namioka*. En particular, todos los espacios Čech-completo, los cuales incluyen a los espacios métricos completos así como a todos los espacios de Hausdorff (localmente) compactos, son espacios de Namioka.

Estudiaremos ahora algunos otros espacios de Baire, distintos de los espacios numerablemente Čech-completos, que poseen la propiedad de Namioka. Comencemos con un resultado que ya habíamos probado anteriormente pero que, formulado en término de la propiedad de Namioka, es más útil.

Teorema 2.2.100. *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X tiene la propiedad de Namioka.*

(2) *Para cada espacio de Hausdorff compacto K y cualquier función continua $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en cualquier punto de G.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que X tiene la propiedad de Namioka. Sean ahora K un espacio de Hausdorff compacto y $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ cualquier función continua. La función $f : X \times K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,t) = \varphi(x)(t)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in K$ es separadamente continua. Como X tiene la propiedad de Namioka, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de $G \times K$.

Fijemos un $x \in G$ arbitrario y veamos que φ es norma-continua en x. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in K$, por la continuidad de f en (x,t) existen abiertos no vacíos $U_t \subseteq X$ y $V_t \subseteq K$ tales que $x \in U_t$, $t \in V_t$ y

$$|\varphi(x)(t) - \varphi(x')(t')| = |f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon$$

para todo $x' \in U_t$ y todo $t' \in V_t$. Por la compacidad de K, existen $t_1, \ldots, t_n$ en K tal que $K = \bigcup_{i=1}^n V_{t_i}$. El conjunto $W = \bigcap_{i=1}^n U_{t_i}$ es un abierto conteniendo a x y se cumple que para todo $x' \in W$,

$$\big\| \varphi(x) - \varphi(x') \big\|_\infty = \sup_{t \in K} |\varphi(x)(t) - \varphi(x')(t')| \le \varepsilon.$$

Esto prueba la continuidad de $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ en todo $x \in G$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Sean K un espacio de Hausdorff compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Entonces la función $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ definida por $\varphi(x)(t) = f(x,t)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in K$ es continua sobre X. Nuestra hipótesis entonces nos garantiza la existencia de un subconjunto G_δ-denso G de X tal que la función $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en todo punto de G.

Vamos a probar que f es continua en todo punto de $G \times K$. Sea entonces $(x_0, t_0) \in G \times K$. Por la norma-continuidad de φ en x_0, existe un entorno abierto U_0 de x_0 en X tal que

$$\| \varphi(x) - \varphi(x_0) \|_\infty < \varepsilon/2, \quad \text{para todo} \quad x \in U_0.$$

Pero como $\varphi(x_0) \in C(K)$, existe un entorno abierto V_0 de t_0 en K tal que

$$|\varphi(x_0)(t) - \varphi(x_0)(t_0)| < \varepsilon/2, \quad \text{para todo} \quad t \in V_0.$$

Finalmente, si $(x,t) \in U_0 \times V_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(x,t) - f(x_0,t_0)| &\le |f(x,t) - f(x_0,t)| + |f(x_0,t) - f(x_0,t_0)| \\
&= |\varphi(x)(t) - \varphi(x_0)(t)| + |\varphi(x_0)(t) - \varphi(x_0)(t_0)| \\
&< \| \varphi(x) - \varphi(x_0) \|_\infty + \varepsilon/2 \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La prueba es completa. ■

Podemos usar el resultado anterior para demostrar que toda función débilmente continua con dominio un espacio de Namioka y rango en un espacio de Banach, es norma-continua en un subconjunto G_δ-denso de su dominio.

Corolario 2.2.29 (Namioka). *Sean X un espacio con la propiedad de Namioka y $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que la aplicación $\varphi : X \to (E, \omega)$ es continua. Entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $\varphi : X \to (E, \|\cdot\|)$ es continua en todo punto de G.*

Prueba. Consideremos el espacio de Hausdorff compacto $K = (B_{E^*}, \omega^*)$. Puesto que la aplicación evaluación $e : (E, \omega) \to (C(K), \tau_p)$ definida por $e(x)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in K$ es continua, tenemos que la función $\varphi_0 = e \circ \varphi : X \to (E, \omega) \to (C(K), \tau_p)$ también es continua. Ahora bien, ya que X es un espacio de Namioka se sigue del Teorema 2.2.100 que la aplicación $\varphi_0 : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en todo punto de un cierto subconjunto G_δ-denso G de X. Finalmente, como la norma de $C(K)$ restringida a E es la norma original de E, concluimos que $\varphi : X \to (E, \|\cdot\|)$ es continua sobre G. ■

Otra consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente, el cual ya habíamos demostrado en el Teorema 2.2.61, página 317.

Corolario 2.2.30 (Namioka). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si K es un subconjunto débilmente compacto de X, entonces K es norma-fragmentable.*

Prueba. Puesto que (K, ω) es un espacio Čech-completo y como todo espacio Čech-completo tiene, por el Teorema Grande de Namioka, la propiedad de Namioka, resulta que la inclusión $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (X, \omega)$, siendo continua, cumple con las condiciones establecidas en el Corolario 2.2.29 y, en consecuencia, existe un subconjunto G_δ-denso G en (K, ω) tal que $\mathrm{Id} : (K, \omega) \to (K, \|\cdot\|)$ es continua en todo punto de G. Un llamado al Teorema 2.2.52, página 301, nos dice que la norma $\|\cdot\|$ de X fragmenta a K. ■

La noción de función fragmentable se puede extender a cualquier familia de funciones del modo siguiente (véase [325], p. 131).

Definición 2.2.29. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y (M, d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones $\mathcal{F} = \{f_j : X \to M : j \in J\}$ es **equi-fragmentable por** d si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \subseteq X$ no vacío, existe un conjunto abierto no vacío U de X tal que*

$$U \cap A \neq \varnothing \qquad y \qquad diam\big(f_j(U \cap A)\big) < \varepsilon$$

para todo $j \in J$.

Otra consecuencia que se deriva del Teorema Grande de Namioka es el siguiente resultado:

Teorema 2.2.101. *Si X es un espacio Čech-completo y $K \subseteq C(X)$ es τ_p-compacto, entonces K es equi-fragmentable por la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C(X)$.*

Prueba. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X y consideremos la función $F : X \times K \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, f) = f(x)$ para todo $(x, f) \in X \times K$. Puesto que todo subespacio cerrado de un espacio Čech-completo es Čech-completo, resulta que A es Čech-completo y, así, el Teorema Grande de Namioka nos proporciona la existencia de un subconjunto G_δ-denso $U \subseteq A$ tal que $F|_{A \times K}$ es continua en todo punto de $U \times K$. Fijando un punto $x_0 \in U$ y teniendo en cuenta la compacidad de K, podemos encontrar un entorno abierto V de x_0 tal que para todo $x, x' \in V \cap U$ la desigualdad

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

se cumple para toda $f \in K$. Ya que U denso en A y V es abierto, resulta que $V \cap U$ es denso en $V \cap A$, de donde obtenemos que $V \cap A \neq \varnothing$ y así, para $x, x' \in V \cap A$ tenemos que

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \text{para toda } f \in K.$$

Esto demuestra que $\|\cdot\|_\infty - \mathrm{diam}\big(f(U \cap A)\big) < \varepsilon$ para toda $f \in K$ y termina la prueba. ■

En particular, si X es compacto o métrico completo, cualquier compacto K de $(C(X),\tau_p)$ es equi-fragmentable. En el caso en que X es compacto, ser equi-fragmentable es equivalente a la de ser equi-medible en el sentido de Grothendieck; es decir, un subconjunto norma-acotado K de $C(X)$ con X compacto, se dice **equi-medible** si para cada medida de Radon μ sobre X y cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $F \subseteq X$ tal que $|\mu|(F) > \|\mu\| - \varepsilon$ y el conjunto $K_{|F} = \{f_{|F} : f \in K\}$ es relativamente compacto en $C(F)$.

Algunas otras nociones interesantes tales como: familia de funciones *equi-σ-fragmentable*, *equi-barely continua*, *σ-continua*, etc., así como algunas relaciones entre ellas, se pueden ver en la tesis doctoral de María Muñoz [325].

Nuestra próxima tarea es presentar un resultado, demostrado por Saint-Raymond [392], el cual establece que todo espacio de Namioka completamente regular es un espacio de Baire. Para alcanzar dicho objetivo, demostraremos un lema que es fundamental en la prueba del teorema de Saint-Raymond. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Recordemos que el *soporte* de una función $f : X \to \mathbb{R}$, en notación $\mathrm{sop}(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Si f es continua, entonces $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto abierto de X.

Lema 2.2.27. *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff completamente regular y F un subconjunto cerrado nunca-denso de X. Entonces existe un conjunto compacto K y una función separadamente continua $f : X \times K \to [0,1]$ con la siguiente propiedad: para cada $x \in F$, existe un $k \in K$ tal que f es discontinua en (x,k).*

Prueba. Puesto que F es cerrado y nunca-denso en X, resulta que $F \neq X$. Sea $x \in X$ tal que $x \notin F$. La completa regularidad de X garantiza la existencia de una función continua $\varphi_x : X \to [0,1]$ tal que $\varphi_x(x) = 1$ y $\varphi_x|_F = 0$. Sea $F_1 = \mathrm{sop}(\varphi_x)$. Puesto que $\varphi_x|_F = 0$, resulta que $F_1 \neq X$ y, en consecuencia, $F_1 \cup F$ es un conjunto cerrado y nunca-denso en X y, como antes, existe función continua $\varphi_y : X \to [0,1]$ tal que $\varphi_y(y) = 1$ y $\varphi_y|_{F_1 \cup F} = 0$ para algún $y \notin F_1 \cup F$. Sea $F_2 = \mathrm{sop}(\varphi_y)$. Continuando de este modo uno puede encontrar una multitud de funciones continuas $\varphi : X \to [0,1]$ tales que $\varphi \neq 0$ y $\varphi|_F = 0$. Con la ayuda del Lema de Zorn se puede determinar una familia maximal (en el sentido de la inclusión) de funciones continuas $(\varphi_i)_{i\in I}$ de X en $[0,1]$ tales que

$$\varphi_i|_F = 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi_i.\varphi_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

donde $\varphi_i \cdot \varphi_j = 0$ significa que φ_i y φ_j tienen soportes disjuntos.

Afirmamos que el conjunto abierto

$$G = \bigcup_{i\in I} \{x \in X : \varphi_i(x) \neq 0\}$$

es denso en X. Supongamos que G no es denso en X. Entonces existe un subconjunto abierto no vacío W de X tal que $W \cap G = \varnothing$. Como F es cerrado y nunca-denso resulta que el conjunto $W \setminus F$ es abierto y no vacío. Sea $x \in W \setminus F$. Podemos, usando una vez más el hecho de que X es completamente regular, obtener una función continua $\phi : X \to [0,1]$ tal que

$$\phi(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi|_{(W\setminus F)^c} = 0.$$

Notemos que $\phi \neq \varphi_i$ para todo $i \in I$ y que $\phi \cdot \varphi_i = 0$ para todo $i \in I$. De aquí se sigue que la nueva familia $\{\varphi_i : i \in I\} \cup \{\phi\}$ se anula sobre F y sus soportes son disjuntos dos a dos lo que, evidentemente, contradice la maximalidad de $(\varphi_i)_{i\in I}$. Por esto G es denso en X.

El conjunto de índices I dotado de la topología discreta es claramente un espacio de Hausdorff localmente compacto y por lo tanto también lo es $I \times [0,1]$. Sea K la compactificación de Alexandroff de $I \times [0,1]$ y sea

λ_∞ el punto al infinito de K. Definamos la función $f : X \times K \to [0,1]$ por

$$\begin{aligned} f(x,\lambda_\infty) &= 0, \\ f(x,i,t) &= \frac{2t\,\varphi_i(x)}{t^2+\varphi_i^2(x)} \quad \text{si} \quad t \neq 0, \\ f(x,i,0) &= 0 \end{aligned}$$

Uno verifica, sin dificultad, que

$a)$ f es separadamente continua,

$b)$ si $x \in F$, entonces $f(x,k) = 0$ para todo $k \in K$, y

$c)$ si $z \in G$, entonces existe $i \in I$ tal que $\varphi_i(z) \neq 0$.

Sea $x \in F$. Como $\overline{G} = X$, entonces cualquier entorno abierto U de x contiene al menos un punto $z_x \in G$. Para este z_x existe, por (c), un $i \in I$ tal que $t = \varphi_i(z_x) \neq 0$, y por lo tanto, $f(z_x,i,t) = 1$. Puesto que $k = (i,t) \in K$, resulta de (b) que $f(x,i,t) = 0$ y, en consecuencia, $|f(x,i,t) - f(z_x,i,t)| = 1$ lo cual prueba que f es discontinua en (x,k). Esto termina la prueba. ■

Comentario Adicional 2.2.25 Sea I como en la prueba que acabamos de dar, y sea $J \supseteq I$. Equipemos a J con la topología discreta y defina a K como la compactificación de Alexandroff de $J \times [0,1]$. Si extendemos la definición de f exigiendo que

$$f(x,i,t) \ = \ 0, \qquad \text{para todo} \quad i \in J \setminus I,$$

entonces salta a la vista que con esta nueva definición de K y f, la función $f : X \times K \to [0,1]$ igualmente satisface la conclusión del Lema 2.2.27.

Teorema 2.2.102 (Saint Raymond). *Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff completamente regular. Si X es un espacio de Namioka, entonces X es un espacio de Baire.*

Prueba. Supongamos que X no es un espacio de Baire. Entonces existe un conjunto abierto no vacío V de X que es de primera categoría; es decir,

$$V \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

donde cada F_n es un subconjunto cerrado y nunca-denso de X. Por el Lema 2.2.27, aplicado a cada F_n, existe un compacto K_n y una función separadamente continua $f_n : X \times K_n \to [0,1]$ tal que para cada $x \in F_n$, existe algún $t \in K$ para el cual f_n es discontinua en (x,t). Recordemos que K_n tiene la forma $\alpha(I_n \times [0,1])$, donde cada I_n es un espacio discreto y α es la compactificación de Alexandroff. Ahora bien, por la observación anterior podemos suponer que todos los K_n son iguales, digamos, a un compacto K (por ejemplo, podemos tomar un J tal que $J \supseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y definir $K = \alpha(J \times [0,1])$).

Consideremos el espacio $Z = [0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. Entonces Z es un compacto metrizable y la función $f : X \times K \to Z$ definida por

$$f(x,t) = \big(f_n(x,t)\big)_{n=1}^{\infty}$$

es claramente separadamente continua. Notemos, por otro lado, que por construcción f no puede ser continua en ningún punto de $\{a\} \times K$ para algún $a \in V$. Esto prueba que X no puede ser un espacio de Namioka y concluye la prueba. ■

Como una consecuencia del resultado antes mencionado de Saint Raymond, I. Namioka y R. Pol demuestran el siguiente teorema ([335], Lemma 3.1).

Teorema 2.2.103 (Namioka-Pol). *Sea X un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Si X contiene un subespacio denso Y con la propiedad de Namioka, entonces X tiene la propiedad de Namioka.*

Prueba. Puesto que Y tiene la propiedad de Namioka, se sigue del Teorema 2.2.102 que dicho espacio es un espacio de Baire. Además, como Y es denso en X, resulta que también X es un espacio de Baire. Sean K un espacio de Hausdorff compacto y $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ una función continua.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n = \bigcup \big\{ U : U \text{ es un subconjunto abierto no vacío de } X \text{ y } \|\cdot\|_\infty - diam(\varphi(U)) < 1/n \big\}.$$

Es suficiente demostrar que cada G_n es denso en X. Sea W un subconjunto abierto no vacío de X. Como $\varphi|_Y : Y \to (C(K), \tau_p)$ es continua y Y tiene la propiedad de Namioka, entonces existe un subconjunto G_δ-denso $\mathcal{O}$ de Y tal que $\varphi|_Y : Y \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en todo punto de $\mathcal{O}$. Puesto que $Y \cap W$ es abierto en Y, entonces $\mathcal{O} \cap (Y \cap W) \neq \varnothing$. Sea $y \in \mathcal{O} \cap (Y \cap W)$ y usemos la norma-continuidad de $\varphi|_Y$ en Y para hallar un entorno abierto V de y en X tal que

$$V \subseteq W \qquad \text{y} \qquad \|\cdot\|_\infty - \text{diam}(\varphi(Y \cap V)) < 1/n.$$

Por otro lado, siendo $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ continua, se tiene que $\varphi(V) \subseteq \overline{\varphi(Y \cap V)}^{\tau_p}$. Ahora bien, como la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(K)$ es τ_p-inferiormente semicontinua , entonces al tomar la τ_p-clausura de cualquier conjunto no crece el diámetro, y en consecuencia,

$$\|\cdot\|_\infty - \text{diam}(\varphi(V)) \leq \|\cdot\|_\infty - \text{diam}\left(\overline{\varphi(Y \cap V)}^{\tau_p}\right) = \|\cdot\|_\infty - \text{diam}(\varphi(Y \cap V)) < 1/n.$$

Esto prueba que $V \subseteq G_n$ y $\varnothing \neq V \subseteq W \cap G_n$, es decir, G_n es un abierto denso en X. El Teorema de Categoría de Baire nos revela entonces que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ es un G_δ-denso tal que $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en todo punto de G. Por el Teorema 2.2.100, X tiene la propiedad de Namioka. ■

Los siguientes tres resultados serán usados en el próximo corolario. El primero caracteriza a los espacios compactos de Eberlein, un hecho probado por Amir y Lindenstrauss en 1968, ([8]), el segundo caracteriza a los conjuntos débilmente compactos de $C(\Omega)$, donde Ω es un espacio de Hausdorff compacto, demostrado por Grothendieck y cuya prueba puede verse en [383] o en [73], donde la demostración usa el teorema “sup” de R. C. James, mientras que el tercer resultado, demostrado por Rosenthal [383], caracteriza a $C(\Omega)$ como un espacio débilmente compacto generado (WCG).

> **Teorema de Amir-Lindenstrauss**. *K es un espacio compacto de Eberlein si, y sólo si, $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es* WCG.
>
> **Teorema de Grothendieck**. *Un subconjunto norma-acotado K de $C(\Omega)$ es débilmente compacto si, y sólo si, K es τ_p-compacto.*
>
> **Teorema de Rosenthal**. $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ *es* WCG *si, y sólo si, existe un subconjunto débilmente compacto L de $C(\Omega)$ que separa los puntos de Ω.*

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff X se llama un σ-compacto si se puede expresar como una unión numerable de subconjuntos compactos. Como un corolario del Teorema de Namioka-Pol, tenemos que:

Corolario 2.2.31 (Talagrand). *Sea (X, τ) un espacio de Baire y suponga que X contiene un subconjunto denso y σ-compacto. Entonces X es un espacio de Namioka.*

Prueba. Sean K un espacio de Hausdorff compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Sin perder generalidad, uno puede, pasando a un espacio cociente de K si fuera necesario, suponer que las funciones $f(x,\cdot)$ separan los puntos de K y que f es acotada. Sea $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X, que podemos suponer creciente, cuya unión es densa en X. Entonces, el conjunto $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, donde $L_n = \{f(x,\cdot) : x \in K_n\}$, separa los puntos de K. Puesto que cada conjunto L_n es τ_p-compacto en $C(K)$, el Teorema de Grothendieck nos revela que tales L_n también son débilmente compactos y, por lo tanto, L es débilmente compacto. Un llamado al Teorema de Rosenthal nos dice que $C(K)$ es un espacio WCG. El Teorema de Amir-Lindenstrauss nos garantiza entonces que K es un compacto de Eberlein y se sigue del Teorema 2.2.108 que existe un conjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de $G \times K$. Esto nos lleva a la conclusión que X es un espacio de Namioka. ■

Puesto que, por definición, todo espacio de co-Namioka es un espacio de Hausdorff compacto, resulta que todo espacio de co-Namioka es un espacio de Baire. Desafortunadamente no todo espacio de Hausdorff compacto es co-Namioka. En efecto, en [420], M. Talagrand construye un espacio de Hausdorff compacto K, un espacio α-favorable X para el juego $\mathrm{BM}(X)$ (y por consiguiente, un espacio de Baire) y una función separadamente continua $f : X \times K \to \mathbb{R}$ la cual no satisface la conclusión del Teorema Grande de Namioka. A pesar de este hecho algunos espacios compactos importantes son co-Namioka. En lo que sigue veremos algunos de ellos.

El próximo resultado, que usaremos con cierta frecuencia, caracteriza a los conjuntos compactos que tienen la propiedad de co-Namioka. Dicha caracterización es muy parecida a la demostrada para la propiedad de Namioka. Como siempre, τ_p denotará la topología de la convergencia puntual sobre $C(K)$, donde K es un espacio de Hausdorff compacto.

Teorema 2.2.104 (Debs). *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *K tiene la propiedad de co-Namioka.*

(2) *Para cada espacio de Baire X y cualquier aplicación continua $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en cualquier punto de G.*

(3) *Para cada espacio de Baire X, cada aplicación continua $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto abierto, no vacío U de X tal que $\|\cdot\|_\infty - diam\big(\varphi(U)\big) \leq \varepsilon$.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que K posee la propiedad de co-Namioka. Sea X cualquier espacio de Baire y sea $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ una función continua arbitraria. La función

$$f : X \times K \to \mathbb{R} \qquad \text{definida por} \qquad f(x,t) = \varphi(x)(t)$$

para todo $x \in X$ y todo $t \in K$, es claramente separadamente continua. Por tener K la propiedad de co-Namioka, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que f es continua sobre $G \times K$.

Fijemos un $x \in G$ y probemos que $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en x. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y notemos que para cada $t \in K$, la continuidad de f en el punto (x,t) nos garantiza la existencia de conjuntos abiertos V_t y U_t tales que $t \in V_t$, $x \in U_t$ y

$$\big|\varphi(x')(s') - \varphi(x)(t)\big| = \big|f(x',s') - f(x,t)\big| < \varepsilon$$

para todo $s' \in V_t$, $x' \in U_t$. Por la compacidad de K, existe un conjunto finito F_0 de K tal que $\bigcup_{t \in F_0} V_t$ cubre a K. El conjunto $W = \bigcap_{t \in F_0} U_t$ es un conjunto abierto conteniendo a x y se cumple que

$$\big|\varphi(x')(t) - \varphi(x)(t)\big| = \big|f(x',t) - f(x,t)\big| < \varepsilon$$

para todo $t \in K$ y $x' \in W$. Esto significa que la aplicación $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en x pues

$$\left\| \varphi(x') - \varphi(x) \right\|_\infty = \sup_{t \in K} \left| \varphi(x')(t) - \varphi(x)(t) \right| \leq \varepsilon$$

para todo $x' \in W$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Es inmediata.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sean X un espacio de Baire y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Definamos $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ por

$$\varphi(x)(t) = f(x,t) \quad \text{para todo } x \in X, \ \ t \in K.$$

Puesto que f es separadamente continua, resulta que φ es continua sobre X. Sea $\varepsilon > 0$. Por (3), existe un conjunto abierto no vacío U de X tal que $\|\cdot\|_\infty - \operatorname{diam} \varphi(U) \leq \varepsilon$. Como todo conjunto abierto en un espacio de Baire es un espacio de Baire, se sigue que cada uno de los conjuntos

$$O_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ U \subseteq X : U \textit{ es abierto y } \|\cdot\|_\infty - diam\, \varphi(U) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

es abierto y denso en X. Por el Teorema de Categoría de Baire, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es un G_δ-denso en X y, por supuesto, f es continua en todo punto de $G \times K$. ■

La vinculación de la noción de fragmentabilidad con la propiedad de co-Namioka es dada por el siguiente resultado demostrado por Jayne, Namioka y Rogers ([234], Corolary 3.1), véase también ([316], Theorem 2.1).

Teorema 2.2.105 (Jayne-Namioka-Rogers). *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Si $(C(K), \tau_p)$ es norma-fragmentado, entonces K tiene la propiedad de co-Namioka.*

Prueba. Sean X un espacio de Baire y $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ una función continua. Puesto que φ define una aplicación USCO minimal $x \to \{\varphi(x)\}$, se sigue del Teorema 2.2.55 que existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en todo punto de G. Un llamado al Teorema 2.2.104 nos dice que K tiene la propiedad de co-Namioka. ■

En general, la conclusión del resultado anterior sigue siendo válida si uno exige que $(C(K), \tau_p)$ sea σ-fragmentado por la norma ([234], Corolary 3.1).

Si bien es cierto que no todo espacio compacto de Hausdorff es de co-Namioka vale, sin embargo, el siguiente resultado.

Teorema 2.2.106. *Todo espacio métrico compacto es un espacio de co-Namioka.*

Prueba. Sea (K, d) un espacio métrico compacto. Sean X un espacio de Baire y $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ una función continua. Puesto que K es un espacio métrico compacto, resulta del Teorema 1.4.19, página 30, que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach norma-separable y, en consecuencia, podemos seleccionar una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $C(K)$ que es $\|\cdot\|_\infty$-densa en dicho espacio. De esto se sigue que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(f_n, \varepsilon).$$

Como las bolas $B(f_n, \varepsilon)$ son $\|\cdot\|_\infty$-cerradas, ellas también son τ_p-cerradas por lo que la continuidad de φ nos garantiza que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\varphi^{-1}(B(f_n, \varepsilon)) := F_n$ es un cerrado de X y se tiene, además, que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Por el Teorema de Categoría de Baire, existe un n_0 tal que $\mathrm{int}(F_{n_0})$ es no vacío. Si ahora definimos $U := \mathrm{int}(F_{n_0})$, resulta que, para ese U, $\|\cdot\|_\infty$-diam $\varphi(U) \leq 2\varepsilon$. Uno invoca el Teorema 2.2.104 para concluir que K tiene la propiedad de co-Namioka. ■

Teorema 2.2.107. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Si $C(K)$ admite una norma* LUR *que es τ_p-inferiormente semicontinua, entonces K tiene la propiedad de co-Namioka.*

Prueba. Sea $\|\cdot\|$ una norma LUR sobre $Y = C(K)$ que es τ_p-inferiormente semicontinua. Afirmamos que la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (B_Y, \tau_p) \to (B_Y, \|\cdot\|)$ es continua en cualquier punto de S_Y. En efecto, tomemos un $y_0 \in S_Y$ arbitrario y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\|\cdot\|$ es LUR, existe un $\delta > 0$ tal que

$$V := \{y \in B_Y : \|y_0 + y\| > 2 - \delta\} \subseteq \{y \in B_Y : \|y_0 - y\| < \varepsilon\}.$$

Ahora bien, como la norma $\|\cdot\|$ es τ_p-inferiormente semicontinua, resulta que V es un τ_p-entorno de y_0 en B_Y, por lo que Id es continua en y_0.

Sean X un espacio de Baire y $\varphi : X \to (C(K), \tau_p)$ una función continua. Entonces la aplicación $\psi : X \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \|\varphi(x)\|$, es τ_p-inferiormente semicontinua. Por el Ejemplo 1, página 100, existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que ψ es continua en todo punto de G. Afirmamos que cualquier punto x de G es un punto de continuidad de $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$. En efecto, si $\lim x_\alpha = x$, entonces $\lim \|\varphi(x_\alpha)\| = \|\varphi(x)\|$. Notemos que si $\varphi(x) = 0$, entonces claramente φ es continua en x. Supongamos ahora que $\varphi(x) \neq 0$. Sin perder generalidad podemos asumir que $\varphi(x_\alpha) \neq 0$ para cualquier α y entonces definamos

$$z_\alpha = \|\varphi(x_\alpha)\|^{-1} \varphi(x_\alpha).$$

Claramente, $\tau_p - \lim(z_\alpha) = \|\varphi(x)\|^{-1} \varphi(x)$. Puesto que todos estos puntos están en S_Y, tenemos que

$$\lim_\alpha \left\| z_\alpha - \|\varphi(x)\|^{-1} \varphi(x) \right\| = 0.$$

El Teorema 2.2.104 permite concluir que K tiene la propiedad de co-Namioka.. ■

Nos proponemos, en lo inmediato, probar que todo espacio compacto de Eberlein es un espacio de co-Namioka.

Teorema 2.2.108 (Deville). *Si K es un espacio compacto de Eberlein, entonces K tiene la propiedad de co-Namioka.*

Prueba. Sea K un espacio compacto de Eberlein y supongamos que $f : X \to (C(K), \tau_p)$ es una función continua definida sobre un espacio de Baire X. Sea $\varepsilon > 0$. Por el resultado de Amir-Lindenstrauss $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es débilmente compactamente generado (WCG), por lo que existe un subconjunto débilmente compacto F de $C(K)$ tal que

$$\overline{[F]}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K),$$

donde, como siempre, $[F]$ denota el subespacio lineal generado por F. Es bien conocido que la cápsula absolutamente convexa cerrada de un conjun to ω-compacto es ω-compacto, por lo que podemos suponer que F absolutamente convexo y débilmente compacto. De esto se deduce, en particular, que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nF + \varepsilon B_{C(K)}).$$

Puesto que nF es τ_p-compacto y $\varepsilon B_{C(K)}$ es τ_p-cerrado, se sigue que cada uno de los conjuntos $nF+\varepsilon B_{C(K)}$ es τ_p-cerrado. Ahora bien, la continuidad de f nos dice que $f^{-1}(nF+\varepsilon B_{C(K)})$ es cerrado en X y, además, que

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(nF+\varepsilon B_{C(K)}).$$

Siendo X un espacio de Baire, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza la existencia de al menos un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(n_0F+\varepsilon B_{C(K)})$ tiene interior no vacío. Si ahora definimos

$$U_1:=\operatorname{int}\left(f^{-1}(n_0F+\varepsilon B_{C(K)})\right),$$

resulta que U_1 es un abierto no vacío de X tal que

$$f(U_1)\subseteq n_0F+\varepsilon B_{C(K)}.$$

Pongamos $L_0=n_0F$ y usemos inducción transfinita para construir una sucesión decreciente (L_γ) de subconjuntos débilmente compactos de $C(K)$ tal que cada $L_\gamma\setminus L_{\gamma+1}$ tenga $\|\cdot\|_\infty$-diámetro $\leq\varepsilon$. En efecto, como L_0 es débilmente compacto, el Teorema 2.2.61 nos asegura que L_0 es $\|\cdot\|_\infty$-fragmentado, por lo que existe un subconjunto relativamente ω-abierto $O\neq\varnothing$ de L_0 tal que $\|\cdot\|_\infty-diam(O)\leq\varepsilon$, esto significa que la familia $\{U:U$ es relativamente ω-abierto en L_0 y $\|\cdot\|_\infty-\operatorname{diam}(U)\leq\varepsilon\}$ es no vacía. Si ahora definimos

$$L_1=L_0\setminus\bigcup\{U:U\ \textit{es relativamente}\ \omega\textit{-abierto en}\ L_0\ \textit{y}\ \|\cdot\|_\infty-diam(U)\leq\varepsilon\}$$

entonces L_1 es débilmente compacto y $L_0\setminus L_1$ tiene $\|\cdot\|_\infty$-diámetro $\leq\varepsilon$. Supongamos que L_γ ha sido construido para cada $\gamma<\beta$ con β un ordinal fijo. Si β es un ordinal límite definimos

$$L_\beta=\bigcap_{\gamma<\beta}L_\gamma,$$

mientras que si $\beta=\gamma+1$, hacemos uso de la $\|\cdot\|_\infty$-fragmentabilidad de L_γ para construir, como antes, $L_{\gamma+1}$ de modo que $L_\gamma\setminus L_{\gamma+1}$ tenga $\|\cdot\|_\infty$-diámetro $\leq\varepsilon$.

Sea $M_\gamma=L_\gamma+\varepsilon B_{C(K)}$ y denotemos por γ_0 el ordinal más pequeño para el cual $f(U_1)\subseteq M_{\gamma_0}$. Puesto que M_{γ_0+1} es τ_p-cerrado y no contiene al conjunto $f(U_1)$, el conjunto

$$U=U_1\setminus f^{-1}(M_{\gamma_0+1})$$

es no vacío y abierto en X y, además,

$$f(U)\subseteq M_{\gamma_0}\setminus M_{\gamma_0+1}.$$

Veamos que $M_{\gamma_0}\setminus M_{\gamma_0+1}$ tiene $\|\cdot\|_\infty$-diámetro $\leq\varepsilon$. En efecto, sean $x,z\in M_{\gamma_0}\setminus M_{\gamma_0+1}$. Entonces

$$x=x_1+x_2\qquad\text{y}\qquad z=z_1+z_2$$

donde $x_1,z_1\in L_{\gamma_0}$ y $x_2,z_2\in\varepsilon B_{C(K)}$. Puesto que $x,z\notin M_{\gamma_0+1}$, resulta que $x_1,z_1\in L_{\gamma_0}\setminus L_{\gamma_0+1}$ y, en consecuencia, $\|x_1-z_1\|\leq\varepsilon$. De aquí se sigue que $\|x-z\|\leq 3\varepsilon$. Esto prueba que $\|\cdot\|_\infty$-diam$(f(U))\leq 3\varepsilon$. Finalmente, haciendo un llamado al Teorema 2.2.104 se concluye que K tiene la propiedad de co-Namioka. ■

Comentario Adicional 2.2.26 (1) Notemos que el resultado anterior nos garantiza que para cualquier función separadamente continua $f:X\times K\to\mathbb{R}$, donde X es un espacio de Baire y K es un compacto de Eberlein, existe un G_δ-denso G de X tal que f es continua en todo punto de $G\times K$.

(2) No sólo los espacios compactos de Eberlein son co-Namioka, también lo son los compactos de Corson [117] y los compactos de Valdivia [126]. Sin embargo, $\beta\mathbb{N}$ no es co-Namioka [123].

(3) Cualquier espacio compacto K tal que $K^{(\omega_1)} = \varnothing$ tiene la propiedad de co-Namioka.

(4) Cualquier espacio compacto bien ordenado tiene la propiedad de co-Namioka.

(5) Si K es un espacio de Hausdorff compacto tal que $C(K)$ es $\mathcal{K}$ - analítico para la τ_p-topología, entonces K es un espacio de co-Namioka.

Una prueba de los 3 últimos resultados se puede mirar, por ejemplo, en ([128], p. 329-330).

En [287], Lee y Piotrowski proponen como definición de espacios co-Namioka la siguiente: un espacio completamente regular K es llamado un espacio de **co-Namioka*** si $\mathcal{N}(X,K,\mathbb{R})$ se cumple para cualquier espacio de Namioka X. Con esta definición resulta claro que todo espacio de Hausdorff compacto es un espacio de co-Namioka*, pero no todo espacio de co-Namioka* es un espacio de Baire. Ellos también prueban que cualquier espacio localmente compacto y $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto es co-Namioka*.

2.2.22. ‖ ► El juego de Christensen-Saint Raymond y la propiedad de Namioka

El objetivo central de esta sección es presentar, fundamentalmente, una prueba del Teorema Grande de Namioka al estilo de Christensen usando juegos topológicos. El siguiente juego, propuesto por Christensen en [94], es muy parecido al juego de Choquet pero con dos diferencias: la primera es que en cada partida de este juego la elección arbitraria de los puntos lo hace el jugador α y no el jugador β, mientras que la segunda diferencia es la regla sobre cómo se gana dicho juego,

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. En el **juego de Christensen-Saint Raymond**, que denotaremos por $\mathrm{G}_\sigma(X)$, los jugadores α y β escogen, alternativamente, en cada partida de este juego, conjuntos abiertos no vacíos U_n y V_n con $x_n \in V_n$ según la siguiente regla: β, como siempre, es el primero en comenzar la partida eligiendo un subconjunto abierto no vacío U_1 en X y entonces α responde escogiendo, además de un abierto $V_1 \subseteq U_1$, un punto $x_1 \in V_1$ (su movimiento es, entonces, el par (V_1,x_1) con $x_1 \in V_1$). El turno ahora es para β y su elección es un conjunto abierto no vacío $U_2 \subseteq V_1$. Le toca jugar a α y su escogencia es un abierto no vacío $V_2 \subseteq U_2$ y un punto $x_2 \in V_2$, y se continua de este modo. El jugador α gana la partida $p = (U_n,V_n,x_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathrm{G}_\sigma(X)$ si la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ posee al menos un punto de acumulación en $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$; es decir, si

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \overline{\{x_n : n = 1,2,\dots\}} \neq \varnothing.$$

En caso contrario el vencedor de la partida es el jugador β. La nociones de juego parcial, estrategias, estrategias ganadoras para α y β, etc. se definen de manera enteramente similar como en el juego de Banach-Mazur.

Un rasgo distintivo entre el juego de Christensen-Saint Raymond y el juego de Choquet es que en el primero los U_n no tienen, necesariamente, que contener los puntos $x_n \in V_n$.

Definición 2.2.30. *El espacio topológico de Hausdorff X se llama* α***-favorable para el juego*** $\mathbf{G}_\sigma(X)$ *o* $\sigma-\alpha$***-favorable*** *si el jugador α tiene una estrategia ganadora en $G_\sigma(X)$. Si el jugador β no posee ninguna estrategia ganadora en el juego $G_\sigma(X)$, entonces se dice que el espacio X es* β***-desfavorable para*** $\mathbf{G}_\sigma(X)$ *o* $\sigma-\beta$***-desfavorable****.*

Observemos que:

($\clubsuit$)$_1$ *Si X es un espacio topológico α-favorable para $\mathrm{G}_\sigma(X)$, entonces X es β-desfavorable para $\mathrm{G}_\sigma(X)$.*

($\clubsuit$)$_2$ *Si X es un espacio topológico β-desfavorable para $\mathrm{BM}(X)$, entonces X es β-desfavorable para $\mathrm{G}_\sigma(X)$.*

El siguiente resultado relaciona la propiedad de Namioka con el hecho de que dicho espacio es β-desfavorable para el juego $\mathrm{G}_\sigma(X)$.

Teorema 2.2.109 (Saint Raymond, [392]). *Si (X,τ) es un espacio β-desfavorable para $\mathrm{G}_\sigma(X)$, entonces X es un espacio de Namioka.*

Prueba. Sean K un espacio de Hausdorff compacto y $f : X\times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Sin perder generalidad, podemos suponer que $-1 \leq f(x,y) \leq 1$ para todo $(x,y) \in X\times K$. Consideremos ahora la función asociada

$$F : X \to C(K) \qquad \text{definida por} \quad F(x)(y) = f(x,y)$$

para todo $x \in X$ y todo $y \in K$. Recordemos que la oscilación de F en $x \in X$ se define como:

$$\operatorname{osc}(F,x) = \inf_{\mathfrak{U}(x)} \Big\{ \sup \Big\{ \|F(x_1) - F(x_2)\|_\infty : x_1, x_2 \in U \in \mathfrak{U}(x) \Big\} \Big\}$$

donde el ínfimo se toma sobre la familia $\mathfrak{U}(x)$ de todos todos los entornos abiertos de x. Puesto que $\operatorname{osc}(F,x)$ es una función superiormente semicontinua , resulta que el conjunto

$$\begin{aligned} G = \{x \in X : \operatorname{osc}(F,x) = 0\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \operatorname{osc}(F,x) < 1/n\} \\ &= \Big\{x \in X : f \textit{ es continua en cada punto de } \{x\}\times K\Big\}, \end{aligned}$$

es un G_δ de X (véase, Teorema 1.12.14, página 94).

Nuestra tarea es demostrar que G es denso en X. Supongamos, por el contrario, que G no es denso en X. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que el conjunto $A := \{x \in X : osc(F,x) < \delta\}$ no es denso en X; esto implica la existencia de un conjunto abierto no vacío U de X tal que $U \cap A = \varnothing$; es decir, $osc(F,x) \geq \delta > 0$ para todo $x \in U$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $[-1,1]^k$ es un espacio métrico compacto y, por consiguiente, el espacio de Banach $C([-1,1]^k)$ es separable y, así, podemos escoger una sucesión de funciones $(P_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ en $C([-1,1]^k)$ tal que

$$C([-1,1]^k) = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(P_{k,j}, \delta/4),$$

donde $B(P_{k,j}, \delta/4)$ son bolas cerradas con centro $P_{k,j}$ y radio $\delta/4$. Lo anterior nos permite definir ahora una estrategia ε_β para el jugador β del modo siguiente: β, como siempre, es quien hace la primera elección tomando $U_1 := U$. Entonces α elige (V_1, x_1) con $V_1 \subseteq U_1$ y $x_1 \in V_1$. En el paso $n+1$, una vez que α ha elegido (V_n, x_n), con $x_n \in V_n \subseteq U_n$, el jugador β elige

$$U_{n+1} := \varepsilon_\beta((V_1,x_1),\ldots,(V_n,x_n)) = V_n \setminus \bigcup_{j+k\leq n} C_{k,j}$$

donde los $C_{k,j}$ definidos por

$$C_{k,j} = \big\{x \in X : \big\| F(x) - \varphi_{k,j} \big\|_\infty \leq \delta/3\big\}$$

son subconjuntos cerrados de X ya que $F: X \to (C(K), \tau_p)$ es continua y la norma $\|\cdot\|_\infty$ es τ_p-semicontinua inferiormente, y las funciones continuas $\varphi_{k,j}: K \to \mathbb{R}$ vienen dadas por

$$\varphi_{k,j}(y) = P_{k,j}(f(x_1, y), \ldots, f(x_k, y)).$$

Puesto que $\|\cdot\|_\infty$-diam$(F(C_{k,j})) \leq 2\delta/3 < \delta$, resulta que cada conjunto $C_{k,j}$ es nunca-denso en $U = U_1$, lo cual asegura que $U_{n+1} \neq \varnothing$ pues $V_n \subseteq U_1$.

Tenemos que, por hipótesis, la estrategia ε_β del jugador β no es una estrategia ganadora en el juego $\mathrm{G}_\sigma(X)$, por lo que existe una partida $(U_n, V_n, x_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathrm{G}_\sigma(X)$ que es ganada por el jugador α; es decir,

$$\bigcap_{n=1}^\infty V_n \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \neq \varnothing.$$

Sea x_∞ un punto de acumulación de la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ contenido en $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ y sea $\Phi: K \to [-1,1]^{\mathbb{N}}$ la función definida por $\Phi(y) = (F(x_n)(y))_{n=1}^\infty$. Entonces, la continuidad de la función $f(\cdot, y)$ nos dice que

$$\Phi(y) = \Phi(y') \quad \Rightarrow \quad f(x_\infty, y) = f(x_\infty, y')$$

para todo $y, y' \in K$. Esto permite construir una función continua φ sobre el compacto $\Phi(K)$ tal que $F(x_\infty) = \varphi \circ \Phi$ y, así, por el Teorema de Extensión de Tietze, existe una función continua ψ sobre $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ que prolonga a φ. Si ψ_k es la función continua definida sobre $[-1,1]^k$ dada por

$$\psi_k(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \psi(u_1, u_2, \ldots, u_k, 0, 0, \ldots),$$

entonces la continuidad uniforme de ψ con respecto a la métrica $d(u,v) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|u_n - v_n|$, con $u, v \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$, produce la existencia de un $k \geq 1$ tal que $\|\psi - \psi_k \circ \pi_k\|_\infty \leq \delta/12$, donde π_k es la proyección canónica de $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ sobre $[-1,1]^k$. Si $j \in \mathbb{N}$ es tal que $\left\|\psi - P_{k,j}\right\|_\infty \leq \delta/4$, entonces se tiene que

$$\left\|F(x_\infty) - \varphi_{k,j}\right\|_\infty \leq \delta/4 + \delta/12 = \delta/3$$

de donde se sigue que $x_\infty \in C_{k,j}$ pero no pertenece a U_{k+j+1}. Esto, por supuesto, es violatorio al hecho de $x_\infty \in \bigcap_{n=1}^\infty V_n = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Esta contradicción establece que G es denso en X y, por lo tanto, X es un espacio de Namioka. ■

Para el jugador α en el juego $\mathrm{G}_\sigma(X)$, Christensen [94] obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.110 (Christensen). *Si X es un espacio numerablemente Čech-completo, entonces X es α-favorable para $\mathrm{G}_\sigma(X)$.*

Prueba. Como X es numerablemente Čech-completo, existe una sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ de cubrimientos abiertos de X tal que, para cualquier sucesión decreciente de subconjuntos cerrados $(F_n)_{n=1}^\infty$ de X, se cumple que $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \varnothing$ siempre que $(F_k)_{k=1}^\infty$ sea $\mathcal{U}_n$-pequeño, para cada $n \in \mathbb{N}$. Asignemos, a cada conjunto $A \subseteq X$, el número

$$n(A) = \sup\left\{k \in \mathbb{N} : \textit{para cada } n \leq k\textit{, existe un } U_n \in \mathcal{U}_n \textit{ con } A \subseteq U_n\right\}.$$

Definamos ahora la siguiente estrategia ε_α para α en el juego $G_\sigma(X)$. Sea U_1 cualquier subconjunto abierto no vacío de X y supongamos que dicho conjunto es el primer movimiento del jugador β. Usemos la regularidad de X para obtener un abierto no vacío V_1 de X y un $x_1 \in X$ tal que

$$x_1 \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1 \qquad \text{y} \qquad n(\overline{V_1}) \geq n(U_1) + 1.$$

La primera elección de α es, por supuesto, tomar V_1 y el punto x_1, es decir, $\varepsilon_\alpha(U_1) = (V_1, x_1)$. Continuando de este modo uno obtiene, usando inducción, una partida $p = (U_n, V_n, x_n)_{n=1}^{\infty}$ con las siguientes propiedades:

$$x_n \in V_n, \qquad U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq U_n, \qquad \varepsilon_\alpha(U_n) = (V_n, x_n), \qquad \text{y} \qquad n(\overline{V_n}) \geq n(U_n) + 1$$

Pongamos $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces cada F_n es cerrado y la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n(\overline{V_n}) \geq n$ por lo que existe $W_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $V_n \subseteq W_n$ y de allí que $F_n \subseteq W_n$. Esto prueba que $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ es $\mathcal{U}_n$-pequeño, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, por hipótesis, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. La conclusión es que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posee un punto límite en $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$, lo cual significa que α gana la partida p. ■

Estamos ahora en condiciones, con las herramientas ya establecidas, de poder demostrar el Teorema Grande de Namioka usando juegos topológicos, el cual, en este lenguaje, se puede expresar del modo siguiente:

Teorema 2.2.111 (Teorema Grande de Namioka). *Todo espacio numerablemente Čech-completo tiene la propiedad de Namioka.*

Prueba. Sea X un espacio numerablemente Čech-completo. Por el Teorema 2.2.110, X es α-favorable para $G_\sigma(X)$ y, por consiguiente, por la observación $(\clubsuit)_1$, β-desfavorable para el mismo juego. Un llamado al Teorema 2.2.109 nos dice que X tiene la propiedad de Namioka. ■

El siguiente corolario también es una consecuencia inmediata del Teorema Grande de Namioka en combinación con el Teorema de Namioka-Pol.

Corolario 2.2.32. *Todo espacio casi Čech-completo tiene la propiedad de Namioka.*

Prueba. Sea X un espacio casi Čech-completo. Entonces X contiene un subespacio Y que es Čech-completo y denso en X. Por el Teorema Grande de Namioka, Y tiene la propiedad de Namioka y por el Teorema 2.2.103, X tiene la propiedad de Namioka. ■

Teorema 2.2.112. *Si (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff completamente regular el cual contiene un subespacio denso completamente metrizable, entonces X es α-favorable para $G_\sigma(X)$. En particular, X es un espacio de Namioka y, en consecuencia, un espacio de Baire.*

Prueba. Sea G un subespacio de X denso completamente metrizable. Sea d una métrica completa sobre G compatible con la topología relativa de G. Para construir una estrategia ganadora ε_α para el jugador α en $G_\sigma(X)$, comencemos tomando cualquier conjunto abierto no vacío U de X y supongamos que $U_1 := U$ es la primera elección del jugador β. La elección del jugador α se hará de acuerdo a la siguiente estrategia. Como G es denso en X, entonces $U_1 \cap G \neq \varnothing$. Sea $x_1 \in U_1 \cap G$ y usemos la cuasi-regularidad de (G, d) para obtener un abierto W_1 en G tal que $x \in W_1 \subseteq \overline{W}_1 \subseteq U_1 \cap G$ y $d - \operatorname{diam}(W_1) < 1/2$. Siendo W_1 un abierto de G, existe, por definición y la regularidad de X, un abierto no vacío V_1 de X tal que $W_1 = V_1 \cap G$,

$$x \in V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1, \qquad \text{y} \qquad d - \operatorname{diam}(V_1 \cap G) < 1/2$$

La elección adecuada de α es tomar el par $(V_1, x_1) = \varepsilon_\alpha(U_1)$. Por inducción se construye una partida $p = (U_n, V_n)_{n=1}^{\infty}$ para la cual se cumple que

$$x_n \in V_n \cap G, \qquad U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq U_n, \qquad \text{y} \qquad d - \operatorname{diam}(V_n \cap G) < 1/(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio métrico completo (G,d), existe un $x_0 \in G$ tal que $x_n \to x_0$. Por la construcción de los V_n tenemos que

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Esto prueba que ε_α es una estrategia ganadora para el jugador α y termina la prueba. ■

Ya hemos visto que todo espacio de Namioka es un espacio de Baire. El recíproco, demostrado por Saint Raymond, también es cierto en espacios con una estructura métrica.

Teorema 2.2.113 (Saint Raymond). *Sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Namioka.*

(2) *X es un espacio de Baire.*

Prueba. (1) implica (2) es el Teorema 2.2.102. Supongamos que (2) se cumple. Por el Teorema de Banach-Mazur, Teorema 2.2.74, el jugador β no posee estrategia ganadora en el juego $\mathrm{BM}(X)$. Se sigue de la observación $(\clubsuit)_2$ que el jugador β no posee estrategia ganadora en el juego $\mathrm{G}_\sigma(X)$. Un llamado al Teorema 2.2.109 concluye la prueba. ■

Nuestro último resultado en esta sección establece las equivalencias de varias nociones ya estudiadas anteriormente, así como la siguiente introducida por Edgar y Wheeler en [148].

Definición 2.2.31 (Edgar-Wheler). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y A un subconjunto no vacío de X. El conjunto A se dice **fragmentable por abiertos** si para cada subconjunto débilmente abierto U de X con $U \cap A \neq \varnothing$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto débilmente abierto $V \subseteq U$ tal que $V \cap A \neq \varnothing$ y*

$$\|\cdot\| - \operatorname{diam}(V \cap A) < \varepsilon$$

Edgar y Wheler llaman a tales conjuntos descascarables (en inglés "huskable"). El siguiente resultado fue probado por Rybakov en ([389], Theorem 1, p. 526).

Teorema 2.2.114 (Rybakov). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y A un subconjunto norma-cerrado y acotado de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *el conjunto A es fragmentable por abiertos,*

(2) *los puntos de continuidad de la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (A,\omega) \to (A,\|\cdot\|)$ forman un subconjunto G_δ-denso de (A,ω),*

(3) *las topologías de la norma y la débil en A coinciden sobre un subconjunto G_δ-denso de (A,ω),*

(4) *el espacio topológico (A,ω) es casi Čech-completo,*

(5) *el espacio topológico (A,ω) es α-favorable en el juego $\mathrm{G}_\sigma(A,\omega)$,*

(6) *el espacio topológico (A,ω) es β-desfavorable en el juego $\mathrm{G}_\sigma(A,\omega)$,*

(7) *el espacio topológico (A,ω) es un espacio de Namioka.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n = \bigcup \big\{U \subseteq A : U \text{ \emph{es} } \omega\text{-\emph{abierto y} } \|\cdot\| - \operatorname{diam}(U) < 1/n\big\}.$$

Como cada uno de los conjuntos G_n es abierto en (A, ω), se sigue de la definición de conjunto fragmentable por abiertos que cada G_n es denso en (A, ω). Sea

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Obviamente G es el conjunto de los puntos de continuidad de Id el cual es un G_δ en (A, ω). Veamos que G es denso en (A, ω). Tomemos un conjunto abierto no vacío arbitrario V de (A, ω). Puesto que A es fragmentable por abiertos, podemos construir una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ abiertos en (A, ω) todos contenidos en V y tal que la clausura de U_{n+1} en (A, ω) está contenida en U_n y $\|\cdot\| - \mathit{diam}(U_n) \leq 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo, existe un elemento

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq V.$$

Claramente, $x \in G$. Esto prueba que G es denso en (A, ω) y termina la prueba de la implicación.

$(2) \Rightarrow (3)$. Sea G el conjunto de los puntos de continuidad de la identidad $\mathrm{Id} : (A, \omega) \to (A, \|\cdot\|)$. Entonces las topologías débil y de la norma coinciden sobre G el cual es un G_δ-denso en (A, ω).

$(3) \Rightarrow (4)$. Sea G un subconjunto un G_δ-denso en (A, ω) sobre el cual las topologías débil y de la norma coincidan. Puesto que $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo, se sigue que G también es un G_δ en $(A, \|\cdot\|)$, pero como además, $(G, \|\cdot\|) = (G, \omega)$ resulta (G, ω) es Čech-cmpleto gracias a los teoremas de Alexandroff-Hausdorff, Teorema 1.11.3, página 64, y al Teorema 1.11.10, página 69. Esto termina la prueba de ésta implicación.

$(4) \Rightarrow (5)$. Sea G un subconjunto denso en (A, ω) el cual es Čech-completo. Entonces existe una sucesión $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubrimientos abiertos de (G, ω) tal que, para cada familia $(F_\xi)_\xi$ de conjuntos cerrados en (G, ω) con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{A}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bigcap_\xi F_\xi \neq \varnothing$. Vamos a usar lo anterior para definir una estrategia ε_α para el jugador α en el juego $G_\sigma(A, \omega)$ del modo siguiente: sea U_1, un subconjunto abierto de (A, ω), la primera elección hecha por el jugador β. En el n-ésimo paso la elección de α es $\varepsilon_\alpha(U_1, (V_1, x_1), \ldots, U_n) = (V_n, x_n)$, donde V_n es un subconjunto abierto en (A, ω) tal que $\overline{V}_n^{\omega} \subseteq U_n$ y existe un elemento $A_n \in \mathcal{A}_n$ tal que $\overline{V}_n^{\omega} \cap G \subseteq A_n$ y $x_n \in V_n \cap G$. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto ω-cerrado

$$F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}^{\omega} \cap G.$$

Entonces, la familia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ posee la propiedad de intersección finita en (G, ω) y es $\mathcal{A}_n$-pequeña para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Sea $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces

$$y \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\omega},$$

lo cual prueba que el espacio (A, ω) es α-favorable para el juego $\mathrm{G}_\sigma(A, \omega)$.

$(5) \Rightarrow (6)$. Esta implicación es inmediata.

$(6) \Rightarrow (7)$. Es el Teorema 2.2.109.

$(7) \Rightarrow (1)$. Supongamos que (A, ω) es un espacio de Namioka y consideremos la aplicación separadamente continua $f : (A, \omega) \times K \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, x^*) = x^*(x), \quad x \in A, \quad x^* \in K,$$

donde $K = (B_{X^*}, \omega^*)$. Como (A, ω) es un espacio de Namioka, existe un subconjunto G_δ-denso G en (A, ω) tal que f es continua en cada punto de $G \times K$, lo cual es equivalente, gracias a la compacidad de K, a la continuidad de la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (A, \omega) \to (A, \|\cdot\|)$ en cada punto de G. Sean U un subconjunto abierto arbitrario en (A, ω) y $\varepsilon > 0$. Por la densidad de G, $U \cap G \neq \varnothing$. Sea $x_0 \in U \cap G$. Entonces, por la continuidad de la función identidad Id en x_0, existe un entorno abierto V de x_0 tal que $V \subseteq U$ y $\|\cdot\|-\mathrm{diam}(V) < \varepsilon$. Esto prueba que A es fragmentable por abiertos y termina la prueba. ■

Comentario Adicional 2.2.27 (1) En [118], G. Debs, usando el juego de Christensen-Saint Raymond demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.2.115 (Debs). *Sean $X = K = [0,1]$ y suponga que la aplicación $f : X \times K \to \mathbb{R}$ es tal que*

(a) $f(x, \cdot)$ *es continua en K para todo $x \in X$, y*

(b) $f(\cdot, y)$ *es de la primera clase de Baire sobre X para todo $y \in K$.*

Entonces existe un conjunto G_δ-denso $G \subseteq X \times K$ tal que f es continua en todo punto de G.

(2) Una variante funcional del juego de Christensen-Saint Raymond es el siguiente: como siempre, sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff y sea $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{R}^X$. El juego $\mathrm{G}_\sigma^{\mathfrak{F}}(X)$ es idéntico al de Christensen-Saint Raymond con una diferencia: la regla que establece quién es el ganador. El jugador α se declara el ganador de la partida $p = (U_n, V_n, x_n)_{n=1}^\infty$ si, para cada $f \in \mathfrak{F}$, existe un $x \in \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ tal que

$$f(x) \in \overline{\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

El espacio X se llama $\sigma_{\mathfrak{F}} - \beta$**-desfavorable** si el jugador β no posee estrategia ganadora alguna en el juego $\mathrm{G}_\sigma^{\mathfrak{F}}(X)$. En el caso particular en que $\mathfrak{F} = C(X)$, es claro que cualquier espacio $\sigma - \beta$-desfavorable es $\sigma_{\mathfrak{F}} - \beta$-desfavorable. Si bien el recíproco no es cierto, Bareche y Bouziad demuestran el siguiente resultado [34].

Teorema 2.2.116 (Bareche-Bouziad). *Sea (X, τ) un espacio normal. Son equivalentes:*

(1) *X es $\sigma - \beta$-desfavorable.*

(2) *X es $\sigma_{\mathfrak{F}} - \beta$-desfavorable.*

Más aun, ellos prueban que

Teorema 2.2.117 (Bareche-Bouziad). *Sea (X, τ) un espacio de Tychonoff. Son equivalentes:*

(1) *X es un espacio de Namioka.*

(2) *X es $\sigma_{\mathfrak{F}} - \beta$-desfavorable para cualquier compacto $\mathfrak{F} \subseteq C_p(X)$.*

2.2.23. ‖ ► El juego de Banach-Mazur y aplicaciones cuasi-continuas

En [329] Isaac Namioka demostró, usando el Teorema Grande de Namioka, el siguiente resultado:

Teorema 2.2.118 (Namioka). *Para cualquier espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$, si $f : X \to (E, \omega)$ es una función continua definida sobre un espacio numerablemente Čech-completo X, entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $f : X \to (E, \|\cdot\|)$ es continua en todo punto de G.*

Prueba. Por el Teorema Grande de Namioka todo espacio numerablemente Čech-completo es un espacio de Namioka. El resultado sigue del Corolario 2.2.29, página 377. ■

Puesto que todo espacio numerablemente Čech-completo es un espacio de Baire, uno espera que el resultado anterior de Namioka, Teorema 2.2.118, se pueda extender a cualquier espacio de Baire; sin embargo, un contraejemplo de M. Talagrand en [420] sepultó toda esperanza de obtener una tal extensión. En efecto, en dicho artículo Talagrand construye un espacio α-favorable X para el juego de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(X)$ que, como hemos visto, es un espacio de Baire, y una función débilmente continua $f : X \to E$ que nunca es norma-continua.

El objetivo de esta sección es caracterizar, por medio del juego de Banach-Mazur, a los espacios de Banach $(E, \|\cdot\|)$ para los cuales cualquier aplicación débilmente continua $f : X \to E$ definida sobre un espacio α-favorable X para el juego de Banach-Mazur es norma-continua sobre un subconjunto G_δ-denso de X.

La demostración del resultado arriba mencionado de Namioka para el caso en que X es un espacio de Hausdorff compacto, sin usar la poderosa herramienta del Teorema Grande de Namioka, es muy sencilla y elegante si se tiene en cuenta que todo subconjunto débilmente compacto en un espacio de Banach es norma-fragmentable, (Teorema 2.2.61, página 317).

Teorema 2.2.119 (Namioka). *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y X un espacio de Hausdorff compacto. Si $f : X \to E$ es una función débilmente continua, Entonces existe un subconjunto G_δ-denso G de X tal que $f : X \to (E, \|\cdot\|)$ es continua en todo punto de G.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n = \bigcup \big\{V : V \text{ es un subconjunto abierto no vacío de } X \text{ tal que } \|\cdot\| - diam(f(V)) < 1/n\big\}.$$

Notemos que, por definición, cada G_n es abierto en X y, además, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G$ es el conjunto de puntos donde $f : X \to (E, \|\cdot\|)$ es continua. Veamos ahora que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto G_n es denso en X. En efecto, sean V un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es débilmente continua, $f(X)$ es débilmente compacto y así, por el Teorema 2.2.61, página 317, dicho conjunto es norma-fragmentado. De la definición de fragmentabilidad, existe un conjunto débilmente abierto U de $f(X)$ tal que $U \cap f(V) \neq \varnothing$ y con $\|\cdot\| - \mathrm{diam}(U \cap f(V)) < 1/n$. Si ahora definimos $W = f^{-1}(U) \cap V$, resulta que W es un conjunto abierto no vacío e incluido en $V \cap G_n$. Esto prueba la densidad de G_n. El Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que G es un G_δ-denso en X. ■

Usaremos ahora el juego de Banach-Mazur para demostrar el siguiente hecho simple e interesante. Es importante, para su demostración, tener en cuenta la Observación (3) de la página 334, en donde el jugador α es quien primero comienza el juego tomando $V_0 = Z$.

Proposición 2.2.6 (Kenderov-Kortezov-Moors). *Sean (X, τ) y (Z, τ') espacios topológicos de Hausdorff y suponga que Z es α-favorable para $\mathrm{BM}(Z)$. Sea $f : Z \to X$ una aplicación cuasi-continua.*

(1) *Si $f : Z \to f(Z)$ es abierta, entonces $f(Z)$ es un espacio α-favorable para $\mathrm{BM}(f(Z))$, y*

(2) *$G(f) = \big\{(z,x) \in Z \times X : x = f(z)\big\}$, el grafo de f, es α-favorable para $\mathrm{BM}(G(f))$.*

Prueba. (1). Sea ε_α una estrategia ganadora para el jugador α en $\mathrm{BM}(Z)$ y suponga que α es quien comienza la partida eligiendo a $V_0 := Z$ como su primer movimiento. Vamos a construir, por intermedio de la estrategia ε_α, una estrategia ganadora $\varepsilon_{\alpha,f}$ para el mismo jugador α pero en $\mathrm{BM}(f(Z))$. Comencemos definiendo $V_0' := f(Z)$ y sea U_0' el primer movimiento del jugador β en el juego $\mathrm{BM}(f(Z))$. Para el par de abiertos V_0 y U_0' existe, por la cuasi-continuidad de f, un abierto no vacío $U_0 \subseteq V_0$ tal que $f(U_0) \subseteq U_0'$. Consideremos a U_0

como el primer movimiento del jugador β en el juego $\mathrm{BM}(Z)$ y denotemos por V_1 la respuesta de α según la estrategia ε_α, es decir, $V_1 = \varepsilon_\alpha(V_0, U_0)$. Sea $V_1' = f(V_1)$ la respuesta de α al primer movimiento U_0' de β en el juego $\mathrm{BM}(f(Z))$ (observe que V_1' es un conjunto abierto no vacío ya que f es una aplicación abierta). Continuando de este modo se construye una estrategia $\varepsilon_{\alpha,f}$ en el juego $\mathrm{BM}(f(Z))$ tal que a cada $\varepsilon_{\alpha,f}$-juego $p' = (V_n', U_n')_{n=0}^\infty$ en $\mathrm{BM}(f(Z))$ corresponde un ε_α-juego $p = (V_n, U_n)_{n=0}^\infty$ en $\mathrm{BM}(Z)$ para el cual $V_n' = f(V_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Puesto que ε_α es una estrategia ganadora para el jugador α en $\mathrm{BM}(Z)$, resulta que el conjunto $\bigcap_{n=0}^\infty V_n$ es no vacío. Sea z_0 un punto en dicho conjunto. Entonces $f(z_0) \in \bigcap_{n=0}^\infty f(V_n) = \bigcap_{n=0}^\infty V_n'$ lo cual prueba que $\varepsilon_{\alpha,f}$ es una estrategia ganadora para el juego $\mathrm{BM}(f(Z))$. Esto termina la demostración de (1).

(2). Consideremos la aplicación $g : Z \to G(f)$ definida por $g(z) = (z, f(z))$ para todo $z \in Z$. Es un ejercicio sencillo establecer que g es abierta y cuasi-continua. Puesto que $g(Z) = G(f)$, la parte (1) nos garantiza que $G(f)$ es un espacio α-favorable para $\mathrm{BM}(G(f))$. ■

Notemos que si ambos espacios, X y Z, son completamente regulares, entonces $G(f)$ también lo es.

Teorema 2.2.120 (Kenderov-Kortezov-Moors). *Sean (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff y ρ una métrica definida sobre dicho espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *cualquier aplicación continua $f : Z \to (X, \tau)$ definida sobre un espacio Z que es α-favorable para $BM(Z)$, es ρ-continua en los puntos de un subconjunto G_δ-denso de Z;*

(2) *cualquier aplicación cuasi-continua $f : Z \to (X, \tau)$ definida sobre un espacio Z que es α-favorable para $BM(Z)$, es ρ-continua en los puntos de un subconjunto G_δ-denso de Z.*

Prueba. La implicación $(2) \Rightarrow (1)$ es inmediata. Probemos que $(1) \Rightarrow (2)$. Sea $f : Z \to (X, \tau)$ una función cuasi-continua, donde Z es un espacio α-favorable para $\mathrm{BM}(Z)$. Sea π la proyección natural de $Z \times (X, \tau)$ sobre (X, τ). Puesto que la restricción de π al grafo $G(f)$ de f es una función continua resulta, por la hipótesis (1) y el hecho probado en la Proposición 2.2.6 de que $G(f)$ es α-favorable para $\mathrm{BM}(G(f))$, que $\pi|_{G(f)}$ es ρ-continua en los puntos de un subconjunto G_δ-denso G_0 de $G(f)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto

$$V_n = \bigcup \big\{ V : V \textit{ es abierto en } Z \textit{ y } \rho\textit{-diam}(f(V)) < 1/n \big\}.$$

Claramente cada V_n es abierto. Veamos que ellos son densos en Z. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea W un subconjunto abierto no vacío de Z. Como $W \times X$ es abierto en $Z \times X$ y G_0 en denso en $G(f)$, tenemos que $(W \times X) \cap G_0 \neq \varnothing$. Sea $(z_0, f(z_0)) \in (W \times X) \cap G_0$. Por la ρ-continuad π en $(z_0, f(z_0))$, existen un conjunto abierto $V \subseteq W$ conteniendo a z_0 y un conjunto abierto $U \subseteq X$ conteniendo a $f(z_0)$ tal que

$$\rho - \mathrm{diam}\Big(\pi\big((V \times U) \cap G(f)\big)\Big) < 1/n.$$

Por la cuasi-continuidad de f, existe un abierto no vacío $V' \subseteq V$ tal que $f(V') \subseteq U$. Es claro que $f(V') \subseteq \pi(V \times U) \cap G(f)$ por lo que $W \cap V_n \neq \varnothing$. Esto prueba la densidad de V_n. Puesto que Z es un espacio de Baire (Teorema 2.2.75), entonces por el Teorema de Categoría de Baire tenemos que $G = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$ es un G_δ-denso con la propiedad de que f es ρ-continua en cada uno de sus puntos. ■

En el caso particular cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, τ es la topología débil y ρ es la métrica generada por la norma $\|\cdot\|$, entonces se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.2.33. *Para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *cualquier aplicación continua $f : Z \to (X, \omega)$ definida sobre un espacio α-favorable para* $\mathrm{BM}(Z)$ *es $\|\cdot\|$-continua en los puntos de un subconjunto G_δ-denso de Z;*

(2) *cualquier aplicación cuasi-continua* $f : Z \to (X, \omega)$ *definida sobre un espacio* α*-favorable para* $\mathrm{BM}(Z)$ *es* $\|\cdot\|$*-continua en los puntos de un subconjunto* G_δ*-denso de* Z.

W. B. Moors [319] usa el resultado de Namioka, Teorema 2.2.118, para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.121 (Moors). *Sean* (K, τ) *un espacio de Hausdorff compacto,* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y suponga que* $f : K \to X^*$ *es una función* ω^**-continua. Si existe un subconjunto* G_δ*-denso* G *de* K *tal que* f *es débilmente continua en cada punto de* G*, entonces* f *es norma-continua sobre un subconjunto* G_δ*-denso de* K.

Prueba. Supongamos que G es un subconjunto G_δ-denso de K tal que f es débilmente continua en cada punto de G. Entonces $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, donde cada G_n es un subconjunto abierto y denso en K. Nuestra primera tarea es demostrar que G, en la topología relativa, es numerablemente Čech-completo.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in G$, escojamos un entorno abierto $U_k(x)$ de x tal que $\overline{U_k(x)} \subseteq G_k$. Si ahora definimos $\mathcal{A}_k = \{U_k(x) \cap G : x \in G\}$, resulta que cada $\mathcal{A}_k$ es un cubrimiento abierto de G. Sea ahora $(F_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de G que es $\mathcal{A}_n$-pequeña. Como cada F_n es $\mathcal{A}_n$-pequeña, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un $x_n \in G$ tal que $F_n \subseteq U_n(x_n)$. Notemos que cada F_n es de la forma $F_n = F_n' \cap G$, donde cada F_n' es un subconjunto cerrado de K y entonces

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^\infty F_n &= \bigcap_{n=1}^\infty (F_n' \cap G) \\
&= \bigcap_{n=1}^\infty F_n' \cap \bigcap_{n=1}^\infty \overline{U_n(x_n)} \\
&= \bigcap_{n=1}^\infty \left(F_n' \cap \overline{U_n(x_n)}\right)
\end{aligned}$$

Por la compacidad de K, el conjunto $\bigcap_{n=1}^\infty \left(F_n' \cap \overline{U_n(x_n)}\right) \neq \varnothing$ y entonces $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \varnothing$. Esto prueba que G es numerablemente Čech-completo. Por el Teorema 2.2.118 existe un subconjunto G_δ-denso G_1 de G tal que $g := f|_G$ es norma-continua en todo punto de G_1.

El siguiente paso es demostrar que f es norma-continua en cada punto donde g es norma-continua. Sea $x \in G$ donde g es norma-continua. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno abierto U de x en K tal que $g(U \cap G) \subseteq (g(x) + \varepsilon B_{X^*})$. Afirmamos que

$$f(U) \subseteq f(x) + \varepsilon B_{X^*}.$$

Supongamos que éste no es el caso. Entonces existe un $t \in U$ tal que $f(t) \notin (f(x) + \varepsilon B_{X^*})$. Como f es ω^*-continua en t, existe un subconjunto abierto no vacío V de U tal que $f(V) \cap (g(x) + \varepsilon B_{X^*}) \neq \varnothing$. Sin embargo, para cualquier $y \in V \cap G$, $f(y) = g(y) \in g(x) + \varepsilon B_{X^*}$ lo que es una contradicción. De esto se sigue que f es norma-continua en x. La prueba termina observando que G_1 es, en efecto, un subconjunto G_δ-denso de K. ■

Comentario Adicional 2.2.28 (1) **Juego de Kenderov-Moors y cuasi-continuidad**. Cambiando la regla para ganar en el juego $\mathrm{KM}(X)$, pero manteniendo intacta la elección o los movimientos de los jugadores, se define un nuevo juego en donde se puede obtener otra nueva caracterización de la no existencia de estrategias ganadoras para el jugador β en dicho juego. Denotemos por $\mathrm{KM}'(X)$ el juego en el cual los jugadores son los mismos que en $\mathrm{KM}(X)$ pero cambiando la regla para ser ganador. Declaramos que el jugador α gana la partida $p = (A_n, B_n)_{n \geq 1}$ en el juego $\mathrm{KM}'(X)$ si

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$$

es vacío o contiene un único punto x_0 tal que, cualquier entorno abierto U de x_0, existe algún $n \in \mathbb{N}$ con $A_n \subseteq U$. En caso contrario se dice que β ganó la partida. Como antes, las nociones de estrategia y estrategia ganadora para ambos jugadores se definen del modo acostumbrado. Diremos que X es un espacio α-*favorable para el juego* $\mathrm{KM}'(X)$, si α posee una estrategia ganadora en dicho juego. Similarmente, decimos que el espacio X es β-*desfavorable para* $\mathrm{KM}'(X)$, si el jugador β no posee ninguna estrategia ganadora en el juego $\mathrm{KM}'(X)$.

Teorema 2.2.122 (Kenderov-Kortezov-Moors). *Sean (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *X es β-desfavorable para* $\mathrm{KM}'(X)$*;*

(II) *cualquier aplicación cuasi-continua $f : Z \to X$ del espacio métrico completo (Z,d) en X es continua en al menos un punto de Z;*

(III) *cualquier aplicación cuasi-continua $f : Z \to X$ del espacio métrico completo (Z,d) en X es continua en los puntos de algún subconjunto el cual es de segunda categoría en cualquier subconjunto abierto no vacío de Z;*

(2) **La clase** $\mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{F}$ la clase de todos los espacios de Banach X para los cuales cualquier función continua $f : Z \to (X,\omega)$ definida sobre un espacio α-favorable Z para el juego $KM'(Z)$, es norma-continua en los puntos de subconjunto denso de Z. En [259], Kenderov, Kortezov y Moors demuestran el siguiente resultado.

Teorema 2.2.123 (Kenderov-Kortezov-Moors). *Un espacio de Banach X está en la clase $\mathcal{F}$ si, y sólo si, el jugador β no posee estrategias ganadoras en el juego $KM'(X,\omega)$.*

Resulta altamente deseable saber cuándo la topología generada por una métrica fragmentadora contiene a la topología original del espacio. La existencia de una métrica fragmentadora cuya topología "mayoriza" la topología original de X siempre es posible en el juego $\mathrm{KM}'(X)$. El enfoque es el siguiente: sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un conjunto X, no necesariamente distintas. Si (X,τ_1) es fragmentado por una métrica d cuya topología es más grande que la topología τ_2, entonces diremos que (X,τ_1) es *fragmentable por una métrica que mayoriza o que es más fina que la topología* τ_2. Por supuesto, esto es muy útil cuando $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, τ_1 es la topología débil y τ_2 es la topología de la norma. En [260], Kenderov y Moors demuestran el siguiente resultado.

Teorema 2.2.124 (Kenderov-Moors). *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un conjunto X. El espacio (X,τ_1) es fragmentable por una métrica que mayoriza a la topología τ_2 si, y sólo si, el jugador α tiene una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{KM}'(X,\tau_1)$.

La prueba es muy similar a la del Teorema 2.2.87 y puede servir como un buen ejercicio al estudiante (véase tmabién [260], p. 206-207).

Hacemos notar que, similar a lo que ocurre en el juego de Banach-Mazur, la ausencia de una estrategia ganadora para β en el juego $\mathrm{KM}'(X)$ no necesariamente implica que α tenga una estrategia ganadora en $\mathrm{KM}'(X)$. De hecho, existe un espacio de Hausdorff compacto X el cual es desfavorable para ambos jugadores en el juego $\overline{\mathrm{KM}}(X)$, donde $\overline{\mathrm{KM}}(X)$ es idéntico al juego $\mathrm{KM}'(X)$ con la única diferencia de que en $\overline{\mathrm{KM}}(X)$ el jugador β elige, en lugar de subconjuntos no vacíos arbitrarios A_n, subconjuntos no vacíos cerrados arbitrarios A_n. Más aun, ambos juegos resultan ser equivalentes (véase [259]).

(3) **Espacio σ-fragmentable**. Para poder apreciar la importancia del resultado de Kenderov-Moors en el ámbito de los espacios de Banach, es necesario introducir una noción que es más general que la de fragmentabilidad llamada σ-*fragmentabilidad*. Esta noción fue introducida por Jayne, Namioka y Rogers en [233] con el propósito de extender algunos resultados válidos en espacios compactos fragmentables a espacios no compactos. Algunos hechos importantes sitúan a la fragmentabilidad como una noción altamente adecuada para espacios compactos pero no así para espacios no compactos. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces (X,ω) y (X^*,ω^*) nunca son norma-fragmentados. Los tres problemas básicos concernientes a la noción de σ-fragmentabilidad son: primero, caracterizar espacios de Banach X cuya topología débil es σ-fragmentada por la norma, en segundo lugar caracterizar espacios de Banach X cuya topología débil-$*$ de X^* es σ-fragmentada por la norma dual y, finalmente, caracterizar espacios compactos K con la propiedad de que $(C(K),\tau_p)$ sea σ-fragmentada por la norma del supremo.

Definición 2.2.32. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se dice σ-**fragmentado** por una métrica d si, dado $\varepsilon>0$, existe una partición numerable $(X_n^\varepsilon)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos de X tales que*

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^\varepsilon,$$

y para cada $n\geq 1$ y cada subconjunto no vacío $A\subseteq X_n^\varepsilon$, existe un subconjunto abierto no vacío U de X tal que $U\cap A\neq\varnothing$ y $d\text{-diam}(U\cap A)\leq\varepsilon$.

Claramente, cualquier espacio fragmentable es σ-fragmentable. Es importante, también, destacar que *la unión de una familia numerable de conjuntos que son fragmentados por una métrica d es σ-fragmentado por d*, pero el recíproco no es cierto, es decir, la noción de σ-fragmentabilidad no es equivalente a la existencia de un cubrimiento numerable $(X_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos de X tal que cada X_n es fragmentable por d. En efecto, Jayne, Namioka y Rogers prueban en [236] que si X es el espacio de Banach c_0 dotado de la topología débil y d es la métrica generada por la norma de X, entonces X es σ-fragmentado por d pero no se puede expresar como una unión numerable de subconjuntos que sean fragmentados por d (véase, también [235], Example 2.2). Similarmente, Moors y Sciffer en [320], demuestran que el espacio $(\ell^\infty/c_0,\omega)$ se comporta como el anterior.

Uno de los criterios más simple para saber si un espacio topológico es σ-fragmentable es el siguiente.

Teorema 2.2.125 (Moors-Sciffer). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Si la cardinalidad de X es a lo sumo la cardinalidad del continuo, entonces (X,τ) es σ-fragmentable.*

Prueba. Puesto que $\text{card}(X)\leq\text{card}(\mathbb{R})$, existe una función $g:X\to\mathbb{R}$ que es inyectiva. Si ahora definimos la métrica d sobre X por $d(x,y)=|g(x)-g(y)|$, resulta que d σ-fragmenta a X. Más aun, para cada $\varepsilon>0$, X se puede descomponer en una familia numerable de conjuntos cada uno de los cuales tiene diámetro menor que ε. ■

Otro resultado interesante de Kenderov y Moors [260] sobre σ-fragmentabilidad es el siguiente:

Teorema 2.2.126 (Kenderov-Moors). *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff que es fragmentado por una métrica d la cual mayoriza la topología generada por alguna otra métrica ρ. Entonces X es σ-fragmentado por ρ. En particular, si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach tal que (X,ω) es fragmentado por alguna métrica d que mayoriza la norma-topología, entonces (X,ω) es σ-fragmentado por la norma.*

Prueba. Para cada $x \in X$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, definamos $D_n(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq 1/n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$X_n^\varepsilon = \{x \in X : \rho - \operatorname{diam}(D_n(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Puesto que d mayoriza la topología de ρ, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n^\varepsilon$. Sea A un subconjunto no vacío de algún X_n^ε. Como X es fragmentado por d, existe un subconjunto no vacío relativamente abierto B de A tal que $d - \operatorname{diam}(B) \leq 1/n$. Tome algún $x_0 \in B \subseteq X_n^\varepsilon$. Entonces $B \subseteq D_n(x_0)$. Se sigue de la definición de X_n^ε que $\varepsilon \geq \rho - \operatorname{diam}(D_n(x_0)) \geq \rho - \operatorname{diam}(B)$. Esto nos dice que X es σ-fragmentado por la métrica ρ. ■

Sea (Y,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Los espacios topológicos que son σ-fragmentados por una métrica inferiormente semicontinua son importantes, entre otras cosas, porque sus subconjuntos compactos son fragmentados por dicha métrica. El siguiente resultado de Jayne, Namioka y Rogers [233] muestra que el principio de continuidad genérica siempre está presente cuando se trabaja con espacios topológicos que son σ-fragmentado por una métrica inferiormente semicontinua.

Teorema 2.2.127 (Jayne-Namioka-Rogers). *Sea (Y,τ) un espacio topológico de Hausdorff el cual es σ-fragmentado por una métrica inferiormente semicontinua ρ y sea X un espacio de Baire. Si $f : X \to (Y,\tau)$ es continua, entonces $f : X \to (Y,\rho)$ es continua en cada punto de un subconjunto G_δ-denso de X.*

Prueba. Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$G_\varepsilon = \bigcup \{W : W \textit{ es abierto en } X \textit{ y } \rho\text{-diam}(f(W)) < \varepsilon\}.$$

Puesto que G_ε es claramente abierto, la prueba será completa si logramos demostrar que G_ε es denso en X. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por la hipótesis, $Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n^\varepsilon$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, (Y_n^ε,τ) es fragmentado por ρ para el ε dado. Puesto que $U \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(Y_n^\varepsilon)$, entonces

$$U = \bigcup_{n=1}^\infty \left(U \cap f^{-1}(Y_n^\varepsilon)\right)$$

y ya que U es un espacio de Baire en la topología relativa, existe un subconjunto abierto no vacío V de U y un $n \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^{-1}(Y_n^\varepsilon)$ es denso en V. Se sigue de la continuidad de f que $f\left(V \cap f^{-1}(Y_n^\varepsilon)\right) = f(V) \cap Y_n^\varepsilon$ es denso en $f(V)$. Como (Y_n^ε,τ) es fragmentado por ρ para el ε dado, existe un conjunto τ-abierto D en Y tal que

$$f(V) \cap Y_n^\varepsilon \cap D \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad \rho - \operatorname{diam}\left(f(V) \cap Y_n^\varepsilon \cap D\right) < \varepsilon.$$

Note que $f(V) \cap Y_n^\varepsilon \cap D$ es denso en $f(V) \cap D$. Si ahora definimos $W = V \cap f^{-1}(D)$ resulta, por la semicontinuidad inferior de ρ, que

$$\rho - \operatorname{diam}\left(f(W)\right) = \rho - \operatorname{diam}\left(f(V) \cap D\right) = \rho - \operatorname{diam}\left(f(V) \cap Y_n^\varepsilon \cap D\right) < \varepsilon.$$

Se sigue que $G_\varepsilon \cap U \supseteq G_\varepsilon \cap V \supseteq W \neq \varnothing$, y termina la prueba. ■

Corolario 2.2.34. *Sea (Y,τ) un espacio topológico de Hausdorff el cual es σ-fragmentado por una métrica inferiormente semicontinua ρ. Entonces cada subconjunto compacto de (Y,τ) es fragmentado por ρ.*

Prueba. Sea K un subconjunto compacto de (Y,τ). Por el Teorema 2.2.127, la aplicación identidad $\mathrm{Id}:(K,\tau)\to(Y,\rho)$ posee al menos un punto de continuidad. En vista del Teorema 2.2.52, (K,τ) es fragmentado por ρ. ∎

Ya hemos observado que si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces (X,ω) nunca es norma-fragmentado; sin embargo, en [372], Ribarska demuestra que la σ-fragmentabilidad por la norma del espacio (X,ω) implica la fragmentabilidad de (X,ω) por alguna métrica d que, efectivamente, mayoriza la topología débil de X. En general, fragmentabilidad y σ-fragmentabilidad de un espacio de Banach provisto de su topología débil están relacionados del modo siguiente, véase, por ejemplo, [260] y, en general, [233, 234, 235, 373].

Teorema 2.2.128 (Kenderov-Moors, [260]). *Para un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) (X,ω) *es σ-fragmentado por la norma;*

(b) (X,ω) *es σ-fragmentable por una métrica que mayoriza la topología débil;*

(c) (X,ω) *es σ-fragmentable por una métrica que mayoriza la topología de la norma;*

(d) (X,ω) *es fragmentable por una métrica que mayoriza la topología débil;*

(e) (X,ω) *es fragmentable por una métrica que mayoriza la topología de la norma;*

(f) *Existe una estrategia ε_α para el jugador α en el juego de Kenderov-Moors $KM(X,\omega)$ tal que, para cualquier ε_α-juego $p=(U_n,V_n)_{n\geq 1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\varnothing$, o bien, $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(U_n)=0$.*

Un resultado interesante que relaciona las propiedades de Kadec-Klee, la de ser débilmente $\mathcal{K}$-analítico y la de Radon-Nikodym con σ-fragmentabilidad es la siguiente.

Teorema 2.2.129 (Jayne-Namioka-Rogers, [233]). *Sea X un espacio de Banach.*

(1) *Si X admite una norma con la propiedad de Kadec-Klee, en particular, si X admite una norma LUR equivalente, entonces (X,ω) es σ-fragmentado por la norma.*

(2) *Si X es $\mathcal{K}$-analítico en su topología débil, en particular, si X es WCG, entonces (X,ω) es σ-fragmentado por la norma.*

(3) *Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces (X,ω) es σ-fragmentado por la norma.*

(4) **Punto de $\omega^\star$-continuidad**. La noción de la propiedad de punto de continuidad en un espacio de Banach fue introducida en la Sección 2.2.9, página 300. En el dual de un espacio de Banach X existe, para la topología $\omega^\star$, una noción similar.

Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto no vacío acotado de X^*. Un punto $x^*\in K$ se dice que es un ω^*-*punto de continuidad* de (K,ω^*) si la topología de la norma y la topología ω^* coinciden en x^*; esto, por supuesto, es equivalente a afirmar que la aplicación identidad $\mathrm{Id}:(K,\omega^*)\to(K,\|\cdot\|)$ es continua en x^*.

Con esta definición a la mano, es fácil establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.2.130 (Moors, [319]). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto ω^*-compacto de X^*. Son equivalentes:*

(1) *El conjunto de los ω^*-puntos de continuidad de (K,ω^*) es residual en (K,ω^*).*

(2) *Cada subconjunto no vacío relativamente ω^*-abierto de K posee subconjuntos no vacíos relativamente ω^*-abiertos de norma-diámetro arbitrariamente pequeño.*

El artículo ya mencionado de Moors, [319], posee una buena dosis de información en relación a la noción de ω^*-punto de continuidad. Por ejemplo, él demuestra, entre otras cosas, los siguientes resultados:

Teorema 2.2.131 (Moors). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto no vacío acotado y norma-cerrado de X. Son equivalentes:*

(1) *El conjunto de todos los puntos en $\overline{K}^{\omega^*}$ donde la topologías débil y ω^* de $\overline{K}^{\omega^*}$ coinciden, es residual en $(\overline{K}^{\omega^*}, \omega^*)$.*

(2) *K es residual en $(\overline{K}^{\omega^*}, \omega^*)$.*

(3) *El conjunto de los ω^*-puntos de continuidad de $(\overline{K}^{\omega^*}, \omega^*)$ es residual en $(\overline{K}^{\omega^*}, \omega^*)$.*

(4) *El conjunto de los puntos de continuidad de (K, ω) contiene un subconjunto G_δ-denso de (K, ω).*

2.2.24. ‖ ► Densidad de funciones con un máximo fuerte

Sea (K,d) un espacio métrico completo. Como siempre $C(K)$ es el espacio de Banach de todas las funciones continuas acotadas definidas sobre K y con valores en $\mathbb{K}$. Suponga ahora que Y es un subespacio lineal norma-cerrado de $C(K)$.

Definición 2.2.33. *Una función $f \in Y$, $f \neq 0$, se dice que es una* ***función con un máximo fuerte*** *en un punto $x_0 \in K$, si toda vez que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en K tal que $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x_0)|$, entonces $x_n \to x_0$. En este caso, al punto x_0 se le llama un* ***punto pico*** *para Y.*

El conjunto ρY constituido por todos los puntos picos para Y es llamado el **borde de Bishop**, mientras que el conjunto de todas las funciones con un máximo fuerte será denotado por $\mathrm{Max}(Y)$. Recordemos que un subconjunto F de K se llama **normante** para Y si, para cualquier $f \in Y$,

$$\|f\|_\infty = \sup\big\{|f(x)| : x \in F\big\}$$

Un resultado de Bishop [52] establece que si Y es una álgebra compleja uniforme sobre un espacio métrico compacto K, entonces ρY es un subconjunto normante para Y. En [93] se observó que si $\mathrm{Max}(Y)$ es denso en Y, entonces ρY es un subconjunto normante para Y. Nótese que si F es un subconjunto cerrado normante para Y, entonces $\rho Y \subseteq F$. El subconjunto cerrado normante más pequeño para Y se llama el **borde de Shilov** de Y.

Teorema 2.2.132 (Lee, [286]). *Sean (K,d) un espacio métrico completo y Y un subespacio lineal norma-cerrado de $C(K)$. Si ρY es un subconjunto normante para Y, entonces el conjunto*

$$\mathrm{Max}(Y) = \big\{ f \in Y : \ f \textit{ posee un máximo fuerte}\big\}$$

es un G_δ-denso en Y.

Prueba. Nuestra primera tarea es demostrar que $\mathrm{Max}(Y)$ es un G_δ en Y. En efecto, para cada $f \in Y$ y cada $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$G(f,n) = \big\{x \in K : |f(x)| > \|f\|_\infty - 1/n\big\}.$$

Si $m \in \mathbb{N}$, defina

$$G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f \in Y \setminus \{0\} : \operatorname{diam}\big(G(f,n)\big) < 1/m \}$$

y observe que $\operatorname{Max}(Y) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. La prueba finalizará una vez que demostremos que cada G_m es abierto en A. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y sea $f \in G_m$. Entonces existe un $n \geq 1$ tal que $n\|f\|_\infty > 1$ y $\operatorname{diam}\big(G(f,n)\big) < 1/m$. Si $g \in U(f, 1/3n)$, entonces $g \neq 0$ y $G(g,3n) \subseteq G(f,n)$. Esto muestra que $f + \frac{1}{3n}U_Y \subseteq G_m$ (U_Y es la bola unitaria abierta en Y) y, por consiguiente, G_m es abierto en Y.

Fijemos ahora $f \in Y$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_n = \left\{ g \in Y : \ \exists\, z \in \rho Y \ \text{con} \ |(f-g)(z)| > \sup\left\{ |(f-g)(x)| : \ d(x,z) > \frac{1}{n} \right\} \right\}.$$

Afirmamos que cada U_n es abierto y denso en Y. Es claro que U_n es abierto. Para ver que dicho conjunto también es denso en Y, sea $U(h,\varepsilon)$ un bola abierta en Y con $h \in Y$ arbitrario, pero fijo. Puesto que ρY es un subconjunto normante para Y, resulta que $\|f-h\|_\infty = \sup\{|(f-h)(z)| : z \in \rho Y\}$. Escojamos ahora un $w \in \rho Y$ de modo que

$$|(f-h)(w)| > \|f-h\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Una vez que $w \in \rho Y$, podemos elegir una función con un máximo fuerte en w, digamos p, tal que

(a) $|p(w)| = \|p\|_\infty = 1$,

(b) $|p(x)| < \frac{1}{3}$ siempre que $d(x,w) > \frac{1}{n}$, y

(c) $|f(w) - h(w) - \varepsilon p(w)| = |f(w) - h(w)| + \varepsilon$.

Definamos ahora $g(x) = h(x) + \varepsilon p(x)$ para todo $x \in K$. Es claro que $\|g-h\|_\infty < \varepsilon$, es decir, $g \in U(h,\varepsilon)$, y entonces sólo falta por ver que $g \in U_n$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|(f-g)(w)| &= |f(w) - h(w) - \varepsilon p(w)| \\
&= |f(w) - h(w)| + \varepsilon \\
&> \|f-h\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \sup\left\{ |(f-h)(x) - \varepsilon p(x)| : \ d(x,w) > \frac{1}{n} \right\} \\
&= \sup\left\{ |(f-g)(x)| : \ d(x,w) > \frac{1}{n} \right\},
\end{aligned}$$

lo cual nos dice que $g \in U_n$ y, así, $U_n \cap U(h,\varepsilon) \neq \varnothing$.

Por el Teorema de Categoría de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en Y. Sea $g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ con $\|g\|_\infty < \varepsilon$. Nos proponemos demostrar que $f - g$ es una función con un máximo fuerte. En efecto, como $g \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos seleccionar un $z_n \in \rho Y$ tal que

$$\big|(f-g)(z_n)\big| > \sup\left\{ |(f-g)(x)| : \ d(x,z_n) > \frac{1}{n} \right\},$$

para todo $n \geq 1$. Observe que, para cualquier $m > n$, se tiene que $d(z_m, z_n) \leq 1/n$, por lo que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, siendo de Cauchy en el espacio métrico completo (K,d), converge a algún $z \in K$. Para finalizar esta implicación, suponga que existe otra sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ en K tal que $\lim_{m\to\infty}|(f-g)(x_m)| = \|f-g\|_\infty$. Entonces, para cada $n \geq 1$, se puede seleccionar un $M_n \geq 1$ de modo tal que, para cualquier $m \geq M_n$,

$$\big|(f-g)(x_m)\big| \;>\; \sup\Big\{|(f-g)(x)| : \; d(x,z_n) > \frac{1}{n}\Big\}.$$

Lo anterior muestra que $d(x_m,z_n) \leq 1/n$ para cualquier $m \geq M_n$. De aquí se sigue que la sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ converge a z, y por lo tanto $f-g$ es una función con un máximo fuerte en z. Por esto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \mathrm{Max}(Y)$ por lo que $\mathrm{Max}(Y)$ resulta ser también denso en Y. Finalmente, combinado el hecho de que $\mathrm{Max}(Y)$ es un G_δ más lo que acabamos de probar, podemos asegurar que $\mathrm{Max}(Y)$ es un G_δ-denso en Y. ■

Comentario Adicional 2.2.29 El recíproco del teorema anterior es válido y una prueba de ello se puede ver en [93]. Si uno reemplaza el cuerpo de los escalares $\mathbb{K}$ por cualquier otro espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$, entonces el Teorema de Lee sigue siendo válido para cualquier subespacio lineal cerrado Y de $C(K,X)$ (véase, [286]).

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Recordemos que un punto $x \in B_X$ se dice que es un **punto suave** si existe un único $x^* \in B_X^*$ tal que $\mathrm{Re}\langle x,x^*\rangle = 1$. Denotemos por $\mathrm{sm}(B_X)$ al conjunto de todos los puntos suaves de B_X. Decimos que el espacio de Banach es **suave** si $\mathrm{sm}(B_X) = S_X$. El siguiente corolario muestra que si ρY es normante para Y, entonces $\mathrm{sm}(B_Y)$ es denso en S_Y.

Corolario 2.2.35 (Lee). *Sean (K,d) un espacio métrico completo y Y un subespacio lineal norma-cerrado de $C(K)$. Si ρY es un subconjunto normante para Y, entonces $\mathrm{sm}(B_Y)$ contiene un subconjunto G_δ-denso de S_Y.*

2.2.25. ‖ ► Orbitas y operadores hipercíclicos

En lo que sigue $(X,\|\cdot\|)$ representa un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, mientras que $\mathcal{L}(X)$ denotará el espacio lineal de todos los operadores lineales continuos (= acotados) sobre X el cual también resulta ser un espacio de Banach si se le dota de la **norma uniforme de operadores** $\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$ para cada $T \in \mathcal{L}(X)$. En muchas ocasiones escribiremos $\|T\|$ en lugar $\|T\|_{\mathrm{op}}$ cuando sea imposible derivar una confusión en la notación.

Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Recordemos, una vez más, que el **kernel** o **espacio nulo** de T se define como el conjunto $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, mientras que la **imagen** o **rango** de T se define como $\mathrm{Img}(T) = \{Tx : x \in X\}$. Al conjunto $\mathrm{Img}(T)$ también lo escribiremos como $T(\mathcal{H})$ o $\mathrm{Rang}(T)$. Ambos conjuntos, $\mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Rang}(T)$, son subespacios lineales de X, donde $\mathrm{Ker}(T)$ es siempre cerrado. Es fácil ver que cualquiera sea $T \in \mathcal{L}(X)$ se cumple que:

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Img}(T^*)^{\perp} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Img}(T^*)}, \tag{2.2.14}$$

donde $A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\}$.

Recordemos que el **espectro** de cualquier operador $T \in \mathcal{L}(X)$, se define como

$$\sigma(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \textit{ es no invertible}\big\}$$

y que cuando X es un espacio de Banach sobre los complejos, entonces $\sigma(T)$ es no vacío y compacto. Observe que $\lambda \in \sigma(T)$ si, y sólo si, al menos uno de las siguientes afirmaciones se cumple:

(1) El rango de $T - \lambda I$ no es todo X.

(2) $T-\lambda I$ no es inyectivo.

Se llama **espectro puntual** de T al conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ que cumplen (2) y se denota por $\sigma_p(T)$, es decir,

$$\sigma_p(T) \,=\, \big\{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ no es inyectivo}\big\}.$$

Cualquier elemento $\lambda \in \sigma_p(T)$ es llamado un **autovalor** de T. En este caso $\operatorname{Ker}(T-\lambda I) \neq \{0\}$ y cualquier $x \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ con $x \neq 0$ es llamado un **autovector** de T asociado a λ y se cumple que $Tx = \lambda x$.

También recordemos que el **radio espectral** de T se define como $r(T) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ y que la **fórmula del radio espectral** viene dada por

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

En general, si $x \in X$, entonces no siempre es cierto que el límite $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n}$ existe, sin embargo, $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n}$ siempre existe y es denotado por $r_x(T)$. A tal número se le llama el **radio espectral local** de T en x. Un hecho fácil de verificar es que $r_x(T) \leq r(T)$ para todo $x \in X$.

La Teoría de los Operadores Compactos sobre un espacio de Banach es bastante conocida, véase, por ejemplo, [387], p. 97-105, o [299], p. 319-339. En efecto, si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $\mathcal{K}(X)$ denota la familia de todos los operadores $T \in \mathcal{L}(X)$ que son compactos, entonces se sabe que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal cerrado de $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\text{op}})$. Más aun, si $\dim(X) = \infty$, entonces $I \notin \mathcal{K}(X)$, de donde se deduce que ningún operador compacto $T : X \to X$ puede ser invertible. Además, $T^* \in \mathcal{K}(X)$ si, y sólo si, $T \in \mathcal{K}(X)$. También se conoce que el espectro de cualquier $T \in \mathcal{K}(X)$ satisface $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

En la teoría de operadores lineales acotados sobre espacios de Hilbert, el problema abierto más importante es *el problema del subespacio invariante*. Recordemos que si T un operador lineal continuo sobre X y M es un subconjunto de X, entonces se dice que M es **invariante** con respecto a T o T**-invariante**, si $T(M) \subseteq M$. El conjunto M es no trivial si $\{0\} \neq M \neq X$. Los subespacios triviales $\{0\}$ y X son siempre invariantes para cualquier operador lineal acotado $T : X \to X$. Si M es un subespacio lineal cerrado de X que es invariante bajo T, entonces diremos simplemente que M es un **subespacio invariante** respecto a T. Como siempre, si A es un subconjunto de X, entonces $[A]$ denota el subespacio lineal generado por A, es decir, el subespacio lineal más pequeño que contiene a A.

Es un hecho ya establecido que para algunas clases de operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita tales como los operadores compactos, los operadores normales, los operadores subnormales etc., cada uno de los elementos en la clase respectiva poseen subespacios invariantes no triviales. Sin embargo, y este es un hecho importante que hay que destacar, en ciertos espacios de Banach separables que, por supuesto, no son espacios de Hilbert, como por ejemplo, c_0 y ℓ_1, se han construidos operadores lineales acotados sin subespacios invariantes no triviales. Tales ejemplos fueron dados a conocer por P. Enflo [153], B. Beauzamy [45] y C. J. Read [368]. A pesar de lo dicho anteriormente, el problema del subespacio invariante, probablemente formulado por primera vez por von Neuman y que aun sigue abierto y, en general, permanece abierto para espacios de Banach reflexivos, establece que

El Problema del Subespacio Invariante. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita. ¿Posee T un subespacio invariante no trivial?.*

Es fácil ver que el Problema del Subespacio Invariante tiene sentido sólamente para espacios de Hilbert **separables** de dimensión infinita. En efecto, si H es un espacio de Hilbert no separable, $T \in \mathcal{L}(H)$ y si $x \in H$ es cualquier vector no cero, entonces los vectores $x, Tx, T^2x, \ldots$ generan un subespacio invariante no trivial con respecto a T. En efecto, si $A = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ y si $M = \overline{[A]}$, entonces M, gracias a la continuidad de

T, es un subespacio T-invariante no trivial. Por otro lado, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert sobre los complejos de dimensión finita con $1 < \dim(\mathcal{H}) < \infty$, entonces T posee al menos un autovalor y, por consiguiente, el autovector correspondiente a dicho autovalor genera un subespacio lineal de dimensión 1 no trivial que es invariante con respecto a T.

Fijemos ahora un espacio de Banach separable X de dimensión infinita y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Estamos interesado en el comportamiento de la sucesión $I, T, T^2, T^3, \ldots$ donde $T^0 = I$ y para $n \geq 2$, T^n denota la composición de T consigo mismo n veces. De interés particular es la noción de órbita del operador T. Para cada $x \in X$ con $x \neq 0$, definimos la **órbita de** x **respecto a** T o la T**-órbita de** x como el conjunto

$$\mathrm{Orb}(T,x) \;=\; \{x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots\}$$

Con frecuencia hablaremos de “la órbita de x” en lugar de “la órbita de x respecto a T” cuando no exista contaminación en el ambiente.

Una de las tantas razones importantes que justifican el estudio de las órbitas de un operador es el siguiente resultado.

Teorema 2.2.133. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cualquier operador $T \in \mathcal{L}(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *T no posee ningún subespacio invariante no trivial.*

(2) *Todas las órbitas correspondientes a vectores no ceros generan todo el espacio, es decir, $\overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]} = X$ para todo $x \in X$, $x \neq 0$.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que (1) se cumple y sea $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $\overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]} \neq X$. Gracias a la continuidad de T, tenemos que $T\left(\overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]}\right) \subseteq \overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]}$, lo cual prueba que el subespacio lineal cerrado no trivial $W := \overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]}$ es T-invariante. Esta contradicción establece que $\overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]} = X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Aceptemos (2) y supongamos que T posee un subespacio no trivial W tal que $T(W) \subseteq W$. Seleccionemos arbitrariamente un $x \in W$ con $x \neq 0$. Claramente $\mathrm{Orb}(T,x) \subseteq W$ y por ser W un subespacio lineal cerrado, resulta que $\overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]} \subseteq W \neq X$, lo cual es imposible. ■

Desde el punto de vista del teorema anterior, las órbitas nos ofrecen cierta información básica para el estudio de la estructura de un operador. Otro resultado que también ofrece cierta información en relación con el radio espectral de un operador es el siguiente.

Teorema 2.2.134. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, el conjunto*

$$M = \big\{x \in X \,:\, \|T^n x\| \geq a_n \|T^n\| \ \textit{para infinitos } n's\big\}$$

es residual en X.

Prueba. Observe que la conclusión es inmediata si nuestro operador T es nilpotente (= un operador tal que $T^n = 0$, para algún $n \in \mathbb{N}$). Supongamos entonces que $T^n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$M_k = \big\{x \in X \,:\, \textit{existe } n \geq k \textit{ tal que } \|T^n x\| > a_n \|T^n\|\big\}.$$

Es claro que cada M_k es un conjunto abierto en X. Veamos que ellos también son densos en X. En efecto, fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, podemos escoger un $n \geq k$ tal que $a_n \varepsilon^{-1} < 1$.

Por otro lado, puesto que $a_n\varepsilon^{-1}\|T^n\| < \|T^n\| = \sup_{z\in S_X}\|T^nz\|$ existe un $z\in X$ de norma 1 tal que $\|T^nz\| > a_n\varepsilon^{-1}\|T^n\|$. Por esto,

$$2a_n\|T^n\| < \|T^n(2\varepsilon z)\| = \|T^n(x+\varepsilon z-(x-\varepsilon z))\| \leq \|T^n(x+\varepsilon z)\| + \|T^n(x-\varepsilon z)\|,$$

y se sigue que $\|T^n(x+\varepsilon z)\| > a_n\|T^n\|$ o $\|T^n(x-\varepsilon z)\| > a_n\|T^n\|$. De allí se deduce que, $x+\varepsilon z\in M_k$ o bien $x-\varepsilon z\in M_k$. En cualquier caso tenemos que $\operatorname{dist}(x,M_k)\leq\varepsilon$ y ya que x y ε eran arbitrarios, concluimos que M_k es denso en X. Un llamado al Teorema de Categoría de Baire nos dice que $\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k$ es denso en X y como $\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k\subseteq M$ resulta que M es residual en X. ∎

Muchos resultados de la Teoría de Operadores sobre un espacio de Banach conecta las propiedades locales de un operador con sus propiedades globales. Un ejemplo clásico de esta situación es el siguiente: *un operador $T\in\mathcal{L}(X)$ es localmente nilpotente (esto quiere decir que, para cualquier $x\in X$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $T^nx=0$) si, y sólo si, T es nilpotente*. Similarmente, *un operador $T\in\mathcal{L}(X)$ es localmente cuasi-nilpotente (es decir, $r_x(T)=0$ para todo $x\in X$) si, y sólo si, T es cuasi-nilpotente*. En general, uno puede, con la ayuda del teorema anterior, obtener el siguiente resultado demostrado por P. Vrbová en [435].

Corolario 2.2.36 (Vrbová). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $T\in\mathcal{L}(X)$. Entonces, el conjunto $\{x\in X : r_x(T)=r(T)\}$ es residual en X.*

Prueba. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos $a_n=n^{-1}$. Por el Teorema 2.2.134, existe un subconjunto residual $M\subseteq X$ tal que, para cada $x\in M$, se cumple que $\|T^nx\|\geq n^{-1}\|T^n\|$ para infinitos n's. De esto se sigue que

$$r_x(T) \;=\; \limsup_{n\to\infty}\|T^nx\|^{1/n} \;\geq\; \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\|T^n\|}{n}\right)^{1/n} \;=\; r(T)$$

para todo $x\in M$. ∎

El siguiente ejemplo muestra que el conjunto $\left\{x\in X : \lim_{n\to\infty}\|T^nx\|^{1/n}\ \textit{existe}\right\}$ puede no ser residual en X.

Ejemplo. *Sea $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ la base ortonormal estándar de ℓ_2 y considere el operador $S\in\mathcal{L}(\ell_2)$ definido por $Se_1=0$ y $Se_n=e_{n-1}$ para $n\geq 2$. Entonces el conjunto*

$$M \;=\; \left\{x\in\ell_2 \,:\, \liminf_{n\to\infty}\|S^nx\|^{1/n}=0\right\}$$

es residual en ℓ_2, mientras que $\left\{x\in\ell_2 \,:\, \lim_{n\to\infty}\|S^nx\|^{1/n}\ \text{existe}\right\}$ es de primera categoría en ℓ_2.

Prueba. Para cada $k\in\mathbb{N}$, definamos

$$M_k \;=\; \left\{x\in\ell_2 \,:\, \textit{existe } n\geq k \textit{ tal que } \|S^nx\|^{1/n}<k^{-1}\right\}.$$

Claramente M_k es un conjunto abierto. Veamos que ellos son también densos en ℓ_2. Para ver esto, sean $x\in\ell_2$ y $\varepsilon>0$. Puesto que $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$, podemos seleccionar un $n\geq k$ de modo tal que $\sum_{j=n}^{\infty}|a_j|^2<\varepsilon^2$. Pongamos $y=\sum_{j=1}^{n-1}a_je_j$. Entonces $\|y-x\|<\varepsilon$ y se cumple que $S^ny=0$. Esto prueba que $y\in M_k$ lo cual nos dice que M_k es un conjunto abierto y denso en ℓ_2. Por el Teorema de Categoría de Baire resulta que $M=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k$ es un G_δ-denso en ℓ_2. Puesto que $r(S)=1$, el Teorema de Vrbová nos dice que el conjunto

$$\left\{x\in\ell_2 \,:\, \limsup_{n\to\infty}\|S^nx\|^{1/n}=r(S)=1\right\}$$

también residual en ℓ_2 y, en consecuencia, $\left\{x \in \ell_2 \,:\, \text{lím}_{n\to\infty} \|S^n x\|^{1/n} \textit{ existe}\right\}$ es de primera categoría en ℓ_2. ■

Un resultado enteramente similar al Teorema 2.2.134 se puede obtener en el espacio de Banach $X \times X^*$ provisto de la norma $\|(x,x^*)\| = \|x\| + \|x^*\|$, para todo $(x,x^*) \in X \times X^*$.

Teorema 2.2.135. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que* $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = 0$. *Entonces el conjunto*

$$M \;=\; \left\{(x,x^*) \in X \times X^* \,:\, \left|\langle T^n x, x^*\rangle\right| \geq a_n \|T^n\| \textit{ para infinitos } n's\right\}$$

es residual en $X \times X^*$. En particular, el conjunto

$$N \;=\; \left\{(x,x^*) \in X \times X^* \,:\, \limsup_{n\to\infty} \left|\langle T^n x, x^*\rangle\right|^{1/n} = r(T)\right\}$$

es residual en $X \times X^*$.

Prueba. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$M_k \;=\; \left\{(x,x^*) \in X \times X^* \,:\, \textit{existe } n \geq k \textit{ tal que } \left|\langle T^n x, x^*\rangle\right| > a_n \|T^n\|\right\}.$$

Claramente, M_k es un subconjunto abierto de $X \times X^*$. Veamos que M_k es denso. Sea $(x,x^*) \in X \times X^*$ y $\varepsilon > 0$. Escojamos $n \geq k$ tal que $a_n < \varepsilon^2$. Existe un vector $u \in X$ de norma 1 tal que $\|T^n u\| > a_n/\varepsilon^2 \|T^n\|$. Sea $u^* \in X^*$ satisfaciendo $\|u^*\| = 1$ y $\langle T^n u, u^*\rangle = \|T^n u\|$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}
&\left|\langle T^n(x+\varepsilon u), x^*+\varepsilon u^*\rangle\right| + \left|\langle T^n(x+\varepsilon u), x^*-\varepsilon u^*\rangle\right| + \left|\langle T^n(x-\varepsilon u), x^*+\varepsilon u^*\rangle\right| + \left|\langle T^n(x-\varepsilon u), x^*-\varepsilon u^*\rangle\right| \geq \\
&\quad \left|\langle T^n(x+\varepsilon u), x^*+\varepsilon u^*\rangle - \langle T^n(x+\varepsilon u), x^*-\varepsilon u^*\rangle - \langle T^n(x-\varepsilon u), x^*+\varepsilon u^*\rangle + \langle T^n(x-\varepsilon u), x^*-\varepsilon u^*\rangle\right| = \\
&\qquad \left|4\langle T^n(\varepsilon u), \varepsilon u^*\rangle\right| = 4\varepsilon^2 \|T^n u\| > 4a_n \|T^n\|.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue la existencia de un par

$$(y,y^*) \in \left\{(x+\varepsilon u, x^*+\varepsilon u^*), (x+\varepsilon u, x^*-\varepsilon u^*), (x-\varepsilon u, x^*+\varepsilon u^*), (x-\varepsilon u, x^*-\varepsilon u^*)\right\}$$

tal que $\left|\langle T^n y, y^*\rangle\right| > a_n \|T^n\|$. Esto muestra que $(y,y^*) \in M_k$ y, por consiguiente, M_k es denso en $X \times X^*$. Por el Teorema de Categoría de Baire, $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$ es un G_δ-denso en $X \times X^*$ y, claramente, $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k \subseteq M$.

En particular, para $a_n = n^{-1}$ obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\langle T^n y, y^*\rangle\right|^{1/n} \;\geq\; \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|T^n\|}{n}\right)^{1/n} \;=\; r(T)$$

para todos los pares (y,y^*) en un subconjunto residual de $X \times X^*$. ■

El estudio de los operadores hipercíclicos es el estudio de los operadores que poseen órbitas densas. Este concepto está motivado, históricamente, por el estudio de los subespacios invariantes y, en el presente, constituye un campo muy amplio de desarrollo dentro de la teoría de los operadores. Para una muestra de ello sólo recomendamos ver, aparte del libro de F. Bayart y E. Matheron [41] y, más recientemente, el de K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris [194], toda la bibliografía contenida en ellos. Los resultados sobre operadores que expondremos en esta sección estarán formulados fundamentalmente sobre espacios de Banach separables de dimensión infinita, aunque tales resultados se pueden obtener sobre espacios más generales que los anteriores como, por ejemplo, en espacios de Fréchet (= espacios vectoriales topológicos localmente convexos, metrizables y completos) a los que llamaremos simplemente F-espacios.

Recordemos que una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ se llama **entera** si $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Durante la primera mitad del siglo XX, G. B. Birkhoff y G. Maclane demostraron que ciertas funciones enteras pueden aproximar *cualquier* otra función entera bajo un cierto proceso de límite. En forma concreta, G. B. Birkhoff [55] estableció, en 1929, el siguiente resultado:

> **Teorema de Birkhoff**. *Existe una función entera $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ con la propiedad de que el conjunto de sus trasladados $T_f=\{f(z),f(z+1),f(z+2),\dots\}$ es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

mientras que G. MacLane, 25 años más tarde, probó un resultado análogo para derivadas:

> **Teorema de MacLane**. *Existe una función entera $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que el conjunto de todas sus derivadas $T=\{f,f',\dots,f^{(n)},\dots\}$ es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Ambos resultados pueden ser considerados como ejemplos de un fenómeno que ha resultado ser significativamente muy importante en el campo de la teoría de operadores: la noción de *operador hipercíclico*. Sin embargo, no fue sino hasta mediados de los años 80 del siglo XX, con la aparición de la tesis de Kitai ([266]), cuando la teoría de los operadores hipercíclicos comienza a hacerse coherente.

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cualquier vector $x\in X$, denote por $\mathbb{K}x$ el conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{K}$, es decir, $p\in\mathbb{K}x$ si, y sólo si, existen $a_0,a_1,\dots,a_n$ en $\mathbb{K}$ tales que $a_n\neq 0$ y $p=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Si p es un tal polinomio y $T\in\mathcal{L}(X)$, entonces definimos el polinomio $p(T)$ en $\mathcal{L}(X)$ por $p(T):=a_0I+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_nT^n$.

Fijemos $T\in\mathcal{L}(X)$ y un vector $x\in X$. Recordemos que la órbita de x respecto al operador T, se define como $\mathrm{Orb}(T,x)=\{x,Tx,T^2x,\dots\}$. Éste conjunto posee algunas propiedades que son casi obvias. En efecto, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, se cumple que:

(O1) $\mathrm{Orb}(T,T^nx)\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Orb}(T,Tx)=\mathrm{Orb}(T,x)\setminus\{x\}\subseteq\mathrm{Rang}(T)$,

(O2) $\mathrm{Orb}(T,x)=\mathrm{Orb}\big(T^n,x\big)\cup\mathrm{Orb}\big(T^n,Tx\big)\cup\cdots\cup\mathrm{Orb}\big(T^n,T^{n-1}x\big)$,

(O3) $\overline{\mathrm{Orb}(T,T^nx)}=\overline{\mathrm{Orb}(T,x)\setminus\{x,Tx,\dots,T^{n-1}x\}}=\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$, y

(O4) $\big[\mathrm{Orb}(T,x)\big]=\big\{p(T)x:\ p\in\mathbb{K}x\big\}$.

Nótese que como $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach sin puntos aislados, entonces (O3) es consecuencia del hecho de que la densidad de un conjunto no se destruye si de él se sustrae un número finito de sus elementos.

Consideremos, ahora, los siguientes subconjuntos de X:

$$\mathcal{HC}(T)=\Big\{x\in X:\ \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}^{\|\cdot\|}=X\Big\},\qquad \text{y}\qquad \mathcal{VC}(T)=\Big\{x\in X:\ \overline{[\mathrm{Orb}(T,x)]}^{\|\cdot\|}=X\Big\}.$$

Es claro que $\mathcal{HC}(T)\subseteq\mathcal{VC}(T)$.

Definición 2.2.34. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $T\in\mathcal{L}(X)$ y $x\in X$. Diremos que x es un* ***vector hipercíclico*** *para T si $x\in\mathcal{HC}(T)$. Si ocurre que $x\in\mathcal{VC}(T)$, entonces decimos que x es un* ***vector cíclico*** *para T.*

En esta sección estaremos particularmente interesado en un tipo muy especial de operadores lineales acotados.

Definición 2.2.35. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un operador $T\in\mathcal{L}(X)$ se llama* ***hipercíclico*** *si $\mathcal{HC}(T)\neq\varnothing$, esto es, si existe un vector $x\in X$ tal que $\mathrm{Orb}(T,x)$ es norma-denso en X. Si $\mathcal{VC}(T)\neq\varnothing$, entonces diremos que T es un* ***operador cíclico***

Es claro que todo operador hipercíclico es cíclico. En lo que sigue, el conjunto de todos los operadores hipercíclicos sobre X será indicado por $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$, mientras que $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(X)$ designará el conjunto de todos los operador cíclicos definidos sobre X.

Observación 2.2.1 (1) Nuestra primera observación en relación a los operadores hipercíclicos, es que *tales operadores tienen rango densos*, es decir, si $T\in\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$, entonces $\overline{\mathrm{Rang}(T)}=X$. En efecto, esto es consecuencia inmediata de (O1).

(2) Otra observación que es importante destacar es que *si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita y si el operador $T\in\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces $\|T\|>1$.* En efecto, si fuese $\|T\|\leq 1$ tendríamos, para cada $x\in\mathcal{HC}(T)$, que $\mathrm{Orb}(T,x)\subseteq B(0,\|x\|)$ lo que indicaría que $\mathrm{Orb}(T,x)$ sería un conjunto acotado y, en consecuencia, $X=\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\subseteq B(0,\|x\|)$ lo que resulta ser imposible. Esta contradicción nos revela que $\|T\|>1$.

(3) Puesto que la definición de operador hipercíclico impone la existencia de un vector universal $x\in X$ tal que el conjunto *numerable* $\mathrm{Orb}(T,x)$ sea *denso*, entonces nuestro espacio X debe, necesariamente, ser *separable*; es decir, operadores hipercíclicos sólo pueden existir en espacios separables.

(4) Una observación menos obvia es que X debe ser un espacio de *dimensión infinita*, ya que no existen operadores hipercíclicos definidos sobre espacios de dimensión finita (la demostración se da más abajo). Esto nos dice que la propiedad de ser hipercíclico es un fenómeno infinito-dimensional.

(5) Otra condición que se necesita imponerle a X es que dicho espacio no sea meramente un espacio normado, se requiere que sea *completo*, debido fundamentalmente al hecho de que varios resultados importantes sobre hiperciclicidad requieren del Teorema de Categoría de Baire.

(6) En vista de la Definición 2.2.34, el Teorema 2.2.133 se puede reformular del modo siguiente: *$T\in\mathcal{L}(X)$ no posee subespacios invariantes no triviales si, y sólo si, $\mathcal{VC}(T)=X\setminus\{0\}$, es decir, todos los vectors no ceros de X son cíclicos respecto a T.* Puesto que todo vector hipercíclico es cíclico, *el Problema del Subespacio Invariante posee una respuesta negativa si, sólo si, existe algún operador hipercíclico T tal que $\mathcal{HC}(T)=X\setminus\{0\}$.* En [369], C. J. Read demostró la existencia de un operador lineal continuo sobre ℓ_1 para el cual cualquier vector distinto de cero es hipercicíclico. Puesto que el problema inicial del subespacio invariante no ha sido, hasta el momento, resuelto, es muy difícil encontrar un operador (al menos sobre espacios de Hilbert) tal que todos sus vectores no ceros sean hipercíclicos. Por otro lado, una tarea mucho más simple es encontrar operadores tal que casi todo los vectores (en el sentido de categoría de Baire) son hipercíclicos. En efecto, un resultado que demostraremos un poco más abajo, establece que si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T\in\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces $\mathcal{HC}(T)$ es un G_δ-denso de X.

En lo inmediato demostraremos por qué no existen operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach de dimensión finita. El siguiente resultado fue probado por C. Kitai en su tesis doctoral [266]. En la prueba del siguiente y restantes resultados usaremos indistintamente la notación $x^*(x)$ o $\langle x,x^*\rangle$ para cualquier $x^*\in X^*$ y cualquier $x\in X$.

Teorema 2.2.136 (Kitai). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable y $T : X \to X$ un operador hipercíclico. Entonces el operador adjunto $T^* : X^* \to X^*$ no posee autovalores.*

Prueba. Supongamos que X es sobre $\mathbb{C}$ y que T^* posee un autovalor λ. Sea $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, un autovector asociado a λ; es decir, $T^*(x^*) = \lambda x^*$. Fijemos ahora un vector hipercíclico para T, digamos $x \in X$. Entonces la órbita x respecto a T, $\mathrm{Orb}(T,x)$, es densa en X y como x^* es una aplicación continua sobreyectiva, el Teorema 1.4.20, (2), nos dice que el conjunto

$$D = \left\{x^*(x), x^*(Tx), x^*(T^2x), \dots\right\} = x^*(\mathrm{Orb}(T,x))$$

es denso en $\mathbb{C}$ (la imagen bajo una aplicación continua y sobreyectiva de un conjunto denso es denso). Por otro lado, como $x^*(Tx) = T^*x^*(x)$ y $(T^n)^* = (T^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que

$$\left\{x^*(T^nx) : n = 0,1,2,\dots\right\} = \left\{(T^*)^n x^*(x) : n = 0,1,2,\dots\right\} = \left\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\dots\right\}$$

y, por supuesto, el último conjunto no es denso en $\mathbb{C}$. En efecto, si $|\lambda| \leq 1$ o $x^*(x) = 0$, entonces el conjunto $\left\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\dots\right\}$ es acotado y, por consiguiente, no puede ser denso en $\mathbb{C}$. Si $|\lambda| > 1$ y $x^*(x) \neq 0$, entonces $|\lambda^n x^*(x)| \to \infty$ y, de nuevo, $\left\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\dots\right\}$ tampoco puede, en este caso, ser denso en $\mathbb{C}$. (Tal vez una manera más rápida de ver esto, es tener en cuenta que $\left\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\dots\right\}$, por estar contenido en el subespacio lineal cerrado y propio de $\mathbb{C}$, $L = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{C}\}$ el cual es nunca-denso por $(\mathbf{B}-2)$, página 212, él mismo es nunca-denso). Esta contradicción establece que T^* no puede poseer autovalores. El caso real se prueba de manera similar, (véase por ejemplo, [301], p. 69). ■

Puesto que todo operador sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita posee al menos un autovalor, el siguiente resultado, el cual fue probado por Rolewicz [379] en 1969, establece que ningún espacio de Banach de dimensión finita soporta operadores hipercíclicos.

Corolario 2.2.37 (Rolewicz). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita. Entonces $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X) = \varnothing$, es decir, ningún operador $T \in \mathcal{L}(X)$ puede ser hipercíclico.*

Ya hemos visto, en el contexto de los espacios de Banach, que si $T : X \to X$ es un operador *hipercíclico*, entonces necesariamente nuestro espacio de Banach X debe ser tanto *separable* así como de *dimensión infinita*. Por esta razón, y a partir de este momento, todos nuestros espacios de Banach serán siempre separables y de dimensión infinita. Rolewicz, en [379], se pregunta si éstas pueden o deben ser las únicas restricciones sobre X; es decir, si dado cualquier espacio de Banach separable de dimensión infinita existe un operador definido sobre dicho espacio que sea hipercíclico. La respuesta obtenida es, por supuesto, afirmativa.

Teorema 2.2.137 (Ansari, Bernal-Gonzalez). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Entonces $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X) \neq \varnothing$.*

S. I. Ansari [12], fue el primero en demostrar el resultado anterior para espacios de Fréchet separables. Posteriormente, L. Bernal-González [50] lo hizo para espacios de Banach, véase también [193], p. 360.

Un resultado fundamental en el estudio de operadores hipercíclicos demostrado por Paul S. Bourdon y Nathan S. Feldman [68], establece que cualquier operador con una órbita densa en alguna parte es hipercíclico. En estas notas seguimos la prueba dada por Joel H. Shapiro [401] (véase también el libro de Bayart-Matheron [41]). Antes de abordar la demostración del resultado de Bourdon-Feldman recordemos que un subconjunto E de un espacio topológico de Hausdorff (X, τ) es *denso en alguna parte de* X si $\mathrm{int}(\overline{E})$ es no vacío. La prueba del resultado de Bourdon-Feldman se facilita enormemente si se tiene en cuenta los siguientes dos resultados.

Lema 2.2.28 (Bourdon-Feldman). *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach separable de dimensión infinita,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *y* $x \in X$. *Suponga que* $\mathrm{Orb}(T,x)$ *es denso en alguna parte de* X. *Entonces*

(BF1) *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,T^n x)}\big) = \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$.

(BF2) *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}_0$, $T^n x$ *es un vector cíclico para* T.

(BF3) *Si definimos* $M = X \setminus \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$, *entonces* $T(M) \subseteq M$.

Prueba. (BF1) es consecuencia inmediata de (O2) (observe que la densidad en alguna parte no interviene para nada en este caso).

Para demostrar (BF2), sea $n \in \mathbb{N}$ y observe que por (BF1) y nuestra hipótesis, $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,T^n x)}\big)$ es no vacío. Pero como $\mathrm{Orb}(T,T^n x) \subseteq [\mathrm{Orb}(T,T^n x)]$, resulta que el subespacio lineal cerrado $\overline{[\mathrm{Orb}(T,T^n x)]}$ contiene un conjunto abierto y, por lo tanto, gracias a $(\mathbf{B}-2)$, página 212, $\overline{[\mathrm{Orb}(T,T^n x)]} = X$.

La prueba de (BF3) es un poco más elaborada. En efecto, lo primero que debemos convenir es que:

(a) *Asumiremos, de aquí en adelante, que* $x \in \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$.

¿Podemos justificar tal afirmación? Pues sí y he aquí como se hace. Puesto que $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$ es un abierto no vacío y cada uno de sus puntos es un punto límite de $\mathrm{Orb}(T,x)$, resulta que algún punto y de $\mathrm{Orb}(T,x)$ pertenece a $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$. Se sigue de (BF1) que el punto $y \in \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,y)}\big) = \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$ y, en consecuencia, podemos reemplazar a x por este y sin afectar a $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$.

Continuemos con la demostración de (BF3). Suponga, para obtener una contradicción, que $T(M) \nsubseteq M$. Esto significa que existe un elemento $y_0 \in M$ tal que $Ty_0 \notin M$, lo cual quiere decir, por la definición de M, que

$$y_0 \notin \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \qquad \text{pero} \qquad Ty_0 \in \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big). \tag{BF0}$$

De nuevo, podemos hacer la siguiente consideración:

(b) *Asumiremos que* $y_0 \notin \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$.

La justificación es la siguiente. Suponga que $y_0 \in \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$. Como $y_0 \notin \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$, entonces necesariamente y_0 está en la frontera de $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ y, por consiguiente, cualquier bola abierta con centro en y_0 contiene puntos que están fuera de $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$. Se sigue de la continuidad de T en y_0 que, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|Ty_0 - Ty\| < \varepsilon$ siempre que $y \in U(y_0,\delta)$. Si elegimos algún y que esté en $U(y_0,\delta)$ pero no en $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$, entonces podemos reemplazar a y_0 por este y.

Nuestra suposición final es:

(c) *Asumiremos también que* $y_0 = p(T)x$ *para algún* $p \in \mathbb{K}[x]$, $p \neq 0$.

Veamos por qué esto es así. La suposición (a) combinada con (BF2), nos garantizan que x es un vector cíclico para T, por lo que el conjunto $\{p(T)x : p \in \mathbb{K}[x]\} = [\mathrm{Orb}(T,x)]$ es denso en X. Como $G := X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ es un conjunto abierto conteniendo, por la parte (b), a y_0, resulta que $G \cap \{p(T)x : p \in \mathbb{K}[x]\}$ es no vacío y denso en G (véase el Corolario 1.4.1, página 19). Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $p \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(T)x \in G$ y, además, $\|y_0 - p(T)x\| < \varepsilon$. Puesto que $p(T)x \neq Tp(T)x$, resulta que $p \neq 0$ y, en consecuencia, podemos reemplazar a y_0 por este $p(T)x$, lo que justifica (c).

Ahora bien, por (c) y (b) sabemos que $y_0 = p(T)x \notin \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ para algún $p \in \mathbb{K}[x]$, $p \neq 0$. Teniendo en cuenta que T conmuta con $p(T)$ y que el conjunto $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ es invariante bajo T y contiene, por (BF0), a $Ty_0 = Tp(T)x$, entonces $T^n Ty_0 = T^{n+1}p(T)x = p(T)T^{n+1}x \in \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por esto,

$$p(T)\big(\mathrm{Orb}(T,Tx)\big) = \big\{p(T)T^{n+1}x : n = 0,1,2,\dots\big\} \subseteq \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}.$$

Recordando que $p(T)$ es un operador continuo, se tiene, por (BF1), que

$$\begin{aligned} p(T)\big(\operatorname{int}\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,x)}\big)\big) &= p(T)\big(\operatorname{int}\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,Tx)}\big)\big) \\ &\subseteq p(T)\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,Tx)}\big) \\ &\subseteq \overline{p(T)\big(\operatorname{Orb}(T,Tx)\big)} \\ &\subseteq \overline{\operatorname{Orb}(T,x)}. \end{aligned}$$

Esta última inclusión es la que produce la anhelada contradicción. En efecto, por (a) sabemos que el punto $x \in \operatorname{int}\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,x)}\big)$, y entonces la inclusión anterior nos revela que $y_0 = p(T)x \in \overline{\operatorname{Orb}(T,x)}$ lo cual, evidentemente, contradice a (b). ∎

Lema 2.2.29 (Bourdon-Feldman). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita sobre el cuerpo de los complejos, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$. Suponga que $\operatorname{Orb}(T,x)$ es denso en alguna parte de X. Entonces para cualquier polinomio no nulo $p \in \mathbb{K}[x]$, se cumple que $p(T)$ tiene rango denso en X.*

Prueba. Sea $p \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$. Si p es constante, entonces $p(T)$ es un múltiplo no nulo de la identidad y, en consecuencia, tiene rando denso en X. Suponga ahora que p no es constante, esto significa que p tiene la forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ donde los $a_i \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$. Por el Teorema Fundamental del Algebra p se puede representar en la forma $p(z) = a_n(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$, donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son números complejos. Por lo tanto, $p(T) = a_n(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_n I)$ y todo lo que debemos hacer es demostrar que $T-\lambda_i I$ tiene rango denso en X para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Suponga que algún $T-\lambda_i I$ no posee rango denso en X. Entonces $Y := \overline{\operatorname{Rang}(T-\lambda_i I)(X)}$ es un subespacio cerrado y propio de X y se sigue del Teorema de Hahn-Banach que existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$. En particular, $x^*(Tx - \lambda_i x) = 0$, es decir, $x^*(Tx) = \lambda_i x^*(x)$. Por otro lado, como

$$T^*x^*(x) = x^*(Tx) = \lambda_i x^*(x), \qquad \text{para todo } x \in X$$

y $(T^n)^* = (T^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que

$$x^*\big(\operatorname{Orb}(T,x)\big) = \big\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\ldots\big\} \tag{A}$$

Nótese ahora que puesto que x^* es una aplicación abierta (Corolario 2.2.4), $x^*\big(\operatorname{int}\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,x)}\big)\big)$ es un conjunto abierto no vacío en $\mathbb{C}$ y, gracias a la continuidad de x^*, tenemos que

$$x^*\big(\operatorname{int}\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,x)}\big)\big) \subseteq x^*\big(\overline{\operatorname{Orb}(T,x)}\big) \subseteq \overline{x^*\big(\big(\operatorname{Orb}(T,x)\big)\big)}.$$

Esto prueba que $x^*\big(\big(\operatorname{Orb}(T,x)\big)\big)$ es denso en alguna parte de $\mathbb{C}$. Observe, por otro lado, que el conjunto $\big\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,\ldots\big\}$ es nunca-denso ya que dicho conjunto está contenido en el subespacio lineal cerrado y propio de $\mathbb{C}$, $L = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{C}\}$, el cual es nunca-denso. Esto, por supuesto, es una contradicción a la igualdad (A). Por consiguiente, todos los $T-\lambda_i I$ tienen rango denso en X y, así, $p(T)$ tiene rango denso en X. ∎

Procedamos ahora a demostrar el extraordinario resultado de Bourdon-Feldman.

Teorema 2.2.138 (Bourdon-Feldman). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita sobre el cuerpo de los complejos, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$. Entonces $\operatorname{Orb}(T,x)$ es, o nunca-denso, o siempre denso en X. En particular, si $\operatorname{Orb}(T,x)$ es denso en alguna parte de X, entonces T es hipercíclico.*

Prueba. Suponga que $\mathrm{Orb}(T,x)$ no es nunca-denso. Entonces $\mathrm{Orb}(T,x)$ es denso en alguna parte de X, por lo que $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big)$ contiene algún conjunto abierto no vacío. Pongamos

$$U_x \,=\, \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}(T)x \,=\, \big\{\, p(T)x :\, p \in \mathbb{K}[x] \,\big\}.$$

Queremos demostrar que $\mathrm{Orb}(T,x)$ es denso en X. Vamos a suponer, por un momento, que $\mathrm{Orb}(T,x)$ no es denso en X y entonces hacer uso de los dos lemas anteriores para generar una contradicción a partir de esa suposición. Comencemos. Por (BF2) del Lema 2.2.28, sabemos que x es un vector cíclico para T, esto es, $\mathcal{P}(T)x$ es denso en X. Si hacemos $G = X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$, resulta que G es un conjunto abierto, y se sigue del Corolario 1.4.1, página 19, que

$$\overline{G \cap \mathcal{P}(T)x} \,=\, \overline{G}.$$

Definiendo $\mathcal{Q} \,=\, \big\{ q \in \mathbb{K}[x] :\, q(T)x \notin \overline{\mathrm{Orb}(T,x)} \,\big\}$, vemos que

$$\mathcal{Q}(T)x \,:=\, \big\{ q(T)x : q \in \mathcal{Q} \big\} \,=\, G \cap \mathcal{P}(T)x$$

es denso en $G = X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$. Por otro lado, gracias al Teorema 1.6.1, página 34, tenemos que

$$X \setminus U_x \,=\, X \setminus \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \,=\, \overline{X \,\setminus\, \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}} \,=\, \overline{G},$$

de donde se sigue que $\mathcal{Q}(T)x$ también es denso en $X \setminus U_x$. En particular,

$$U_x \cup \mathcal{Q}(T)x \quad \text{es denso en } X. \tag{BF4}$$

Ahora bien, por (BF3) del Lema 2.2.28, el conjunto $X \setminus U_x$ es invariante bajo T y como $X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ está incluido en dicho conjunto, entonces

$$T^n\big(X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \subseteq X \setminus U_x, \tag{BF5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $q \in \mathcal{Q}$ arbitrario. Puesto que $q(T)x \in X \setminus \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$ se tiene, usando (BF5), que $q(T)T^n x = T^n q(T)x \in X \setminus U_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $q(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big) \subseteq X \setminus U_x$. Si ahora usamos la continuidad de q se concluye que

$$q(T)\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \subseteq \overline{q(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big)} \subseteq X \setminus U_x. \tag{BF6}$$

Afirmación BF: *Para cualquier* $p \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$, *se cumple que* $p(T)x \notin \mathrm{Fr}\,\big(U_x\big)$.

Prueba de la Afirmación BF. Suponga, por un momento, que $p(T)x \in \mathrm{Fr}\,\big(U_x\big)$ para algún $p \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$. Por (BF4), el conjunto $D := U_x \cup \mathcal{Q}(T)x$ es denso en X y se sigue de la continuidad del operador $p(T)$ que $p(T)(X) = p(T)(\overline{D}) \subseteq \overline{p(T)(D)}$. Pero como $p(T)$ tiene rango denso en X (Lema 2.2.29), resulta que

$$X \,=\, \overline{p(T)(X)} \subseteq \overline{p(T)(D)},$$

lo cual nos dice que $p(T)(D)$ es denso en X. Vamos a demostrar ahora que $p(T)(D) \subseteq X \setminus U_x$. En efecto, en primer lugar note que como $p(T)x \in \mathrm{Fr}\,\big(U_x\big) \subseteq X \setminus U_x$, usando de nuevo el hecho de que $X \setminus U_x$ es T-invariante, resulta que $p(T)T^n x = T^n p(T)x \in X \setminus U_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $p(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big) \subseteq X \setminus U_x$ y, por continuidad,

$$p(T)(U_x) \subseteq p(T)\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \subseteq \overline{p(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big)} \subseteq X \setminus U_x.$$

Suponga ahora que $y \in \underline{p(T)}(\mathcal{Q}(T)x)$. Entonces existe $q \in \mathcal{Q}$ tal que $y = p(T)q(T)x = q(T)p(T)x$. Pero como $p(T)x \in \mathrm{Fr}(U_x) \subseteq \overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$, se sigue entonces de (BF6) que $y = q(T)p(T)x \in X \setminus U_x$ y, por consiguiente, $p(T)(\mathcal{Q}(T)x) \subseteq X \setminus U_x$. De lo anterior se concluye que

$$p(T)(D) \;=\; p(T)(U_x) \cup p(T)(\mathcal{Q}(T)x) \;\subseteq\; X \setminus U_x.$$

Esto, por supuesto, viola el hecho de $p(T)(D)$ es denso en X ya que $X \setminus U_x$ es un subconjunto cerrado distinto de X pues U_x es distinto del vacío. Esto termina la prueba de nuestra afirmación.

Para finalizar la demostración del teorema, observe que $\mathcal{P}(T)x = \big\{\, p(T)x : \, p \in \mathbb{K}[x] \,\big\}$, por ser un subespacio lineal y denso en X, es de dimensión infinita y, por consiguiente, el conjunto $\mathcal{P}_0(T)x := \mathcal{P}(T)x \setminus \{0\}$ es conexo. Considere ahora los dos siguientes conjuntos:

$$G \;=\; \mathcal{P}_0(T)x \cap U_x \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad H \;=\; \mathcal{P}_0(T)x \cap \big(X \setminus U_x\big).$$

Claramente G y H son disjuntos, pero además, G es relativamente abierto en $\mathcal{P}_0(T)x$ y, gracias a la **Afirmación BF**, H también es relativamente abierto en $\mathcal{P}_0(T)x$. Esto, por supuesto, contradice el hecho de que $\mathcal{P}_0(T)x$ es conexo y concluye la prueba del teorema. ■

Algunas consecuencias importantes se derivan del resultado de Bourdon-Feldman.

Corolario 2.2.38 (Ansari). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Si $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$, entonces $T^n \in \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Más aun, $\mathcal{HC}(T) = \mathcal{HC}(T^n)$ para todo $n \geq 1$*

Prueba. Suponga que $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$ y sea $x \in \mathcal{HC}(T)$. Observe que, para cada $n > 1$,

$$\mathrm{Orb}(T,x) \;=\; \mathrm{Orb}\big(T^n,x\big) \cup \mathrm{Orb}\big(T^n,Tx\big) \cup \cdots \cup \mathrm{Orb}\big(T^n,T^{n-1}x\big). \tag{Ans1}$$

Puesto que $\mathrm{Orb}(T,x)$ es denso en X, el Lema 1.6.1 nos garantiza que existe un k tal que $\mathrm{Orb}\big(T^n,T^kx\big)$ es denso en alguna parte de X. Un llamado al Teorema de Bourdon-Feldman nos revela que $\mathrm{Orb}\big(T^n,T^kx\big)$ es denso en X y como $\mathrm{Orb}\big(T^n,T^kx\big) \subseteq \mathrm{Orb}(T^n,x)$ resulta que $\mathrm{Orb}\big(T^n,x\big)$ es denso en X, es decir, T^n es hipercíclico, es decir, $x \in \mathcal{HC}(T^n)$, por lo que $\mathcal{HC}(T) \subseteq \mathcal{HC}(T^n)$. La otra inclusión sigue inmediatamente de (Ans1). ■

Corolario 2.2.39 (Conjetura de Herrero). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de X. Si*

$$\mathrm{Orb}(T,F) \;:=\; \mathrm{Orb}(T,x_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Orb}(T,x_n)$$

es denso en X, entonces T es hipercíclico.

Prueba. Es consecuencia inmediata del Lema 1.6.1 y del Teorema de Bourdon-Feldman. ■

El Teorema de Kitai en combinación con el Teorema de Ansari permite demostrar la ausencia de operadores compactos en $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$.

Corolario 2.2.40. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si T es compacto, entonces T no es hipercíclico, es decir, $\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X) = \varnothing$.*

Prueba. Sea T compacto y suponga que T es hipercíclico. Por el Teorema de Kitai, T^* no posee autovalores, es decir, $\sigma_p(T^*) = \varnothing$. Por otro lado, como T es compacto, T^* también lo es y se cumple, además, que $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{0\} \cup \sigma_p(T^*) = \{0\}$. Por la fórmula del radio espectral tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} = 0$$

lo cual nos asegura la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| T^n \| \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Por el Teorema de Ansari resulta que T^n es hipercíclico para todo $n \geq n_0$, lo cual es violatorio al hecho de que $\| T^n \| > 1$ para todo $n \geq n_0$. ■

La noción de operador hipercíclico está estrechamente relacionada a un concepto de transitividad topológica ampliamente conocido en el estudio de dinámica topológica y que al parecer fue utilizado por primera por G. D. Birkhoff en 1920.

Definición 2.2.36. *Sea X un espacio vectorial topológico. Un operador $T : X \to X$ se llama **topológicamente transitivo**, o simplemente **transitivo**, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

En otras palabras, el operador $T : X \to X$ es topológicamente transitivo si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $x \in U$ cuya órbita, $\mathrm{Orb}(T,x)$, intersecta a V. Observe también que la condición $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$ es equivalente a $T^{-n}(V) \cap U \neq \varnothing$, por lo que T es topológicamente transitivo si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(V) \cap U \neq \varnothing$. Es fácil ver que cualquier operador hipercíclico es transitivo, aunque el recíproco no es necesariamente cierto. Sin embargo, como se muestra a continuación, en espacios de Banach separables de dimensión infinita ambos conceptos coinciden.

Teorema 2.2.139 (Transitividad de Birkhoff). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. Son equivalentes:*

(1) *T es hipercíclico.*

(2) *T es transitivo.*

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que T es hipercíclico y sea $x \in X$ tal que su órbita $\mathrm{Orb}(T,x)$ es densa en X. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Como $\mathrm{Orb}(T,x)$ es denso en X, resulta que $\mathrm{Orb}(T,x) \cap U \neq \varnothing$ y, en consecuencia, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k x \in U$. Por otro lado, como X no posee puntos aislados, cualquier conjunto denso $D \subseteq X$ permanece denso si de él se remueve una cantidad finita de puntos, esto significa, en particular, que $\mathrm{Orb}(T, T^k x) = \mathrm{Orb}(T,x) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{k-1}x\} = \{T^m x : m \geq k\}$ es denso en X. Por esto, $\mathrm{Orb}(T, T^k x) \cap V \neq \varnothing$, y entonces podemos determinar la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k+n}x = T^n(T^k x) \in V$. Tomando $y = T^k x \in U$, vemos que $T^n y \in V$ y, por consiguiente, $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$. Esto prueba que T es transitivo.

$(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que T es transitivo. Como X es separable podemos elegir una base numerable para la norma-topología de X, digamos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. En efecto, la separabilidad de X nos garantiza la existencia de un subconjunto denso numerable $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de X y, entonces la base $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ se obtiene enumerando todas las bolas abiertas con centro en puntos de D y radio racional. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n) = \big\{x \in X : \text{existe } m \in \mathbb{N} \text{ para el cual } T^m x \in V_n\big\}.$$

Vamos a probar que cada G_n es abierto y denso en X. Como cada T^m es un operador lineal continuo, resulta que $T^{-m}(V_n) = (T^m)^{-1}(V_n)$ es abierto y, en consecuencia, G_n es abierto. Para probar que G_n es denso en X, tomemos un abierto no vacío arbitrario U de X. Nuestra tarea es demostrar que $G_n \cap U \neq \varnothing$. Pues bien, siendo T transitivo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U) \cap V_n \neq \varnothing$ y, por consiguiente, existe $x \in U$ para el cual $T^m x \in V_n$. Esto prueba que $x \in G_n$ y, por lo tanto, De aquí se sigue que $x \in G_n \cap U$ y, así, G_n es denso en X. Puesto que X un espacio métrico completo, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ-denso en X.

Veamos que cada punto $x \in G$ tiene órbita, respecto de T, densa en X. En efecto, sea $x \in G$ y suponga que U es un subconjunto abierto no vacío de X. Como $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ constituye una base de X, existe un entero positivo n_0 tal que $V_{n_0} \subseteq U$. Por otro lado, como $x \in G \subseteq G_{n_0}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ para el cual $T^m x \in V_{n_0} \subseteq U$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}(T,x) \cap U \neq \varnothing$ y termina la prueba. ∎

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada $T \in \mathcal{L}(X)$, denotemos por $\mathrm{Sim}(T)$ la **órbita de similaridad** de T, esto es,

$$\mathrm{Sim}(T) \;=\; \big\{S^{-1}TS :\; S \in \mathcal{L}(X) \text{ es invertible}\big\}.$$

Esta noción de equivalencia ignora la geometría del espacio concentrándose fundamentalmente en su estructura vectorial. El Teorema de Transitividad de Birkoff permite demostrar el siguiente interesante resultado.

Teorema 2.2.140. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador hipercíclico. Entonces:*

(a) $\mathcal{HC}(T)$ *es un G_δ-denso de X.*

(b) *Cualquier vector en X es la suma de dos vectores hipercíclicos; es decir,*

$$X = \mathcal{HC}(T) + \mathcal{HC}(T).$$

(c) *Si $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores hipercíclicos sobre X, entonces existe un vector hipercíclico que es común a todos los T_n, $n \in \mathbb{N}$. De hecho, el conjunto*

$$\mathcal{HC}_\infty \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{HC}(T_n),$$

de todos los vectores hipercíclicos que son comunes a todos los T_n, es un G_δ-denso de X.

(d) $\mathrm{Sim}(T) \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$.

Prueba. (a). Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la norma-topología de X. De la demostración del Teorema de Transitividad de Birkhoff hemos visto que

$$G \;:=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n) \;\subseteq\; \mathcal{HC}(T).$$

Par ver la otra inclusión, sea $x \in \mathcal{HC}(T)$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Orb}(T,x) \cap V_n \neq \varnothing$ y, por consiguiente, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m x \in V_n$, es decir, $x \in T^{-m}(V_n)$. De esto se sigue que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n)$. Esto prueba que $\mathcal{HC}(T)$ es un G_δ-denso en X.

(b). Tomemos ahora cualquier $x \in X$. Como siempre, denotemos por $\mathcal{HC}(T) + x = \big\{z + x : z \in \mathcal{HC}(T)\big\}$. Observe que $\mathcal{HC}(T) - x$, así como $-\mathcal{HC}(T)$ siguen siendo, ambos, G_δ-densos en X, pues traslaciones y multiplicaciones por escalares son homeomorfismos que transforman conjuntos G_δ-densos en conjuntos G_δ-densos. Por el Teorema de Categoría de Baire, la intersección

$$\big(\mathcal{HC}(T) - x\big) \cap \big(-\mathcal{HC}(T)\big)$$

es, de nuevo, un G_δ-denso en X. Elijamos $z \in \big(\mathcal{HC}(T) - x\big) \cap \big(-\mathcal{HC}(T)\big)$. Entonces, puesto que tanto $-z$, así como $x+z$, están en $\mathcal{HC}(T)$, resulta que $x = (x+z) - z \in \mathcal{HC}(T) + \mathcal{HC}(T)$, por lo que

$$X = \mathcal{HC}(T) + \mathcal{HC}(T).$$

(c). Si $(T_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de operadores hipercíclicos sobre X, entonces por (a) cada $\mathcal{HC}(T_n)$ es un G_δ-denso de X y de nuevo, por el Teorema de Categoría de Baire, Teorema 1.8.1, el conjunto

$$\mathcal{HC}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{HC}(T_n)$$

es un G_δ-denso común a todos los T_n; es decir, cada $x \in \mathcal{HC}_\infty$ es un vector hipercíclico para todo T_n.

(x). Suponga que $S^{-1}TS \in \mathrm{Sim}(T)$ y sean U, V subconjunto abiertos no vacíos de X. Como S es un homeomorfismo, resulta que $S(U)$ y $S(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X y, gracias al hecho de que T es hipercíclico, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n\big(S(U)\big) \cap S(V) \neq \varnothing$. Se sigue de esto que

$$\varnothing \neq S^{-1}\Big[\big(T^n S(U)\big) \cap S(V)\Big] \;=\; \big(S^{-1}T^n S\big)(U) \cap V \;=\; \big(S^{-1}TS\big)^n(U) \cap V$$

y así, por el Teorema de Transitividad de Birkhoff, $S^{-1}TS$ es hipercíclico. ■

La propiedad (a) del Teorema 2.2.140 se puede expresar, en términos probabilísticos, como una ley "cero-uno": *Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ o no posee vector hipercíclico o contiene un G_δ-denso de ellos.* Un consecuencia inmediata del apartado (a) del resultado anterior se expresa en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.41. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador hipercíclico. Entonces, para cada $x \in X$, existe un conjunto G_δ-denso $G_x \subseteq X$ con la siguiente propiedad: para cada $y \in G_x$, el conjunto*

$$R(y) := \Big\{T^n(y) - T^n(x) \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots\Big\}$$

es denso en X.

Prueba. Sea $x \in X$. Lo que deseamos es encontrar un G_δ-denso G_x de X tal que $y - x \in \mathcal{HC}(T)$ para todo $y \in G_x$. En efecto, para ello es suficiente tomar $G_x = x + \mathcal{HC}(T)$ que resulta ser, por el resultado anterior, un G_δ-denso en X. ■

Corolario 2.2.42. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. T es hipercíclico si, y sólo si, para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, el conjunto $\bigcup_{m=1}^\infty T^{-m}(U)$ es denso en X.*

Prueba. Fijemos una base numerable para la norma-topología de X, digamos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Suponga que T es hipercíclico y sea U cualquier subconjunto abierto no vacío U de X. Puesto que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de X, existe al menos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subseteq U$. Se sigue de la igualdad $\mathcal{HC}(T) = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty T^{-m}(V_n)$ que

$\mathcal{HC}(T) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(U)$ y como $\mathcal{HC}(T)$ es, por (a) del Teorema 2.2.140, un G_δ-denso en X, resulta que $\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(U)$ también es denso en X.

Recíprocamente, suponga que $\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(U)$ es denso en X para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X. En particular, $\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n)$ es abierto y denso en X para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue del Teorema de Categoría de Baire que $\mathcal{HC}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(V_n)$ es no vacío y, en consecuencia, T es hipercíclico. ■

Nótese que del corolario anterior también se sigue que $T \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico si, y sólo si, $\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{m}(U)$ es denso en X para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X. De esto se deduce que

Corolario 2.2.43. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. Si T es invertible, entonces T es hipercíclico si, y sólo si, T^{-1} es hipercíclico.*

Situándonos de nuevo en el caso en que X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ es un operador hipercíclico, la afirmación (b) del Teorema 2.2.140 nos revela que hiperciclicidad no es un fenómeno lineal, es decir, la suma de dos vectores hipercíclicos no es necesariamente un vector hipercíclico. No obstante surge, como en el caso de las funciones continuas nunca diferenciables, la pregunta de si $\mathcal{HC}(T)$ contiene algún subespacio vectorial de dimensión infinita compuesto sólo de vectores hipercíclicos con excepción del vector cero el cual, por supuesto, nunca es hipercíclico. La respuesta es positiva y fue dada por B. Beauzamy en [44] quien exhibió un operador T sobre un espacio de Hilbert complejo con un subespacio vectorial denso, invariante bajo T y compuesto sólo de vectores hipercíclicos. Posteriormente varios matemáticos, entre ellos, Godefroy y Shapiro, Herrero, Bourdon, Bès y Wengenroth obtienen resultados similares (véase, por ejemplo, [192], p. 356). La idea clave fue tomar un vector hipercíclico x y estudiar el subespacio denso e invariante $\left[\{x, Tx, T^2x, \dots\}\right] = \{p(T)x : \ p \in \mathbb{K}x\}$. Definiendo **subespacio hipercíclico** como el subespacio lineal Y_{HC} (no necesariamente cerrado) de X en el cual cualquier vector no cero es hipercíclico, tenemos que:

Teorema 2.2.141 (Herrero, Bourdon, Bès, Wengenroth). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador hipercíclico.*

(1) *Si $x \in \mathcal{HC}(T)$, entonces $p(T)x \in \mathcal{HC}(T)$ para cualquier polinomio no nulo $p \in \mathbb{K}x$.*

(2) *$\mathcal{HC}(T)$ contiene subespacio hipercíclico de dimensión infinita que es denso en X e invariante bajo T.*

(3) *$\mathcal{HC}(T)$ es conexo.*

Prueba. (1). Supongamos que X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Sean $x \in \mathcal{HC}(T)$ y p cualquier polinomio no nulo en $\mathbb{C}x$. Como T conmuta con $p(T)$ tenemos que $T^n p(T)x = p(T)T^n x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente,

$$\mathrm{Orb}(T, p(T)x) = p(T)\big(\mathrm{Orb}(T, x)\big), \tag{α}$$

es decir, la órbita del vector $p(T)x$ bajo T es la imagen por $p(T)$ de la órbita del vector x bajo T.

Como T es hipercíclico, resulta que $\mathrm{Orb}(T,x)$ es, en particular, denso en alguna parte de X y se sigue del Lema 2.2.29 que $p(T)$ tiene rango denso en X. Usando la continuidad de $p(T)$, vemos que $p(T)(X) = p(T)\big(\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}\big) \subseteq \overline{p(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big)}$, de donde se deduce que $X = \overline{p(T)(X)} = \overline{p(T)\big(\mathrm{Orb}(T,x)\big)}$, y entonces $\mathrm{Orb}(T, p(T)x)$ es denso en X gracias a (α). Esto prueba que $p(T)x \in \mathcal{HC}(T)$ para cualquier polinomio no nulo $p \in \mathbb{C}x$. El caso cuando X es sobre $\mathbb{R}$ también es válido y la prueba se puede ver, por ejemplo, en [301].

(2). Fijemos un vector $x \in \mathcal{HC}(T)$. Como x es un vector cíclico, el subespacio hipercíclico que necesitamos es $Y_{\mathrm{HC}} := \{p(T)x : p \in \mathbb{C}[x]\} = \left[\mathrm{Orb}(T,x)\right]$. Por definición, Y es un subespacio denso en X y, por consiguiente, de dimensión infinita el cual es claramente invariante bajo T. Por (1), $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{HC}(T)$.

(3). Por ser $Y_{\mathrm{HC}} = \{p(T)x : p \in \mathbb{C}[x]\}$ un subespacio lineal de X, resulta que él es conexo. Más aun, como $\dim(Y_{\mathrm{HC}}) > 1$, el conjunto $Y \setminus \{0\}$ sigue siendo conexo y, gracias a (2),

$$Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{HC}(T) \subseteq X.$$

Suponga que $\mathcal{HC}(T)$ no es conexo. Esto significa que existen dos subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos en X, digamos U y V tal que $\mathcal{HC}(T) = U \cup V$. En particular $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\} \subseteq U \cup V$. Puesto que $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\}$ es conexo, resulta que $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\}$ debe estar contenido en U o bien en V. Suponga que $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\} \subseteq U$. Usando el hecho de que $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\}$ es denso en X, tenemos que $(Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\}) \cap V \neq \varnothing$. Por otro lado, como hemos supuesto que $Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\} \subseteq U$ y como $U \cap V = \varnothing$, tenemos que $(Y_{\mathrm{HC}} \setminus \{0\}) \cap V = \varnothing$. Esta contradicción establece que $\mathcal{HC}(T)$ es conexo. ■

El siguiente resultado, demostrado por primera vez por C. Kitai en su tesis doctoral de 1982 [266], y posteriormente redescubierto por R. M. Gethner y J. H. Shapiro en [180], permite demostrar los teoremas de Birkhoff y MacLane de un modo simple.

Teorema 2.2.142 (Kitai-Gethner-Shapiro). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. Suponga que existe un subconjunto norma-denso D de X y una aplicación $S : X \to X$, la cual no se asume ni lineal ni continua, tal que*

(a) $TS = I$, donde I es el operador identidad sobre X,

(b) $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|S^n x\| = 0$ para cualquier $x \in D$.

Entonces T es hipercíclico.

Prueba. Puesto que X es norma-separable, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ densa en dicho espacio. Para cada $j, m, k \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto

$$\begin{aligned} F(j,m,k) &= \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x \in X : \|T^n x - x_j\| < 1/k\} \\ &= \bigcup_{n=m}^{\infty} T^{-n}\big(U(x_j, 1/k)\big), \end{aligned}$$

donde, como siempre, $U(a,r)$ es la bola abierta con centro en a y radio r. De la continuidad de T se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $T^{-n}\big(U(x_j, 1/k)\big)$ es abierto en X y, por consiguiente, también lo es el conjunto $F(j,m,k)$. Veamos que también ellos son densos en X. En efecto, fijemos $j, m, k \in \mathbb{N}$ y sea V un conjunto abierto no vacío de X. Sea $z \in V$ y escojamos una bola abierta arbitraria contenida en V, digamos $U(z, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Por la densidad del conjunto D, existen y_0 y z_0 en D tales que,

$$\|z - z_0\| < \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad \|x_j - y_0\| < 1/2k, \quad y_0 \neq x_j.$$

Puesto que T^n y S^n convergen puntualmente a 0 sobre D (por la condición (b)), podemos escoger un entero positivo $n \geq m$ tal que

$$\|T^n z_0\| < 1/2k \qquad \text{y} \qquad \|S^n y_0\| < \varepsilon/2.$$

El vector $x \in X$, definido por $x = S^n y_0 + z_0$, satisface

$$\|x - z\| \leq \|x - z_0\| + \|z_0 - z\| = \|S^n y_0\| + \|z_0 - z\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

es decir, $x \in U(z,\varepsilon) \subseteq V$. Finalmente, como $TS = I$, entonces también $T^nS^n = I$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\left\| T^n x - x_j \right\| &= \left\| T^n(S^n y_0 + z_0) - x_j \right\| = \left\| T^n S^n y_0 - x_j + T^n z_0 \right\| \\ &\leq \left\| y_0 - x_j \right\| + \| T^n z_0 \| < 1/2k + 1/2k = 1/k.\end{aligned}$$

Esto prueba que $x \in F(j,m,k) \cap V$ y, por lo tanto, $F(j,m,k)$ es denso en X. Por el Teorema de Categoría de Baire,

$$\mathcal{HC}(T) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} F(j,m,k) \neq \varnothing$$

es un G_δ-denso en X, lo que confirma que T es hipercíclico. ■

Una pequeña observación es pertinente referente al resultado anterior. La conclusión del Teorema 2.2.142 sigue siendo válida, y casi con la misma prueba, si en lugar de la condición (b) ésta se reemplaza por esta otra condición que es más débil:

(b') *existen conjuntos densos D_1 y D_2 en X tales que*

(I) $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ *para cualquier* $x \in D_1$ y

(II) $\lim_{n\to\infty} S^n x = 0$ *para cualquier* $x \in D_2$.

Usando el resultado anterior es fácil demostrar los teoremas de Birkhoff y MacLane. Si f es una función entera y $\alpha \in \mathbb{C}$, denotemos f_α el trasladado de f por α:

$$f_\alpha(z) \ = \ f(z+\alpha) \ \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Teorema 2.2.143 (Birkhoff). *Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto G_δ-denso G_j de funciones enteras tal que, para cada $f \in G_j$, los trasladados $\{f_{nj} : n \in \mathbb{N}\}$ son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Prueba. Para poder aplicar el Teorema 2.2.142, sean $X = \mathcal{H}(\mathbb{C})$, T el operador de traslación por j sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, es decir,

$$Tf(z) = f_j(z) = f(z+j), \qquad (f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \ \ z \in \mathbb{C}),$$

y S el operador de traslación por $-j$ sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Es claro que $TS = I$. El problema es encontrar un conjunto denso D sobre el cual las potencias de esos operadores tiendan, puntualmente, a cero. Para cada par de enteros $k > 0$ y $m \geq 0$ defina la función entera f_{mk} por

$$f_{mk}(z) = z^m \left[\left(\frac{z}{k}\right)^{-1} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{k}\right) \right]^{m+1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

y sea D el subespacio lineal generado por tales funciones. Para cada m y k fijos, un cálculo simple muestra que las sucesiones $\left(T^n f_{mk}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(S^n f_{mk}\right)_{n=1}^{\infty}$, ambas convergen a 0 en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ cuando $n \to \infty$ y, en consecuencia, $(T^n)_{n=1}^{\infty}$ y $(S^n)_{n=1}^{\infty}$ convergen a 0 sobre D. Resta demostrar que D es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. En efecto, si fijamos $m > 0$, resulta que $f_{mk}(z) \to z^m$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ cuando $k \to \infty$. Con esto, hemos demostrado que todas las hipótesis del Teorema 2.2.142 se satisfacen y, en consecuencia, T es hipercíclico. Una aplicación del Teorema 2.2.140 finaliza la prueba. ■

Teorema 2.2.144 (MacLane). *Existe un subconjunto G_δ-denso G de funciones enteras tal que, para cada $f \in G$, las derivadas $\left\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ son densas en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Prueba. Sean $X = \mathcal{H}(\mathbb{C})$, T el operador de diferenciación sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, es decir,

$$Tf = f' \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}),$$

S el operador integración definido, para cualquier z_0 fijo en $\mathbb{C}$, por

$$Sf(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } z \in \mathbb{C},$$

y D es el conjunto de los polinomios en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. No es difícil ver que todas las hipótesis del Teorema 2.2.142 se cumplen, por lo que T es hipercíclico. ■

Otro ejemplo que se obtiene como consecuencia del Teorema 2.2.142 es el siguiente. Considere el operador de Rolewicz $R : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$R(x_1, x_2, \ldots) = 2(x_2, x_3, \ldots), \qquad \text{para todo } (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$$

y defina $S : \ell_2 \to \ell_2$ por $S(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{2}(0, x_1, x_2, \ldots)$. Entonces $RS = I$ y ya que $R(1, 1/2, 1/4, \ldots) = (1, 1/2, 1/4, \ldots)$, resulta que $(1, 1/2, 1/4, \ldots)$ es un autovector de R que, obviamente, no pertenece a $\mathcal{HC}(R)$. El Teorema 2.2.142, garantiza que R es un operador hipercíclico ya que $R^n x \to 0$ y $S^n x \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $x \in D := [\{e_1, e_2, \ldots\}]$. Así, en este caso, $V = \{p(R)x : p \textit{ es un polinomio}\}$ es un espacio vectorial denso de dimensión infinita pero propio, pues no es cerrado, véase [317].

Comentario Adicional 2.2.30 Similar al caso de los vectores hipercíclicos, Pei Yuan Wu en [447] demostró que cualquier operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, es la suma de dos operadores cíclicos. Casi diez años después, S. Grivaux en [191] logró demostrar que cualquier operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es la suma de dos operadores hipercíclicos. Sin embargo, la descomposición anterior no se cumple en cualquier espacio de Banach. En efecto, Grivaux también pudo construir un espacio de Banach separable de dimensión infinita $(X, \|\cdot\|)$ con la propiedad de que no todo operador en $\mathcal{L}(X)$ es la suma de dos operadores hipercíclicos.

Recordemos que cualquier operador hipercíclico $T \in \mathcal{L}(X)$ satisface $\|T\| > 1$, por lo que el conjunto $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$ de todos los operadores hipercíclicos nunca puede ser norma-denso en $\mathcal{L}(X)$. Sin embargo, en el año 2001, Kit C. Chan, [92], demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.2.145 (Chan, [92]). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(\mathcal{H})$ es* SOT-*denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

En particular, como $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$ también es SOT-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. (Para la definición de la SOT-topología véase la página 430).

El resultado de Chan se puede extender a cualquier espacio de Banach separable de dimensión infinita, véase, por ejemplo, [41], Proposition 2.20, p. 44.

¿Qué ocurre con la clausura de los operadores cíclicos en la norma-topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$? La respuesta es la siguiente.

Teorema 2.2.146 ([41], p. 47). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$ es nunca-denso en la norma-topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En particular, $\mathcal{L}_{C}(\mathcal{H})$ es nunca-denso en la norma-topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Por otro lado, si en lugar de $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(\mathcal{H})$ consideramos el subespacio lineal que dicho conjunto genera, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.147 (Chan, [92]). $\left[\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(\mathcal{H})\right]$*, el subespacio lineal generado por los operadores hipercíclicos definidos sobre* $\mathcal{H}$*, es norma-denso en* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*. En particular,* $\left[\mathcal{L}_{C}(\mathcal{H})\right]$ *también es norma-denso en* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y sea $T\in\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$. El conjunto de los vectores hipercíclicos $\mathcal{HC}(T)$ posee algunas propiedades topológicas interesantes. Por ejemplo, ya hemos visto que $\mathcal{HC}(T)$ es conexo, pero además, $\mathcal{HC}(T)$ es *homeomorfo a* X (véase, [41], p. 16). Esto último permite deducir lo siguiente: Suponga que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $T\in\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(\mathcal{H})$. Sea φ el homeomorfismo de $\mathcal{HC}(T)$ sobre $\mathcal{H}$ según lo anterior. Si definimos $f:=\varphi T\varphi^{-1}$ resulta que $f:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ es una aplicación continua con la propiedad de que la órbita de cualquier punto $x\in\mathcal{H}$ bajo f es siempre densa en $\mathcal{H}$.

Más aun, Godefroy demuestra que: *si* $(X,\|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach separable de dimensión infinita y si* $G\subseteq X$ *es un subconjunto* G_δ *conteniendo un subespacio lineal denso de* X*, entonces* G *es homeomorfo a* X.

El Teorema de Birkhoff puede ser reestablecido en el lenguaje de los operadores hipercíclicos del modo siguiente: *el operador traslación* $T_n:\mathcal{H}(\mathbb{C})\to\mathcal{H}(\mathbb{C})$*,* $n\in\mathbb{N}$*, definido para todo* $z\in\mathbb{C}$*, por*

$$T_n(f)(z)=f(n+z),$$

es hipercíclico. Puesto que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{HC}(T_n)$ es un G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, el Teorema de Categoría de Baire, Teorema 1.8.1, página 47, nos dice que $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{HC}(T_n)$ también es un G_δ-denso (véase, Teorema 2.2.140 (c)). Por consiguiente, existen abundantes vectores hipercíclicos comunes a todos los T_n.

El resultado anterior puede ser generalizado para familia no numerables de operadores traslación. En efecto, si para cada $\alpha\in\mathbb{C},\ \alpha\neq 0$, el operador $T_\alpha:\mathcal{H}(\mathbb{C})\to\mathcal{H}(\mathbb{C})$, es definido por $T_\alpha(f)(z)=f(z+\alpha)$, resulta que la familia *no numerable* $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ de operadores hipercíclicos posee, como en el caso anterior, abundantes vectores hipercíclicos común a todos ellos. Este hecho fue demostrado por G. Costakis y M. Sambarino en [107]:

Teorema de Costakis-Sambarino. *Existe un conjunto* G_δ*-denso* $G\subseteq\mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tal que*

$$G\subseteq\bigcap_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}\mathcal{HC}(T_\alpha).$$

A la misma conclusión llegan los autores anteriores para el Teorema de Maclane referente a los operadores de diferenciación.

Teorema de Costakis-Sambarino. *Existe un conjunto* G_δ*-denso* $G\subseteq\mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tal que*

$$G\subseteq\bigcap_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}\mathcal{HC}(D_\alpha),$$

donde, para cada $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$*, el operador* $D_\alpha:\mathcal{H}(\mathbb{C})\to\mathcal{H}(\mathbb{C})$ *viene dado por la igualdad* $D_\alpha(f)(z)=\alpha f'(z)$ *para todo* $z\in\mathbb{C}$.

Si denotamos por M_k, para $k\in\mathbb{N}$, el conjunto de todas las funciones enteras cuya k-ésima potencia es hipercíclico para el operador de diferenciación D, es decir, si

$$M_k=\left\{f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})\,:\,f^k\in\mathcal{HC}(D)\right\},$$

entonces M_k es un G_δ-denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y, entonces, por el Teorema de Categoría de Baire, $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$ es también un G_δ-denso de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (véase, [15]).

Muchas otras situaciones concernientes a la residualidad de vectores hipercíclicos pueden ser consultadas en [193], [192] y las referencias allí citadas. Por ejemplo, Abakumov y Gordon [3], dando respuesta a un problema planteado por Salas [394], han demostrado la existencia de vectores hipercíclicos comunes en ℓ_2 para la familia no numerable $\{\lambda B : |\lambda| > 1\}$, donde B es el operador de Rolewicz (unilateral backward shift) actuando sobre ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Por otro lado, Bayart [36] demuestra que la familia no numerable $\{\lambda T : |\lambda| > 1\}$, posee un vector hipercíclico común, donde $T = M_\phi^*$ es el adjunto de un operador multiplicación sobre el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ por una función interna ϕ. Recordemos que si f es una función analítica sobre el disco unitario $\mathbb{D}$ con $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, entonces la ecuación $C_\phi(f) = f \circ \phi$ define un operador de composición C_ϕ sobre el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Aunque Bayart [36] ha demostrado que los operadores de composición invertibles sobre el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ no admiten un vector hipercíclico común, sin embargo, E. Gallardo Gutiérrez y J. R. Partington [169] demuestran que:

Teorema. *Sea ϕ una función interna tal que $\phi(0) = 0$ y ϕ distinta de la función identidad. Entonces la familia $\{\lambda C_\phi^* : |\lambda| > 1\}$ actuando sobre $H_0^2(\mathbb{D}) = \{f \in H^2(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ posee un conjunto residual de vectores hipercíclicos comunes.*

Finalizamos esta sección haciendo mención sobre el siguiente hecho. Uno de los criterios más práctico para determinar si un operador dado es hipercíclico es el “Criterio de Hiperciclicidad”. Quien primero lo aisló fue C. Kitay en [266] y se expresa del siguiente modo:

Teorema 2.2.148 (Criterio de Hiperciclicidad). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Suponga que existen conjuntos densos D_1 y D_2 en X y una sucesión creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que:*

(1) $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(z) = 0$ *para todo $z \in D_1$, y*

(2) *para cada $z \in D_2$, existe una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en X tal que*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad y \qquad \lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_k) = z.$$

Entonces T es hipercíclico.

Otra formulación equivalente al Criterio de Hiperciclicidad dado por Godefroy-Shapiro en ([187], Theorem 3.2) es el siguiente:

Teorema 2.2.149 (Condición de los tres conjuntos abiertos). *Sea T un operador definido sobre un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Suponga que para cualesquiera dos conjuntos abiertos no vacíos U, V y para cualquier entorno abierto del origen W, existe un entero positivo n tal que*

$$T^n(U) \cap W \neq \varnothing \qquad y \qquad T^n(W) \cap V \neq \varnothing.$$

Entonces T es hipercíclico.

Recordemos que si X es un espacio de Banach, entonces la suma directa $X \bigoplus X$ se define como el conjunto de todos los puntos z que pueden ser representados de manera única en la forma $z = x + y$

con $x, y \in X$. Escribiremos $x \oplus y$ en lugar de z. $X \bigoplus X$ resulta ser un espacio de Banach con la norma $\|x \oplus y\| = \|x\| + \|y\|$. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces el operador $T \bigoplus T : X \bigoplus X \to X \bigoplus X$ se define por $T \bigoplus T(x \oplus y) = Tx \oplus Ty$ para todo $x, y \in X$. Es un hecho no trivial, aunque no difícil de probar, que *si un operador lineal acotado T definido sobre X satisface el Criterio de Hiperciclicidad, entonces el operador $T \bigoplus T$ es hipercíclico.* En [51], J. Bès y A. Peris demuestran el recíproco: *si $T \bigoplus T$ es hipercíclico, entonces T satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

El siguiente problema, originalmente propuesto por Domingo Herrero en [214] en la forma $T \bigoplus T$ ha sido considerado como una de las cuestiones más interesantes en Dinámica Lineal.

Problema DH. *Sean X un espacio de Fréchet separable y T un operador lineal acotado sobre X. Si T es hipercíclico, ¿satisface T el Criterio de Hiperciclicidad?* De modo equivalente, *¿ es $T \bigoplus T$ hipercíclico siempre que T lo es?.*

Muy recientemente, M. De La Rosa y C. Read [114] han demostrado que el Problema DH posee una respuesta negativa al construir un espacio de Banach X y un operador hipercíclico $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T \bigoplus T$ no es hipercíclico, es decir, tal que T no satisface el Criterio de Hiperciclicidad. Más ejemplos sobre operadores hipercíclicos que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad puede ser consultado en [40].

2.2.26. ‖ ► Abundantes bases ortonormales

El objetivo de esta sección consistirá en demostrar, vía el Teorema de Categoría de Baire, la abundancia de bases ortonormales en la esfera unitaria de cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, un resultado probado por Richard Mercer en [306].

En lo que sigue $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert sobre el cuerpo de los números complejos, separable y de dimensión infinita. Como siempre, el producto interno en $\mathcal{H}$ será denotado por $\langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in \mathcal{H}$, mientras que la norma asociada a dicho producto interno la denotaremos por $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$. La esfera unitaria en $\mathcal{H}$ será denotada por S_1 en lugar de $S_{\mathcal{H}}$. Así, $S_1 = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| = 1\}$. Un conjunto $\mathcal{O} = \{u_i : i \in I\}$ de vectores en $\mathcal{H}$ se llama **ortonormal** si

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j\rangle &= 0, \quad \text{para todo } i, j \in I, \quad i \neq j, \text{ y} \\ \|u_i\| &= 1, \quad \text{para todo } i \in I. \end{aligned}$$

Dos conjuntos A y B en $\mathcal{H}$ se dice que son **ortogonales**, en notación $A \perp B$, si $\langle a, b\rangle = 0$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Para cada subconjunto A de $\mathcal{H}$, el **complemento ortogonal** de A, denotado por $A^{\perp}$, se define por $A^{\perp} = \{v \in \mathcal{H} \, : \, \langle u, v\rangle = 0 \ \textit{para todo } u \in A\}$.

Definición 2.2.37. *Una sucesión $\mathcal{B} = \{v_n : n = 1, 2, \dots\}$ de vectores ortonormales en $\mathcal{H}$ se llama una **base ortonormal** para $\mathcal{H}$ si cada $v \in \mathcal{H}$ se puede expresar de modo único en la forma $v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n\rangle v_n$.*

Observe que, por la desigualdad de Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, v_n\rangle|^2 < \infty$. Es fácil establecer que si $\mathcal{B}$ es una sucesión ortonormal de vectores en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{B}$ *es una base ortonormal para $\mathcal{H}$ si, y sólo si,* $\mathcal{H} = \overline{[\mathcal{B}]}$.

Recordemos que el *proceso de Gram-Schimdt* establece que toda sucesión $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vectores linealmente independientes en $\mathcal{H}$ genera una sucesión $\{v_n : n = 1, 2, \dots\}$ de vectores ortonormales en $\mathcal{H}$ tal que $[\{u_1, u_2, \dots, u_n\}] = [\{v_1, v_2, \dots, v_n\}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Un hecho conocido e interesante referente a la existencia de bases ortonormales es cuando se tiene un subespacio lineal denso en el espacio de Hilbert.

Lema 2.2.30. *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (separable y de dimensión infinita) posee una base ortonormal. Más aun, si F es un subespacio lineal denso en $\mathcal{H}$, entonces F contiene una base ortonormal.*

Prueba. Ya que $\mathcal{H}$ es separable, podemos escoger un subconjunto numerable $D = \{x_n \in \mathcal{H} : n = 1,2,\dots\}$ que sea norma-denso en $\mathcal{H}$. Defina

(a) $u_1 = x_1$, y

(b) para $k \geq 2$, sea u_k el primer elemento x_{n_k} en D tal que $u_k \notin [\{u_1,u_2,\dots,u_{k-1}\}]$.

Por construcción, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathcal{H}$ satisfaciendo

$$[\{u_1,u_2,\dots,u_k\}] = [\{x_1,x_2,\dots,x_{n_k}\}], \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

lo que a su vez conduce a que $\overline{[\{u_n : n \in \mathbb{N}\}]} = \overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]} = X$. Aplicando el proceso de Gram-Schimidt a la sucesión $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, se obtiene una nueva sucesión $\{v_n : n = 1,2,\dots\}$ de vectores ortonormales en $\mathcal{H}$ tal que

$$[\{u_1,u_2,\dots,u_n\}] = [\{v_1,v_2,\dots,v_n\}], \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y así,

$$\overline{[\{v_n : n \in \mathbb{N}\}]} = \overline{[\{u_n : n \in \mathbb{N}\}]} = \overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]} = X.$$

De la observación dada anteriormente se tiene que $\mathcal{B} = \{v_n : n = 1,2,\dots\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$.

Supongamos ahora que F es un subespacio lineal denso en $\mathcal{H}$ y sea $D = \{x_n : n = 1,2,\dots\}$ un subconjunto denso en F, el cual podemos suponer, por la primera parte, que es linealmente independiente. Entonces D también es denso en $\mathcal{H}$ y podemos aplicar de nuevo el proceso de Gram-Schimdt a D para obtener el resultado deseado. ■

Definamos

$$S_1^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} S_1^n$$

donde $S_1^n := S_1 = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| = 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que S_1 es un espacio métrico completo, resulta que S_1^∞ también es un espacio métrico completo con la métrica ρ definida por

$$\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u_n - v_n\|}{2^n},$$

donde $\mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^\infty$ y $\mathbf{v} = (v_n)_{n=1}^\infty$ son elementos de S_1^∞. Sea $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión en S_1^∞, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_k = (u_{kn})_{n=1}^\infty$. Si $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^\infty$ converge a $\mathbf{u}$ en la métrica ρ, entonces de la definición de ρ se sigue que $(u_{kn})_{k=1}^\infty$ converge en la norma a u_n en S_1 para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$\mathrm{SO}(\mathcal{H}) = \{\mathbf{u} \in S_1^\infty : \mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^\infty \textit{ es una sucesión ortonormal en } \mathcal{H}\}.$$

Por lo que acabamos de decir, $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ es un subconjunto cerrado de (S_1^∞, ρ) y, por consiguiente, un espacio métrico completo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi_n : S_1^\infty \to S_1$ la n-ésima proyección canónica dada por $\pi_n(\mathbf{u}) = u_n$.

Lema 2.2.31. *La restricción $\pi_n|_{\mathrm{SO}(\mathcal{H})} : \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \to S_1$ es una aplicación continua, abierta y sobreyectiva.*

Prueba. Lo único que necesita demostración es que dicha aplicación es abierta. Sea U un subconjunto abierto no vacío de $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ y sea $\mathbf{u} \in U$. Entonces U contiene una bola abierta con centro $\mathbf{u}$, digamos, $U_\rho(\mathbf{u},\varepsilon) \subseteq U$ para algún $\varepsilon > 0$. Puesto que S_1 es separable, las bolas abiertas con centro en todos los puntos de un subconjunto denso numerable de S_1 y radio ε forman un cubrimiento numerable por abiertos de dicho espacio. Esto nos permite elegir un vector $v \in S_1$ para el cual $\| u_n - v \| < \varepsilon$. Afirmamos que existe un vector

$$\mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \cap U_\rho(\mathbf{u},\varepsilon) \quad \text{tal que} \quad v_n = v.$$

Sea P el plano determinado por los vectores u_n y v, y sea θ el ángulo entre los vectores u_n y v. Sea $P^\perp$ el complemento ortogonal de P, es decir, $P^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x,y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in P\}$. Defina T por

$$T(x) = \begin{cases} e^{i\theta}x, & \text{si } x \in P \\ x & \text{si } x \in P^\perp. \end{cases}$$

Si ahora definamos $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^\infty$ pidiendo que $v_k = T(u_k)$ para $k = 1,2,\ldots$, resultará que $\mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$ y, además, $v_n = v$. Ya que $\| v_k - u_k \| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) < \varepsilon$. Esto prueba nuestra afirmación. Finalmente, puesto que $\pi_n(\mathbf{v}) = v$, tenemos que

$$U_{\|\cdot\|}(u_n,\varepsilon) \subseteq \pi_n\big(\mathrm{SO}(\mathcal{H}) \cap U_\rho(\mathbf{u},\varepsilon)\big) \subseteq \pi_n(U),$$

lo cual dice que $\pi_{n|\mathrm{SO}(\mathcal{H})}$ es abierta. ■

Teorema 2.2.150 (Mercer). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita. Suponga que D es un conjunto de S_1 que además es un G_δ-denso en S_1. Entonces*

$$\mathrm{S}(D) = \big\{\mathbf{u} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) : u_n \in D \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\big\}$$

es un G_δ-denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el conjunto $S_n(D)$ por $S_n(D) = \big\{\mathbf{u} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) : u_n \in D\big\}$. Entonces

$$\mathrm{S}(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(D).$$

Por los Lemas 2.2.31 y 1.8.2, el conjunto $S_n(D) = \big(\pi_n|_{SO(\mathcal{H})}\big)^{-1}(D)$ es un G_δ-denso y, de nuevo, por el Teorema de Categoría de Baire, $\mathrm{S}(D)$ es un G_δ-denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. ■

Recordemos que un operador (= lineal continuo) $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice que es una **proyección ortogonal** si $P^2 = P$ y $\langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle$, para todo $x,y \in X$. Notemos que, en este caso, $\| P \| = 1$ siempre que $P \neq 0$.

El siguiente resultado importante, y que forma parte del folklore, será demostrado en la próxima sección. Aquí, $T(\mathcal{H})$ representa la imagen del operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, mientras que $\mathrm{Ker}(T)$ es el kernel o espacio nulo de T. Algunas veces escribiremos $\mathrm{Img}(T)$ o $\mathrm{Rang}(T)$ en lugar de $T(\mathcal{H})$.

Teorema C. *Si $\mathcal{M}$ es cualquier subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^\perp$. Más aun, existe una proyección ortogonal P sobre $\mathcal{M}$ tal que* $\mathrm{Img}(P) = \mathcal{M}$ *y* $\mathrm{Ker}(P) = \mathcal{M}^\perp$.

Usando el **Teorema C** es fácil deducir el siguiente resultado:

Hecho 1. *Cada base ortonormal* $\mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$ *tiene asociada una sucesión creciente* $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *de subespacios lineales de dimensión finita y una sucesión* $(P_n(\mathbf{u}))_{n=1}^{\infty}$ *de proyecciones ortogonales tales que*

$$P_n(\mathbf{u})(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \| P_n(\mathbf{u})v - v \| = 0 \quad \text{para todo } v \in \mathcal{H}.$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{M}_n$ el subespacio lineal (de dimensión finita y, por consiguiente, cerrado en $\mathcal{H}$) generado por los vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. El **Teorema C** garantiza la existencia una proyección ortogonal $P_n(\mathbf{u})$ sobre $\mathcal{M}_n$. Puesto que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n} = \overline{[\{u_1, u_2, \dots\}]} = \mathcal{H}$, y como cualquier $v \in \mathcal{H}$ se puede representar en la forma $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, u_k \rangle u_k$, resulta que

$$P_n(\mathbf{u})v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_k \rangle u_k \;\to\; v,$$

cuando $n \to \infty$. ■

Lema 2.2.32. *Sea* $\mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$. *Entonces* $\mathbf{u}$ *es una base ortonormal si, y sólo si, para cada* $v \in S_1$ *existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\| P_n(\mathbf{u})v \| > 1/2$.

Prueba. Supongamos que $\mathbf{u}$ es una base ortonormal y sean $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(P_n(\mathbf{u}))_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de subespacios lineales de dimensión finita y de proyecciones ortogonales respectivamente, asociadas a la base ortonormal $\mathbf{u}$. Por el **Hecho 1** se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(\mathbf{u})v - v \| = 0 \quad \text{para todo } v \in S_1.$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(\mathbf{u})v \| = \| v \| = 1 \quad \text{para todo } v \in S_1.$$

Tomemos ahora cualquier $v \in S_1$ y escojamos un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que se cumpla que $\| P_n(\mathbf{u})v \| > 1/2$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{u}$ no es una base ortonormal. Entonces $\overline{[\{u_1, u_2, \dots\}]} \neq \mathcal{H}$ y puesto que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n \subseteq \overline{[\{u_1, u_2, \dots\}]}$ podemos determinar un $v \in \mathcal{H}$ tal que $v \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ pero con $v \perp \overline{[\{u_1, u_2, \dots\}]}$. Un llamado al **Teorema C** nos revela que $P_n(\mathbf{u})v = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto termina la prueba. ■

Lema 2.2.33. *Si* $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ *la cual converge en la métrica* ρ *a* $\mathbf{v}$, *entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(P_n(\mathbf{u}_k))_{k=1}^{\infty}$ *converge en la norma operador a* $P_n(\mathbf{v})$ *cuando* $k \to \infty$, *esto es,*

$$\lim_{k\to\infty} \| P_n(\mathbf{u}_k) - P_n(\mathbf{v}) \| = 0.$$

Prueba. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{u}_k = (u_{kn})_{n=1}^{\infty}$ y pongamos $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = 0$. Entonces, para cualquier $f \in S_1$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\| P_n(\mathbf{u}_k)f - P_n(\mathbf{v})f \| &= \left\| \sum_{m=1}^{n} \langle f, u_{km} \rangle u_{km} - \sum_{m=1}^{n} \langle f, v_m \rangle v_m \right\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} \Big(\| \langle f, u_{km} - v_m \rangle u_{km} \| + \| \langle f, v_m \rangle (u_{km} - v_m) \| \Big) \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} 2 \| u_{km} - v_m \| \;\leq\; \sum_{m=1}^{n} 2 \cdot 2^n \frac{\| u_{km} - v_m \|}{2^m} \\
&\leq 2^{n+1} \rho(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

De esto se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\| P_n(\mathbf{u}_k) - P_n(\mathbf{v}) \| \;=\; \sup\big\{ \| P_n(\mathbf{u}_k) f - P_n(\mathbf{v}) f \| \;:\; f \in S_1 \big\} \;\leq\; 2^{n+1} \cdot \rho(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}),$$

el cual converge a cero cuando $k \to \infty$. ■

Denotemos por $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ el conjunto de todas las bases ortonormales en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. He aquí el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.151 (Mercer). $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ *es un* G_δ*-denso en* $(\mathrm{SO}(\mathcal{H}), \rho)$.

Prueba. En primer lugar vamos a demostrar que $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ es denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. Sea $\mathbf{u} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$ y sea $U_\rho(\mathbf{u}, \varepsilon)$ cualquier bola abierta en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ con centro en $\mathbf{u}$ y radio $\varepsilon > 0$. Escojamos un entero N tal que $1/2^{N-1} < \varepsilon$. Entonces, cada $\mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$ satisfaciendo que $v_k = u_k$ para $k = 1, \ldots, N$ pertenece a $U_\rho(\mathbf{u}, \varepsilon)$ ya que

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\| v_k - u_k \|}{2^k} \;=\; \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\| v_k - u_k \|}{2^k} \;\leq\; \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^k} \;=\; \frac{1}{2^{N-1}} \;<\; \varepsilon,$$

Sea $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ cualquier base ortonormal que extienda al sistema $\{u_1, \ldots, u_N\}$, es decir, tal que $v_k = u_k$ para $k = 1, \ldots, N$. Entonces $\mathrm{BO}(\mathcal{H}) \cap U_\rho(\mathbf{u}, \varepsilon) \neq \varnothing$ por lo que $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ es denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$.

Nos queda por demostrar que $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ es un G_δ. Sea $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ un conjunto denso numerable en S_1. Afirmamos que $\mathrm{BO}(\mathcal{H}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$, donde $G_m = \big\{ \mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) : \| P_n(\mathbf{v}) f_m \| > \frac{1}{2} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \big\}$. En efecto, si $\mathbf{v} \in \mathrm{BO}(\mathcal{H})$, entonces por el Lema 2.2.32 se tiene que $\mathbf{v} \in G_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, con lo cual queda demostrado que $\mathrm{BO}(\mathcal{H}) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. Para demostrar la otra dirección, suponga que $\mathbf{v} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. Si $\mathbf{v} \notin \mathrm{BO}(\mathcal{H})$ podemos elegir, haciendo de nuevo uso del Lema 2.2.32, un vector $f \in S_1$ tal que $P_n(\mathbf{v}) f = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Siendo la sucesión $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ densa en S_1, se puede escoger un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_m - f \| < 1/4$ y, en consecuencia,

$$\| P_n(\mathbf{v}) f_m \| \;=\; \| P_n(\mathbf{v}) f_m - P_n(\mathbf{v}) f \| \;\leq\; \| P_n(\mathbf{v}) \| \, \| f_m - f \| < \frac{1}{4},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos dice que $\mathbf{v}$ no puede estar en $\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. Esta contradicción establece que $\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \subseteq \mathrm{BO}(\mathcal{H})$.

Para finalizar la demostración de nuestra afirmación sólo resta por ver que cada conjunto G_m es abierto en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. Pero como $G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{mn}$, donde $G_{mn} = \big\{ \mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \,:\, \| P_n(\mathbf{v}) f_m \| > \frac{1}{2} \big\}$, entonces es suficiente demostrar que cada G_{mn} es abierto en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ o, equivalentemente, que su complemento es cerrado. Fijemos m, n en $\mathbb{N}$ y suponga que $(\mathbf{v}_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathrm{SO}(\mathcal{H}) \setminus G_{mn}$ convergiendo, en la métrica ρ, a $\mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H})$. Puesto que $\mathbf{v}_k \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \setminus G_{mn}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que $\| P_n(\mathbf{v}_k) f_m \| \leq \frac{1}{2}$. Por otro lado, por el Lema 2.2.33, $P_n(\mathbf{v}_k)$ converge en la norma operador a $P_n(\mathbf{v})$, de donde se sigue que $\| P_n(\mathbf{v}) f_m \| \leq \frac{1}{2}$. Esto prueba que $\mathbf{v} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \setminus G_{mn}$ por lo que $\mathrm{SO}(\mathcal{H}) \setminus G_{mn}$ es cerrado en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. Esto termina la prueba de nuestra afirmación y con ello la demostración del teorema. ■

Teorema 2.2.152 (Mercer). *Sea D un subconjunto G_δ-denso en S_1. Entonces existe una base ortonormal para $\mathcal{H}$ contenida en D. De hecho, el conjunto*

$$G \;=\; \big\{ \mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D \;:\; \mathbf{u} \in \mathrm{BO}(\mathcal{H}) \big\}$$

es un G_δ*-denso en* $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$.

Prueba. Por el Teorema 2.2.150, el conjunto $\mathrm{S}(D) = \{\mathbf{u} \in \mathrm{SO}(\mathcal{H}) \ : \ u_n \in D \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ es un G_δ-denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. Más aun, $\mathrm{BO}(\mathcal{H})$ es también un G_δ-denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ gracias al Teorema 2.2.151. El Teorema de Categoría de Baire nos revela que $G = \mathrm{S}(D) \cap \mathrm{BO}(\mathcal{H})$ es un G_δ-denso en $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$. ■

Es importante destacar que en el teorema anterior, la condición de que el conjunto D sea un G_δ no se puede eliminar. En efecto

Ejemplo 2.2.1. *Existe un subconjunto D_0, denso en S_1, que no contiene bases ortonormales.*

Prueba. Nuestro objetivo será construir, vía inducción, un conjunto denso numerable D_0 que no es base ortonormal para $\mathcal{H}$. Sea $(U_n)_{n=1}^\infty$ una base numerable para la topología de S_1. Asuma que los vectores $v_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ han sido seleccionados. Puesto que los subespacios lineales $\mathcal{H}_i = [\{v_i\}]^\perp$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ son cerrados y propios, ellos son nunca-densos en $\mathcal{H}$ (Ejemplo 8.2, página 212) y, en consecuencia, sus intersecciones con S_1 siguen siendo nunca-densos en S_1. Como S_1 es un espacio métrico completo, el Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \big(S_1 \cap \mathcal{H}_i\big) \subsetneqq S_1.$$

Elijamos entonces $v_n \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \big(S_1 \cap \mathcal{H}_i\big)$. Afirmamos que el conjunto $D_0 = \{v_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es denso en S_1 pero no es una base ortonormal para $\mathcal{H}$. En efecto, es claro que D_0 es denso en S_1 ya que la sucesión $(U_n)_{n=1}^\infty$ es una base numerable para la topología de S_1. Por otro lado, para todo $k \neq l$, $\langle v_k, v_l \rangle \neq 0$, lo cual nos dice que el conjunto D_0 no puede ser una base ortonormal para $\mathcal{H}$. ■

2.2.27. ‖ ► Abundantes operadores diagonales e irreducibles

En esta sección abordaremos, entre otras, la demostración de un resultado de C. K. Fong [162] el cual establece que los operadores diagonales constituyen un conjunto residual en el espacio de los operadores normales definidos sobre un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita $\mathcal{H}$, y también de un resultado de P. R. Halmos [203] que dice que los operadores irreducibles forman un conjunto residual en la norma-topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Para alcanzar tales objetivos es necesario recordar algunas definiciones y ciertos resultados sobre los operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$. Comencemos por fijar un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita $\mathcal{H}$ cuya norma viene dada por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ para todo $x \in \mathcal{H}$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en dicho espacio. La bola unitaria cerrada de $\mathcal{H}$ será denotada como siempre por $B_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$, mientras que su esfera unitaria la escribiremos como $S_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$.

El **Teorema de Representación de Riesz para funcionales lineales acotados sobre** $\mathcal{H}$ establece que: *para cada funcional lineal acotado $x^* \in \mathcal{H}^*$, existe un único vector $y \in \mathcal{H}$ tal que*

$$x^*(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ y se cumple, además, que $\|x^*\| = \|y\|$.

Este hecho permite identificar isométricamente a $\mathcal{H}$ con su dual $\mathcal{H}^*$ y, por consiguiente, la convergencia débil en $\mathcal{H}$ se expresa del modo siguiente: una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ **converge débilmente** a un $x \in \mathcal{H}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle \ = \ \langle x, y\rangle$$

para todo $y \in \mathcal{H}$. De aquí resulta que todo espacio de Hilbert es reflexivo y, en consecuencia, las topologías débil y débil-$*$ coinciden sobre $\mathcal{H}^*$. Se sigue del Teorema de Banach-Alaoglu que:

Corolario 2.2.44. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces $B_{\mathcal{H}}$, la bola unitaria cerrada de $\mathcal{H}$, es débilmente compacta.*

Como antes, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denotará el espacio de Banach de todos los operadores (= transformaciones lineales acotadas) $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, provisto de la norma uniforme de operadores $\|T\|_{\text{op}} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$. De nuevo, escribiremos $\|T\|$ como una abreviación de $\|T\|_{\text{op}}$ cuando no exista ningún vestigio de confusión en la notación. En lo que sigue I denotará el operador identidad sobre $\mathcal{H}$ y 0 el operador nulo. Un elemento $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama un **operador escalar** si $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

El **Teorema de Representación de Riesz para funcionales bilineales-conjugados acotados sobre el producto** $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ afirma que: *a cada funcional bilineal-conjugado acotado* $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *le corresponde un único operador* $T_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tal que*

$$\varphi(x,y) \;=\; \langle T_\varphi x, y\rangle$$

para todo $x,y \in \mathcal{H}$.

Recordemos que $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es un funcional bilineal-conjugado acotado si él es lineal en la primera variable, lineal-conjugado en la segunda variable y existe una constante no negativa c tal que $|\varphi(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|$ para todo $x,y \in \mathcal{H}$. De éste resultado y la identidad de polarización se sigue que si $S,T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\langle Sx,x\rangle = \langle Tx,x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $S = T$.

Se sabe que, para cada operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, existe un único operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, llamado el **adjunto** de T, tal que

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \text{para todo } x,y \in \mathcal{H}.$$

Además, se cumple que

(a) $(aT + bS)^* = \overline{a}T^* + \overline{b}S^*$,

(b) $(TS)^* = S^*T^*$,

(c) $(T^*)^* = T$,

(d) $\|T^*T\| = \|T\|^2$,

(e) $\|T\| = \|T^*\|$.

Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que es

(a) **Autoadjunto** si $T = T^*$.

(b) **Normal** si $TT^* = T^*T$.

(c) **Unitario** si $TT^* = T^*T = I$, donde I es el operador identidad.

Observe que cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se puede escribir de modo único en la forma $T = A_1 + iA_2$, donde

$$A_1 = \frac{T + T^*}{2} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

son operadores autoadjuntos. Además, T es normal si, y sólo si, $A_1A_2 = A_2A_1$. A los operadores A_1 y A_2 se les llama, respectivamente, la **parte real** y la **parte imaginaria** de T.

Se puede demostrar que un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si, y sólo si, $\langle Tx,x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Esta feliz circunstancia permite definir un orden parcial sobre $\mathcal{A}_{\text{dj}}(\mathcal{H})$, el conjunto de todos los operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$, del modo siguiente: Un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice **no-negativo**, y se denota por $T \geq 0$, si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Así, si $T, S \in \mathcal{A}_{\mathrm{dj}}(\mathcal{H})$ entonces

$$S \leq T \quad \text{significa que} \quad T - S \geq 0,$$

esto es, $\langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Observe que TT^* y T^*T son operadores autoadjuntos no-negativos. El siguiente resultado es fácil de demostrar y se deja como ejercicio al lector.

Lema 2.2.34. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Son equivalentes:*

(a) $0 \leq A \leq I$.

(b) $0 \leq A$ *y* $\|A\| \leq 1$.

(c) $A = A^*$ *y* $A^2 \leq A$.

$\|$ ► **Topologías sobre** $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ existen varias topologías interesantes. En esta sección sólo nos interesa recordar las tres siguientes:

(1) **Topología uniforme de operadores**. La topología uniforme de operadores es la topología generada por la métrica-norma, esto es, la topología generada por las bolas abiertas $U(T,r) = \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|S - T\| < r\}$ con $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $r > 0$ variando. A esta topología la denotaremos por τ_{uo} Así, una sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que converge a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ en la **norma uniforme**, o simplemente en la **norma** de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, si

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

La notación $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, o $T = \tau_{\mathrm{uo}} - \lim_{n\to\infty} T_n$ también será usada.

(2) **Topología fuerte de operadores**. Otra de las topologías interesantes que se pueden definir sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que en la literatura sobre el tema se conoce con el nombre de **topología fuerte de operadores**, se define declarando los entornos básicos de cualquier operador $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ como:

$$V(T_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \big\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|(T - T_0)x_i\| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots n\big\}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, cualquier conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{H}$ y cualquier $\varepsilon > 0$. A esta topología la denotaremos por τ_{sot} o escribiremos la SOT-topología. Así, una sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que **converge en la topología fuerte de operadores** a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si para cada $x \in \mathcal{H}$, la sucesión de vectores $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ converge en la norma de $\mathcal{H}$ al vector Tx, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

lo que también será expresado en la forma $T_n \xrightarrow{\mathrm{sot}} T$, o por $T = \tau_{\mathrm{sot}} - \lim_{n\to\infty} T_n$.

Una consecuencia inmediata del Principio de Acotación Uniforme es el siguiente:

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ **es τ_{sot}-completo**. *Esto quiere decir que si $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $x \in \mathcal{H}$, entonces existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T = \tau_{\mathrm{sot}} - \lim_{n\to\infty} T_n$.*

Prueba. Puesto que $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $x \in \mathcal{H}$ y ya que $\mathcal{H}$ es completo, resulta que $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe para cada $x \in \mathcal{H}$ y entonces la aplicación T dada por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ está bien definida y es lineal. La siguiente desigualdad, válida para cualquier $x \in \mathcal{H}$,

$$\| Tx \| \leq \| T_n x - Tx \| + \| T_n x \| \leq \| T_n x - Tx \| + \| T_n \| \, \| x \|$$

acompañada con el Principio de Acotación Uniforme ($\sup_n \| T_n \| < +\infty$) revelan que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. ■

(3) **Topología débil de operadores**. Para cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$, definamos el funcional lineal $\omega_{x,y} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ por

$$\omega_{x,y}(T) = \langle Tx, y \rangle$$

para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. La **topología débil de operadores** sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, en notación τ_{wot}, es la que posee como base de entornos a la familia de los conjuntos de la forma

$$V(S; \omega_{x_1,y_1}, \ldots, \omega_{x_n,y_n}; \varepsilon) = \left\{ T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \left| \langle (T-S)x_j, y_j \rangle \right| < \varepsilon, \ j = 1, \ldots, n \right\},$$

donde $\varepsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se sigue de ésta definición que una sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ **converge en la topología débil de operadores** a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si para cada $x \in \mathcal{H}$, la sucesión de vectores $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ converge en la topología débil de $\mathcal{H}$ a Tx, esto significa que, para cada $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$

Cuando esta convergencia ocurra escribiremos $T_n \xrightarrow{\mathrm{wot}} T$ o también $T = \tau_{\mathrm{wot}} - \lim_{n\to\infty} T_n$.

Observe que, si para un par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ y operadores $T, T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se cumple la desigualdad

$$\| (T - T_0)x \| < \varepsilon (1 + \| y \|)^{-1}, \quad \text{entonces} \quad |\langle (T - T_0)x, y \rangle| < \varepsilon.$$

Esto nos revela que cada conjunto abierto relativo a la τ_{wot}-topología es abierto relativo a la τ_{sot}-topología, lo que se traduce diciendo que la topología débil de operadores es más débil que la topología fuerte de operadores.

Para evitar cualquier grado de confusión con las notaciones de las topologías débiles, a la topología débil de $\mathcal{H}$ la denotaremos simplemente por ω.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ **es τ_{wot}-completo**. *Esto significa que si $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $(\langle T_n x, y \rangle)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $x, y \in \mathcal{H}$, entonces existe un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T = \tau_{\mathrm{wot}} - \lim_{n\to\infty} T_n$.*

Prueba. Fijemos $x \in \mathcal{H}$. Puesto que $(\langle T_n x, y \rangle)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ para cada $y \in \mathcal{H}$, la completitud de $\mathbb{C}$ nos asegura que $\lim_{n\to\infty} \langle T_n x, y \rangle$ existe para todo $y \in \mathcal{H}$. Pongamos $Tx = \omega - \lim_{n\to\infty} T_n x$ para todo $x \in \mathcal{H}$, donde la convergencia es en la topología débil de $\mathcal{H}$. Puesto que los T_n son operadores lineales, T también es lineal. Siendo $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débilmente convergente ella resulta ser norma-acotada y el Principio de Acotación Uniforme nos garantiza entonces que $\sup_n \| T_n \| = M < +\infty$. Combinando estos resultados con el hecho de que las bolas norma-cerradas en $\mathcal{H}$ son ω-cerradas (Teorema de Mazur), podemos concluir que, para cada $x \in \mathcal{H}$

$$\| Tx \| \ \leq \ \left\| \omega - \lim_{n\to\infty} T_n x \right\| \ \leq \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n x \| \ \leq \ M \| x \|,$$

y, así, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. ■

Si bien es cierto que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ provisto de la topología fuerte de operadores nunca es metrizable (recuerde que estamos asumiendo que $\dim(\mathcal{H}) = +\infty$), resulta que todos los subconjuntos acotados $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ si lo son. De hecho, ellos también son metrizables en la topología débil de operadores.

Lema 2.2.35. *Las topologías $\tau_{\rm sot}$ y $\tau_{\rm wot}$ son metrizables sobre subconjuntos acotados de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Prueba. La separabilidad de $\mathcal{H}$ nos permite seleccionar un conjunto denso numerable $D = \{x_n \in S_1 : n \in \mathbb{N}\}$, donde S_1 representa la esfera unitaria de $\mathcal{H}$. Si $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, definamos

$$d_s(T,S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(T-S)x_n\|}{2^n} \qquad \text{y} \qquad d_\omega(T,S) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\big|\langle (T-S)x_n, x_m\rangle\big|}{2^{n+m}}.$$

La densidad del conjunto D nos garantiza que d_s y d_ω son, efectivamente, métricas sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Más aun, se puede verificar, sin mucha dificultad, que ellas definen las topología $\tau_{\rm sot}$ y $\tau_{\rm wot}$, respectivamente, sobre subconjuntos acotados de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. ■

Otro resultado que se puede demostrar es el siguiente (véase, por ejemplo, [142], Theorem 4, p. 476):

Teorema 2.2.153. *Si $F : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces son equivalentes:*

(1) *F es $\tau_{\rm sot}$-continuo.*

(2) *F es $\tau_{\rm wot}$-continuo.*

Combinando el resultado anterior con el Teorema de Mazur, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.45. *Si C es un subconjunto convexo de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces*

$$\overline{C}^{\tau_{\rm sot}} = \overline{C}^{\tau_{\rm wot}}.$$

En lo que sigue, la bola unitaria cerrada de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ será denotada por $B(\mathcal{H})_1$, esto es,

$$B(\mathcal{H})_1 := \big\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|T\| \leq 1\big\}.$$

Teniendo en cuenta que $B(\mathcal{H})_1$ es un conjunto convexo y $\tau_{\rm sot}$-cerrado, entonces el Teorema 2.2.35 en combinación con el hecho de que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es $\tau_{\rm sot}$-completo, nos garantiza que $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\rm sot}\big)$ es un espacio completamente metrizable.

Un aspecto interesante de la topología débil de operadores $\tau_{\rm wot}$ es que ella se comporta de modo muy similar a la ω^*-topología sobre el dual X^* de cualquier espacio de Banach X en el siguiente sentido.

Teorema 2.2.154. *La bola unitaria cerrada $B(\mathcal{H})_1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es $\tau_{\rm wot}$-compacta.*

Prueba. Para cada $x, y \in \mathcal{H}$, defina

$$D_{x,y} = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\,\|y\|\big\}$$

Observe que si $T \in B(\mathcal{H})_1$, entonces $\big|\langle Tx, y\rangle\big| \leq \|T\|\,\|x\|\,\|y\| \leq \|x\|\,\|y\|$, por lo que $\langle Tx, y\rangle \in D_{x,y}$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Por esta razón, la aplicación

$$\Phi : \big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\rm wot}\big) \to \big(\Phi(B(\mathcal{H})_1), \tau_p\big)$$

que asigna a cada $T \in B(\mathcal{H})_1$ el punto $\Phi(T) = \big\{\langle Tx, y\rangle : x, y \in \mathcal{H}\big\}$ en el espacio producto $\Pi_{x,y\in\mathcal{H}} D_{x,y}$, es un homeomorfismo, donde τ_p es la topología producto restringida a $\Phi(B(\mathcal{H})_1)$. Puesto que $D_{x,y}$ es compacto para todo para $x, y \in \mathcal{H}$, el Teorema de Tychonoff nos asegura que $\left(\Pi_{x,y\in\mathcal{H}} D_{x,y}, \tau_p\right)$ es un espacio compacto, de donde resulta que $\Phi(B(\mathcal{H})_1)$ será τ_p-compacto si logramos demostrar que él es τ_p-cerrado. Veamos esto último.

Sea $\varphi \in \overline{\Phi(B(\mathcal{H})_1)}^{\tau_p}$. Entonces cualquier τ_p-entorno de φ, digamos V_φ, intersecta a $\Phi(B(\mathcal{H})_1)$, lo cual quiere decir que existe un $T \in B(\mathcal{H})_1$ tal que

$$\Phi(T) = \left\{\langle Tx, y\rangle : x, y \in H\right\} \in V_\varphi.$$

De lo anterior se deduce que cualesquiera sean x_1, y_1, x_2, y_2 en $\mathcal{H}$, $a \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ existe $T \in B(\mathcal{H})_1$ tal que para todo $j, k = 1, 2$

$$\left|a\varphi(x_j, y_k) - a\langle Tx_j, y_k\rangle\right| < \varepsilon, \qquad \left|\varphi(x_j, y_k) - \langle Tx_j, y_k\rangle\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\varphi(ax_1 + x_2, y_j) - \langle T(ax_1 + x_2), y_j\rangle\right| < \varepsilon, \qquad \left|\varphi(x_j, ay_1 + y_2) - \langle Tx_j, ay_1 + y_2\rangle\right| < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que

$$\left|\varphi(ax_1 + x_2, y_1) \;-\; a\varphi(x_1, y_1) \;-\; \varphi(x_2, y_1)\right| \;<\; 3\varepsilon$$

y

$$\left|\varphi(x_1, ay_1 + y_2) \;-\; \overline{a}\varphi(x_1, y_1) \;-\; \varphi(x_1, y_2)\right| \;<\; 3\varepsilon.$$

Así,

$$\varphi(ax_1 + x_2, y_1) \;=\; a\varphi(x_1, y_1) \;+\; \varphi(x_2, y_1)$$

y

$$\varphi(x_1, ay_1 + y_2) \;=\; \overline{a}\varphi(x_1, y_1) \;+\; \varphi(x_1, y_2).$$

Además, $|\varphi(x, y)| \le \|x\|\,\|y\|$ pues $\varphi(x, y) \in D_{x,y}$. Esto prueba que $\varphi(\cdot,\cdot)$ es un funcional bilineal-conjugado sobre $\mathcal{H}$ acotado por 1. Por el Teorema de Representación de Riesz para tales funcionales, existe un operador $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que

$$\varphi(x, y) = \langle T_0 x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Esto demuestra que $\varphi \in \Phi(B(\mathcal{H})_1)$ y, en consecuencia, $\Phi(B(\mathcal{H})_1)$ es τ_p-cerrado. Por esto, $\Phi(B(\mathcal{H})_1)$ es τ_p-compacto y, puesto que Φ es un homeomorfismo, concluimos que $B(\mathcal{H})_1$ es τ_{wot}-compacto. ■

El Lema 2.2.35 y el resultado anterior garantizan entonces que $\left(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}}\right)$ es un compacto metrizable. En particular, un espacio métrico completo y separable. Más aun, toda bola cerrada de $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es τ_{wot}-compacta y metrizable.

‖ ► **Proyección Ortogonal**.

Sabemos que si $\mathcal{M}$ es cualquier subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H}$ se puede descomponer en la forma $\mathcal{H} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^\perp$. Esto significa que todo $x \in \mathcal{H}$ se puede escribir de forma única como $x = y + z$, donde $y \in \mathcal{M}$ y $z \in \mathcal{M}^\perp$. Al subespacio $\mathcal{M}^\perp$ se le llama el **complemento ortogonal** de $\mathcal{M}$. En general, si $\mathcal{X}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{L}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{X}$, entonces existe un subespacio lineal cerrado $\mathcal{X}_0$ de $\mathcal{X}$, llamado el **complemento ortogonal de** $\mathcal{L}$ **con respecto a** $\mathcal{X}$, tal que $\mathcal{X} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{X}_0$. A $\mathcal{X}_0$ lo escribiremos como $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \ominus \mathcal{L}$. Una vez descompuesto el espacio $\mathcal{H}$ en la forma $\mathcal{H} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^\perp$, entonces podemos definir un operador lineal $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $Px = y$, donde $x = y + z$ con $y \in \mathcal{M}$ y $z \in \mathcal{M}^\perp$ y se cumple claramente que $P^2 = P$.

Un operador $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama una **proyección ortogonal** (sobre un subespacio lineal cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$) si

$$P = P^* \qquad \text{y} \qquad P^2 = P.$$

Es fácil ver que si P es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$, entonces $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$, es decir, P es un operador positivo, y se cumple que $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$. Resulta también claro que si P es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$, entonces $(I - P)$ también es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}^\perp$ tal que $P(I-P) = (I-P)P = 0$. En general, si P y Q son proyecciones ortogonales, entonces $PQ = 0$ si, y sólo si, sus rangos son ortogonales, esto es, $\text{Rang}(P) \perp \text{Rang}(Q)$. En efecto, $\text{Rang}(P) \perp \text{Rang}(Q)$ si, y sólo si, $\langle Qx, Py\rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, es decir, si, y sólo si, $\langle PQx, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, lo cual equivale a que $PQ = 0$.

Uno de los resultados importantes acerca de proyecciones ortogonales viene dado por el siguiente teorema (véase, por ejemplo, [182], Theorem 14.9, p. 198).

Teorema 2.2.155 (Teorema de la Proyección). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

(1) *Si P es una proyección ortogonal, entonces* $\text{Rang}(P) = \{x \in \mathcal{H} : Px = x\}$ *es cerrado y se cumple que* $\mathcal{H} = \text{Rang}(P) \bigoplus \text{Ker}(P)$.

(2) *Si $\mathcal{M}$ es cualquier subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^\perp$ y existe una proyección ortogonal P sobre $\mathcal{M}$ tal que* $\text{Rang}(P) = \mathcal{M}$ *y* $\text{Ker}(P) = \mathcal{M}^\perp$.

Prueba. (1). Suponga que P es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H} = \text{Rang}(P) \bigoplus \text{Ker}(P)$. Sean $x = Py \in \text{Rang}(P)$ y $z \in \text{Ker}(P)$. Entonces $\langle x, z\rangle = \langle Py, z\rangle = \langle y, Pz\rangle = 0$. Esto prueba que $\text{Rang}(P) \perp \text{Ker}(P)$ y se sigue que $\text{Rang}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$, es decir, $\text{Rang}(T)$ es cerrado. Es claro que $\text{Rang}(P) = \{x \in \mathcal{H} : Px = x\}$.
(2). Es inmediata si se tiene en cuenta lo dicho en el párrafo anterior. ■

El resultado anterior establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{H})$ de todas las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}$ y el conjunto $\mathcal{S}\text{ub}(\mathcal{H})$ de todos los subespacios lineales cerrados de $\mathcal{H}$ que se expresa identificando cada proyección ortogonal P sobre $\mathcal{H}$ con un único subespacio lineal cerrado $\mathcal{M} := \text{Rang}(P)$ de $\mathcal{H}$ y recíprocamente. Más aun, $\text{Ker}(P) = \mathcal{M}^\perp$ para tales P.

Teorema 2.2.156. *Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ subespacios lineales cerrados de $\mathcal{H}$ y suponga que P_1 y P_2 son las proyecciones ortogonales sobre ellos. Son equivalentes:*

(a) $P_1 \leq P_2$,

(b) $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$,

(c) $P_1 P_2 = P_1$.

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $x \in \mathcal{M}_1$. Entonces $x = P_1 x$, de donde obtenemos que

$$\langle x, x\rangle = \langle P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 x, x\rangle = \|P_2 x\|^2.$$

De esto se deduce que $x = P_2 x \in \mathcal{M}_2$. Las otras dos implicaciones se dejan como ejercicios. ■

El teorema anterior permite reinterpretar el orden en $\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{H})$ del modo siguiente: si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{H})$, entonces

$$P_1 \ \leq \ P_2 \quad \text{si, y sólo si,} \quad \text{Rang}(P_1) \subseteq \text{Rang}(P_2).$$

El siguiente resultado, que nos será de gran utilidad, establece que sucesiones monótonas de proyecciones ortogonales siempre convergen en la topología fuerte de operadores.

Teorema 2.2.157. *Sea $(P_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión monótona de proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}$. Entonces existe una proyección ortogonal P sobre $\mathcal{H}$ tal que $P = \tau_{\text{sot}} - \text{lím}_{n\to\infty} P_n$.*

Prueba. La demostración la haremos sólo para una sucesión no-decreciente $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ya que si $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es no-creciente, entonces $(I-P_n)_{n=1}^{\infty}$ es no-decreciente. Suponga entonces que $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no-decreciente de proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{M}_n = \mathrm{Rang}(P_n)$. Por los Teoremas 2.2.155 y 2.2.156, $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no-decreciente de subespacios lineales cerrados de $\mathcal{H}$. Pongamos $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n}$. Entonces $\mathcal{M}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ y, de nuevo, por los Teorema 2.2.155 y 2.2.156 existe una proyección ortogonal P sobre $\mathcal{H}$ tal que $P_n \leq P$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Consideremos ahora el subconjunto de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{M}_0 \;=\; \left\{ x = y + x_0 \,:\, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n,\;\; x_0 \perp \mathcal{M} \right\}.$$

Puesto que $\mathcal{H} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^{\perp}$, resulta que $\mathcal{M}_0$ es denso en $\mathcal{H}$. Si $x \in \mathcal{M}_0$, entonces $x = y + x_0$, donde $y \in \mathcal{M}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \perp \mathcal{M}$. Tomemos cualquier $m \geq n$. Entonces $y \in \mathcal{M}_m$ y como $P_m x_0 = 0$ obtenemos que

$$P_m x \;=\; P_m y \;+\; P_m x_0 \;=\; P_m y \;=\; y \;=\; Px.$$

Esto demuestra que $Px = \lim_{m\to\infty} P_m x$ para cualquier $x \in \mathcal{M}_0$. Teniendo en cuenta que $\|P_m\| = 1$ para todo m y que $\mathcal{M}_0$ es denso en $\mathcal{H}$, se concluye que $Px = \lim_{m\to\infty} P_m x$ para cualquier $x \in \mathcal{H}$. ■

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.157, y que nos será de gran utilidad en lo sucesivo lo constituye el siguiente:

Corolario 2.2.46. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable, de dimensión infinita, $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}_n = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$ el subespacio lineal generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y P_n la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. La siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{B}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}$.*

(2) $P_n \xrightarrow{\text{sot}} I$.

Prueba. $(1) \to (2)$. Suponga que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal. Entonces $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n} = \mathcal{H}$ y como $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}$, el resultado sigue del Teorema 2.2.157.

$(2) \to (1)$. Suponga que (2) se cumple pero que $\mathcal{B}$ no es una base ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{M} := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n} \neq \mathcal{H}$ y, por consiguiente, existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tal que $x \perp \mathcal{M}^{\perp}$. Esto implica que $P_n x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $0 = \lim_{n\to\infty} P_n x = x$ lo que contradice la elección de x. ■

Un operador $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **compacto** si $\overline{K(B_{\mathcal{H}})}$ es compacto, es decir, si para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $B_{\mathcal{H}}$, la sucesión $(Kx_n)_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión norma-convergente. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **operador de rango finito** si el rango de T es un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{H}$. Observe que un operador de rango finito es, esencialmente, una matriz cuadrada. Denotemos por $\mathcal{R}_f(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores de rango finito en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y por $\mathrm{rank}(T)$ la **dimensión del rango** de T, esto es, $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Rang}(T))$.

Lema 2.2.36. *Si P y Q son proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}$ tales que $\|P-Q\| < 1$, entonces*

$$\mathrm{rank}(P) \;=\; \mathrm{rank}(Q).$$

Prueba. Si $0 \neq x \in \mathrm{Rang}(P)$, entonces $Px = x$ y, en consecuencia,

$$\|x - Qx\| \;=\; \|Px - Qx\| \;=\; \|P-Q\|\,\|x\| \;<\; \|x\|\,.$$

Esto prueba que $Qx \neq 0$, por lo que Q aplica uno-a-uno los elementos de $\mathrm{Rang}(P)$ en $\mathrm{rank}(Q)$. Esto nos dice que $\mathrm{rank}(P) \leq \mathrm{rank}(Q)$. De modo enteramente similar se prueba la otra desigualdad. ■

Un hecho interesante, que también es consecuencia del Corolario 2.2.46, es el siguiente:

Teorema 2.2.158. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión de operadores $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{R}_f(\mathcal{H})$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_nK - K\| = 0,$$

para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$. Invocando el Corolario 2.2.46, se garantiza la existencia de una sucesión $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de proyecciones ortogonales las cuales, por construcción, pertenecen a $\mathcal{R}_f(\mathcal{H})$ tal que $P_nx \to x$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Sea $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y suponga que $\|P_nK - K\| \nrightarrow 0$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|P_{n_k}K - K\| \;\geq\; \varepsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.2.15}$$

De aquí se sigue que, para cada $k \geq 1$, existe un vector $x_k \in B_{\mathcal{H}}$ tal que $\|P_{n_k}Kx_k - Kx_k\| \geq \varepsilon/2$. Como K es compacto, existe una subsucesión de $(Kx_k)_{k=1}^{\infty}$, que la seguiremos denotando del mismo modo, convergiendo en la norma de $\mathcal{H}$ a algún elemento $x \in \mathcal{H}$, de donde resulta que

$$\begin{aligned} \|P_{n_k}Kx_k - Kx_k\| \;&\leq\; \|P_{n_k}Kx_k - P_{n_k}x\| \;+\; \|P_{n_k}x - x\| \;+\; \|x - Kx_k\| \\ &\leq\; 2\|Kx_k - x\| \;+\; \|P_{n_k}x - x\| \;\to\; 0 \end{aligned}$$

lo que evidentemente contradice a la desigualdad (2.2.15). ■

Si $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de operadores de rango finito obtenida en el resultado anterior y si $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, entonces, definiendo $R_n := P_nK$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que R_n es un operador de rango finito y se cumple que:

Corolario 2.2.47. $\overline{\mathcal{R}_f(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

El corolario anterior establece que *todo operador compacto definido sobre $\mathcal{H}$ es límite, en la norma uniforme de operadores, de una sucesión de operadores de rango finito*. Debemos tener presente, sin embargo, que dicho resultado no es válido, en general, en cualquier espacio de Banach. Por otro lado, como estamos suponiendo que nuestro espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ nunca es igual a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y, por consiguiente,

$$\overline{\mathcal{R}_f(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} \neq \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Pero si cambiamos la topología de la norma uniforme de operadores por la topología fuerte de operadores podemos obtener el siguiente resultado también conocido.

Teorema 2.2.159. $\overline{\mathcal{R}_f(\mathcal{H})}^{\tau_{\text{sot}}} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Prueba. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$ y sean $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones crecientes de subespacios lineales de dimensión finita y de proyecciones ortogonales respectivamente, asociadas a la base ortonormal $\mathcal{B}$. Sabemos, Corolario 2.2.46, que $P_nx \to x$ para todo $x \in \mathcal{H}$, (en particular, $P_nTx \to Tx$), de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \|P_nTP_nx - Tx\| \;&\leq\; \|P_nT(P_n - I)x\| \;+\; \|(P_n - I)Tx\| \\ &\leq\; \|T\|\,\|(P_n - I)x\| \;+\; \|(P_n - I)Tx\| \;\to\; 0 \quad (\text{cuando } n \to \infty) \end{aligned}$$

para todo operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y todo $x \in \mathcal{H}$. Puesto que P_n es un operador de rango finito resulta que P_nTP_n también es de rango finito y la prueba es completa. ■

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{R}_f^n \;=\; \big\{F \in \mathcal{R}_f(\mathcal{H}) : \operatorname{rank}(F) \leq n\big\},$$

resulta que $\mathcal{R}_f^n$ es τ_{wot}-cerrado. En efecto, sea $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{R}_f^n$ tal que $\tau_{\text{wot}} - \text{lím}_{k\to\infty} T_k = T$ y suponga que $T \notin \mathcal{R}_f^n$. Entonces $\operatorname{rank}(T) > n$ y, por consiguiente, en el conjunto $\operatorname{Rang}(T)$ podemos encontrar un conjunto de vectores $\{Tx_1, \ldots, Tx_{n+1}\}$ linealmente independientes. En particular, $T_k x_i \xrightarrow{\omega} Tx_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Por otro lado, el hecho de que $T_k \in \mathcal{R}_f^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$, implica que existen $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(k)}$ en $\mathbb{C}$ con $\text{máx}_{i=1,\ldots,n+1} |\alpha_i^{(k)}| = 1$ tal que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(k)} T_k x_i = 0$. Supongamos, sin cambiar la notación, que $\text{lím}_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i$ existe para $i = 1, \ldots, n+1$. Entonces

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(k)} T_k x_i \;\xrightarrow{\omega}\; \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T x_i$$

por lo que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T x_i = 0$. Sin embargo, como evidentemente $\text{máx}\{|\alpha_i| : i = 1, \ldots, n+1\} = 1$ resulta, de la independencia lineal de los vectores $Tx_1, \ldots, Tx_{n+1}$, que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T x_i \neq 0$. Esta contradicción establece que $T \in \mathcal{R}_f^n$ y, por lo tanto, $\mathcal{R}_f^n$ es τ_{wot}-cerrado. Más aun,

$$\mathcal{R}_f(\mathcal{H}) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_f^n$$

es un F_σ en la τ_{wot}-topología.

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Recordemos que un subespacio lineal cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ se dice **T-invariante** o **invariante bajo** T si ocurre que $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. El subespacio $\mathcal{M}$ se dice no-trivial si $\{0\} \neq \mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Si un subespacio lineal cerrado no trivial $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ es tal que tanto $\mathcal{M}$, así como $\mathcal{M}^{\perp}$, son invariantes ambos bajo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (es decir, si $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}^{\perp}) \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$), entonces diremos que $\mathcal{M}$ **reduce** a T. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice **reducible** si él posee un subespacio no trivial que lo reduce. Es un ejercicio sencillo verificar que $\mathcal{M}$ reduce a T si, y sólo si, $\mathcal{M}$ es invariante bajo T y también bajo T^*. Existen, por supuesto, operadores $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que poseen un subespacio invariante, digamos $\mathcal{M}$, pero tal que $\mathcal{M}^{\perp}$ no es invariante bajo T. Por esta razón, un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **reductivo** si cualquier subespacio lineal cerrado no trivial invariante bajo T reduce a T.

Teorema 2.2.160. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y suponga que P es la proyección ortogonal sobre algún subespacio lineal cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$.*

(1) *Son equivalentes:*

  (a) *$\mathcal{M}$ es invariante bajo T.*

  (b) *$PTP = TP$.*

(2) *Son equivalentes:*

  (a) *$\mathcal{M}$ reduce a T.*

  (b) *$PT = TP$.*

Prueba. $(1a) \Rightarrow (1b)$. Si $x \in \mathcal{H}$, entonces $Px \in \mathcal{M}$ y como $\mathcal{M}$ es invariante bajo T, $T(Px) \in \mathcal{M}$. Por esto, $P(TPx) = T(Px)$ y así, $PTP = TP$.

$(1b) \Rightarrow (1a)$. Sea $x \in \mathcal{M}$. Entonces $Px = x$ y como $PTP = TP$, tenemos que

$$Tx = T(Px) = P(TPx) = P(Tx) \in \mathcal{M}.$$

Esto prueba que $\mathcal{M}$ es invariante bajo T.

$(2a) \Rightarrow (2b)$. Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^\perp$ son invariantes bajo T, entonces $(1a)$ implica que las igualdades $PTP = TP$ y $T(I-P) = (I-P)T(I-P)$ se cumplen. Efectuando la multiplicación de ésta última ecuación nos da que $T - TP = T - TP - PT + PTP$, de donde se sigue que $PT = PTP = TP$.

$(2b) \Rightarrow (2a)$. Si $PT = TP$, entonces $PT^* = T^*P$. Multiplicando las dos igualdades anteriores por P, resulta que $PT = PTP = TP$ y $PT^* = PT^*P = T^*P$. Así, por la equivalencias $(1a)$ y $(1b)$ tenemos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^\perp$ son invariante bajo T. ■

Observe que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto y $\mathcal{M}$ es un subespacio invariante bajo T, entonces $\mathcal{M}$ reduce a T. En efecto, si $y \in \mathcal{M}^\perp$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$, en particular $\langle Tx, y\rangle = 0$ ya que $Tx \in \mathcal{M}$ pues $\mathcal{M}$ es T-invariante. Pero como $T = T^*$, resulta que $\langle x, Ty\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$, lo cual equivale a decir que $Ty \in \mathcal{M}^\perp$. Por otro lado, si T es un operador normal pero no autoadjunto, entonces pueden existir subespacios T-invariantes que no reducen a T. También observe que si $\mathcal{M}$ reduce a T, entonces $T = T|\mathcal{M} \oplus T|\mathcal{M}^\perp$, es decir, si $x = y + z \in \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, entonces $Tx = T|\mathcal{M}(y) + T|\mathcal{M}^\perp(z) \in \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

|| ► **Abundancia de Operadores Diagonales**.

La teoría espectral es una versión, en dimensión infinita, del proceso de diagonalización de una matriz normal. Recordemos que una matriz cuadrada (o un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$) es normal si ella conmuta con su adjunta. Podemos considerar los siguientes dos casos dependiendo de la dimensión de $\mathcal{H}$:

(1) Suponga que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita. *El Teorema Espectral para un Operador Normal (o matriz) N definida sobre $\mathcal{H}$ establece que existe una base ortonormal en $\mathcal{H}$ que consiste sólo de autovectores de N* (véase, por ejemplo, [23], Theorem 7.9, p. 133). Esto es equivalente a la existencia de una matriz unitaria U con la propiedad de que U^*NU es una matriz diagonal, en cuyo caso, las entradas de la diagonal son precisamente los autovalores de N. Este hecho permite que se pueda escribir a N en la forma

$$N = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i E_i, \tag{N$_1$}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los autovalores de N y los E_i son las proyecciones ortogonales sobre los subespacios S_i formados por todos los autovectores asociados a los autovalores λ_i, $i = 1, \dots, m$.

(2) Si nuestro espacio $\mathcal{H}$ es ahora de dimensión infinita y N es un operador normal definido sobre dicho espacio, entonces puede ocurrir que N no posea autovalores y, en consecuencia, no podamos escribir a N como una suma del tipo (N_1) ya mencionada. Esta dificultad conduce a la imperiosa necesidad de reemplazar la noción de autovalor por un concepto más general conocido como el **espectro de un operador**, una noción que ya habíamos definido con anterioridad. Aunque los elementos del espectro de un operador normal N no tienen porque ser autovalores, sin embargo, N siempre posee **autovectores aproximados**, es decir:

Existencia de autovectores aproximados. *Si $N \in \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \sigma(N)$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de vectores unitarios en $\mathcal{H}$ tal que* $\lim_{n\to\infty} \|(N - \lambda I)x_n\| = 0$.

Más adelante veremos que, en el caso de dimensión infinita, todo operador normal se puede aproximar por un matriz diagonal infinita.

Volvamos al hecho de que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, separable, de dimensión infinita y sea $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal en $\mathcal{H}$. Cada operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ queda unívocamente determinado por su matriz representante, $M_T = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Existen muchas propiedades de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$ que se pueden deducir a partir de sus matrices. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable, de dimensión infinita y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio lineal cerrado. Sea P la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}$ y suponga que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de P. Entonces*

(1) $\lambda = 0$ *o* $\lambda = 1$.

(2) *Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ tal que la matriz representante de P es una matriz diagonal compuesta sólo de 1's y 0's.*

Prueba. (1). Sea x un autovector asociado a λ. Entonces $x \neq 0$ y como $Px = \lambda x$, resulta que

$$\lambda^2 x = \lambda P x = P^2 x = Px = \lambda x,$$

de donde se sigue que $\lambda = 1$ o $\lambda = 0$.
(2). Observe que $Pz = z$ si $z \in \mathcal{M}$ y que $Py = 0$ si $y \in \mathcal{M}^\perp$. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases ortonormales de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^\perp$ respectivamente. Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y es claro que la matriz representante de P en ésta base es una matriz diagonal compuesta de 1's y 0's. ■

Los operadores diagonales, que discutiremos brevemente un poco más abajo, poseen matrices representantes que, como su nombre lo indica, son matrices diagonales. La importancia de los operadores diagonales radica en que una amplia variedad de operadores clásicos se representan como operadores diagonales y, por consiguiente, como una matriz diagonal infinita. Por ejemplo, el Teorema Espectral para un Operador Normal Compacto N sobre un espacio de Hilbert complejo, separable, de dimensión infinita $\mathcal{H}$, establece que (véase, por ejemplo, [361], Corollary 1.5, p. 13)

> **Teorema Espectral para Operadores Normales Compactos**. *Si $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador normal compacto, entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{H}$ y una sucesión de números complejos $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ convergiendo a cero tal que*
>
> $$Nx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$
>
> *para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Lo que deseamos demostrar en esta sección es la abundancia de tales operadores en $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$, el conjunto de todos los operadores normales sobre $\mathcal{H}$. De hecho, los operadores diagonales constituirán un conjunto G_δ-denso en el espacio métrico completo $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

Definición 2.2.38. *Un operador $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **diagonal** si existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ de $\mathcal{H}$ y una sucesión acotada $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ de números complejos, llamada la diagonal de D y denotada por diag(T), tal que*

$$Dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y denotemos por $\mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ el conjunto de todos los operadores diagonales asociados a la base $\mathcal{B}$; es decir, $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ si, y sólo si, existe una sucesión acotada $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que $Dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Observe que si $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ y si $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión acotada en $\mathbb{C}$ tal que $Dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $\|D\| = \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que la suma de dos sucesiones acotadas es acotada, resulta claro que $\mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y, más aun, como veremos un poco más abajo, si $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$, entonces $D^* \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$. Denotemos, finalmente, por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores diagonales sobre $\mathcal{H}$, es decir,

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \bigcup_{\mathcal{B} \in BO(\mathcal{H})} \mathcal{D}iag(\mathcal{B}),$$

donde $BO(\mathcal{H})$ representa el conjunto de todas las bases ortonormales de $\mathcal{H}$. A pesar del hecho de que todo operador normal compacto es un operador diagonal, los operadores diagonales son considerados como muy especiales y, en consecuencia, se les suele pensar como objetos más bien raros en algún sentido.

Veamos algunas otras propiedades simples que poseen los operadores diagonales.

(1) *Cualquier operador diagonal es normal*. Para ver esto, sea $Dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ un operador diagonal y veamos, en primer lugar, que $D^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \langle x, e_n\rangle e_n$. En efecto, pongamos $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \langle x, e_n\rangle e_n$. Entonces, para todo $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle D^*x, y\rangle \;=\; \langle x, Dx\rangle &= \left\langle x,\, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, e_n\rangle e_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n \langle y, e_n\rangle} \langle x, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \langle x, e_n\rangle e_n,\, y \right\rangle \;=\; \langle Bx, y\rangle.
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $B = D^*$. Finalmente, $DD^* = D^*D$ es consecuencia de las igualdades

$$D^*Dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\lambda}_n \langle x, e_n\rangle e_n \;=\; DD^*x.$$

(2) *D es autoadjunto si, y sólo si, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(3) *Si λ es un autovalor de D, entonces $\lambda = \lambda_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$*. En efecto, sea $x \in \mathcal{H}$ un autovector asociado a λ. Entonces $Dx = \lambda x$, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \;=\; \lambda x.$$

Como $x \neq 0$, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x, e_n\rangle \neq 0$ y, en consecuencia,

$$\lambda \langle x, e_n\rangle \;=\; \langle \lambda x, e_n\rangle \;=\; \langle Dx, e_n\rangle \;=\; \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j,\, e_n \right\rangle \;=\; \lambda_n \langle x, e_n\rangle$$

de donde se obtiene que $\lambda = \lambda_n$. En particular, si $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión constante, digamos $\lambda_n = \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $D = \mu I$, es decir, D es un operador escalar.

(4) *Los operadores diagonales son aquellos operadores normales cuyos autovectores generan todo el espacio*. En efecto, puesto que $De_n = \lambda_n e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que cada e_n es un autovector de D y como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal, se concluye que los autovectores de D generan todo el espacio.

Usando el resultado anterior es posible demostrar lo siguiente:

Sea $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, entonces existe un operador diagonal $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ tal que $\sigma(D) = K$.

En efecto, sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en K y sea $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ con $\operatorname{diag}(D) = \{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Puesto que $\lambda_n \in \sigma(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\sigma(D)$ es un conjunto compacto, resulta entonces que $\overline{\{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\}} = K \subseteq \sigma(D)$.

Para la otra inclusión, suponga que $\lambda \notin K$. Entonces $d := \operatorname{dist}(\lambda, K) > 0$ y

$$\big(D - \lambda I\big)x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)\langle x, e_n\rangle e_n.$$

La igualdad de Parseval nos revela que

$$\big\|\big(D - \lambda I\big)x\big\|^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |(\lambda_n - \lambda)\langle x, e_n\rangle|^2,$$

de donde se deduce que si $\big(D - \lambda I\big)x = 0$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n = 0$. Esto prueba que $D - \lambda I$ es inyectivo. Para ver que $D - \lambda I$ es sobreyectivo, sea $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Definiendo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n - \lambda)^{-1} e_n$ se logra que $\big(D - \lambda I\big)x = y$. Por esto $D - \lambda I$ es invertible y, en consecuencia, $\lambda \notin \sigma(D)$. ■

(5) *Si $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ para alguna base ortonormal $\mathcal{B}$, entonces, por el Corolario 2.2.46, la sucesión creciente $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de proyecciones ortogonales de rango finito definidas por $P_n x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ cumplen*

$$P_n \xrightarrow{s} I \qquad \text{y} \qquad DP_n = P_n D \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de modo que, como se consecuencia del Teorema 2.2.160, todos los subespacios $M_n := \operatorname{Rang}(P_n) = [e_1, \ldots, e_n]$ reducen a D.

(6) $\mathcal{P}\mathrm{roj}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Esto es el Ejemplo 2.2.2.

(7) *Si $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ para alguna base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ con diagonal $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces D es compacto si, y sólo si,* $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

Prueba. Suponga que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por

$$R_k x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n,$$

donde $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$. Puesto que

$$\|D - R_k\| \;\leq\; \sup_{n\geq k}|\lambda_n|,$$

resulta que R_k aproxima a D en la norma y como los R_k son operadores de rango finito, el operador diagonal D debe, por consiguiente, ser compacto gracias al Corolario 2.2.47.

Para el recíproco, suponga que D es compacto y considere la base ortonormal $\mathcal{B}$ que define a D. Puesto que $e_k \to 0$ débilmente y D es compacto, tenemos que $\|De_k\| \to 0$ cuando $k \to \infty$. Desde luego, esto implica que $\|\lambda_k e_k\| \to 0$ y así, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$. ■

(8) *Sea $D \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$ para alguna base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y suponga que*:

(*a*) *D es autoadjunto, y*

(*b*) *la diagonal $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de D son dos a dos distintos y ninguno de ellos es igual a cero.*

Entonces un subespacio lineal cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ es invariante bajo D si, y sólo, si $\mathcal{M} = \overline{[\{e_n : n \in J\}]}$, para algún subconjunto no vacío J de $\mathbb{N}$.

Prueba. Es claro que si $\mathcal{M} = \overline{[\{e_n : n \in J\}]}$, donde J es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{M}$ es invariante bajo D. Supongamos que $\mathcal{M}$ es D-invariante. Puesto que D es autoadjunto, resulta que $\mathcal{M}$ reduce a D. Sea P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$. Del Teorema 2.2.160 se sigue que $PD = DP$ y, en consecuencia, $DPe_n = PDe_n = \lambda_n Pe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como los λ_n's son distintos dos a dos, el autoespacio de D correspondiente a λ_n tiene dimensión 1 y, por lo tanto, existe α_n tal que $Pe_n = \alpha_n e_n$. Finalmente, como $P^2 = P$, cada α_n es 0 o bien 1. Si ahora definimos $J = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 1\}$, entonces tendremos que $\mathcal{M} = \overline{[\{e_n : n \in J\}]}$. ∎

Observe que todo operador diagonal es suma directa de operadores que son múltiplos escalares de proyecciones y éstos últimos resultan ser operadores "muy simples" en el sentido de que de ellos se conoce una gran cantidad de información. Por ejemplo, más adelante veremos que los operadores diagonales aproximan, en la norma, a cualquier operador normal.

En general, si N es un operador normal sobre un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita, entonces no siempre es posible representar a N como un operador diagonal. En este caso el Teorema Espectral para estos operadores lo que establece es que ellos se pueden representar como una integral con respecto a una cierta medida espectral.

Definición 2.2.39. *Sean Ω un conjunto, $\mathfrak{M}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una* ***medida espectral*** *para $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathcal{H})$ es una función $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ verificando las siguientes propiedades:*

(*a*) *$E(\delta)$ es una proyección ortogonal, para cada $\delta \in \mathfrak{M}$,*

(*b*) *$E(\varnothing) = 0$ y $E(\Omega) = I$,*

(*c*) *$E(\delta_1 \cap \delta_2) = E(\delta_1)E(\delta_2)$, cualesquiera sean $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{M}$,*

(*d*) *$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E(\delta_n)$, para toda sucesión disjunta $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{M}$.*

Debemos advertir que la convergencia de la serie en (d), de la definición precedente, es con respecto a la topología fuerte de operadores. Esto quiere decir que, para todo $x \in \mathcal{H}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} E(\delta_n)x$ converge en $\mathcal{H}$ a $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n\right)x$. Se sigue también de la parte (c) de la definición anterior que si δ_1 y δ_2 son conjuntos de Borel disjuntos, entonces $E(\delta_1)E(\delta_2) = 0$, lo cual significa que $\mathrm{Rang}(E(\delta_1)) \perp \mathrm{Rang}(E(\delta_2))$. Más aun, la proyecciones $E(\delta_1)$ y $E(\delta_2)$ conmutan. Otra consecuencia de (c) es que si $\delta_1 \subseteq \delta_2$, entonces $E(\delta_1)E(\delta_2) = E(\delta_1)$ lo cual es equivalente a decir, por el Teorema 2.2.156, que $E(\delta_1) \leq E(\delta_2)$. Es una tarea no tan difícil demostrar que si E es una medida espectral para $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathcal{H})$ y si $x, y \in \mathcal{H}$, entonces la función $E_{x,y} : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ dada por

$$E_{x,y}(\delta) = \langle E(\delta)x, y\rangle, \quad \delta \in \mathfrak{M}$$

define una media numerablemente aditiva con variación total $\leq \|x\| \, \|y\|$ (véase, por ejemplo, Lemma 1.9, p. 263 de [104]).

Una manera de representar operadores por medio de integrales con respecto a una medida espectral es dada a través del siguiente resultado:

Teorema 2.2.161 ([361], Theorem 1.9, p. 17). *Si E es una medida espectral para $(\Omega,\mathfrak{M},\mathcal{H})$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es una función $\mathfrak{M}$-medible acotada, entonces existe un único operador $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que para todo $x,y\in\mathcal{H}$,*

$$\langle Tx,y\rangle \;=\; \int_\Omega f(\lambda)\,dE_{x,y}(\lambda).$$

Suponga, además, que $\varepsilon>0$ y que $\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ es una partición medible de Ω tal que siempre que t y t' están en algún δ_j, se cumple que $|f(t)-f(t')|<\varepsilon$. Entonces, si $t_j\in\delta_j$ para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ se verifica que

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} f(t_j)E(\delta_j)\right\| \;\leq\; \varepsilon.$$

El operador T, obtenido en el Teorema 2.2.161, se le denomina la **integral de f con respecto a E**. Usaremos la notación $T=\int_\Omega f(\lambda)dE(\lambda)$ como una abreviación para la relación $\langle Tx,y\rangle \;=\; \int_\Omega f(\lambda)\,dE_{x,y}(\lambda)$ para todo $x,y\in\mathcal{H}$. Se comprueba fácilmente que $T^*=\int_\Omega\overline{f(\lambda)}dE(\lambda)$. Más aun, si $S=\int_\Omega g(\lambda)dE(\lambda)$, entonces

$$TS=\int_\Omega f(\lambda)g(\lambda)dE(\lambda). \tag{2.2.16}$$

Sea $N\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador normal y denotemos por $\mathcal{B}_0(\sigma(N))$ la σ-álgebra de Borel de $\sigma(N)$, el espectro de N, el cual, como sabemos, es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$. El Teorema Espectral para Operadores Normales sobre un espacio de Hilbert complejo, separable, de dimensión infinita puede ahora ser establecido del modo siguiente(véase, [104], Th. 2.2, p. 269).

Teorema 2.2.162 (Teorema Espectral, Versión Medida Espectral). *Si $N\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador normal, entonces existe una única medida espectral E para $(\sigma(N),\mathcal{B}_0(\sigma(N)),\mathcal{H})$, tal que*

(1) $N=\displaystyle\int_{\sigma(N)}\lambda\,dE(\lambda)$.

(2) *Si U es cualquier subconjunto relativamente abierto no vacío de $\sigma(N)$, entonces $E(U)\neq 0$.*

(3) *Si $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $TN=NT$ y $TN^*=N^*T$ si, y sólo si, $TE(\delta)=E(\delta)T$ para todo $\delta\in\mathcal{B}_0(\sigma(N))$. En particular, $NE(\delta)=E(\delta)N$ para todo $\delta\in\mathcal{B}_0(\sigma(N))$.*

La única medida espectral E obtenida en el Teorema Espectral es llamada la **medida espectral** para N. La representación de N expresada en la forma $N=\int_{\sigma(N)}\lambda\,dE(\lambda)$, usualmente será referida como la **descomposición espectral** de N. Cada una de las proyecciones ortogonales $E(\delta)$ con $\delta\in\mathcal{B}_0(\sigma(N))$ obtenidas en el teorema anterior se denominan **proyecciones espectrales**.

Una consecuencia inmediata del Teorema Espectral para Operadores Normales es que tales operadores poseen subespacios lineales cerrados invariantes no triviales. Específicamente se tiene el siguiente:

Corolario 2.2.48. *Todo operador normal $N\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es reductivo, es decir, existe un subespacio lineal cerrado no trivial que reduce a N.*

Prueba. Sea N un operador normal. Por el Teorema Espectral para Operadores Normales, existe una medida espectral E para $(\sigma(N),\mathcal{B}_0(\sigma(N)),\mathcal{H})$ tal que $N=\int_{\sigma(N)}\lambda\,dE(\lambda)$. Observe que cualquiera sea $\delta\in\mathcal{B}_0(\sigma(N)$, el subespacio $E(\delta)\mathcal{H}$ es invariante bajo N. En efecto, como $E(\delta)$ conmuta con N se tiene que para cualquier $x\in E(\delta)\mathcal{H}$, $Nx=NE(\delta)x=E(\delta)Nx$ de donde se sigue que $Nx\in E(\delta)\mathcal{H}$. Esto prueba que $E(\delta)\mathcal{H}$ es un subespacio invariante bajo N y, en consecuencia, $N|E(\delta)\mathcal{H}$ está bien definido. Sin embargo, puede ocurrir que dicho espacio sea trivial. Afirmamos que existe $\delta \in \mathcal{B}_0(\sigma(N))$ tal que $\{0\} \neq E(\delta)\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. En efecto, si $\sigma(N) = \{\lambda\}$, entonces por la unicidad de la medida espectral resulta que N es un operador escalar, es decir, $N = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y, en consecuencia, cualquier subespacio lineal cerrado (no trivial) de $\mathcal{H}$ es invariante bajo N. Supongamos ahora que N no es un operador escalar, entonces $\sigma(N)$ contiene más de un punto. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(N)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y sea $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_1| < r\}$ la bola abierta en $\mathbb{C}$ con centro en λ_1 y radio $r = |\lambda_1 - \lambda_2|/2$. Pongamos $\delta_1 = \sigma(N) \cap U_1$ y $\delta_2 = \sigma(N) \setminus U_1$. Entonces $\sigma(N) = \delta_1 \cup \delta_2$ y puesto que δ_1 y $\sigma(N) \setminus \overline{U}_1$ son subconjuntos no vacíos relativamente abiertos de $\sigma(N)$ con $\sigma(N) \setminus \overline{U}_1 \subseteq \delta_2$, el Teorema Espectral nos dice que $E(\delta_1) \neq 0$ e igualmente $E(\delta_2) \neq 0$. Como $I = E(\sigma(N)) = E(\delta_1 \cup \delta_2) = E(\delta_1) + E(\delta_2)$, entonces $E(\delta_1) = I - E(\delta_2) \neq I$, de donde se sigue que

$$\{0\} \neq E(\delta_1)\mathcal{H} \neq \mathcal{H}.$$

La prueba de nuestra afirmación termina si hacemos $\delta = \delta_1$. Finalmente, $\mathcal{M} := E(\delta)\mathcal{H}$ es un subespacio lineal cerrado no trivial de $\mathcal{H}$ y puesto que

$$E(\delta) = \int_{\sigma(N)} \chi_\delta(\lambda)\, dE(\lambda),$$

entonces se deriva de la igualdad (2.2.16) que $E(\delta)$ conmuta con N. Uno invoca el Teorema 2.2.160 para concluir que $\mathcal{M}$ reduce a N. ■

Denotemos por $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que son normales. Si bien es cierto que $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, dicho conjunto contiene a $\mathcal{A}\mathrm{dj}(\mathcal{H})$, el espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales de todos los operadores autoadjuntos. De hecho, $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ contiene al álgebra de von Neumann $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ para cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$. Más aun, vale el siguiente:

Lema 2.2.37. $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ *es cerrado en* $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$. *En particular,* $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ *es un espacio métrico completo.*

Prueba. Recordemos que el operador N es normal si, y sólo si, $\langle Nx, Nx\rangle = \langle N^*x, N^*x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Sea ahora $(N_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ tal que $N_n \xrightarrow{\|\cdot\|} N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces, $N_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} N^*$ y, así,

$$\langle Nx, Nx\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \langle N_n x, N_n x\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \langle N_n^* x, N_n^* x\rangle \;=\; \langle N^*x, N^*x\rangle$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. ■

Otra forma de probar el resultado anterior es observar que si $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces

$$(T^* - S^*)(T - S) \,+\, (T^* - S^*)S \,+\, S^*(T - S) \;=\; T^*T \,-\, S^*S$$

y puesto que $\|T\| = \|T^*\|$, entonces

$$\|T^*T \,-\, S^*S\| \;\leq\; \|T - S\|^2 \,+\, 2\|S\|\,\|T - S\|.$$

Sea ahora $(N_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ tal que $N_n \xrightarrow{\|\cdot\|} N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces, por la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
\|N^*N \,-\, NN^*\| \;&=\; \|N^*N - N_n^*N_n + N_nN_n^* - NN^*\| \\
&\leq\; \|N^*N - N_n^*N_n\| \,+\, \|N_nN_n^* - NN^*\| \\
&\leq\; 2(\|N_n - N\|^2 \,+\, 2\|N\|\,\|N_n - N\|) \;\to\; 0,
\end{aligned}$$

lo cual prueba que $N \in \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$.

Una manera sencilla de ver que $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ es norma-denso en $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es usar el siguiente resultado (cuya prueba no es trivial, y puede verse, por ejemplo, en [105], Theorem 39.4, p. 216).

Teorema 2.2.163 (Teorema de Weyl-von Neumann-Berg). *Sea $N \in \mathcal{N}or(\mathcal{H})$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un operador diagonal $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y un operador compacto $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $\|K\| < \varepsilon$ tal que $N = D + K$.*

De hecho, el operador compacto K, en el Teorema de Weyl-von Neumann-Berg, se puede elegir de modo que sea de Hilbert-Schmidt (una clase muy especial de operadores compactos) con norma de Hilbert-Schmidt menor que ε (véase, por ejemplo, [108]). Weyl fue el primero en demostrar que todo operador autoadjunto $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se puede representar en la forma $A = D + K$, donde D es un operador diagonal autoadjunto y K es un operador compacto. Posteriormente, J. von Neumann demuestra que el operador compacto K se puede elegir de modo que éste sea de Hilbert-Schmidt con norma de Hilbert-Schmidt arbitrariamente pequeña. Más tarde, Berg generaliza el resultado de Weyl al demostrar que todo operador normal $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es suma de un operador diagonal más uno compacto y, finalmente, Voiculescu cierra el círculo al descubrir que el operador compacto en el resultado de Berg se puede escoger de Hilbert-Schmidt con norma de Hilbert-Schmidt tan pequeña como se desee.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema de Fong sobre la abundancia de operadores diagonales en el espacio métrico completo $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

Teorema 2.2.164 (Fong). *El conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, de los operadores diagonales sobre $\mathcal{H}$, es residual en el espacio métrico completo $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.*

Prueba. (1) *Densidad de $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ en $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.*

Sea N un operador normal, y sea E la medida espectral de N, es decir,

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda\, dE(\lambda).$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario e invoquemos el Teorema 2.2.161 para hallar una partición medible $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de $\sigma(N)$ tal que $\mathrm{diam}(\delta_i) < \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, n$, de modo que si $\lambda_i \in \delta_i$, $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\left\| N - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\delta_i) \right\| \;<\; \varepsilon.$$

Pongamos $M_i := \mathrm{Rang}(E(\delta_i))$, y sobre cada M_i construyamos una base ortonormal $\mathcal{B}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Puesto que los $E(\delta_i)$ son proyecciones ortogonales, es decir, $M_i \perp M_j$ si $i \neq j$, resulta que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y, claramente, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\delta_i) \in \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$. Esto prueba la densidad de $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ en $(\mathcal{N}or(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

Suponga ahora que $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de proyecciones ortogonales de rango finito tal que $\lim_{n\to\infty} \|P_n x - x\| = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $\mathcal{N}_n$ constituido por todos aquellos operadores $N \in \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ que satisfacen la siguiente condición: existe una proyección ortogonal E de rango finito (dependiendo sobre N) tal que

(a) $EN = NE$,

(b) $\|P_n E P_n - P_n\| < n^{-1}$, y

(c) $\sigma(N|_{E(\mathcal{H})})$ y $\sigma(N|_{(I-E)(\mathcal{H})})$ son disjuntos.

Afirmamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\mathcal{N}_n$ *es denso en* $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathcal{N}or(\mathcal{H})$. Veamos que N se deja aproximar por operadores de $\mathcal{N}_n$. Sin per generalidad, podemos suponer, por lo probado en (1), que $N \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, es decir, suponga que,

$$Nx \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i, \qquad x \in \mathcal{H},$$

donde $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$Q_k x \;=\; \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Puesto que $Q_k \xrightarrow{s} I$ y sabiendo que la bola unitaria de $P_n(\mathcal{H})$ es compacta, se sigue que $Q_k|_{P_n(\mathcal{H})} \xrightarrow{\|\cdot\|} I|_{P_n(\mathcal{H})}$. En particular, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P_n Q_{k_0} P_n - P_n\| \;=\; \Big\|P_n\Big(Q_{k_0}|_{P_n(\mathcal{H})} - I|_{P_n(\mathcal{H})}\Big)P_n\Big\| \;\leq\; \big\|Q_{k_0}|_{P_n(\mathcal{H})} - I|_{P_n(\mathcal{H})}\big\| \;<\; \frac{1}{n}.$$

Definiendo $E := Q_{k_0}$, vemos que E satisface (b) y, evidentemente, también (a). Queda por establecer (c), es decir, que $\sigma(N|_{E(\mathcal{H})})$ y $\sigma(N|_{(I-E)(\mathcal{H})})$ son disjuntos. Es claro que estos dos conjuntos son, respectivamente, $\{\lambda_i : i = 1, \ldots, k_0\}$ y $\overline{\{\lambda_i : i > k_0\}}$ y, no necesariamente, disjuntos; pero si no lo son, existe un operador diagonal N', arbitrariamente próximo a N, de la forma

$$N'x \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i' \langle x, e_i \rangle e_i \qquad x \in \mathcal{H},$$

donde $\lambda_i' = \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, k_0$ y tal que $\{\lambda_i : i = 1, \ldots, k_0\} \cap \overline{\{\lambda_i' : i > k_0\}} = \varnothing$. En efecto, escoja λ_i' con $i > k_0$ de modo que $|\lambda_i' - \lambda_i| < \varepsilon$ y $|\lambda_i' - \lambda_j| > \delta(\varepsilon) > 0$ para $j = 1, \ldots, k_0$. Entonces $\|N - N'\| < \varepsilon$. Esto prueba que E satisface (c) y, por consiguiente, $\mathcal{N}_n$ es denso en $(\mathcal{N}or(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

(3) $\mathcal{N}_n$ *es abierto en* $(\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

Sea $N \in \mathcal{N}_n$ y sea E una proyección de rango finito, digamos k, que cumpla $(a), (b)$ y (c). Entonces $N|_{E(\mathcal{H})} : E(\mathcal{H}) \to E(\mathcal{H})$ es un operador normal sobre un espacio de dimensión finita k y, gracias al Teorema Espectral para tales operadores (véase la página 438), sabemos que $E(\mathcal{H})$ posee una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ compuesta sólo de autovectores de $N|_{E(\mathcal{H})}$. Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ con $1 \leq m \leq k$, el conjunto de los autovalores distintos correspondientes a los autovectores $v_1, \ldots, v_k$. Entonces $\sigma(N|_{E(\mathcal{H})}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Si se define $K = \sigma(N|_{(I-E)(\mathcal{H})})$ resulta, por (c), que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \cap K = \varnothing$. Escojamos ahora subconjuntos abiertos y disjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subseteq \Omega_1$ y $K \subseteq \Omega_2$ y construyamos dos contornos orientados Γ_1 y Γ_2 en Ω_1 y Ω_2, respectivamente, que encierren a $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ y K, respectivamente. Se sigue del Cálculo Funcional de Dunford (véase, por ejemplo, [387], Chapter 10) que

$$N \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda I - N}, \qquad E \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda I - N}, \qquad I - E \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{d\lambda}{\lambda I - N}$$

$$N|_{E(\mathcal{H})} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda I - N_{E(\mathcal{H})}}, \qquad \text{y} \qquad N|_{(I-E)(\mathcal{H})} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda I - N_{(I-E)(\mathcal{H})}}.$$

Se conoce que, si $N' \in \mathcal{N}or(\mathcal{H})$ está suficientemente próximo (en la norma) a N, entonces $\sigma(N')$ se queda en el interior de $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ([387], Theorem 10.20, p. 239). De esto se sigue que para tales N', las fórmulas precedentes siguen siendo válidas con N' en lugar de N pero con los mismos entornos Γ_1, Γ_2. Por consiguiente,

$$N' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \frac{\lambda}{\lambda I - N'}\,d\lambda$$

siempre que $\|N' - N\|$ sea lo suficientemente pequeño para que $\sigma(N')$ esté completamente contenido en el interior de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Definamos la proyección E' por

$$E' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda I - N'}.$$

Entonces $I - E' = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{d\lambda}{\lambda I - N'}$ y

$$N'|_{E(\mathcal{H})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda I - N'_{E'(\mathcal{H})}}, \qquad N'|_{(I-E')(\mathcal{H})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda I - N'_{(I-E')(\mathcal{H})}},$$

mientras que

$$\sigma\Big(N'|_{E(\mathcal{H})}\Big) \subseteq \mathrm{int}(\Gamma_1) \qquad \text{y} \qquad \sigma\Big(N'|_{(I-E')(\mathcal{H})}\Big) \subseteq \mathrm{int}(\Gamma_2). \tag{1}$$

Veamos ahora E' satisface $(a),(b)$ y (c) para N' en lugar de N siempre que N' esté muy próximo a N. En efecto, puesto que tomar inverso es una aplicación continua, resulta que

$$N' \to N \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda I - N'} \to \frac{1}{\lambda I - N} \;\; \text{uniformemente sobre } \Gamma_1,$$

de modo que $E' \to E$ en norma. Claramente E' conmuta con N' por lo que (a) se satisface. Nótese que si $\|E' - E\|$ es lo suficientemente pequeño, también se cumple que $\|P_n E' P_n - P_n\| < 1/n$ y se tiene (b). Observe que, gracias a (1), (c) también se cumple. Falta por ver que E' es de rango finito. Pero esto es consecuencia del Lema 2.2.36 ya que si $\|E' - E\| < 1$, entonces $rank(E') = rank(E) < \infty$. Esto prueba que $N' \in \mathcal{N}_n$ siempre que $\|N - N'\|$ sea lo suficientemente pequeño.

(4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Sea $N \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$ y sea F la proyección ortogonal sobre el subespacio M generado por los autovectores de N. Bastará con demostrarse que $F = I$ ya que, en este caso, $M = \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ posee una base ortonormal formada por los autovectores de N, es decir, $N \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Fijemos entonces $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $N \in \mathcal{N}_n$, existe una proyección de rango finito E_n satisfaciendo las condiciones $(a),(b)$ y (c). Como el operador normal $N|_{E_n(\mathcal{H})}$ sobre el subespacio de dimensión finita $E_n(\mathcal{H})$ es diagonal, resulta que $E_n(\mathcal{H})$ posee una base formada por autovectores de N, por lo que $E_n(\mathcal{H}) \subseteq M = F(\mathcal{H})$ y, así, $F \geq E_n$. De aquí se sigue que

$$P_n F P_n \geq P_n E_n P_n \tag{2}$$

ya que

$$\langle P_n F P_n x, x\rangle = \langle F P_n x, P_n x\rangle \geq \langle E_n P_n x, P_n x\rangle = \langle P_n E_n P_n x, x\rangle$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. También (b) implica que

$$\Big\langle \Big(P_n - P_n F P_n\Big)x, x\Big\rangle \leq \|P_n - P_n E_n P_n\|\,\|x\|^2 \leq \frac{1}{n}\|x\|^2 = \frac{1}{n}\langle x, x\rangle$$

y, por consiguiente,

$$\langle P_nFP_nx,x\rangle \ \geq\ \langle P_nx,x\rangle - \frac{1}{n}\langle x,x\rangle$$

lo que a su vez implica que

$$P_nE_nP_n \ \geq\ P_n - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Combinando (1) y (2) producen

$$P_nFP_n \ \geq\ P_nE_nP_n \ \geq\ P_n - \frac{1}{n},$$

es decir,

$$\langle FP_nx,P_nx\rangle \ \geq\ \langle P_nx,x\rangle - \frac{1}{n}\langle x,x\rangle \quad \text{para todo } x\in\mathcal{H}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty}\|P_nx-x\|=0$ para cada $x\in\mathcal{H}$, se sigue, tomando límite cuando $n\to\infty$ en la desigualdad anterior, que

$$\langle Fx,x\rangle \ \geq\ \langle x,x\rangle \quad \text{para todo } x\in\mathcal{H},$$

esto es, $F\geq I$, de donde se sigue que $F=I$. En efecto, si ocurre que $F\neq I$, entonces $M\subsetneqq\mathcal{H}$, y así, para cualquier $0\neq x\in M^{\perp}$, tendríamos que $Fx=0$ y, por lo tanto, $0<\langle x,x\rangle\leq\langle Fx,x\rangle=\langle 0,x\rangle=0$. Esta contradicción establece que $F=I$. Con esto hemos terminado la prueba del teorema. ■

Un resultado de D. Herrero nos dice que, similarmente, el conjunto de todos los operadores triangulares definidos sobre $\mathcal{H}$ es residual en el espacio de los operadores quasi-triangulares (ver, por ejemplo [162]).

‖ ► **Abundancia de Operadores Irreducibles**.

El operador $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que es **reducible** si existe un subespacio lineal cerrado no trivial que reduce a T. Denotemos por $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores reducibles sobre $\mathcal{H}$. Recordemos que, por el Corolario 2.2.48, $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$. Un operador $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **irreducible** si los únicos subespacios que reducen a T son $\{0\}$ y $\mathcal{H}$. Esta definición de irreducibilidad de T es equivalente a afirmar que las únicas proyecciones ortogonales que conmutan con T son 0 e I. Denotemos por $\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores irreducibles sobre $\mathcal{H}$. El objetivo central de esta sección es demostrar que el conjunto de los operadores irreducibles constituye un G_δ-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, un resultado que, como ya habíamos anunciado, fue demostrado por primera vez por P. R. Halmos [203]. Por el Teorema de Categoría de Baire tenemos que $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$ es un conjunto de primera categoría que contiene, por el Corolario 2.2.48, a $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$. Lo que resulta interesante es que $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$ también es norma-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, un resultado demostrado por Dan Voiculescu [434] en respuesta a una pregunta formulada por Halmos.

Veamos ahora una clase importante de operadores irreducibles. Sean $\{e_n : n=0,1,2,\ldots\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\mathbb{C}$. El operador $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definido por

$$Se_n \ =\ \lambda_n e_{n+1} \qquad \text{para todo } n=0,1,2,\ldots$$

se llama un **shift unilateral con peso**. Observe que $S=AD$, donde $De_n=\lambda_ne_n$ es el operador diagonal y $Ae_n=e_{n+1}$ es el shift unilateral y el adjunto S^* de S viene dado por

$$S^*e_0 \ =\ 0 \qquad \text{y} \qquad S^*e_n \ =\ \overline{\lambda}_{n-1}e_{n-1} \qquad \text{para todo } n=1,2,\ldots.$$

Es fácil verificar que todo operador shift unilateral es irreducible. En general, todo operador shift unilateral con peso distinto de cero (esto significa que $\lambda_n\neq 0$ para todo $n=0,1,2,\ldots$) es irreducible. Más aun, Noboru

Suzuki ([418]) demuestra que *todo operador T similar a un operador shift unilateral con peso distinto de cero es irreducible*. Recordemos que un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es **similar** a un operador $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si existe un operador invertible U sobre $\mathcal{H}$ tal que $B = U^{-1}AU$.

La siguiente observación nos será de utilidad en el próximo resultado. Recordemos, Teorema 2.2.164, que cualquier operador normal $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ puede ser aproximado por un operador diagonal. En particular, si nuestro operador N es autoadjunto, entonces el operador diagonal que lo aproxima se puede elegir autoadjunto. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y suponga que N es autoadjunto. Sea $D = D_0 + iD_1$ un operador diagonal tal que $\|N - D\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon > \|N-D\| &= \sup_{\|x\|=\|y\|\le 1} \big|\big\langle (N-D)x, y\big\rangle\big| = \sup_{\|x\|=\|y\|\le 1} \big|\big\langle (N-D_0)x, y\big\rangle - i\big\langle D_1x, y\big\rangle\big| \\ &\ge \sup_{\|x\|\le 1} \big|\big\langle (N-D_0)x, x\big\rangle - i\big\langle D_1x, x\big\rangle\big| \ge \sup_{\|x\|\le 1} \big|\big\langle (N-D_0)x, x\big\rangle\big| \\ &= \|N - D_0\|.\end{aligned}$$

Teorema 2.2.165 (Halmos). *$(\mathcal{I}rre(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es un G_δ-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Prueba. Veamos en primer lugar que $\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H})$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\varepsilon > 0$. Recordemos que $T = A_1 + iA_2$, donde

$$A_1 = \frac{T+T^*}{2} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \frac{T-T^*}{2i}$$

son operadores autoadjuntos. Por la observación anterior, existe un operador diagonal autoadjunto, digamos $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, tal que

$$\|D_0 - A_1\| < \varepsilon/4.$$

Puesto que $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \bigcup_{\mathcal{B}\in BO(\mathcal{H})} \mathcal{D}iag(\mathcal{B})$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ tal que $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Sea $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ la diagonal de D_0. Ya que algunos de los λ_n pueden estar repetidos, elijamos otro operador diagonal autoadjunto $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ de modo que todos sus autovalores sean distintos dos a dos y que cumpla, además, que

$$\|D_1 - D_0\| < \varepsilon/4.$$

Finalmente, consideremos la matriz de A_2 con respecto a la base $\mathcal{B}$. Esta matriz puede tener algunas de sus entradas $\langle A_2e_n, e_m\rangle$ igual a 0. Claramente podemos construir, a partir de A_2, un operador autoadjunto D_2 de modo que $\langle D_2e_n, e_m\rangle$ sea diferente de 0 para todo $m, n \in \mathbb{N}$ (de hecho, existen muchos operadores con esa propiedad) y tal que

$$\|D_2 - A_2\| < \varepsilon/2.$$

Pongamos $D = D_1 + iD_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\|D - T\| &\le \|D_1 - A_1\| + \|D_2 - A_2\| \\ &\le \|D_1 - D_0\| + \|D_0 - A_1\| + \|D_2 - A_2\| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

y $D \in \mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H})$. Veamos esto último. Afirmamos que si $\mathcal{M}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ que reduce a D, entonces $\mathcal{M}$ reduce también a D_1 y a D_2. En efecto, sea P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$. Entonces $(D_1 + iD_2)P = P(D_1 + iD_2)$ o, lo que es lo mismo, $D_1P + iD_2P = PD_1 + iPD_2$. Tomando adjuntos a ambos lados de la igualdad anterior resulta que $D_1P - iD_2P = PD_1 - iPD_2$. Sumando y restando estas igualdades se llega a la conclusión que $PD_1 = D_1P$ y $PD_2 = D_2P$, es decir, $\mathcal{M}$ reduce a D_1 y D_2. De las propiedades que poseen los operadores diagonales (véase la propiedad (8), página 442), sabemos que los subespacios invariantes de D_1 son los subespacios lineales cerrados generados por subcolecciones de $\mathcal{B}$. Se sigue entonces que $\mathcal{M} = \overline{[\{e_n : n \in J\}]}$ para algún $J \subseteq \mathbb{N}$, y como $D_2(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ resulta que $J = \mathbb{N}$. Por esto $\mathcal{M} = \{0\}$ o $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. Esto prueba que D es irreducible.

Falta demostrar que $\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H})$ es un G_δ. Como antes, denotemos por $\mathcal{A}\mathrm{dj}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$ y sea

$$\mathcal{A}_1 \,=\, \big\{A \in \mathcal{A}\mathrm{dj}(\mathcal{H}) \,:\, 0 \leq A \leq I\big\}.$$

Puesto que $\mathcal{A}_1$ es τ_{wot}-cerrado en $B(\mathcal{H})_1$, podemos invocar el Teorema 2.2.154 para concluir que $\mathcal{A}_1$ es τ_{wot}-compacto y metrizable. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}(I) := \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$ de todos los operadores escalares sobre $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 \setminus \mathbb{C}(I)$. Observe que como $(\mathcal{A}_1, \tau_{\text{wot}})$ posee una base numerable (por ser un compacto metrizable) y ya que $\mathbb{C}(I)$ es claramente τ_{wot}-cerrado en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, resulta entonces que $(\mathcal{A}_0, \tau_{\text{wot}})$ es un conjunto localmente compacto con base numerable, de donde se concluye, por el Teorema 1.4.17, que $(\mathcal{A}_0, \tau_{\text{wot}})$ es $\mathcal{K}_\sigma$-localmente compacto. Sea $(K_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos τ_{wot}-compactos de $\mathcal{A}_0$ tal que

$$\mathcal{A}_0 \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Demostrar que $(\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es un G_δ es equivalente a demostrar que $(\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es un F_σ. Sea entonces

$$\widehat{K}_n \,=\, \big\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,:\, \exists\, R \,\in K_n \text{ tal que } TR = RT\big\}.$$

Afirmamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widehat{K}_n \,=\, \mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}).$$

En efecto, si $T \in \mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$, entonces existe un subespacio lineal cerrado no trivial $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ que reduce a T. Si R es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$, resulta que $0 \leq R \leq I$ y $TR = RT$, de donde se sigue que $T \in \bigcup_{n=1}^\infty \widehat{K}_n$ pues $R \notin \mathbb{C}(I)$. Para ver la otra inclusión sea $T \in \widehat{K}_n$. Esto significa que $TR = RT$ para algún $R \in K_n$. El Teorema Espectral implica que $TE(\delta) = E(\delta)T$ para cualquier $E(\delta)$, donde E es la medida espectral de R. Puesto que $R \notin \mathbb{C}(I)$, existe un conjunto de Borel δ_0 tal que $E(\delta_0) \notin \{0, I\}$. Por esto, $\mathcal{M} := E(\delta_0)(\mathcal{H})$ reduce a T y, así, $T \in \mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$.

La prueba finalizará una vez que logremos demostrar que cada $\widehat{K}_n$ es norma-cerrado. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $(T_k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión en $\widehat{K}_n$ convergiendo en la norma a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escojamos $R_k \in K_n$ tal que $T_k R_k = R_k T_k$. Puesto que K_n es un τ_{wot}-compacto metrizable, podemos asumir (en caso contrario pasamos a una subsucesión) que $R_k \xrightarrow{\tau_{\text{wot}}} R$ para algún $R \in K_n$. En particular, $R \notin \mathbb{C}(I)$. Afirmamos que $TR = RT$. En efecto, teniendo en cuenta que la sucesión $(R_k)_{k=1}^\infty$ está acotada (por 1), entonces para todo $x, y \in \mathcal{H}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\big|\langle T_k R_k x, y\rangle - \langle TRx, y\rangle\big| \;&\leq\; \big|\langle T_k R_k x, y\rangle - \langle TR_k x, y\rangle\big| \,+\, \big|\langle TR_k x, y\rangle - \langle TRx, y\rangle\big| \\
&\leq\; \|\,T_k - T\,\|\,\|x\|\,\|y\| \,+\, \big|\langle (R_k - R)x, T^* y\rangle\big| \;\to\; 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $T_k R_k \xrightarrow{\tau_{\text{wot}}} TR$. Similarmente, $R_k T_k \xrightarrow{\tau_{\text{wot}}} RT$, de donde se deduce que $TR = RT$ y, así, $T \in \widehat{K}_n$. Con esto queda demostrado que $\widehat{K}_n$ es norma-cerrado y, por lo tanto, $(\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es un F_σ. ■

El siguiente resultado establece que $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es, en realidad, un conjunto topológicamente muy pequeño en la topología de la norma uniforme de operadores.

Corolario 2.2.49. $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ *es norma-cerrado y nunca-denso en* $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|\big)$.

Prueba. Ya hemos visto que $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es norma-cerrado en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. He aquí otra manera de verlo. Consideremos la aplicación $\varphi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada por $\varphi(T) = TT^* - T^*T$. Es una tarea no tan difícil ver que φ es norma-continua y, por lo tanto, el conjunto $\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \varphi(T) = 0\} = \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es norma-cerrado. Por otro lado, como un conjunto norma-cerrado es nunca-denso si, y sólo si, su complemento es norma-denso, entonces todo lo que tenemos que hacer para finalizar la prueba es demostrar que el complemento de $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es norma-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Para ver esto último recordemos que, por el Corolario 2.2.48, $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$, de donde obtenemos que

$$\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H}) \;=\; \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H}).$$

Pero como un operador irreducible puede ser normal si, y sólo si, el espacio tiene dimensión 0 o 1, y puesto que la dimensión de $\mathcal{H} > 1$, resulta que el complemento de $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es norma-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ya que $\mathcal{I}\mathrm{rre}(\mathcal{H})$ es un conjunto norma-denso de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gracias al teorema anterior. La prueba es completa. ■

Por el Teorema 2.2.165, sabemos que $(\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ es un F_σ, pero ¿puede ser dicho conjunto cerrado? Si $\dim(\mathcal{H}) < +\infty$, entonces $(\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ no sólamente es cerrado sino también nunca-denso (véase, Halmos [203], Proposition 2), sin embargo,

Teorema 2.2.166 (Halmos). *Si* $\dim(\mathcal{H}) = +\infty$, *entonces* $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$ *no es norma-cerrado en* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Prueba. Es claro que cualquier operador de rango finito sobre $\mathcal{H}$ es reducible ($M = \mathrm{Rang}(T)^\perp \cap \mathrm{Ker}(T)$ reduce a T), de modo que cualquier operador compacto (siendo el limite uniforme de operadores de rango finito, Corolario 2.2.47), está en la norma-clausura de $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$, pero es fácil construir operadores compactos que son irreducibles: por ejemplo, considere un operador de la forma $T = D_1 + iD_2$, donde D_1 y D_2 son operadores compactos, D_1 es, además, un operador diagonal autoadjunto con todos los elementos de su diagonal distintos dos a dos y D_2 es autoadjunto con $\langle D_2 e_n, e_m\rangle \neq 0$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. El argumento usado en la prueba del Teorema 2.2.165 establece que T es un operador compacto irreducible. ■

Halmos, en [203], se pregunta si el conjunto $\mathcal{R}\mathrm{ed}(\mathcal{H})$ puede ser norma-denso en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Voiculescu demostró, por medio de un argumento muy ingenioso, que la respuesta es afirmativa estableciendo para ello un resultado general acerca de perturbaciones compactas de representaciones de C^*-álgebras separables (véase, [434] o también [105], p. 237).

2.2.28. ‖ ► Abundantes operadores que poseen un vector cíclico en común

Como antes, $\mathcal{H}$ representa un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita, mientras que $B(\mathcal{H})_1$ es la bola unitaria cerrada de $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$, esto es,

$$B(\mathcal{H})_1 \;=\; \big\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \; \|T\| \leq 1\big\}.$$

A cada uno de los elementos de $B(\mathcal{H})_1$ lo llamaremos una **contracción** o un **operador contractivo**. Ya hemos visto que $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{wot}})$ es un compacto metrizable, donde la métrica d_ω que genera a la τ_{wot}-topología viene definida por

$$d_\omega(T,S) \;=\; \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\big|\langle Tx_i, x_j\rangle - \langle Sx_i, x_j\rangle\big|}{2^{i+j}} \quad \text{para } T,S \in B(\mathcal{H})_1$$

siendo $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en S_1 que es norma-densa en $\mathcal{H}$. En particular, $(B(\mathcal{H})_1, d_\omega)$ es un espacio métrico completo y separable.

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Recordemos que un vector $x \in \mathcal{H}$ se llama un vector cíclico para T si el subespacio lineal generado por la órbita de x respecto a T, $[\mathrm{Orb}(T,x)]$, es norma-denso en $\mathcal{H}$. Denotemos, como antes, al conjunto de todos los vectores cíclicos de T por $\mathcal{VC}(T)$.

Lema 2.2.38. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto arbitrario de vectores en la esfera unitaria de $\mathcal{H}$. Dado $\varepsilon > 0$ y vectores en $\mathcal{H}$, $x \neq 0$ y $z \neq$, entonces existe un operador $S \in B(\mathcal{H})_1$ tal que*

$$\|(T-S)x_i\| < \varepsilon \quad \textit{para } i = 1,\dots,n \qquad y \qquad z \in [\mathrm{Orb}(S,x)]$$

Prueba. Sea P la proyección ortogonal sobre $[\{x_1,\dots,x_n\}]$, el subespacio lineal cerrado de dimensión finita generado por $\{x_1,\dots,x_n\}$. Puesto que $Px_i = x_i$ para cada $i = 1,\dots,n$, el operador $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definido por $R = TP$ satisface la igualdad

$$Rx_i = Tx_i \quad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

Por otro lado, como $\dim\big(\mathrm{Rang}(R)\big) < \infty$, los vectores $x, Rx, R^2x, \dots$ son linealmente dependientes. Escojamos ahora el entero positivo más grande, llamémoslo k, para el cual los vectores $x, Rx, \dots, R^kx$ son linealmente independientes. De esto se sigue que el vector $R^{k+1}x \in [\{x, Rx, \dots, R^kx\}]$. Escojamos un funcional lineal $x^* \in \mathcal{H}^*$, usando el Teorema de Hahn-Banach, de modo tal que

$$x^*\big(R^kx\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad x^*\big(R^jx\big) = 0 \quad \text{para } j = 0,1,\dots,k-1.$$

Seleccionemos ahora un número real δ tal que $0 < \delta < \varepsilon/(2\|x^*\|\|z\|)$ y defínase el operador $S_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por

$$S_0v = Rv + \delta x^*(v)z \quad \text{para todo } v \in \mathcal{H}.$$

Nótese que

$$\|(S_0-R)x_i\| < \varepsilon/2 \quad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

Además, con esta definición de S_0 resulta que

$$S_0^jx = R^jx \quad \text{para } j = 1,\dots,k \qquad \text{y} \qquad S_0^{k+1}x = R^{k+1}x + \delta z$$

lo que a su vez muestra que $z \in [\{x, S_0x, \dots, S_0^{k+1}\}]$. Finalmente, si definimos $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por

$$S = \frac{1}{1+\varepsilon/2}\cdot S_0$$

tendremos que aun $z \in [\{x, Sx, \dots, S^{k+1}, \dots\}]$ y, además, $\|(S-S_0)x_i\| < \varepsilon/2$ para $i = 1,\dots,n$. Por último,

$$\begin{aligned}\|(S-T)x_i\| &< \|(S-S_0)x_i\| + \|(S_0-R)x_i\| + \|(R-T)x_i\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + 0 \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

(■)

Teorema 2.2.167 (Zorin). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $x_0 \in \mathcal{H}$ con $x_0 \neq 0$. Entonces el conjunto de todos los operados contractivos con un vector cíclico en común,*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x_0) := \big\{T \in B(\mathcal{H})_1 : x_0 \in \mathcal{VC}(T)\big\},$$

es un G_δ-denso en $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$.

Prueba. Fijemos una base numerable $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ para la topología de la norma sobre $\mathcal{H}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto
$$G_n \;=\; \big\{T \in B(\mathcal{H})_1 : \,[\mathrm{Orb}(T,x_0)] \cap O_n \neq \varnothing\big\}.$$
Observe que si $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x_0)$, entonces $x_0 \in \mathcal{VC}(T)$ por lo que $[\mathrm{Orb}(T,x_0)]$ es denso en $\mathcal{H}$. En particular, $[\mathrm{Orb}(T,x_0)] \cap O_n \neq \varnothing$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a decir que $T \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que
$$\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x_0) \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Veamos ahora que cada G_n es τ_{sot}-denso en $B(\mathcal{H})_1$. En efecto, fijemos $T \in B(\mathcal{H})_1$ y sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ un subconjunto de S_1 que es norma-denso en $\mathcal{H}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea x un vector $\neq 0$ en $\mathcal{H}$. Si elegimos un vector $z \in O_n$ con $z \neq 0$, entonces el Lema 2.2.38 nos garantiza la existencia de un operador $S \in B(\mathcal{H})_1$ tal que $\|(T-S)x_i\| < \varepsilon$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y tal que $z \in [\mathrm{Orb}(S,x_0)]$. En particular, $z \in [\mathrm{Orb}(S,x_0)] \cap O_n$, con lo cual queda establecido que $S \in G_n$ y así, G_n es τ_{sot}-denso en $B(\mathcal{H})_1$.

Para demostrar que G_n es τ_{sot}-abierto en $B(\mathcal{H})_1$, sea $T \in G_n$. Entonces $[\mathrm{Orb}(T,x_0)] \cap O_n \neq \varnothing$. Tomemos un vector arbitrario, pero fijo, $z \in [\mathrm{Orb}(T,x_0)] \cap O_n$. Puesto que $z \in [\mathrm{Orb}(T,x_0)]$ a tal vector lo podemos representar en la forma $z = \sum_{j=0}^{N} a_j T^j x_0 \in O_n$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y ciertos números complejos $a_1, \ldots, a_N$. Consideremos ahora el τ_{sot}-entorno abierto de T generado por los vectores $x_1 = x_0$, $x_2 = Tx_0, \ldots, x_{N+1} = T^N x_0$, esto es,
$$V(T, x_1, \ldots, x_{N+1}, \varepsilon) = \big\{R \in B(\mathcal{H})_1 : \,\|(T-R)x_i\| < \varepsilon,\; i = 1, 2, \ldots, N+1\big\}.$$
Entonces, el conjunto $V := \{R \in V(T, x_1, \ldots, x_{N+1}, \varepsilon) : z \in [\mathrm{Orb}(R,x_0)]\}$ es no vacío y, además, está contenido en G_n. En efecto, por el Lema 2.2.38, existe $R \in B(\mathcal{H})_1$ tal que $z \in [\mathrm{Orb}(R,x_0)]$ y $\|(R-T)x_i\| < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \ldots, N+1$, lo cual nos dice que $R \in V$. El hecho de que también $z \in O_n$, nos asegura que $R \in G_n$, quedando demostrado de este modo que el conjunto τ_{sot}-abierto V está contenido en G_n. Con lo anterior ha quedado establecido que cada G_n es τ_{sot}-abierto denso en $B(\mathcal{H})_1$ y como $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}})$ es un espacio completamente metrizable, resulta, por el Teorema de Categoría de Baire, que $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x_0)$ es un G_δ-denso en $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$. ■

El siguiente resultado, el cual es el objetivo principal en esta sección, es consecuencia del anterior.

Teorema 2.2.168 (Zorin, [455]). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y suponga que D es un subconjunto de $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ que es numerable y denso en $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto*
$$\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D) \;:=\; \big\{T \in B(\mathcal{H})_1 : \,D \subseteq \mathcal{VC}(T)\big\}$$
es un G_δ-denso en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}})$. Más aun, para cada $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D)$, el conjunto $\mathcal{VC}(T)$ es residual en la norma-topología de $\mathcal{H}$.

Prueba. Por el Teorema 2.2.167, para cada $x \in D$, el conjunto $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x)$ es un G_δ-denso en $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$. Como $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$ es un espacio de Baire y D es numerable, entonces el Teorema de Categoría de Baire, Teorema 1.8.1, página 47, nos revela que
$$\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D) \;=\; \bigcap_{x \in D} \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(x)$$
también es un G_δ-denso en $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$.

Para demostrar la segunda parte, sea $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D)$ y fijemos un conjunto denso numerable $\{x_1, x_2, \ldots\}$ en $\mathcal{H}$. Para cada par de enteros positivos j, m definamos

$$G_{j,m} \ = \ \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \left\| x_j - \sum_{i=0}^{n} a_i T^i x \right\| < 1/m \ \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Afirmamos que

$$\mathcal{VC}(T) \ = \ \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} G_{j,m}.$$

En efecto, sea $x \in \mathcal{VC}(T)$. Entonces $[\mathrm{Orb}(T,x)]$ es norma-denso en $\mathcal{H}$ y, así, para cualquier x_j y cualquier $m \in \mathbb{N}$, podemos hallar un $y \in [\mathrm{Orb}(T,x)]$ que aproxima a x_j a menos de $1/m$, es decir, existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tal que $y = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i x$ y

$$\left\| x_j - \sum_{i=0}^{n} a_i T^i x \right\| \ < \ 1/m.$$

Esto prueba nuestra afirmación. Por otro lado, como $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D)$ entonces $T \in \mathcal{L}_{C}(x)$ para todo $x \in D$, lo cual significa que $x \in \mathcal{VC}(T)$ para todo $x \in D$, es decir, $D \subseteq \mathcal{VC}(T)$. Puesto que D es norma-denso en $\mathcal{H}$, tenemos que $\mathcal{VC}(T)$ también es norma-denso en $\mathcal{H}$. En particular, $G_{j,m}$ es norma-denso en $\mathcal{H}$ para todo $j, m \in \mathbb{N}$. Para ver que cada $G_{j,m}$ es abierto en $\mathcal{H}$, sólo tenemos que observar que como T y la norma de $\mathcal{H}$ son aplicaciones continuas, entonces $G_{j,m}$ es abierto. Que $\mathcal{VC}(T)$ sea residual en la norma-topología de $\mathcal{H}$ es consecuencia del Teorema de Categoría de Baire. ■

Comentario Adicional 2.2.31 Si en el Teorema 2.2.168, en lugar de considerar la topología fuerte de operadores se trabaja con la topología débil de operadores, se obtiene como conclusión que $\mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D)$ es un G_δ-denso en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{wot}})$. Más aun, para cada $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{C}}(D)$, el conjunto $\mathcal{VC}(T)$ es residual en la norma-topología de $\mathcal{H}$ (véase, [455], Theorem 3).

Denote por $B(\mathcal{H})_r$ la bola cerrada con centro en el origen y radio $r > 1$ en $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$. En [455], Zorin obtiene, entre otros, el siguiente resultado:

Teorema 2.2.169 (Zorin). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea D un subconjunto de $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ que es numerable y denso en $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(D) \ := \ \left\{ T \in B(\mathcal{H})_r : \ D \subseteq \mathcal{HC}(T) \right\}$$

es un G_δ-denso en $(B(\mathcal{H})_r, \tau_{\mathrm{sot}})$. Más aun, para cualquier $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(D)$, el conjunto $\mathcal{VC}(T)$ es residual en la norma-topología de $\mathcal{H}$.

Observe que, por el Teorema 2.2.140, página 415, si T es hipercíclico, entonces el conjunto $\mathcal{HC}(T)$ es un G_δ-denso en norma-topología de $\mathcal{H}$, por lo que la conclusión de que el conjunto $\mathcal{VC}(T)$ es residual en la norma-topología de $\mathcal{H}$ para cada $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(D)$ en el resultado anterior es inmediata ya que $\mathcal{HC}(T) \subseteq \mathcal{VC}(T)$.

2.2.29. ‖ ► Abundantes operadores unitarios

Los operadores unitarios forman una subclase natural e importante de los operadores contractivos. Tales operadores poseen muy buenas propiedades que no son compartidas por la totalidad de los operadores contractivos. En esta sección probaremos que tales operadores, los unitarios, son "abundantes" en el conjunto de todos los operadores contractivos. Como siempre, $\mathcal{H}$ denota un espacio de Hilbert complejo, de dimensión infinita y separable. Recordemos que un elemento $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es llamado un **operador isométrico** si

$$\langle Ux, Uy\rangle \;=\; \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Observe que de la igualdad anterior se concluye que $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por lo que U resulta ser inyectivo pero no necesariamente sobreyectivo. Si U es un operador isométrico y, además, sobreyectivo, entonces se dice que U es un **operador unitario**. Por el Teorema de la Aplicación Inversa, si U es un operador unitario, entonces U^{-1} es un operador lineal continuo que también resulta ser unitario. El ejemplo estándar de un operador isométrico que no es unitario es "**el shift unilateral**", es decir, el operador $S : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$S(a_1, a_2, \ldots) \;=\; (0, a_1, a_2, \ldots).$$

Es claro que S es una isometría que no es sobreyectiva, es decir, S no es un operador unitario. Es fácil ver que un operador $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es

(1) *isométrico* si, y sólo si, $U^*U \;=\; I$.

(2) *unitario* si, y sólo si, $U^*U \;=\; UU^* \;=\; I$, lo cual es equivalente a afirmar que $U^{-1} = U^*$.

Denotemos por $\mathcal{U}_{\mathrm{ni}}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{I}_{\mathrm{so}}(\mathcal{H})$, respectivamente, el conjunto de todos los operadores unitarios y de todos los operadores isométricos sobre $\mathcal{H}$. Se tiene que

$$\mathcal{U}_{\mathrm{ni}}(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathcal{I}_{\mathrm{so}}(\mathcal{H}) \;\subseteq\; B(\mathcal{H})_1.$$

Recordemos que cualquier elemento en $B(\mathcal{H})_1$ es llamado un **operador contractivo**. Se puede demostrar que $\mathcal{U}_{\mathrm{ni}}(\mathcal{H})$ es un grupo bajo la operación de composición de operadores y que todo $U \in \mathcal{U}_{\mathrm{ni}}(\mathcal{H})$ preserva tanto la estructura algebraica así como la estructura topológica de $\mathcal{H}$, dicho de otra manera, ni U ni U^* cambian la geometría de $\mathcal{H}$. De igual forma, si U es un operador unitario y $k > 0$, entonces kU es unitario.

Recordemos que $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{wot}}\big)$ es un compacto metrizable, donde la métrica d_{wot} que genera a la τ_{wot}-topología viene definida por

$$d_{\mathrm{wot}}(T,S) \;=\; \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\big|\langle Tx_i, x_j\rangle - \langle Sx_i, x_j\rangle\big|}{2^{i+j}} \quad \text{para } T, S \in B(\mathcal{H})_1$$

siendo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S_1 que es norma-densa en $\mathcal{H}$. En particular, $(B(\mathcal{H})_1, d_{\omega})$ es un espacio métrico completo y separable. De igual forma, el conjunto $\big(\mathcal{I}_{\mathrm{so}}(\mathcal{H}), \tau_{\mathrm{sot}}\big)$ es un espacio métrico completo con respecto a la métrica

$$d_{\mathrm{sot}}(T,S) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|Tx_i - Sx_i\|}{2^{i+j}} \quad \text{para } T, S \in \mathcal{I}_{\mathrm{so}}(\mathcal{H}),$$

siendo, de nuevo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S_1 que es norma-densa en $\mathcal{H}$.

Observe que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una isometría no unitaria, entonces $\mathrm{Rang}(T)$ es cerrado y distinto de $\mathcal{H}$. En efecto, que $\mathrm{Rang}(T)$ sea distinto de $\mathcal{H}$ sigue del hecho de que T no es sobreyectivo. Suponga ahora que $y \in \overline{\mathrm{Rang}(T)}$ y escojamos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ tal que $\|Tx_n - y\| \to 0$. De aquí se sigue, usando el hecho de que T es una isometría, que $\|x_n\| = \|Tx_n\| \to \|y\|$ y, por lo tanto, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $B_{\mathcal{H}}$. Como $B_{\mathcal{H}}$ es débilmente-compacto (Corolario 2.2.44), existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que la seguiremos denotando del mismo modo, que converge débilmente a algún punto $x \in B_{\mathcal{H}}$. Más aun, $\|x\| = \|y\|$. Ahora bien, como $x_n \to x$ débilmente y $\|x_n\| \to \|x\|$, entonces $x_n \to x$ en la norma y la continuidad de T nos garantiza que $y = Tx \in \mathrm{Rang}(T)$ y termina la prueba.

Recordemos finalmente, que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces T es invertible si, y sólo si, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\alpha \| x \| \leq \| Tx \|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

El siguiente resultado es bien conocido (véase, por ejemplo, Halmos [202], Soluciones a los Problemas 224 y 225, p. 341):

Teorema 2.2.170. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces*

(a) $\overline{\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})}^{\rm sot} = \mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})$, *y*

(b) $\overline{\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})}^{\rm wot} = B(\mathcal{H})_1$.

Lo que deseamos demostrar en esta sección es la residualidad de $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ en los conjuntos anteriores. Para ello es necesario tener en cuenta los siguientes resultados adicionales pero sencillos.

Lema 2.2.39. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y suponga que $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T_n \xrightarrow{\rm wot} T$.*

(1) *Si $\| T_n x \| \leq \| Tx \|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T_n \xrightarrow{\rm sot} T$.*

(2) *Si tanto T, así como la sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, son isométrías, entonces $T_n \xrightarrow{\rm sot} T$.*

Prueba. (1). Puesto que $T = \tau_{\rm wot} - \text{lím}_{n\to\infty} T_n$, entonces $\langle T_n x - Tx, y\rangle \to 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, en particular, $\langle T_n x - Tx, Tx\rangle \to 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $\| T_n x \| \leq \| Tx \|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} \| T_n x - Tx \|^2 &= \langle T_n x - Tx, T_n x - Tx\rangle \\ &= \| T_n x \|^2 + \| Tx \|^2 - 2\text{Re}\langle T_n x, Tx\rangle \\ &\leq 2\| Tx \|^2 - 2\text{Re}\langle T_n x, Tx\rangle \\ &= 2\text{Re}\langle Tx - T_n x, Tx\rangle \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

(2). Usando el hecho de que tanto T_n así como T son isométricos, resulta que para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \| T_n x - Tx \|^2 &= \langle T_n x - Tx, T_n x - Tx\rangle \\ &= \| T_n x \|^2 + \| Tx \|^2 - 2\text{Re}\langle T_n x, Tx\rangle \\ &= 2\| x \|^2 - 2\text{Re}\langle T_n x, Tx\rangle \longrightarrow 2\| x \|^2 - 2\langle Tx, Tx\rangle = 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. ■

Estamos en posesión de los argumentos para demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.171 (Eisner, [149]). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces*

(1) $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ *es residual en* $\big(\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H}), \tau_{\rm sot}\big)$, *y*

(2) $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ *es residual en* $\big(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\rm wot}\big)$.

Prueba. (1) Fijemos una sucesión densa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}\setminus\{0\}$ y sea $T\in\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})$ no-invertible. Entonces $\mathrm{Rang}(T)$ es cerrado y, además, $\mathrm{Rang}(T)\neq\mathcal{H}$. Esto implica, en particular, que podemos seleccionar un $j\in\mathbb{N}$ de modo que

$$\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T)\big)\;>\;0.$$

Lo anterior permite considerar, para cada par de enteros $j,k\in\mathbb{N}$, el conjunto

$$M_{j,k}\;=\;\Big\{T\in\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H}):\;\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T)\big)\;>\;1/k\Big\}.$$

Nótese ahora que el conjunto

$$\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})^*\;:=\;\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\;=\;\bigcup_{j,k=1}^{\infty}M_{j,k}$$

consiste de todas las isometrías no-invertibles. Veamos que cada $M_{j,k}$ es $\tau_{\rm sot}$-nunca-denso en $\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})$. Puesto que, por el Teorema 2.2.170 (a), $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ es denso en $(\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H}),\tau_{\rm sot})$, es suficiente demostrar que

$$\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\cap\overline{M}_{j,k}^{\tau_{\rm sot}}\;=\;\varnothing\qquad\qquad\forall\,j,k\in\mathbb{N}.$$

Suponga, para arribar a una contradicción, que para algún par $j,k\in\mathbb{N}$, se cumple que

$$\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\cap\overline{M}_{j,k}^{\tau_{\rm sot}}\;\neq\;\varnothing.$$

Sea $U\in\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\cap\overline{M}_{j,k}^{\tau_{\rm sot}}$ y elijamos una sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $M_{j,k}$ para la cual $T_n\to U$ en la $\tau_{\rm sot}$-topología. En particular, como U es unitario, existe exactamente un $x\in\mathcal{H}$ tal que $x=U^{-1}x_j$, de donde se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}T_nx\;=\;Ux\;=\;x_j,$$

lo que a su vez implica que

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T_n)\big)\;=\;0.$$

Esto último es lo que genera la contradicción, pues de allí se deduce la existencia de un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T_{n_0})\big)<1/k$. Por otro lado, como $T_{n_0}\in M_{j,k}$, entonces $\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T_{n_0})\big)>1/k$ lo que produce un disparate. Por esto, $M_{j,k}$ es nunca-denso en la $\tau_{\rm sot}$-topología y, en consecuencia, $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ es residual en $(\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H}),\tau_{\rm sot})$ gracias al Teorema de Categoría de Baire.

(2) Como antes, sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $\mathcal{H}\setminus\{0\}$ y considere

$$\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})^*\;:=\;\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\;=\;\bigcup_{j,k=1}^{\infty}M_{j,k},$$

donde

$$M_{j,k}\;=\;\Big\{T\in\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H}):\;\mathrm{dist}\big(x_j,\mathrm{Rang}(T)\big)\;>\;1/k\Big\}.$$

para cada $j,k\in\mathbb{N}$. Primero vamos a demostrar que $\mathcal{I}_{\rm so}(\mathcal{H})^*$ también es de primera categoría pero ahora en $(B(\mathcal{H})_1,\tau_{\rm wot})$. Puesto que $\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})$ es $\tau_{\rm wot}$-denso en $B(\mathcal{H})_1$, (Teorema 2.2.170, (b)) entonces es suficiente demostrar que

$$\mathcal{U}_{\rm ni}(\mathcal{H})\cap\overline{M}_{j,k}^{\tau_{\rm wot}}\;=\;\varnothing\qquad\qquad\forall\,j,k\in\mathbb{N}.$$

Veamos, como en el caso anterior, que cada $M_{j,k}$ es τ_{wot}-nunca-denso en $B(\mathcal{H})_1$. En efecto, suponga de nuevo que existen $j,k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H}) \cap \overline{M}_{j,k}^{\tau_{\text{wot}}} \neq \varnothing$ y sea $U \in \mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H}) \cap \overline{M}_{j,k}^{\tau_{\text{wot}}}$. Elija una sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $M_{j,k}$ tal que $T_n \to U$ en la τ_{wot}-topología. Por el Lema 2.2.39 (2), $T_n \to U$ en la τ_{sot}-topología. Exactamente como en el caso anterior, tomando $x = U^{-1}x_j$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} T_n x = Ux = x_j$, de donde resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\bigl(x_j, \operatorname{Rang}(T_n)\bigr) \;=\; 0$$

lo que está en contradicción con el hecho de que cada $T_n \in M_{j,k}$. Así, cada uno de los conjuntos $M_{j,k}$ es τ_{wot}-nunca-denso y, por lo tanto, $\mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H})^*$ es de primera categoría en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}})$.

Queda por ver que $B(\mathcal{H})_1 \setminus \mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H})$, el conjunto de todas operadores contractivos no-isométricos, también es de primera categoría en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}})$. Para demostrar esto último, sea T una contracción no-isométrica. Como T no es invertible y la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es norma-densa en $\mathcal{H}$, resulta que $\|Tx_j\| < \|x_j\|$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Este hecho permite justificar, para cada par $j,k \in \mathbb{N}$, la construcción del conjunto

$$N_{j,k} \;=\; \Bigl\{T \in B(\mathcal{H})_1 : \; \|Tx_j\| < (1-1/k)\,\|x_j\|\Bigr\}.$$

En consecuencia,

$$B(\mathcal{H})_1 \setminus \mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H}) \;=\; \bigcup_{j,k=1}^{\infty} N_{j,k}.$$

Veamos que cada $N_{j,k}$ es τ_{wot}-nunca-denso en $B(\mathcal{H})_1$. Debido a la τ_{wot}-densidad de $\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H})$ en $B(\mathcal{H})_1$, de nuevo será suficiente demostrar que

$$\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H}) \cap \overline{N}_{j,k}^{\tau_{\text{wot}}} \;=\; \varnothing \qquad\qquad \forall j,k \in \mathbb{N}.$$

Suponga, una vez más, que para algún par $j,k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H}) \cap \overline{N}_{j,k}^{\tau_{\text{wot}}} \neq \varnothing$ y sea $U \in \mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H}) \cap \overline{N}_{j,k}^{\tau_{\text{wot}}}$. Seleccionemos una sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ en $N_{j,k}$ que converja en la τ_{wot}-topología a U. Puesto que $\|T_n x\| \leq \|Ux\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, se sigue del Lema 2.2.39 (1), que $T_n \to U$ en la τ_{sot}-topología, de donde se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x_j\| \;=\; \|Ux_j\| \;=\; \|x_j\|$$

lo que está en franca contradicción con el hecho de que cada $T_n \in N_{j,k}$ pues $\|T_n x_j\| < (1-1/k)\,\|x_j\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con esto hemos demostrado que $B(\mathcal{H})_1 \setminus \mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H})$ es de primera categoría en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}})$ y así, por la primera parte,

$$\Bigl(B(\mathcal{H})_1 \setminus \mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H})\Bigr) \;\cup\; \Bigl(\mathcal{I}_{\text{so}}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H})\Bigr)$$

es de primera categoría en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}})$. El Teorema de Categoría de Baire nos garantiza que $\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H})$ es residual en el espacio métrico completo $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\text{wot}})$. Con esto termina la prueba del teorema. ■

Comentario Adicional 2.2.32 ¿Qué ocurre con la topología uniforme de operadores? Es un ejercicio sencillo verificar que $\overline{\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} \neq B(\mathcal{H})_1$, sin embargo, un resultado de Russo-Dye (véase, por ejemplo, [245]) establece que:

Teorema 2.2.172 (Russo-Dye). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Entonces*

$$\overline{\text{co}}\bigl(\mathcal{U}_{\text{ni}}(\mathcal{H})\bigr) \;=\; B(\mathcal{H})_1.$$

Ya hemos visto que $\overline{\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = \mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$, es decir, $\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})$ es norma-cerrado en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, sin embargo, si cambiamos la topología de la norma por la topología débil de operadores tenemos que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \;=\; \overline{\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})}^{\,\mathrm{wot}}.$$

En efecto, como todo operador unitario es un operador normal, por (b) del Teorema 2.2.170, tenemos que $B(\mathcal{H})_1 \subseteq \overline{\mathcal{N}\mathrm{or}(\mathcal{H})}^{\,\mathrm{wot}}$ y como $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB(\mathcal{H})_1$, el resultado sigue. Observe que por (a) del Teorema 2.2.170, $\mathcal{U}_{\mathrm{ni}}(\mathcal{H})$ nunca es τ_{sot}-cerrado en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Denotamos por $B(\mathcal{H})_1^+$ el subconjunto de $B(\mathcal{H})_1$ formado por los operadores positivos, es decir, un operador $A \in B(\mathcal{H})_1^+$ si, y sólo si, $0 \leq A$ y $\|A\| \leq 1$. Por el Lema 2.2.34, esto significa que $0 \leq A \leq I$. Resulta que $B(\mathcal{H})_1^+$ con la métrica d_{sot} es un espacio métrico completo y separable. En [441], N. Weaver demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.2.173 (Weaver). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y E un subespacio lineal de dimensión finita de $\mathcal{H}$. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cic}} \;=\; \Big\{A \in B(\mathcal{H})_1^+ :\ \text{cualquier } x \in E \setminus \{0\} \text{ es un vector cíclico para } A\Big\}$$

es residual en $\big(B(\mathcal{H})_1^+, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$. En particular, si S es un subconjunto numerable de $\mathcal{H}$, entonces

$$\mathcal{A}^*_{\mathrm{cic}} \;=\; \Big\{A \in B(\mathcal{H})_1^+ :\ \text{cualquier } x \in [S] \setminus \{0\} \text{ es un vector cíclico para } A\Big\}$$

es residual en $\big(B(\mathcal{H})_1^+, \tau_{\mathrm{sot}}\big)$.

Existen otros tipos de operadores en $B(\mathcal{H})_1$ que son residuales en $B(\mathcal{H})_1$ en la topología fuerte de operadores. Recordemos que un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que es **fuertemente estable** si $\tau_{\mathrm{sot}} - \mathrm{lím}_{n\to\infty} T^n = 0$. Diremos que T es de **potencia acotada** si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$. Si T es de potencia acotada, entonces decimos que T es **casi débilmente estable** si 0 es un punto de acumulación en la topología débil de $\mathcal{H}$ de cualquier órbita $\mathrm{Orb}(T,x)$. En [150] T. Eisner y T-Mátrai, así como en [151], T. Eisner y A. Serény demuestran, entre otras cosas, los siguientes resultados.

Teorema 2.2.174 (Eisner-Mátrai-Serény). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita.*

(1) *El conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{css}}(\mathcal{H})$ de todos los operadores contractivos fuertemente estables es residual en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}})$.*

(2) *El conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{s}}(\mathcal{H})$ de todos los operadores contractivos T tales que para cada $y \in S_{\mathcal{H}}$ existe un $x \in S_{\mathcal{H}}$ para el cual $Tx = y$, es residual en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}})$.*

(3) *El conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{ker}}(\mathcal{H})$ de todos los operadores contractivos T que satisfacen $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \infty$ es residual en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{sot}})$.*

(4) *El conjunto $\mathcal{I}_{\mathrm{cws}}(\mathcal{H})$ de todos los operadores isométricos casi débilmente estables es residual en $(\mathcal{I}_{\mathrm{so}}(\mathcal{H}), \tau_{\mathrm{sot}})$.*

(5) *El conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{cws}}(\mathcal{H})$ de todos los operadores contractivos casi débilmente estables es residual en $(B(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathrm{wot}})$.*

2.3. Espacios vectoriales en conjuntos excepcionalmente raros **

Como hemos podido demostrar en el transcurso de estas notas, algunas veces aparecen fenómenos muy extraños pero que, a pesar de esa apariencia, ellos constituyen la regla y no la excepción, es decir, en todos los casos estudiados, la totalidad de esos objetos extraños constituyen un conjunto “muy grande” desde el punto de vista topológico (contienen, por ejemplo, un conjunto G_δ-denso), pero carente, globalmente, de una estructura algebraica. Este último aspecto, que es importante y que ha sido objeto de estudio en los años recientes, ha dado paso a una entusiasta investigación sobre la posibilidad de encontrar un subespacio lineal (cerrado o no, de dimensión finita o infinita) en dichos conjuntos. Por ejemplo, cuando $T: X \to X$ es un operador hipercíclico definido sobre un espacio de Banach separable de dimensión infinita, entonces, como se demostró en el Teorema 2.2.141, el conjunto $\mathcal{HC}(T)$, que es G_δ-denso pero no un espacio vectorial, posee (añadiéndole a dicho conjunto el operador nulo) *espacios vectoriales densos* de dimensión infinita. También, como ya hemos mencionado, Rodríguez Piazza [377] probó que $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$, que también es un G_δ-denso sin estructura lineal en sí mismo, contiene espacios vectoriales de dimensión infinita que son copias isométricas de cualquier espacio de Banach separable (Observación (3), página 123).

En esta sección no demostraremos ningún resultado, sólo nos dedicaremos, como un ejercicio placentero, a informar sobre algunos aspectos relacionados con la existencia de ciertos subespacios vectoriales (en general, de dimensión infinita, que pueden ser densos en algunos casos y cerrados en otros) que habitan en la galería de algunos de los monstruos ya estudiados y de otros que no hemos analizados con anterioridad pero que de igual forma existen.

La siguiente definición intenta formalizar la presencia, o existencia, de espacios vectoriales en ciertos conjuntos de funciones raras.

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Suponga que* **P** *es una propiedad sobre los elementos de X y que M es un subconjunto no vacío de X cuyos elementos satisfacen la propiedad* **P**.

(a) *Se dice que M es* ***linealizable*** *(respectivamente, n-**linealizable** con $n \in \mathbb{N}$) si $M \cup \{0\}$ contiene un subespacio vectorial Y de dimensión infinita (respectivamente, $dim(Y) = n$). La máxima cardinalidad de un tal espacio vectorial (si ella existe), es llamada la* lineabilidad *de M y denotada por $\lambda_L(M)$. El conjunto M se dice que es* ***no muy lineal*** *si $\lambda_L(M) \leq 1$.*

(b) *Diremos que M es* ***algebralizable*** *si $M \cup \{0\}$ contiene un álgebra A infinitamente generada, esto último quiere decir que, existe un conjunto infinito numerable de vectores D en X que es linealmente independiente tal que A es la álgebra más pequeña conteniendo a D.*

(c) *Si X es un espacio vectorial topológico, M se dice* ***espaciolizable*** *en X si $M \cup \{0\}$ contiene un subespacio vectorial cerrado de dimensión infinita.*

Las nociones de conjuntos linealizables y espaciolizables, que son propiedades intrínsecas, fueron primeramente formuladas por P. Enflo y V. Gurariy en [154], y posteriormente, en [18] y [196], mientras que la noción de conjunto algebralizable, que es una propiedad relativa, fue introducida recientemente por R. Aron, D. Pérez García y J. B. Seoane Sepúlveda en [19]. Observe que encontrar un álgebra en la galería es, en general, una tarea más difícil que encontrar, simplemente, un espacio vectorial.

2.3.1. || ► Funciones continuas nunca diferenciables

Recordemos que $\mathcal{ND}[0,1]$ representa el conjunto de todas las funciones continuas $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ que son nunca diferenciables. Ya hemos visto que tal conjunto es muy grande (en el sentido topológico) pero que no es un espacio vectorial. Con la nueva terminología, uno de los primeros resultados obtenidos en esta dirección fue dado a conocer por V. I. Gurariy en el año de 1966 (véase [197] y también [199]) quien demuestra que

(1) $\mathcal{ND}[0,1]$ *es linealizable*.

Casi inmediatamente, V. Fonf, V. Kadeč y V. I. Gurariy [161] prueban que

(2) $\mathcal{ND}[0,1]$ *es espaciolizable en* $C[0,1]$.

F. Bayart y L. Quarta en un artículo que pronto aparecerá publicado en *Israel J. Math.*, [42], cierran el círculo al demostrar que

(3) $\mathcal{ND}[0,1]$ *es algebralizable*.

De hecho, ellos demuestran que

(4) *El conjunto de todas las funciones continuas* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *que son nunca Hölder contine una álgebra densa con una cantidad infinita y algebraicamente independiente de generadores*.

Una función continua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ se dice *nunca Hölder* si para todo $x\in[0,1]$ y $\alpha>0$,

$$\sup_{\substack{y\in[0,1]\\ y\neq x}}\frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^{\alpha}}=\infty.$$

Resulta claro que una tal función es nunca diferenciable.

Un toque hermoso y casi mágico lo impone L. Rodríguez Piazza en 1995 [377] al demostrar que no sólo el conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$ es espaciolizable, sino que dicho conjunto es *universal* para la categoría de los espacios de Banach separables ya que cualquier espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio lineal norma-cerrado de $\mathcal{ND}[0,1]\cup\{0\}$. Varios años después, S. Hencl [209] profundiza en el resultado de Rodríguez Piazza al demostrar que cualquier espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C[0,1]$ cuyos elementos distintos del cero son nunca aproximadamente diferenciable y nunca Hölder (véase el artículo de Hencl, [209], para la definición de función nunca aproximadamente diferenciable).

En la dirección opuesta, el conjunto $D[0,1]$ de todas las funciones *siempre diferenciables sobre* $[0,1]$ es lineal y, por consiguiente, linealizable. Más aun, V. Gurariy en [198], demuestra que:

(5) $D[0,1]$ *no es espaciolizable*.

Recordemos que $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$ representa el subconjunto de $C[0,1]$ formado por todas aquellas funciones que son diferenciables pero nunca monótonas. En un artículo publicado en el año 2004, [18], Aron, Gurariy y Seoane prueban que:

(6) $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$ *es linealizable en* $C(\mathbb{R})$.

Más aun,

(7) *Para* $a,b\in\mathbb{R}$, *el conjunto* $\mathcal{DNM}[a,b]$ *es linealizable pero no espaciolizable en* $C[a,b]$.

2.3.2. || ► Funciones continuas con infinitos ceros

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función. Recordemos que un punto $x\in[0,1]$ tal que $f(x)=0$ se llama un *cero* de f. En [154], P. Enflo y V. I. Gurariy demuestran el siguiente resultado:

(1) *Para cualquier subespacio de dimensión infinita $X\subseteq C[0,1]$, el conjunto $Z_\infty(X)$ formado por tadas las funciones en X que tienen una cantidad infinita de ceros en $[0,1]$ es espaciolizable en X.*

2.3.3. || ► Funciones siempre sobreyectivas

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se llama *siempre sobreyectiva* si para cualquier intervalo no trivial (a,b) de $\mathbb{R}$, $f(a,b)=\mathbb{R}$. La existencia de tales funciones extrañas fueron dadas a conocer por primera por H. Lebesgue en su *Leçons sur l'intégration*, Gauthier-Villars, Paris (1904). En el Ejemplo 27, página 104, del libro de B. R. Gelbaum y J. M. H. Olmested, [176], se puede ver la construcción de una tal función que, además, es cero casi siempre. En [18], Aron, Gurariy y Seoane prueban que

(1) *El conjunto $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, formado por todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que son siempre sobreyectivas, es $2^{\mathfrak{c}}$-linealizable, es decir, $\lambda_L(\mathfrak{F}(\mathbb{R}))=2^{\mathfrak{c}}$.*

R. Aron y J. B. Seoane Sepúlveda demuestran en [20] que

(2) *$\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ es algebralizable.*

García-Pacheco, Palmberg y Seoane-Sepúlveda [172] van un poco más allá al demostrar que

(3) *El conjunto $\mathfrak{F}_0(\mathbb{R})$, formado por todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que son siempre sobreyectivas y casi siempre cero, es linealizable.*

Finalmente, en [15], Aron, Conejero, Peris y Seoane Sepúlveda demuestran que

(4) *El conjunto $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$, formado por todas las funciones $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que son siempre sobreyectivas, (esto significa que para cualquier conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{C}$, $f|_U$ es sobreyectiva), es algebralizable.*

2.3.4. || ► Funciones continuas que interpolan sucesiones

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que *interpola sucesiones* si para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty\in\ell_\infty$ existe un punto $x\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(x+n)=x_n \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

La existencia de una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ interpolando sucesiones acotadas de $\mathbb{R}$ fue dada a conocer por primera vez por Y. Benyamini en [48]. Denotemos el conjunto de todas las funciones continuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que interpolan sucesiones por $\mathcal{IS}(\mathbb{R})$. Bayart y Quarta prueban que

(1) *$\mathcal{IS}(\mathbb{R})$ es $2^{\aleph_0}$-linealizable.*

Si en lugar del conjunto $\mathcal{IS}(\mathbb{R})$ trabajamos con funciones continuas interpolando sucesiones complejas y denotamos la totalidad de tales funciones por $\mathcal{IS}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, se obtiene:

(2) *$\mathcal{IS}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ es algebralizable.*

2.3.5. $\|$ ► Funciones $\mathbb{K}$-lineales discontinuos

Sean X y Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Una función $f : X \to Y$ se dice *aditiva o lineal* si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x,y \in X$. Observe que esta definición difiere del término "lineal" frecuentemente usado en el Álgebra Lineal. En general, diremos que f es $\mathbb{K}$-*lineal* si ella es aditiva y satisface $f(\lambda x) = \lambda x$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$. Así, una función $\mathbb{R}$-lineal coincide con la noción usual de una función lineal. Una observación importante en este sentido es la siguiente: no todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivas (o lineales en nuestra definición) tienen que ser de la forma $f(x) = ax$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Ello, sin embargo, es verdadero si, y sólo si, f es continua. Esto permite asegurar la existencia de funcionales $\mathbb{R}$-lineales discontinuos $f : X \to \mathbb{R}$ (véase, por ejemplo, [176], p. 33). Denotemos por X'_{ld} el conjunto de todos los funcionales lineales discontinuos $f : X \to \mathbb{R}$ y por $X'_{\mathbb{R}-ld}$ los $\mathbb{R}$-funcionales lineales discontinuos $f : X \to \mathbb{R}$. En el artículo [172], que aparecerá muy pronto, F. J. García-Pacheco, N. Palmberg y J. B. Seoane-Sepúlveda demuestran que:

(1) *En cualquier espacio vectorial topológico real X, el conjunto X'_{ld} es linealizable.*

(2) *En cualquier espacio normado real de dimensión infinita X, el conjunto $X'_{\mathbb{R}-ld}$ es linealizable.*

F. J. García-Pacheco, F. Rambla y J. B. Seoane-Sepúlveda continúan el estudio sobre conjuntos linealizables relativos al conjunto de los funcionales $\mathbb{Q}$-lineales, de la funciones siempre sobreyectivas y del conjunto de las funciones sobre $\mathbb{R}$ cuyos grafos son densos en $\mathbb{R}^2$.

2.3.6. $\|$ ► Funciones con un conjunto denso de puntos de discontinuidades removibles

Para cualquier $\beta \in \mathbb{R}^+$, defina la función $f_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_\beta(x) = \begin{cases} n^{-\beta}, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde n es el entero positivo más pequeño tal que $x = k/n$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. No es difícil ver que esta función es discontinua en cualquier punto $x \in \mathbb{Q}$ y, en consecuencia, posee un conjunto denso de puntos de discontinuidad. Para ver que todas las discontinuidades son removibles, tome cualquier $x_0 \in \mathbb{Q}$ y note que

$$\lim_{x \to x_0^-} f_\beta(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_\beta(x) = 0.$$

Siguiendo con el mismo artículo de García Pacheco, Palmberg y Seoane Sepúlveda [172], ellos prueban:

(1) *El conjunto $DR(\mathbb{R})$, de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un conjunto denso de puntos de discontinuidades removibles, es algebralizable.*

2.3.7. $\|$ ► Funciones que poseen un número finito de puntos de continuidad

El siguiente resultado también es de García Pacheco, Palmberg y Seoane Sepúlveda [172].

(1) *El conjunto $CF(\mathbb{R})$, de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las cuales tienen un número finito de puntos de continuidad, es linealizable.*

2.3.8. ‖ ► Funciones cuyas derivadas son no acotadas sobre un intervalo cerrado

Una vez más, García Pacheco, Palmberg y Seoane Sepúlveda [172] son los responsables del siguiente resultado.

(1) *El conjunto DNA*$(\mathbb{R})$, *de las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cuyas derivadas son no acotadas sobre un intervalo cerrado (que depende de la función), es linealizable*.

Por ejemplo, para cada número primo p, considere la función

$$f_p(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{px^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$f'_p(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{px^2}\right) - \dfrac{2}{px} \cos\left(\dfrac{1}{px^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

la cual es no acotada sobre $[-1,1]$ para todo primo p.

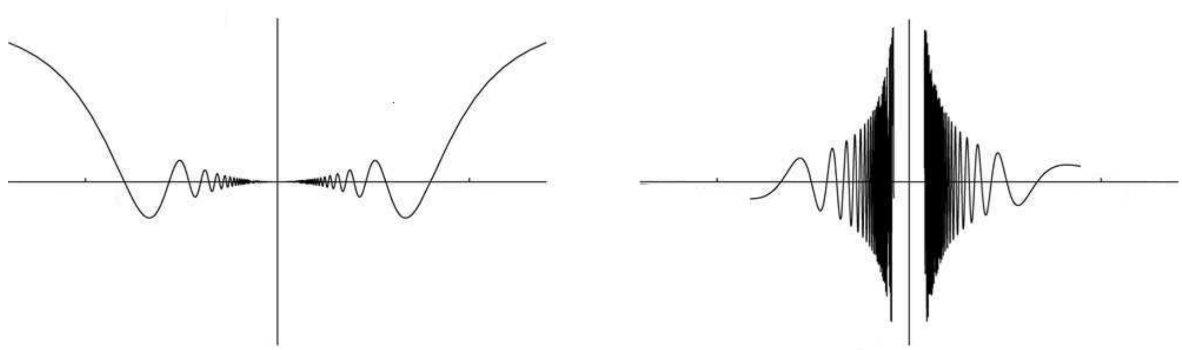


Figura 2.2: Funciones f_2 y f'_2

2.3.9. ‖ ► Funciones no medibles

Sean (Ω,Σ) un espacio medible y $N(\Omega,\mathbb{K})$ el conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$ que son no medibles. F. J. García Pacheco y J. B. Seoane Sepúlveda [170] demuestran el siguiente resultado.

(1) $N(\Omega,\mathbb{K})$ *es espaciolizable. En particular, cualquier espacio de Banach con densidad de caracter* γ, *es isométrico a un subespacio consistiendo de funciones no medibles (salvo la función cero).*

2.3.10. ‖ ► Funciones casi-siempre continuas pero no Riemann-integrables

De la teoría de la integral de Lebesgue sabemos que si I es un intervalo acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces

f es Riemann-integrable si, y sólo si, f es casi-siempre continua.

Si ahora tomamos un intervalo arbitrario no acotado I de $\mathbb{R}$, se puede demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable, entonces también se cumple que f es casi-siempre continua. El recíproco, sin embargo, no es válido. En efecto, si tomamos, por ejemplo, cualquier intervalo no acotado I y cualquier función $f : I \to \mathbb{R}$ constante, pero no idénticamente igual a cero, entonces ella es continua pero no Riemann-integrable.

Fijemos un intervalo no acotado I de $\mathbb{R}$ y denotemos $\mathcal{CR}(I)$ el conjunto de todas las funciones acotadas casi-siempre continuas $f : I \to \mathbb{R}$ que no son Riemann-integrables y por $\mathcal{NR}(I)$ el conjunto de todas las funciones continuas acotadas $f : I \to \mathbb{R}$ que no son Riemann-integrables.

Los siguientes resultados fueron obtenidos por F. J. García Pacheco, M. Martín y J. B. Seoane Sepúlveda en [171].

(1) *Para cualquier intervalo no acotado I de $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{CR}(I)$ es espaciolizable y algebralizable en $L_\infty(I)$.*

(2) *Para cualquier intervalo no acotado I de $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{NR}(I)$ es espaciolizable en $L_\infty(I)$.*

2.3.11. ‖ ► Funciones Riemann-integrables que no son Lebesgue-integrables

Es un hecho ya establecido que si I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{R}(I) \subseteq \mathcal{L}(I)$, donde $\mathcal{R}(I)$ y $\mathcal{L}(I)$ representan los espacios vectoriales reales de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son Riemann-integrables y Lebesgue-integrables, respectivamente. Si I es no acotado, entonces $\mathcal{R}(I) \setminus \mathcal{L}(I) \neq \varnothing$. En efecto, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es Riemann-integrable ya que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 f(x)\,dx + \lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)\,dx = \pi,$$

mientras que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ no existe en el sentido de Lebesgue, pues

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,dx = \infty.$$

Recíprocamente, sobre cualquier intervalo I (acotado o no), existe una función acotada Lebesgue-integrable que no es equivalente a ninguna función Riemann-integrable (véase, por ejemplo, [176], Example 8.31). García Pacheco, Martín y Seoane Sepúlveda [171] son responsable de los siguientes resultados.

(1) *Si I es un intervalo no acotado, entonces $\mathcal{R}(I) \setminus \mathcal{L}(I)$ es linealizable pero no algebralizable.*

(2) *Si I es un intervalo arbitrario, entonces $\mathcal{L}(I) \setminus \mathcal{R}(I)$ es espaciolizable en $\mathcal{L}(I)$.*

(3) *En cualquier espacio métrico no compacto, el conjunto de todas las funciones continuas no acotadas definidas sobre éste, es algebralizable.*

(4) *$\ell_\infty \setminus c_0$ es espaciolizable en ℓ_∞ y algebralizable.*

En realidad, (2) fue demostrado por García Pacheco, Grecu, Maestre y Seoane Sepúlveda en un articulo que aun no ha sido publicado, mientras que (4) ya era conocido (para el caso espaciolizable) por H. P. Rosenthal (véase, [171]).

2.3.12. ‖ ► Funciones continuas con un único máximo

Sea $\widehat{C}[0,1] = \{ f \in C[0,1] : \mathrm{M}(f) \text{ consta de un único punto} \}$, donde

$$\mathrm{M}(f) = \{ x \in [0,1] : f(x) = \sup\{ f(y) : y \in [0,1] \} \}$$

Gurariy y Quarta [196] demuestran que

(1) $\widehat{C}[0,1]$ *es no muy lineal en* $C[0,1]$*, pues* $\lambda_L(\widehat{C}[0,1]) = 1$.

Por otro lado, si $\widetilde{CB}(\mathbb{R})$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas y continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no alcanzan su supremo, entonces

(1) $\widetilde{CB}(\mathbb{R})$ *es espaciolizable. En particular,* $\widetilde{\ell}_\infty$ *es espaciolizable*.

2.3.13. ‖ ► Operadores hipercíclicos y supercíclicos

Sea X un espacio de Banach separable y suponga que $T : X \to X$ es un operador hipercíclico. Ya hemos visto, Teorema 2.2.141, que:

(1) $\mathcal{HC}(T)$ *es linealizable*.

Un operador $T : X \to X$ se llama *supercíclico* si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto $\mathcal{SC}(T) = \{ \lambda T^n x : n \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{C} \}$ es norma-denso en X. Denotemos por $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$ y $\mathcal{L}_{\mathrm{SC}}(X)$ el conjunto de todos los operadores hipercíclicos y supercíclicos, respectivamente, definidos sobre X. Puesto que $\| T \| > 1$ para cualquier operador hipercíclico T, resulta que:

(1) $\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)$ *no es espaciolizable*. De hecho, $\lambda_L(\mathcal{L}_{\mathrm{HC}}(X)) = 0$.

Sin embargo, Bayart, en [37], prueba que si H es un espacio de Hilbert separable, entonces

(2) $\mathcal{L}_{\mathrm{SC}}(H)$ *es espaciolizable*.

Entre otros subespacios que habitan en conjuntos interesantes que no poseen estructura lineal y recopilados por Aron, García y Maestre en [17], están los siguientes:

(1) *Sea* $T : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ *un operador de convolución que no es múltiplo del operador identidad. Entonces existe un subespacio de dimensión infinita* $Z \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ *tal que, para cualquier* $f \in Z$*,* $f \neq 0$*,* f *es hipercíclico para* T.

(2) *Existe un subespacio de dimensión infinita* $Z \subseteq \ell_2$ *tal que cualquier vector no cero en* Z *es hipercíclico para el operador de Rolewicz* $T : \ell_2 \to \ell_2$*, definido por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lambda(x_2, x_3, \ldots) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C} \text{ y } |\lambda| > 1.$$

2.3.14. $\|$ ► Funciones nunca cuasi-analíticas

El próximo resultado requiere de algunas definiciones. Sea $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos y sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío. Denotemos por $C^{(M_n)}(U)$ el espacio de todas las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^{∞} tal que, para algún par de constantes A y h, se cumpla que

$$\left\| f^{(n)} \right\| := \sup_{x \in U} \left| f^{(n)}(x) \right| \leq Ah^n M_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $C^{(M_n)}(U)$ es un *espacio cuasi-analítico* si dada cualquier $f \in C^{(M_n)}(U)$ y si para algún $x \in U$, ocurre que $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces necesariamente $f \equiv 0$. Una función se dice *cuasi-analítica* en x_0 si existe un entorno U de x_0 tal que $f|_U$ está en algún espacio cuasi-analítico $C^{(M_n)}(U)$. A pesar de que las funciones que no son cuasi-analíticas no son fáciles de conseguir, J. Schmets y M. Valdivia [400] probaron el siguiente resultado.

(1) *Cualquier espacio $C^{(M_n)}(U)$ que no es cuasi-analítico contiene un subespacio Z de dimensión infinita con la siguiente propiedad: si $f \in Z$, $f \not\equiv 0$, entonces f no es cuasi-analítica en todo punto de U.*

2.3.15. $\|$ ► El Teorema de Bishop-Phelps

El Teorema de Bishop-Phelps, Teorema 2.2.25, página 264, establece que $\mathrm{NA}(X)$ es norma denso en X^*, donde X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $\mathrm{NA}(X)$ es el conjunto de todos los funcionales lineales en X^* que alcanzan la norma; es decir, $f \in \mathrm{NA}(X)$ si, y sólo si,

$$f(x) = \sup\{f(z) : z \in B_X\} = \|f\|$$

para algún $x \in B_X$. Aron, García y Maestre preguntan lo siguiente:

Problema. *¿Contiene* $\mathrm{NA}(X)$ *un subespacio Y de dimensión infinita? De ser así, ¿es dicho subespacio denso en X^*?*

En todos los casos conocidos, la respuesta a dicho problema es sí. Sin embargo, como ellos muestran, no podemos pedir que el subespacio sea cerrado en lugar de denso.

Los siguientes resultados fueron obtenidos, fundamentalmente, por Bandyopadhyay y Godefroy [32].

Recordemos que un subespacio lineal cerrado Y del espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es un *subespacio de proximidad* de X si para cualquier $x \in X$, existe un $y \in Y$ tal que $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y)$.

(1) *Sea Y un subespacio de proximidad de X. Entonces $Y^{\perp} \subseteq$* $\mathrm{NA}(X)$ *si, y sólo si, X/Y es reflexivo.* De esto se sigue que si *si existe un subespacio de proximidad Y de X tal que X/Y es reflexivo y de dimensión infinita, entonces* $\mathrm{NA}(X)$ *es espaciolizable.* De hecho, se cumple lo siguiente:

(2) *Sea Y un subespacio de proximidad de X tal que X/Y es isométricamente isomorfo a un espacio dual Z^*. Entonces* $\mathrm{NA}(X)$ *contiene una copia isométrica de Z.*

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (real) tal que B_{X^*} es ω^*-*secuencialmente compacto*. Son equivalentes:

(1) *Existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ sobre X tal que* $\mathrm{NA}(X, |||\cdot|||)$ *es espaciolizable.*

(2) *Existe un espacio cociente de dimensión infinita de X el cual es isomorfo a un espacio dual.*

Igualmente ellos probaron que que si X es un espacio de Banach tal que X^* es *separable*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *Existe una norma equivalente* $|||\cdot|||$ *sobre* X *tal que* $\mathrm{NA}(X, |||\cdot|||)$ *es espaciolizable.*

(2) X^* *contiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.*

Si en el resultado anterior, en lugar de pedir que X^* sea separable, se exige que X sea un espacio de Asplund WCG, entonces se obtienen las siguientes equivalencias:

(1) *Existe una norma equivalente* $|||\cdot|||$ *sobre* X *tal que* $\mathrm{NA}(X, |||\cdot|||)$ *es espaciolizable.*

(2) X^* *contiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.*

Si el espacio de Banach X es de Asplund con la propiedad de Dunford-Pettis, entonces los subespacios lineales norma-cerrados de $NA(X)$ son de dimensión finita. De allí que $\mathrm{NA}(X)$ no es espaciolizable.

Si el espacio de Banach X posee la PRN, entonces $[\mathrm{NA}(X)] = X^*$. En particular, si $\mathrm{NA}(X)$ es un espacio vectorial, entonces X es reflexivo.

2.3.16. ‖ ► Series de Fourier siempre divergentes

El primer ejemplo de la existencia de una función integrable según Lebesgue y cuya serie de Fourier siempre diverge, fue dado por A. Kolmogorov en 1926. Aunque este hecho, que en principio parecía ser un fenómeno patológico, posteriormente se demostró que, en realidad, era genérico en el sentido de categoría de Baire (Teorema 2.1.30). Lo que Bayart ([37], Theorem 3) demuestra es que dicho fenómeno también es algebraicamente genérico en el sentido de espaciabilidad; es decir,

(1) *Sea* $\mathcal{F}_{div}$ *el conjunto de todas las funciones de* $L^1(\mathbb{T})$ *cuyas series de Fouier siempre divergen sobre* $\mathbb{T}$*. Entonces* $\mathcal{F}_{div}$ *es espaciolizable.*

Casi enseguida, R. M. Aron, D. Pérez García y J. B. Seoane Sepúlveda en [19] profundizan el resultado anterior al obtener:

(2) *Sea* $E \subseteq \mathbb{T}$ *un conjunto de medida de Lebesgue cero. Sea* $\mathcal{F}_{div}(\mathbb{T}, E)$ *el conjunto de todas las funciones en* $C(\mathbb{T})$ *cuya serie de Fourier diverge en todo punto de* E*. Entonces* $\mathcal{F}_{div}(\mathbb{T}, E)$ *es denso y algebralizable.*

2.3.17. ‖ ► Series de Dirichlet siempre divergentes

Recordemos que $\mathcal{H}^\infty$ consiste de todas las series de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

que convergen y son acotadas en el semi-plano $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$. $\mathcal{H}^\infty$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in \mathbb{C}_+\}.$$

El conocimiento de la existencia de una serie de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{it}$ diverge para cada $t \in \mathbb{R}$ es de data muy reciente (véase [39]). Denotemos por $\mathcal{D}_{div}(\mathbb{R})$ el subconjunto de $\mathcal{H}^\infty$ formado por todas las series de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{it}$ es siempre divergente sobre $\mathbb{R}$. La abundancia de tales objetos fue establecida por Bayart [37] y Bayart-Quarta [42] respectivamente.

(1) $\mathcal{D}_{div}(\mathbb{R})$ *es espaciolizable y algebralizable.*

2.3.18. || ► Funciones de clase C^∞ nunca analíticas

En [50], Bernal González demuestra que

(1) $\mathcal{SP}[0,1]$, *el conjunto de todas las funciones de clase* C^∞ *con una singularidad de Pringsheim en cualquier punto de* $[0,1]$*, es algebralizable en* $C^\infty[0,1]$.

CAPÍTULO 3

EL TEOREMA GRANDE DE BAIRE

Introducción

¿Cuán discontinua es una función? ¿Cómo caracterizar o clasificar las funciones discontinuas? Conceptualmente, la teoría de las funciones discontinuas comienza con Baire cuando, en su tesis de 1899, establece su famosa clasificación topológica por jerarquía de las funciones discontinuas, conocida como *las clases de Baire* donde las funciones continuas constituye sólo el primer peldaño de su escalera jerárquica. Ya en 1897, Baire había pensado sobre el problema de las funciones discontinuas que son límite de funciones continuas y planteado la posibilidad de caracterizar, de manera precisa, a tales funciones. Nuestro objetivo en esta sección es presentar algunas de las caracterizaciones clásicas de las funciones que son límite puntual de funciones continuas, conocidas como *la primera clase de Baire* y presentar, sin pruebas, otras de data más reciente.

Aunque Körner califica el Teorema de Categoría de Baire como una *trivialidad profunda* sus aplicaciones, como ya hemos visto, son extremadamente interesantes. Sin embargo, la caracterización clásica de las funciones de la primera clase de Baire, a la que llamaremos el Teorema Grande de Baire y que se sustenta sobre el Teorema de Categoría de Baire, es más profundo y, por consiguiente, sus aplicaciones son más sutiles.

3.1. El Teorema Grande de Baire

A partir de este momento y por el resto de esta sección, X denotará un espacio Polaco; es decir, un espacio que es homeomorfo a un espacio métrico completo separable, mientras que ω_1 denotará el primer ordinal no numerable.

Algunos resultados importantes que usaremos a través de estas notas serán mostrados a continuación.

‖► (**H**1) *Sea X es un espacio Polaco. Si $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una familia de subconjuntos abiertos y disjuntos dos a dos de X, entonces Γ es numerable.*

Prueba. Sea $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Como cada G_α es abierto, resulta que $G_\alpha \cap D \neq \varnothing$ y, en consecuencia, podemos elegir un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_\alpha} \in G_\alpha \cap D$. Por ser la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ disjunta dos a dos, resulta que la aplicación $\alpha \mapsto n_\alpha$ de $\Gamma \to \mathbb{N}$ es inyectiva y, así, Γ es numerable.

‖► **(H2)** *Sean X un espacio Polaco y α un ordinal. Entonces cualquier familia estrictamente creciente $\{G_\beta : \beta < \alpha\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X es numerable.*

Prueba. Fijemos una base numerable $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de X. Como nuestra familia es estrictamente creciente, para cada $\beta < \alpha$, existe un $n_\beta \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{n_\beta} \subseteq G_{\beta+1}, \quad \text{pero} \quad V_{n_\beta} \nsubseteq G_\beta$$

Es fácil ahora comprobar que la aplicación $\beta \mapsto n_\beta$ del conjunto $\{\beta : \beta < \alpha\}$ en $\mathbb{N}$ es uno a uno y termina la prueba. ■

‖► **(H3)** *Si X es un espacio Polaco y si G es un subconjunto abierto de X y $\varepsilon > 0$, entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ conjuntos abiertos en X tal que*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$$

y $\operatorname{diam}(G_n) < \varepsilon$ *para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y sea $(G_m)_{m=1}^{\infty}$ una enumeración de todas las bolas abiertas $U(x_k, 1/n)$ con $k, n \in \mathbb{N}$ que verifican

$$\overline{U(x_k, 1/n)} \subseteq G \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es claro que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \subseteq G.$$

Para verificar la otra inclusión, sea $x \in G$. Siendo G abierto, podemos seleccionar un $n \in \mathbb{N}$ de modo tal que $U(x, 1/n) \subseteq G$ y $1/n < \varepsilon/2$. Ahora bien, la densidad de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nos dice que al menos un elemento de la sucesión, digamos x_k está en $U(x, 1/n)$. Entonces $x \in U(x_k, 1/n) \subseteq \overline{U(x_k, 1/n)} \subseteq G$; es decir, $x_k \in G_m$ si $m \in \mathbb{N}$ se elige de modo que $G_m = U(x_k, 1/n)$. ■

El siguiente resultado, que será de gran utilidad en el ambiente de los espacios Polacos, establece que en dichos espacios no pueden existir colecciones transfinitas no numerables de conjuntos cerrados no crecientes; es decir:

Teorema 3.1.1 (Principio Estacionario de Cantor-Baire). *Si $(F_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ es una familia no creciente de subconjuntos cerrados en un espacio Polaco X, entonces existe un ordinal numerable α_0 tal que $F_{\alpha_0} = F_\beta$ para todo $\beta \geq \alpha_0$.*

Prueba. Es suficiente demostrar que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $F_{\alpha+1} = F_\alpha$. La separabilidad de X nos garantiza la existencia de una base numerable $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ para la topología de X. Para cada ordinal α, definamos

$$A_\alpha = \big\{n \in \mathbb{N} : U_n \cap F_\alpha = \varnothing\big\}.$$

Observemos que

$$\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad A_\alpha \subseteq A_\beta.$$

En efecto, supongamos que $\alpha \leq \beta$. Si $n \in A_\alpha$, entonces $U_n \cap F_\alpha = \varnothing$ y como la familia $(F_\alpha)_\alpha$ es no creciente, tenemos que $\varnothing = U_n \cap F_\alpha \supseteq U_n \cap F_\beta$ lo cual quiere decir que, $U_n \cap F_\beta = \varnothing$ y, así, $n \in A_\beta$.

Si ocurriera que $A_\alpha \subsetneqq A_{\alpha+1}$ para todo α numerable, entonces la función $f : \omega_1 \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(\alpha) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : n \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha\}$$

sería ciertamente $1-1$ y, por consiguiente, ω_1 sería numerable. Esta contradicción establece que para algún $\alpha_0 < \omega_1$, $A_{\alpha_0} = A_{\alpha_0+1}$ y, por lo tanto, $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$. ■

El índice de Cantor-Bendixson, que ya fue introducido con anterioridad (véase la página 281), lo volveremos a revisar brevemente. Como sabemos, el objetivo de dicho índice es asignarle a los subconjuntos cerrados de un espacio Polaco, un cierto número ordinal. Recordemos que un punto x, en un espacio Polaco X, es un punto de acumulación (o punto límite) de un conjunto $F \subseteq X$, si cualquier entorno abierto U de x contiene puntos de F distintos de x. Si por el contrario existe un entorno abierto U de x tal que $U \cap F = \{x\}$, entonces decimos que x es un punto aislado de F.

Sea X un espacio Polaco y sea $(U_n)_{n=1}^\infty$ una base numerable para los abiertos de X. Si $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, sea F_a el conjunto de todos los puntos aislados de F y suponga que F_a es no vacío. Por definición de punto aislado, para cada $x \in F_a$ podemos encontrar un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_x} \cap F_a = \{x\}$. Esto muestra que F_a es a lo más numerable y que

$$F' = F \setminus F_a = F \setminus \bigcup_{x \in F_a} U_{n_x}$$

es cerrado e incluido en F. Notemos que F' no es otra cosa que el conjunto de todos los puntos de acumulación de F. Podemos repetir el argumento anterior, aplicado ahora a F', para obtener el conjunto cerrado $F'' \subseteq F'$, que consiste de los puntos de acumulación de F'. Usando inducción transfinita se logra obtener la siguiente colección de subconjuntos cerrados de X:

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio Polaco. Si $F \subseteq X$ es cerrado, el* ***derivado de Cantor-Bendixson****, F', se define como*

$$F' = F \setminus \{x \in X : x \text{ es un punto aislado de } F\}.$$

Para cada ordinal numerable $\alpha < \omega_1$, definimos $F^{(\alpha)}$ por inducción transfinita como sigue:

(CB_1) $F^{(0)} = F$;

(CB_2) $F^{(\alpha+1)} = F^{(\alpha)} \setminus \{x \in X : x \text{ es un punto aislado de } F^{(\alpha)}\} = (F^{(\alpha)})'$;

(CB_3) $F^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha<\beta} F^{(\alpha)}$, *si β es un ordinal límite.*

Notemos que la familia $(F^{(\alpha)})_{\alpha<\omega_1}$ cumple con las siguiente propiedades:

(1) $F^{(\alpha)}$ es cerrado para todo $\alpha < \omega_1$.

(2) $F \supseteq F' \supseteq F'' \supseteq \cdots \supseteq F^{(\alpha)} \supseteq \cdots \supseteq F^{(\beta)} \supseteq \cdots$, con $\alpha \leq \beta$.

(3) Sea $\alpha < \omega$. Como cada $x \in F^{(\alpha)} \setminus F^{(\alpha+1)}$ es un punto aislado de $F^{(\alpha)}$, entonces $F^{(\alpha)} \setminus F^{(\alpha+1)}$ es a lo más numerable; es decir, $card(F^{(\alpha)} \setminus F^{(\alpha+1)}) \leq \aleph_0$.

(4) Si $F' = F$, entonces F es perfecto, y $F^{(\alpha)} = F$ para todo $\alpha < \omega_1$.

(5) $F = \bigcup_{\alpha<\beta} \left(F^{(\alpha)} \setminus F^{(\alpha+1)}\right) \cup F^{(\beta)}$ para cualquier ordinal $\beta > 0$.

Por el Principio Estacionario de Cantor-Baire aplicado a la familia no creciente obtenida en (2), existe un ordinal más pequeño $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $F^{(\alpha_0+1)} = F^{(\alpha_0)}$. A este ordinal lo llamaremos el **rango** o **índice de Cantor-Bendixson**. El conjunto $F^{(\alpha_0)}$ es, por consiguiente, el subconjunto cerrado más grande de F sin puntos aislados (en el sentido de que cualquier subconjunto cerrado de F sin puntos aislados está contenido en $F^{(\alpha_0)}$). Esto quiere decir que $F^{(\alpha_0)}$ es un conjunto perfecto. Si F es compacto y $F^{(\alpha_0)} = \varnothing$, entonces F es disperso.

Una consecuencia inmediata de lo expuesto anteriormente es el siguiente:

Corolario 3.1.1 (Cantor-Bendixson). *Sean X un espacio Polaco y F un subconjunto cerrado de X. Entonces $F = P \cup N$ donde P es perfecto (posiblemente vacío), N es numerable y $P \cap N = \varnothing$.*

Prueba. Sea F un conjunto cerrado con índice de Cantor-Bendixson $\alpha < \omega_1$. Entonces $F = P \cup N$, donde

$$\begin{aligned} P &= F^{(\alpha)}, \quad \text{y} \\ N &= \bigcup_{\beta<\alpha} \left(F^{(\beta+1)} \setminus F^{(\beta)}\right). \end{aligned}$$

Claramente P es perfecto, N es numerable y $P \cap N = \varnothing$. ■

3.1.1. ‖ ► Funciones de la primera clase de Baire

¿Qué tan discontinua debe ser una función Riemann-integrable? El problema surge con A. Cauchy a propósito de la segunda versión del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann la cual estable que:

Teorema Fundamental del Cálculo. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que*:

(a) *F es diferenciable en* (a,b), y

(b) *F' es continua en* $[a,b]$,

entonces

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a). \tag{1}$$

Puesto que continuidad no es, necesariamente, una condición que hay que exigir a F' para que su integral exista (existen funciones discontinuas que son Riemann integrables), surgía entonces la pregunta: ¿qué condición (o condiciones), que no fuese continuidad, había que imponerle a F' para que la ecuación (1), en el Teorema Fundamental del Cálculo, siguiera siendo válida? En 1875, Gaston Darboux demostró que la condición

(b') *F' es Riemann-integrable,*

garantizaba la validez de (1). Sin embargo, aun persistía la cuestión de si había que asumir algo sobre F' distinto a su existencia. Darboux era de los que creían que si una función F era siempre diferenciable y su derivada F' era acotada, entonces la integral $\int F' dx$ debía existir. Desafortunadamente, Darboux estaba equivocado. En 1881, V. Volterra construye una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que poseía una derivada acotada en todos los puntos de $[a,b]$, pero cuya derivada F' era tan discontinua que no se podía integrar en el sentido de Riemann (ya hemos visto, véase el Teorema de Weil o el Teorema de Katznelson-Stromberg, que existen abundantes funciones con derivadas acotadas pero que nunca son Riemann integrables). Este contraejemplo motivó la pregunta: ¿*Qué tan discontinua debe ser una función Riemann-integrable*?

En un intento por clasificar a todas las funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ según sus puntos de continuidad y de discontinuidad, Hermann Hankel propuso, en 1870, la siguiente clasificación (véase, [144], p. 173-199):

Clase $\mathcal{H}_1$ – En esta clase Hankel colocó a todas las funciones continuas sobre $[a,b]$.

Clase $\mathcal{H}_2$ – Esta clase estaba constituida por todas aquellas funciones que eran continuas excepto en un subconjunto finito de puntos de $[a,b]$.

Clase $\mathcal{H}_3$ – Aquí Hankell incluyó a todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que poseían una cantidad infinita de puntos de discontinuidad pero que aun eran continuas en un subconjunto denso de $[a,b]$. A tales funciones él las llamó **puntualmente discontinuas**.

Clase $\mathcal{H}_4$ – Finalmente, él definió esta clase como aquellas funciones que no pertenecían a ninguna de las clases anteriores y las llamó **totalmente discontinuas**.

Observe que una función puntualmente discontinua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, a pesar de sus infinitas discontinuidades, debe ser continua en "alguna parte" de cualquier subintervalo cerrado no degenerado de $[a,b]$. En efecto, si $[c,d]$ es cualquier subintervalo de $[a,b]$ con $c < d$, entonces como el conjunto de los puntos de continuidad de f, $\mathrm{PC}(f)$, es denso en $[a,b]$, resulta que $\mathrm{PC}(f) \cap (c,d) \neq \varnothing$ y, así, $f|_{[c,d]}$ es continua en cualquier punto de $F := \mathrm{PC}(f) \cap (c,d)$. Por otro lado, si una función f pertenece a la clase $\mathcal{H}_4$, entonces siempre existe un subintervalo (c,d) de $[a,b]$ donde la función restricción $f|_{(c,d)}$ no posee puntos de continuidad.

Para mostrar lo valiosa que era su jerarquía de funciones, Hankel afirmaba, e intentó demostrar, que: *Una función f es Riemann-integrable si, y sólo si, f está en una de las clases $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2,3$.* Con ese resultado Hankel respondía a la pregunta difícil que formuláramos al comienzo de esta sección: ¿qué tan discontinua debe ser una función Riemann-integrable? Su respuesta, según su afirmación, era: no puede ser totalmente discontinua. Pero, Hankel estaba equivocado. Todo su edificio jerárquico se vino abajo cuando H. J. S. Smith construye una función f puntualmente discontinua que no era Riemann-integrable, mostrando que había un desperfecto en la afirmación de Hankel. El resultado devastador de Smith en combinación con el nacimiento de la integral de Lebesgue y un resultado del propio Lebesgue que establecía que: *Una función f es Riemann-integrable si, y sólo si, $\lambda(\mathrm{Disc}(f)) = 0$*, hicieron que pronto se abandonara el proyecto de Hankel. Sin embargo, no todo lo propuesto por Hankel era desechable, algo se podía salvar. En efecto, su concepto de función puntualmente discontinua era lo suficientemente buena que 30 años después de su aparición, R. Baire la rescata al descubrir cómo caracterizar tales funciones de un modo sencillo. Más aun, Baire demostró que el límite uniforme de cualquier sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones puntualmente discontinuas sigue siendo puntualmente discontinua. Este resultado le permitió a Baire indagar sobre el comportamiento de la función límite f, cuando la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f. Sus reflexiones condujeron a un nuevo intento de jerarquizar las funciones. Al igual que Hankel, Baire comienza su clasificación escogiendo a las funciones continuas $C[a,b]$ como su clase 0 y que denotaremos por $\mathfrak{B}_0$. Suponga ahora que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas, es decir, pertenecen a la clase $\mathfrak{B}_0$, y suponga que se puede definir la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para cada $x \in [a,b]$. La función f puede ser que no sea continua en todos los puntos de $[a,b]$ y, si eso ocurre, entonces f se escapa de $\mathfrak{B}_0$. Baire entonces definió la clase $\mathfrak{B}_1$ como aquellas funciones discontinuas que son límites puntuales de funciones continuas. Un hecho interesante demostrado por Baire fue que: *las funciones en $\mathfrak{B}_1$ son precisamente las funciones puntualmente discontinuas* definidas por Hankel. Continuando con su clasificación, Baire define la clase $\mathfrak{B}_2$ como todas aquellas funciones f que no están en ninguna de las clases anteriores pero que son límites puntuales de sucesiones en $\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}_1$. Por medio de esta receta Baire continúa ad infinitum construyendo una descomunal jerarquía de funciones discontinuas $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$. Este proceso inimaginable de clases de funciones discontinuas produjo, y no sin razón, una caudal de preguntas: por ejemplo, ¿cómo se puede asegurar que existen funciones, digamos, en $\mathcal{B}_4$, o en $\mathcal{B}_{10}$, o para hacerlo más complicado, en $\mathcal{B}_{10^9}$? ¿Se agotan las funciones discontinuas con este procedimiento? ¿Qué hay fuera de $\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}_1 \cup \cdots$? Fue Henri Lebesgue el encargado de dar respuestas (positivas) a tales interrogantes.

Hoy en día, la jerarquía de las clases de Baire $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ se definen, por inducción transfinita, del modo siguiente. Para cada espacio topológico de Hausdorff (X,τ), sean:

(β_1) La **clase** $\mathfrak{B}_0(X)$ que consiste de todas las funciones continuas (no necesariamente acotadas) $f : X \to \mathbb{R}$, esto es, $\mathfrak{B}_0(X) := C(X)$.

(β_2) La **clase** $\mathfrak{B}_\alpha(X)$. Sea $\alpha < \omega_1$ un ordinal tal que para cada $\beta < \alpha$, las funciones en la clase $\mathfrak{B}_\beta(X)$ han sido definidas. Una función f pertenece a la clase $\mathfrak{B}_\alpha(X)$ siempre que existan $\beta_n < \alpha$ y f_n en la clase $\mathfrak{B}_{\beta_n}(X)$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in X$. Una tal f se dice que es una **función de la clase de Baire** α o que pertenece a la clase $\mathfrak{B}_\alpha(X)$.

(β_3) La **clase** $\mathfrak{B}\mathrm{a}(X)$ de todas las funciones de Baire, esto es, $\mathfrak{B}\mathrm{a} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{B}_\alpha(X)$. Toda función f perteneciente a $\mathfrak{B}\mathrm{a}(X)$ se llama una **función de Baire**.

En lo que sigue sólo estaremos interesados en caracterizar las funciones de Baire de clase 1 o funciones de la primera clase de Baire, demostrar algunas de sus propiedades importantes y presentar unas pocas aplicaciones.

Definición 3.1.2. *Sea (X,d) un espacio Polaco. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es de la* ***primera clase de Baire*** *si $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, es decir, si existe una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n=1}^\infty$ de X en $\mathbb{R}$ convergiendo puntualmente a f; esto es, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$.*

Comentario Adicional 3.1.1 (1) En primer lugar notemos que, gracias al Teorema 1.12.11,

> *Si $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, entonces el conjunto de los puntos de continuidad de f, $\mathrm{PC}(f)$, es un G_δ-denso de X.*

De modo equivalente, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f, $\mathrm{Disc}(f)$, es un F_σ de primera categoría en X. Esto nos dice, en particular, que las funciones que son *siempre discontinuas* en X no pueden vivir en $\mathfrak{B}_1(X)$. Por ejemplo, $\chi_{\mathbb{Q}} \notin \mathfrak{B}_1(\mathbb{R})$. Observe que cuando $X = [a,b]$, el Teorema 3.1.5 nos dice que cualquier función $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ es puntualmente discontinua.

(2) En segundo lugar, es fácil establecer que $\mathfrak{B}_1(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (Se deja como ejercicio al lector verificar lo anterior). Además, si $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $g \circ f \in \mathfrak{B}_1(X)$.

(3) Ya hemos demostrado que si F es cerrado en X o, en general, si F es ambiguo, entonces la función $\chi_F \in \mathfrak{B}_1(X)$ mientras que, como ya hemos visto, $\chi_{\mathbb{Q}} \notin \mathfrak{B}_1(\mathbb{R})$.

A $\mathfrak{B}_1(X)$ lo vamos a dotar de la **topología de la convergencia puntual**, τ_p, la cual se define declarando que una red $(f_\alpha)_{\alpha\in D}$ en $\mathfrak{B}_1(X)$ *converge puntualmente* a $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ si ocurre que $\lim_{\alpha\in D} f_\alpha(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Cuando este tipo de convergencia suceda escribiremos $\lim_{\alpha\in D} f_\alpha = f$ puntualmente, o simplemente como $\tau_p - \lim f_\alpha = f$. Observemos que si identificamos a $\mathfrak{B}_1(X)$ con un subespacio del espacio producto $\prod_{x\in X}\mathbb{R}_x$ vía la aplicación

$$\mathfrak{B}_1(X) \ni f \quad \mapsto \quad \big\{f(x) : x \in X\big\} \in \prod_{x\in X}\mathbb{R}_x$$

resulta que τ_p no es otra cosa que la restricción de la topología producto del espacio producto $\prod_{x\in X}\mathbb{R}_x$ al espacio $\mathfrak{B}_1(X)$, donde $\mathbb{R}_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Notemos que esto también se puede expresar del modo siguiente: dada una familia F de funciones a valores reales definidas sobre X, entonces una función f está en la clausura puntual de F, en notación $f \in \overline{F}^{\tau_p}$, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ y cualquier colección finita de puntos $x_1, \dots, x_n$ en X, existe una $g \in F$ tal que $|g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, n$.

En lo inmediato demostraremos algunas de las propiedades importantes que posee $\mathfrak{B}_1(X)$; en particular, probaremos que dicho espacio es cerrado bajo la convergencia uniforme.

Teorema 3.1.2. *Sea (X,d) un espacio Polaco. Entonces*

(1) *Si $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ es acotada por $M > 0$, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones continuas convergiendo puntualmente a f tal que cada f_n es acotada por M.*

(2) *Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathfrak{B}_1(X)$ tal que $\|f_n\|_\infty \le M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y si $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$, entonces*

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathfrak{B}_1(X).$$

(3) *$\mathfrak{B}_1(X)$ es cerrado bajo la convergencia uniforme; es decir, si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathfrak{B}_1(X)$ convergiendo uniformemente a una función f, entonces $f \in \mathfrak{B}_1(X)$.*

Prueba. (1) Sea $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ acotada por M. Escojamos una sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty$ de funciones continuas definidas sobre X convergiendo puntualmente a f. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n(x) = \begin{cases} M & \text{si } g_n(x) > M, \\ g_n(x) & \text{si } |g_n(x)| \le M, \\ -M & \text{si } g_n(x) < -M, \end{cases}$$

para cada $x \in X$. Claramente la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ cumple la conclusión de (1).

(2) Observemos, en primer lugar, que f está bien definida gracias al M-test para la convergencia uniforme de Weierstrass. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(f_{nj})_{j=1}^\infty$ una sucesión de funciones continuas tal que

$$\lim_{j\to\infty} f_{nj} = f_n \quad \text{puntualmente}.$$

Como $\|f_n\|_\infty \le M_n$, por la parte (1), podemos suponer que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\|f_{nj}\|_\infty \le M_n$. Fijemos un entero positivo n arbitrario y definamos

$$h_n = f_{1n} + f_{2n} + \cdots + f_{nn}.$$

Cada h_n es continua en X. Para completar la prueba, demostraremos que la sucesión $(h_n)_{n=1}^\infty$ converge puntualmente a f sobre X. Para lograr esto, fijemos $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$, existe un entero positivo J tal que

$$\sum_{n=J+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

Por otro lado, ya que para cada n, $\lim_{j\to\infty} f_{nj}(x) = f_n(x)$, podemos encontrar un $N > J$ tal que

$$|f_{nj}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/J \quad \text{para } n = 1,2,\ldots,J \quad \text{y} \quad \text{todo } j \geq N.$$

Notemos ahora que para cualquier $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|h_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} f_{kn}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{J} |f_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=J+1}^{n} |f_{kn}(x)| + \sum_{k=J+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&< \sum_{k=1}^{J} \frac{\varepsilon}{J} + 2\sum_{k=J+1}^{\infty} M_k \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por esto, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$ y puesto que $x \in X$ es arbitrario, entonces (h_n) converge puntualmente a f. Esto termina la prueba de (2).

(3) Supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathfrak{B}_1(X)$ convergiendo uniformemente a una función f sobre X. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k} \quad \text{para todo } x \in X.$$

La sucesión $(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ satisface la hipótesis de la parte (2) con $M_k = 2^{-k+1}$. De allí que la sucesión de funciones continuas $(h_k)_{k=1}^{\infty}$, donde

$$\begin{aligned}
h_k &= (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots + (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \\
&= (f_{n_{k+1}} - f_{n_1})
\end{aligned}$$

converge uniformemente a la función $f - f_{n_1} \in \mathfrak{B}_1(X)$. Siendo $\mathfrak{B}_1(X)$ un espacio vectorial, tenemos que $f = f_{n_1} + (f - f_{n_1}) \in \mathfrak{B}_1(X)$. Esto termina la prueba. ■

3.1.2. ‖ ► El Teorema Grande de Baire - Una prueba

El resultado importante de esta sección, conocido como el Teorema Grande de Baire, nos proporciona unas condiciones equivalentes para las funciones que son de la primera clase de Baire. Para una de esas condiciones equivalentes vamos a requerir la construcción, a través de un proceso inductivo transfinito, de una sucesión no creciente $(K_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$ de conjuntos cerrados de X con ciertas propiedades la cual nos permitirá caracterizar a las funciones de la primera clase de Baire. La idea del proceso inductivo es como sigue:

Dada una función $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, comenzamos removiendo de X los conjuntos abiertos donde la oscilación de f es pequeña. Lo que queda es un conjunto cerrado y entonces repetimos la operación anterior sobre dicho conjunto y continuamos el proceso por inducción transfinita.

Una de las tantas maneras de caracterizar la continuidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$ es la siguiente: f es *continua* si, y sólo si, para cada $r \in \mathbb{R}$, los conjuntos

$$f^{-1}\big((-\infty, r)\big) = \big\{x \in X : f(x) < r\big\} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\big((r, \infty)\big) = \big\{x \in X : f(x) > r\big\}$$

son abiertos en X. Una parte del Teorema Grande de Baire es un análogo a este resultado pero cambiando continuidad por funciones que son de la primera clase de Baire y pidiendo que las pre-imágenes de conjuntos abiertos sean conjuntos F_σ.

Teorema 3.1.3 (El Teorema Grande de Baire). *Sea (X,d) un espacio Polaco y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $f \in \mathfrak{B}_1(X)$.

(b) *$f^{-1}(G)$ es un F_σ para cualquier conjunto abierto $G \subseteq \mathbb{R}$.*

(c) *Para cada subconjunto cerrado F de X, la restricción $f|_F$ es continua en subconjunto G_δ-denso de F.*

(d) *Para cada subconjunto cerrado F de X, la restricción $f|_F$ posee al menos un punto de continuidad, es decir, f es escasamente continua.*

(e) *f es fragmentada por $|\cdot|$.*

(f) *Para cada subconjunto cerrado no vacío F de X y para todo par de números reales p, q con $p < q$, los conjuntos*

$$\{x \in F \,:\, f(x) < p\} \qquad y \qquad \{x \in F \,:\, f(x) > q\}$$

no son simultáneamente densos en F.

La demostración del Teorema Grande de Baire se facilita enormemente si se tiene en cuenta los siguientes tres lemas que dosifican la prueba.

Lema 3.1.1. *Sea (X,d) un espacio Polaco. Si A y B son conjuntos F_σ de X, entonces existen conjuntos A^* y B^* que son F_σ tal que:*

(a) $A \cup B = A^* \cup B^*$,

(b) $A^* \subseteq A$ *y* $B^* \subseteq B$,

(c) $A^* \cap B^* = \varnothing$.

Prueba. Sean $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ sucesiones de conjuntos cerrados en X tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \qquad \text{y} \qquad B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n.$$

Definamos $A_1^* = A_1$, $B_1^* = B_1 \setminus A_1$ y para $n \geq 2$ pongamos

$$A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \qquad \text{y} \qquad B_n^* = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Notemos que cada uno de los conjuntos A_n^* y B_n^* son F_σ. Finalmente, si definimos

$$A^* = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^* \qquad \text{y} \qquad B^* = \bigcup_{n=1}^\infty B_n^*$$

resulta que A^* y B^* satisfacen las conclusiones $(a)-(c)$. ■

Lema 3.1.2. *Sea (X,d) un espacio Polaco tal que $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$, donde los A_k son conjuntos F_σ y disjuntos dos a dos. Si $f : X \to \mathbb{R}$ se define por*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x),$$

entonces $f \in \mathfrak{B}_1(X)$.

Prueba. Para cada k, sea $A_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k$, donde $(F_m^k)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados en X. Para cada entero positivo m, definamos

$$g_m \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_m^k}.$$

La restricción de g_m al conjunto cerrado $\bigcup_{k=1}^{n} F_m^k$ es continua puesto que los F_m^k son conjuntos cerrados y disjuntos. Invocando al Teorema de Extensión de Tietze, podemos encontrar una función continua $f_m : X \to \mathbb{R}$ que coincide con g_m sobre $\bigcup_{k=1}^{n} F_m^k$. Se sigue que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f sobre X y por lo tanto, $f \in \mathfrak{B}_1(X)$. ■

El siguiente resultado, interesante en sí mismo, caracteriza a los subconjuntos F_σ de un espacio Polaco en términos de funciones de la primera clase de Baire.

Lema 3.1.3. *Sea (X,d) un espacio Polaco. Si F es un subconjunto de X que es un F_σ, entonces existe una función acotada $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ tal que*

$$F \;=\; \big\{x \in X \,:\, f(x) > 0\big\}.$$

Prueba. Como F es un F_σ, existe una sucesión creciente $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{F_n}(x)$$

para todo $x \in X$. Por la Observación (3) del Comentario Adicional 3.1.1, cada χ_{F_n} pertenece a $\mathfrak{B}_1(X)$ y como ellas son acotadas, el Teorema 3.1.2 (2), nos revela que $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ es acotada y, por supuesto, se cumple que $F = \{x \in X \,:\, f(x) > 0\}$. ■

Sabemos, del Teorema 1.12.11, que si $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, entonces el conjunto $\operatorname{Disc}(f)$, de los puntos de discontinuidad de f, es un F_σ de primera categoría. El siguiente resultado establece el recíproco.

Teorema 3.1.4. *Sea (X,d) un espacio Polaco. Si E es un conjunto F_σ de primera categoría en X, entonces existe una función $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ tal que* $\operatorname{Disc}(f) = E$.

Prueba. Supongamos que E es un subconjunto F_σ de primera categoría en X. Entonces E se puede escribir en la forma $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, donde cada E_n es cerrado y nunca-denso en X. Como cada $x \in E$ pertenece a algún E_n, el número $m_x = min\{n : x \in E_n\}$ está bien determinado. Si ahora definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{m_x} & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

entonces $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ y $\operatorname{Disc}(f) = E$. En efecto:

• $\operatorname{Disc}(f) = E$. Sea $x \in E$. Siendo E de primera categoría en X, él no contiene ninguna bola abierta. Esto significa que para cada $\delta > 0$, existe $y \in U(x,\delta) \setminus E$. De aquí se sigue que $|f(y) - f(x) = |0 - 1/m_x| = 1/m_x$. Esto prueba que f no es continua en x.

Supongamos ahora que $x \in X \setminus E$ y sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Como $F = \cup_{n=1}^{N} E_n$ es cerrado, existe un $\delta > 0$ tal que $U(x,\delta) \cap F = \varnothing$. Se sigue que

$$|f(y) - f(x)| \; < \; \frac{1}{N} \; < \; \varepsilon$$

para todo $y \in U(x,\delta)$. Por esto, f es continua en x y, así, $\mathrm{Disc}(f) = E$.

• $f \in \mathfrak{B}_1(X)$. Lo que en realidad vamos a demostrar es que f es superiormente semi-continua. En efecto, para cualquier $r \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\big\{x \in X : f(x) \geq r\big\} \; = \; \begin{cases} X & \text{si } r \leq 0, \\ \bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n & \text{si } \dfrac{1}{m+1} < r \leq \dfrac{1}{m}, \\ \varnothing & \text{si } r > 1, \end{cases}$$

es cerrado en todos los casos. Por el Ejemplo 3.2 (2), $f \in \mathfrak{B}_1(X)$. ■

Prueba del Teorema Grande de Baire. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ y sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Puesto que G se puede expresar como una unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos y ya que todo intervalo abierto (a,b) con $a < b$ se puede escribir en la forma $(-\infty, b) \cap (a, \infty)$, entonces es suficiente demostrar que, para cada número racional q, los conjuntos $f^{-1}((-\infty,q))$ y $f^{-1}((q,\infty))$ son F_σ.

Como $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, podemos elegir una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Entonces

$$f^{-1}((-\infty,q)) \; = \; \big\{x \in X \,:\, f(x) < q\big\} \; = \; \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p>q}} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \Big\{x \in X \,:\, f_n(x) \leq p\Big\}$$

y

$$f^{-1}((q,+\infty)) \; = \; \big\{x \in X \,:\, f(x) > q\big\} \; = \; \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p>q}} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \Big\{x \in X \,:\, f_n(x) \geq p\Big\}.$$

La continuidad de las funciones f_n nos asegura que los conjuntos

$$\big\{x \in X \,:\, f_n(x) \leq p\big\} \qquad \text{y} \qquad \big\{x \in X \,:\, f_n(x) \geq p\big\}$$

son cerrados, mientras que la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ nos revela que cada uno de los conjuntos $f^{-1}(-\infty,q)$ y $f^{-1}(q,\infty)$ es un F_σ.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos, en primer lugar, que f es acotada. Partiendo del hecho de que los conjuntos

$$f^{-1}((-\infty,q)) \qquad \text{y} \qquad f^{-1}((q,\infty))$$

son, por hipótesis, F_σ para cada $q \in \mathbb{R}$, nuestro objetivo es construir una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{B}_1(X)$ convergiendo uniformemente a f sobre X para luego aplicar el Teorema 3.1.2 (3). Escojamos un $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$. Para cada entero $n \geq 2$, sea $y_k = -M + 2kM/n$ donde $k = 0,1,2,\ldots,n$. Definamos, para $k = 1,2,\ldots,n-1$, los conjuntos

$$\begin{aligned} A_k \; &= \; \big\{x \in X : y_{k-1} < f(x) < y_{k+1}\big\} \\ &= \; f^{-1}\big((-\infty, y_{k+1})\big) \, \cap \, f^{-1}\big((y_{k-1}, \infty)\big). \end{aligned}$$

Notemos que, por hipótesis, cada A_k es un F_σ y, además,

$$X = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Por el Lema 3.1.1, existen conjuntos A_k^* que son F_σ tales que

$$A_k^* \subseteq A_k, \qquad A_i^* \cap A_j^* = \varnothing, \quad \text{para } i \neq j, \qquad \text{y} \qquad X = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k^*.$$

Sea

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-1} y_k \chi_{A_k^*}.$$

Por el Lema 3.1.2, cada función $f_n \in \mathfrak{B}_1(X)$. Notemos finalmente que si $x \in X$, entonces $x \in A_k^* \subseteq A_k$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, por lo que

$$|f_n(x) - f(x)| = |y_k - f(x)| < 2M/n.$$

Esto nos dice que $f_n \to f$ uniformemente y, así, por el Teorema 3.1.2 (3), $f \in \mathfrak{B}_1(X)$.

Para el caso general, sea $h : \mathbb{R} \to (0,1)$ un homeomorfismo creciente. Entonces $h \circ f$ es acotada y para cada $r \in \mathbb{R}$

$$(h \circ f)^{-1}(r, \infty) = f^{-1}(h^{-1}(r,\infty)) = \begin{cases} X & \text{si } r \leq 0, \\ f^{-1}(h^{-1}(r,\infty)) & \text{si } 0 < r < 1, \\ \varnothing & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Con una fórmula similar para $(h \circ f)^{-1}(-\infty, r)$ se sigue que $h \circ f$ satisface la condición (b) en el teorema. Por la primera parte de la prueba, $h \circ f \in \mathfrak{B}_1(X)$. De aquí que $f = h^{-1} \circ (h \circ f) \in \mathfrak{B}_1(X)$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$ Sea $F \subseteq X$ cerrado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{x \in F : osc(f|_F, x) < 1/n\}$. Observe que, por hipótesis, $\mathrm{PC}(f|_F) \neq \varnothing$ y que, gracias al Teorema 1.12.14, página 94, $\mathrm{PC}(f|_F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un G_δ en el espacio de Baire F. Si $\mathrm{PC}(f|_F)$ no es denso en F, entonces para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, el conjunto G_{n_0} no será denso en F. Fijemos un U de F que es relativamente abierto en F tal que $\overline{U} \cap G_{n_0} = \varnothing$, y pongamos $F_1 = \overline{U}$. Afirmamos que $\mathrm{osc}(f|_{F_1}, x) \geq 1/n_0$ para todo $x \in F_1$. En efecto, esto es claro para $x \in U$ pues, siendo U relativamente abierto en F, se tiene que

$$\mathrm{osc}(f|_{F_1}, x) = \mathrm{osc}(f|_F, x) \geq \frac{1}{n_0}, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Por otro lado, $\{x \in F_1 : \mathrm{osc}(f|_{F_1}, x) \geq 1/n_0\}$ es relativamente cerrado en F_1 y, por consiguiente, tenemos que $\{x \in F_1 : \mathrm{osc}(f|_{F_1}, x) \geq 1/n_0\} = F_1$. En particular, $\mathrm{PC}(f|_{F_1}) = \varnothing$, contradiciendo (d).

$(d) \Leftrightarrow (e)$ Es el Teorema 2.2.58, página 310, ya que todo espacio Polaco es hereditariamente de Baire.

$(d) \Rightarrow (f)$ Supongamos que (d) se cumple y sea F subconjunto cerrado no vacío de X. Si ocurriera que

$$\overline{\{x \in F : f(x) < p\}} = \overline{\{x \in F : f(x) > q\}} = F, \quad \text{con } p < q,$$

entonces claramente $f|_F$ no tendría puntos de continuidad, violando nuestra hipótesis.

$(f) \Rightarrow (d)$ Sea F subconjunto cerrado no vacío de X y sea $((p_n, q_n))_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de todos los pares de números racionales (p, q) con $p < q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos

$$A_n = \{x \in F : f(x) < p_n\} \qquad \text{y} \qquad B_n = \{x \in F : f(x) > q_n\}.$$

Observemos ahora que cada uno de los conjuntos $F_n = \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$ es nunca-denso en F. En efecto, si algún F_n no fuera nunca-denso en F, entonces existiría un conjunto relativamente abierto U en F tal que $U \subseteq F_n$ y, por consiguiente, $\overline{U} = \overline{A_n \cap U} = \overline{B_n \cap U}$; es decir, los conjuntos $A_n \cap \overline{U}$ y $B_n \cap \overline{U}$ serían simultáneamente densos en el cerrado $\overline{U}$. Esta contradicción establece nuestra afirmación. Siendo F cerrado en el espacio métrico completo X, él mismo es completo; es decir, F es un espacio de Baire y, en consecuencia, como cada $F \setminus F_n$ es un abierto denso en F, el Teorema de Categoría de Baire nos dice que

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F \setminus F_n) = F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

es un G_δ-denso en F. Puesto que cualquier punto de discontinuidad de $f|_F$ está en algún F_n, concluimos que $f|_F$ es continua en cualquier punto de G.

$(a) \Rightarrow (c)$ Sea F subconjunto cerrado no vacío de X. Como F es un espacio Polaco, y como claramente $f|_F \in \mathfrak{B}_1(F)$, se sigue entonces de la Observación (1) del Comentario Adicional 3.1.1, que el conjunto de puntos de continuidad de $f|_F$ es un G_δ-denso en F.

$(c) \Rightarrow (a)$ Como ya hemos probado que $(b) \Rightarrow (a)$, es suficiente entonces demostrar la implicación $(c) \Rightarrow (b)$. Sea G un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Definamos

$$G_\varepsilon = \{x \in X : \operatorname{dist}(f(x), \mathbb{R} \setminus G) \geq \varepsilon\}$$

donde $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ es la distancia usual de $\mathbb{R}$. Nuestro objetivo inmediato es demostrar que existe un conjunto $F_\varepsilon \subseteq X$ que es un F_σ tal que

$$G_\varepsilon \subseteq F_\varepsilon \qquad \text{y} \qquad f(F_\varepsilon) \subseteq G.$$

La prueba la haremos definiendo inductivamente una sucesión transfinita estrictamente decreciente de conjuntos cerrados $(K_\alpha)_{\alpha \geq \alpha_0}$ para algún ordinal numerable α_0, con $K_{\alpha_0} = \varnothing$ y tal que si $\alpha < \alpha_0$ y $x \in K_\alpha \setminus K_{\alpha+1}$, entonces la oscilación de f sobre K_α en x es menor que ε; esto es, $\operatorname{osc}(f|_{K_\alpha}, x) < \varepsilon$. De modo más preciso esto significa que existe un entorno abierto V_x de x tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x_1, x_2 \in K_\alpha \cap V_x.$$

Vamos a trabajar. Comencemos con $K_0 = X$ y veamos como construimos K_1. Puesto que K_0 es cerrado, el conjunto $K_0(f) = \{x \in K_0 : f|_{K_0} \text{ es continua en } x\}$ es, por hipótesis, no vacío. Por consiguiente, si $x \in K_0(f)$ entonces existe un entorno abierto V_x de x tal que $\operatorname{diam}(f(V_x \cap K_0)) < \varepsilon$. Definimos entonces K_1 como lo que queda de K_0 una vez que hayamos eliminado de él todos los entornos V_x de x que satisfacen $\operatorname{diam} f(V_x \cap K_0)) < \varepsilon$ cuando x varía sobre K_0; es decir,

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \setminus \bigcup \{V_x : x \in K_0, \operatorname{diam}(f(V_x \cap K_0)) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in K_0 : \forall \textit{ entorno } V_x \textit{ de } x, \exists x_1, x_2 \in V_x \cap K_0 \textit{ tal que } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Para construir K_2 observemos en primer lugar que K_1 es cerrado y, de nuevo, por hipótesis, el conjunto $K_1(f) = \{x \in K_1 : f|_{K_1} \text{ es continua en } x\}$ es no vacío. Sea ahora

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 \setminus \bigcup \{V_x : x \in K_1, \operatorname{diam}(f(V_x \cap K_1)) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in K_1 : \forall \textit{ entorno } V_x \textit{ de } x, \exists x_1, x_2 \in V_x \cap K_1 \textit{ tal que } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Supongamos que K_α ha sido definido para todo $\alpha < \beta$, β un ordinal fijo. Si β es un ordinal límite, entonces definimos

$$K_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} K_\alpha.$$

Si $\beta = \alpha + 1$, entonces

$$K_\beta = \big\{x \in K_\alpha : \forall \textit{ entorno } V_x \textit{ de } x,\ \exists x_1, x_2 \in V_x \cap K_\alpha \textit{ tal que } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\big\}.$$

Observemos que cada K_α es cerrado y $K_{\alpha+1} \subsetneqq K_\alpha$ puesto que $K_{\alpha+1}$, como ya hemos visto, no contiene ninguno de los puntos de continuidad de $f|_{K_\alpha}$. Siendo X un espacio separable, el Teorema 3.1.1 nos provee de un ordinal numerable α tal que $K_\alpha = \varnothing$. Sea α_0 el primer ordinal con esa propiedad. Tenemos entonces que

$$X = \bigcup_{\alpha<\alpha_0} (K_\alpha \setminus K_{\alpha+1}).$$

Por definición, cada $x \in G_\varepsilon \cap (K_\alpha \setminus K_{\alpha+1})$ posee un entorno abierto V_x tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ siempre que $x_1, x_2 \in V_x \cap K_\alpha$. En particular, de la definición de G_ε se sigue que $f\big(V_x \cap K_\alpha\big) \subseteq G$. Definamos, para $\alpha < \alpha_0$, el conjunto

$$H_\alpha = \bigcup \big\{V_x \cap K_\alpha : x \in G_\varepsilon \cap (K_\alpha \setminus K_{\alpha+1})\big\}.$$

Es claro que H_α es un subconjunto relativamente abierto del conjunto cerrado K_α y, en consecuencia, un F_σ. Si ahora definimos $F_\varepsilon = \bigcup_{\alpha<\alpha_0} H_\alpha$, resulta que como α_0 es numerable, entonces F_ε es un F_σ y satisface $G_\varepsilon \subseteq F_\varepsilon$ y $f(F_\varepsilon) \subseteq G$. Finalmente, si tomamos $\varepsilon = 1/n$ para $n = 1, 2, \ldots$, tendremos que

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{1/n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$$

es un F_σ. Esto termina la prueba. ■

El siguiente resultado ya ha sido obtenido para el caso en que $f : X \to \mathbb{R}$, donde X es un espacio de Baire, Teorema 1.12.17, página 99. La siguiente prueba es más directa al no hacer referencia explícita a la oscilación de f y por tal motivo la presentamos.

Teorema 3.1.5 (Baire). *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es puntualmente discontinua si, y sólo si,* $\mathrm{Disc}(f)$*, el conjunto de sus puntos de discontinuidad, es de primera categoría en $[a,b]$, es decir,* $\mathrm{PC}(f)$ *es un G_δ-denso en $[a,b]$.*

Prueba. Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es puntualmente discontinua. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$D_k = \left\{x \in [a,b] : \exists\, (a_j)_{j=1}^{\infty} \text{ convergiendo a } x \text{ con } \big|f(a_j) - f(x)\big| \geq \frac{1}{k} \ \ \forall j \geq 1\right\}.$$

Veamos, en primer lugar, que D_k es nunca-denso. En efecto, fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea (c,d) un subintervalo abierto de $[a,b]$. Puesto que f es puntualmente discontinua, existe un $x_0 \in (c,d)$ donde f es continua. Escojamos $\delta > 0$ de modo que

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \frac{1}{3k} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Afirmamos que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_k = \varnothing$. Suponga, por un momento, que existe $z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_k$. Como $z \in D_k$, existe una sucesión $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ convergiendo a z para la cual $\big|f(a_j) - f(x)\big| \geq 1/k$ para todo $j \geq 1$.

Pero como $a_j \to z$ y $z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. De esto se sigue que

$$\frac{1}{k} \leq \left| f(a_N) - f(z) \right| \leq \left| f(a_N) - f(x_0) \right| + \left| f(x_0) - f(z) \right| < \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} = \frac{2}{3k}$$

lo cual es imposible. Por esto, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_k = \varnothing$ y, así, D_k es nunca-denso.

Probemos ahora que $\mathrm{Disc}(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Sea $x \in \mathrm{Disc}(f)$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier $\delta > 0$, podemos hallar un $a_\delta \in [a,b]$ tal que $0 < |a_\delta - x| < \delta$ pero $\left| f(a_\delta) - f(x) \right| \geq \varepsilon$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ de modo que $1/k < \varepsilon$ y suponga que para cada $\delta = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ hemos escogidos $a_1, a_2, \ldots$ tales que

$$0 < |a_j - x| < \frac{1}{j} \quad \text{pero} \quad \left| f(a_j) - f(x) \right| \geq \varepsilon > \frac{1}{k}.$$

Como la sucesión $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ converge a x, resulta que $x \in D_k$ y, por lo tanto, $\mathrm{Disc}(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, es decir, $\mathrm{Disc}(f)$ es de primera categoría.

Para demostrar la otra implicación, suponga que $\mathrm{Disc}(f)$ es de primera categoría. Por el Teorema de Categoría de Baire, $\mathrm{PC}(f) = [a,b] \setminus \mathrm{Disc}(f)$ es denso en $[a,b]$ y, en consecuencia, f es puntualmente discontinua. ■

Como consecuencia inmediata del resultado anterior tenemos:

Corolario 3.1.2 (Baire). *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función puntualmente discontinua, entonces existe un punto (de hecho, existe un conjunto G_δ-denso de puntos) donde todas las funciones son simultáneamente continuas.*

Prueba. Por el Teorema 3.1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathrm{Disc}(f_n)$ es de primera categoría y como $[a,b]$ es un espacio métrico completo, resulta que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Disc}(f_n)$ sigue siendo de primera categoría. Por el Teorema de Categoría de Baire, $G := [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Disc}(f_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{PC}(f_n)$ es un G_δ-denso en $[a,b]$, y es claro que en cada punto de G todas las funciones son simultáneamente continuas. ■

Teniendo en cuenta que $[a,b]$ es un espacio Polaco y, en consecuencia, un espacio hereditariamente de Baire, entonces combinando los resultados de los Teorema 1.12.17, página 99, Teorema 2.2.58, página 310, Teorema 3.1.5 y Teorema 3.1.3, página 479, se logra obtener el siguiente corolario.

Corolario 3.1.3. *Para cualquier función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *f es exclusiva.*

(2) *f es puntualmente discontinua.*

(3) *f es escasamente continua.*

(4) *f es fragmentada por $|\cdot|$.*

(5) $\mathrm{PC}(f)$ *es un G_δ-denso en $[a,b]$.*

(6) $f \in \mathfrak{B}_1(X)$.

Ya hemos demostrado que si X es un espacio Polaco y $f \in \mathfrak{B}_1(X)$, entonces $\mathrm{PC}(f)$, el conjunto de los puntos de continuidad de f, es un G_δ-denso en X. Dicho resultado se puede generalizar para espacios de Baire usando tanto el Teorema Grande de Baire así como el Teorema de Categoría de Baire.

Corolario 3.1.4 (Baire). *Sean (X, τ) un espacio de Baire y $f \in \mathfrak{B}_1(X)$. Entonces* $\mathrm{PC}(f)$ *es un G_δ-denso en X.*

Prueba. La separabilidad de $\mathbb{R}$ nos garantiza, para cada $n \in \mathbb{N}$, la existencia de una sucesión $(J_m^n)_{m=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $\operatorname{diam}(J_m^n) < 1/n$ y $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m^n$. Como $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ y cada J_m^n es abierto, el Teorema Grande de Baire nos dice que $f^{-1}(J_m^n)$ es un F_σ; es decir,

$$f^{-1}(J_m^n) \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{m,k}^n$$

donde cada $F_{m,k}^n$ es cerrado en X. De esto se sigue que

$$X \;=\; \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{m,k}^n,$$

y entonces, por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.8.6, página 50), el conjunto

$$G_n \;=\; \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}\big(F_{m,k}^n\big)$$

es un abierto denso en X. Por una nueva aplicación del Teorema de Categoría de Baire, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ constituye un G_δ-denso en X y puesto que la oscilación de f en los puntos de G_n es menor que $1/n$, resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \mathrm{PC}(f).$$

Esto demuestra que $\mathrm{PC}(f)$ es denso en X y como dicho conjunto siempre es un G_δ, la prueba concluye. ■

El segundo resultado interesante se debe a H. Lebesgue [285] y dice lo siguiente:

Teorema 3.1.6 (Lebesgue). *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$.

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de $[0,1]$ tal que*

$$[0,1] \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \qquad y \qquad \operatorname{diam}\big(f(K_n)\big) \;<\; \varepsilon.$$

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$ y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para cada $t \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$ definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$F_n \;=\; \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{ t \in [0,1] : |f_n(t) - f_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

La continuidad de las funciones f_n nos asegura que cada F_n es cerrado. Como $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para cada $t \in [0,1]$, se sigue que

$$[0,1] \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

En efecto, sea $t \in [0,1]$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{6}$ para todo $m \geq n_0$. Observemos ahora que si $m \geq n_0$, entonces

$$|f_{n_0}(t) - f_m(t)| \;\leq\; |f_{n_0}(t) - f(t)| \;+\; |f(t) - f_m(t)| \;<\; \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \;=\; \frac{\varepsilon}{3},$$

lo cual significa que $t \in F_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Sea $(J_k)_{k=1}^{\infty}$ un cubrimiento numerable de $\mathbb{R}$ por intervalos cerrados de longitud $< \varepsilon/3$ y, para cada par de enteros positivos n y k, pongamos $H_{n,k} = F_n \cap f_n^{-1}(J_k)$. Entonces cada $H_{n,k}$ es cerrado y

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}.$$

Además, $\operatorname{diam}\big(f(H_{n,k})\big) < \varepsilon$ puesto que, si $s,t \in H_{n,k}$, entonces

$$|f(s) - f(t)| \le |f(s) - f_n(s)| + |f_n(s) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

La sucesión $\{H_{n,k} : n,k \in \mathbb{N}\}$ que la enumeramos por $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ da por finalizada ésta implicación.
$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que (b) se cumple y sea F un subconjunto no vacío de $[0,1]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escojamos, por la hipótesis, una sucesión $(K_n^k)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de $[0,1]$ tal que

$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^k \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam}\big(f(K_n^k)\big) < \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Siendo $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(F \cap K_n^k\big)$ un espacio de Baire, se sigue del Teorema 1.8.6, página 50, que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}_F \big(F \cap K_n^k\big)$$

es un G_δ-denso en F. Veamos ahora que $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_k$ (el cual sigue siendo, por el Teorema 1.8.1, un G_δ-denso en F) está contenido en $\mathrm{PC}(f|_F)$. En efecto, sea $x \in G$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un n_k tal que $x \in \operatorname{int}_F \big(F \cap K_{n_k}^k\big)$. Ya que $\operatorname{diam}(f(K_{n_k}^k)) < \frac{1}{k}$, se sigue que $\operatorname{osc}\big(f|_F, x\big) < 1/k$, y como $k \in \mathbb{N}$ era arbitrario, concluimos que $x \in \mathrm{PC}(f|_F)$. Un llamado al Teorema Grande de Baire, nos revela que $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$. La prueba es completa. ■

Finalizamos con un resultado demostrado por G. Myerson [326] que puede ser de alguna utilidad.

Teorema 3.1.7 (Myerson). *Sea S un subconjunto de $[0,1]$. Una condición necesaria y suficiente para que exista una función $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$ tal que $\big\{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\big\} = S$ es que S sea un F_σ.*

Prueba. Supongamos que existe una función $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$ tal que $\big\{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\big\} = S$. Puesto que $S = f^{-1}(U)$, donde U es el abierto $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el Teorema Grande de Baire nos dice que S es un F_σ.

Supongamos ahora que S es un F_σ y escribamos $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde los $F_1, F_2, \ldots$ son conjuntos cerrados tales que $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$. Definamos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{si } x \in F_k \setminus F_{k-1},\ k = 1,2,\ldots \\ 0, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Nótese que $f^{-1}(\{1/k\}) = F_k \cap F_{k-1}^c$, siendo la intersección de un conjunto cerrado con un conjunto abierto, se puede expresar tanto como un conjunto F_σ así como un conjunto G_δ. Sea U un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$. Existen dos posibilidades para U:

(1) U contiene al punto 0. En este caso, U contiene a todos los números de la forma $1/k$ salvo una cantidad finita. De esto se sigue que $f^{-1}(U)$ es el complemento de una unión finita de conjuntos de la forma $f^{-1}(\{1/k\})$. Puesto que cada $f^{-1}(\{1/k\})$ es un G_δ, su unión finita también es un G_δ, por lo que $f^{-1}(U)$ resulta ser un F_σ.
(2) U no contiene a 0. Entonces $f^{-1}(U)$ es una unión a lo sumo numerable (posiblemente finita, posiblemente vacía) de conjuntos de la forma $f^{-1}(\{1/k\})$, cada uno de los cuales es un F_σ y, por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es un F_σ.
En cualquier caso podemos aplicar el Teorema Grande de Baire para concluir que $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$. ■

Comentario Adicional 3.1.2 (1) La equivalencia $(a) \Leftrightarrow (c)$ en el Teorema Grande de Baire es la que demuestra R. Baire en su tesis de 1899, mientras que la condición (d) aparece en un artículo de Denjoy (1915), ([121], pág. 184). Por otro lado, la condición (b) se encuentra en un artículo de Lebesgue ([283]) y no expresa otra cosa sino que la función f es medible. En los libros [163], [190] y [253] se pueden ver, por ejemplo, demostraciones del Teorema Grande de Baire.

(2) Notemos también que la condición (b) en el Teorema Grande de Baire se puede reemplazar por la siguiente afirmación:

(b') $f^{-1}(F)$ *es un* G_δ *para cualquier conjunto cerrado* F.

(3) Si X es un espacio de Baire, Y es un espacio métrico separable y si definimos

$$f \in \mathfrak{B}_1(X,Y) = \left\{ f \in Y^X : \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in X, \ \text{ donde } f_n : X \to Y \text{ es continua, } \ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

entonces $\mathrm{PC}(f)$ también es un G_δ-denso en X. La prueba es idéntica a la anterior mutatis mutandi.

(4) Observe que los conjuntos cerrados en la condición (c) del Teorema Grande de Baire se pueden reemplazar por conjuntos perfectos para obtener las equivalencias (a) y (c). Esta observación será de gran utilidad para verificar, de modo más sencillo, que ciertas funciones son de la primera clase de Baire.

(5) Sean (T,τ) un espacio topológico de Hausdorff y (X,d) un espacio de métrico. Dada una clase $\mathcal{H}$ de subconjuntos de T, una función $f : T \to X$ se dice que es **σ-fragmentada por conjuntos de** $\mathcal{H}$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(T_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{H}$ tal que $T = \bigcup\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ y cada T_n tiene la propiedad

(P_ε) *Para cada subconjunto no vacío* C *de* T_n*, existe un subconjunto abierto* V *de* T *tal que* $V \cap C \neq \varnothing$ *y* $\operatorname{diam}(f(V \cap C)) < \varepsilon$

Si $\mathcal{H}$ es la familia de todos los subconjuntos (resp. cerrados) de T, entonces diremos que f es **σ-fragmentada** (resp. **σ-fragmentada por conjuntos cerrados**).

En [237], Jayne, Orihuela, Pallarés y Vera generalizan el resultado de Lebesgue del modo siguiente:

‖► *Si* (T,τ) *es un espacio topológico de Hausdorff y* (X,d) *es un espacio métrico, entonces cualquier función* $f \in \mathfrak{B}_1(T,X)$ *es* σ*-fragmentable por conjuntos cerrados. En particular, si* X *es separable entonces, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una sucesión* $(K_n)_{n=1}^\infty$ *de subconjuntos cerrados de* E *tal que*

$$E = \bigcup_{n=1}^\infty K_n \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam}(f(K_n)) < \varepsilon.$$

(6) Otros tipos de funciones que pertenecen a $\mathfrak{B}_1[0,1]$ son las funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que son *aproximadamente continuas* ([190], Theorem 14.9, p. 228). Similarmente, las derivadas aproximadas de las funciones aproximadamente continuas pertenecen a $\mathfrak{B}_1[0,1]$ ([190], Theorem 14.12, p. 229).

En las equivalencias $(a),(b)$ y (c) del Teorema Grande de Baire podemos reemplazar a X por un espacio métrico completo arbitrario y a $\mathbb{R}$ por cualquier espacio de Banach Y provisto de la topología de la norma. En efecto, Charles Stegall ([413], Theorem 4) demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.1.8 (Teorema Grande de Baire en espacios de Banach). *Sea $f:K\to X$ una función, donde (K,d) es un espacio métrico completo y $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(1) *f es de la primera clase de Baire; es decir, $\lim_{n\to\infty}\| f(x)-f_n(x)\|=0$ para cada $x\in X$ donde, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n:(K,d)\to(X,\|\cdot\|)$ es una función continua;*

(2) *$f|_F$ tiene un punto de continuidad para cada subconjunto cerrado F de K;*

(3) *$f|_F$ tiene un punto de continuidad para cada subconjunto compacto F de K;*

(4) *$f^{-1}(H)$ es un G_δ para cada subconjunto cerrado H de X;*

(5) *$h\circ f\in\mathfrak{B}_1(K)$ para cada función continua $h:X\to\mathbb{R}$.*

Los siguientes resultados constituyen sólo una pequeña muestra de las aplicaciones del *Teorema Grande de Baire en espacios de Banach* en combinación con el Lema 2.2.25.

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Dado un subconjunto ω^*-compacto K de X^*, es posible que no exista ningún punto de K donde la aplicación identidad $\mathrm{Id}:(K,\omega^*)\to(K,\|\cdot\|)$ sea continua. Sin embargo, si $K=(B_{X^*},\omega^*)$ es norma-fragmentado, entonces Id posee abundantes puntos de continuidad. En efecto, por el Teorema 2.2.56, página 305, sabemos que si $K=(B_{X^*},\omega^*)$ es norma-fragmentado, entonces Id es continua en un subconjunto G_δ-denso de (K,ω^*). En realidad, cuando X es separable y $K=(B_{X^*},\omega^*)$ es norma-fragmentado, podemos decir algo más sobre Id: que dicha aplicación es de la primera clase de Baire.

Teorema 3.1.9. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La función identidad* $\mathrm{Id}:(B_{X^*},\omega^*)\to(B_{X^*},\|\cdot\|)$ *es de la primera clase de Baire.*

(b) *La función identidad* $\mathrm{Id}:(B_{X^*},\omega^*)\to(B_{X^*},\|\cdot\|)$ *es continua sobre un subconjunto G_δ-denso de (B_{X^*},ω^*).*

(c) *(B_{X^*},ω^*) es norma-fragmentable.*

Prueba. Puesto que X es separable, el conjunto (B_{X^*},ω^*) es un espacio métrico completo y, por consiguiente, $(a)\Leftrightarrow(b)$ es consecuencia directa del Teorema 3.1.8, mientras que la implicación $(b)\Rightarrow(c)$ sigue del Teorema 2.2.56, página 305. Para demostrar $(c)\Rightarrow(a)$, supongamos que (c) se satisface y sea F un subconjunto ω^*-cerrado de B_{X^*}. Dado cualquier $\varepsilon>0$ existe, por la norma-fragmentabilidad de (B_{X^*},ω^*), un subconjunto abierto G de (B_{X^*},ω^*) tal que $G\cap F\neq\varnothing$ y $\|\cdot\|-\mathrm{diam}(G\cap F)<\varepsilon$. Esto, por supuesto, lo que nos muestra es que Id es continua sobre dicho conjunto. Como F es arbitrario, un llamado al Teorema Grande de Baire en espacios de Banach nos revela que Id es una función de la primera clase de Baire. ■

Recordemos que si X es un espacio numerablemente Čech-completo, K un espacio topológico de Hausdorff compacto, $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua y $\varphi : X \to C(K)$ la función asociada definida por la regla $\varphi(x)(y) = f(x,y)$ para todo $x \in X$ y todo $y \in K$, entonces el Lema 2.2.25 establece que:

Para cualquier $x \in X$, f es continua en cualquier punto de $\{x\} \times K$ si, y sólo si, la correspondiente función $\varphi : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en x. (★★)

(7) *Sean (X,d) un espacio métrico completo, K un espacio de Hausdorff compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Entonces la función asociada $\varphi : X \to C(K)$ definida por $\varphi(x)(y) = f(x,y)$ es de la primera clase de Baire; es decir, $\varphi \in \mathfrak{B}_1(X, C(K))$.*

Prueba. Sea F un subconjunto cerrado de X. Puesto que F es un espacio métrico completo, se sigue del Teorema Grande de Namioka que existe un subconjunto G_δ-denso G de F tal que f es continua en cada punto de $G \times K$. Por el Lema 2.2.25, o (★★), se deduce que $\varphi|_F$ es continua sobre G. Un llamado al Teorema Grande de Baire para espacios de Banach da por finalizada la prueba. ■

(8) *Sean (Z,d) un espacio métrico completo y $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces, toda función continua $f : (Z,d) \to (X, \omega)$ pertenece a $\mathfrak{B}_1(Z,X)$.*

Prueba. Como siempre, el espacio compacto (B_{X^*}, ω^*) será denotado por K. Recordemos que X puede ser identificado con un subespacio norma-cerrado de $C(K)$ vía el operador $T : X \to C(K)$ definido por $T(x) = \widehat{x}|_K$, donde $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$. Sabemos que T es un homeomorfismo (no sobreyectivo) cuando X transporta la topología débil y $C(K)$ la topología puntual τ_p. De esto se sigue que la función $\widehat{f} : Z \times K \to \mathbb{R}$ definida por $\widehat{f}(t,x^*) = x^*(f(t))$ es separadamente continua y, por el ejemplo anterior, tenemos que $f : (Z,d) \to (X, \|\cdot\|) \subseteq C(K)$ es de la primera clase de Baire. ■

Este teorema fue probado por Srivatsa [411] usando otras herramientas. Otra prueba de este resultado se puede ver en la tesis de Licenciatura de David H. Lorenzo [297], Teorema 4.9, pág. 66.

(9) *Sean (Z,d) un espacio métrico completo, $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Asplund y $f : (Z,d) \to (X^*, \omega^*)$ una función continua y acotada sobre Z. Entonces $f : (Z,d) \to (X^*, \|\cdot\|)$ es de la primera clase de Baire.*

Prueba. Se sigue del Teorema de Namioka-Phelps-Stegall (Teorema 2.2.56, pág. 305), que el conjunto (B_{X^*}, ω^*), por ser X un espacio de Asplund, es norma-fragmentado y, por consiguiente, para cualquier conjunto ω^*-cerrado A de B_{X^*}, la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (A, \omega^*) \to (A, \|\cdot\|)$ posee, gracias al Teorema 2.2.52, pág. 301, al menos un punto de continuidad. Un llamado al Teorema Grande de Baire para espacios de Banach nos revela que la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*}, \|\cdot\|)$ es de la primera clase de Baire. Esto, por supuesto, implica que la aplicación $\mathrm{Id} \circ f = f : (Z,d) \to (X^*, \|\cdot\|)$ es de la primera clase de Baire. ■

Sea (K,d) un espacio compacto y $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Denotemos por $WC(K,X)$ el espacio de todas las funciones $f : K \to (X, \omega)$ que son continuas. Un resultado de T.S.S.R.K. Rao [366] establece que:

(10) *Si (K,d) es un espacio métrico compacto y $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, entonces*

$$WC(K,X) \subseteq \mathfrak{B}_1(K,X).$$

Más información sobre otros resultados y algunos criterios de compacidad sobre el espacio $\mathfrak{B}_1(K,X)$ pueden ser encontrados en el artículo de Mercourakis-Stamati [308].

3.2. Algunos ejemplos de funciones que pertenecen a $\mathfrak{B}_1(X)$

En el caso particular en que $X=[0,1]$, mostraremos algunas clases de funciones que están incluidas en $\mathfrak{B}_1(X)$ exhibiendo, en algunos casos, tanto la sucesión de funciones continuas que converge a la función dada así como una demostración usando El Teorema Grande de Baire.

(1) $C[0,1]\subseteq\mathfrak{B}_1[0,1]$.

(2) *Si* $SC[0,1]$ *denota todas las funciones* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *que son semicontinuas (inferiormente o superiormente), entonces* $SC[0,1]\subseteq\mathfrak{B}_1[0,1]$.

Prueba. Es suficiente demostrar que si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente, entonces $f\in\mathfrak{B}_1[0,1]$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ por

$$f_n(x) \;=\; \inf_{t\in[0,1]}\big\{f(t)+n|t-x|\big\},\quad x\in[0,1].$$

Veamos que cada f_n es continua. En efecto, como f es acotada por debajo (toda función semicontinua inferiormente es acotada por debajo pues alcanza su mínimo en $[0,1]$), cada f_n toma sus valores en $\mathbb{R}$. Observemos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente. Para cada $x,y\in[0,1]$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \inf_{t\in[0,1]}\big\{f(t)+n|t-x|\big\}\\ &\le \inf_{t\in[0,1]}\big\{f(t)+n|t-y|+n|y-x|\big\}\\ &= f_n(y)+n|x-y|, \end{aligned}$$

y por simetría, intercambiando los papeles de x y y, se sigue $|f_n(x)-f_n(y)|\le n|x-y|$ y así, cada f_n es continua sobre $[0,1]$. Nos resta probar que $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ para cada $x\in[0,1]$. Fijemos $x\in[0,1]$. Por la definición de f_n tenemos que $f_n(x)\le f(t)+n|t-x|$ para todo $t\in[0,1]$; en particular, para $t=x$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\;\le\; f(x).$$

Sea $r\in\mathbb{R}$ y supongamos que $r<f(x)$. Puesto que f es semicontinua inferiormente en x, existe un $\delta>0$ tal que $f(t)>r$ para todo $t\in(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]:=J$. Para estos valores de t,

$$\inf_{t\in J}\big\{f(t)+n|t-x|\big\}\;\ge\; r$$

Para los otros valores de t; es decir, para los $t\in[0,1]\setminus J$, tendremos que $|t-x|\ge\delta$ y así,

$$\inf_{t\in[0,1]\setminus J}\big\{f(t)+n|t-x|\big\}\;\ge\; -M+n\delta$$

donde $-M$ es una cota inferior de f. De aquí que $f_n(x)\ge r$ para todo n suficientemente grande. Esto muestra que $\lim_{n\to\infty}f_n(x)\ge r$, y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\;\ge\; f(x)$$

puesto que $f(x) > r$ era arbitrario. La prueba es completa. ■

Otra prueba. Uno puede obtener una demostración mucho más breve del resultado anterior si se invoca al Teorema 3.1.3. En efecto, para ello sólo tenemos que verificar que los conjuntos

$$\{x \in [0,1] : f(x) < r\} \qquad \text{y} \qquad \{x \in [0,1] : f(x) > r\}$$

son F_σ para cada $r \in \mathbb{R}$. Observemos que por ser f semicontinua inferiormente, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado en X y, en consecuencia,

$$\{x \in [0,1] : f(x) < r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : f(x) \leq r - 1/n\}$$

es un F_σ. Además, como $[0,1] \setminus \{x \in [0,1] : f(x) \leq r\}$ es abierto y ya que todo conjunto abierto en un espacio métrico es un F_σ, concluimos que

$$\{x \in [0,1] : f(x) > r\} = [0,1] \setminus \{x \in [0,1] : f(x) \leq r\}$$

también es un F_σ.

(3) *Si* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tiene un número finito de discontinuidades, entonces* $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$.

Prueba. Sin perder generalidad podemos asumir, y así lo haremos, que los puntos de discontinuidad de f ocurren en $(0,1)$. Denotemos por $\mathrm{Disc}(f) = \{d_1, d_2, \ldots, d_p\}$ el conjunto de discontinuidades de f, donde $p \in \mathbb{N}$. Escojamos ahora una sucesión decreciente $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos que cumpla con lo siguiente:

a) $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, y

b) los intervalos $[d_1 - \varepsilon_1, d_1 + \varepsilon_1], [d_2 - \varepsilon_1, d_2 + \varepsilon_1], \ldots, [d_p - \varepsilon_1, d_p + \varepsilon_1]$ son disjuntos dos a dos y todos contenidos en $(0,1)$.

Para cada entero positivo n, sean

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{p} (d_k - \varepsilon_n, d_k + \varepsilon_n) \qquad \text{y} \qquad E_n = \big([0,1] \setminus U_n\big) \cup \{d_k : 1 \leq k \leq p\},$$

y definamos la función g_n sobre E_n por

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus U_n, \\ f(d_k) & \text{si} \quad x = d_k,\ k = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Puesto que cada E_n es un conjunto cerrado y $g_n|_{E_n}$ es continua sobre E_n, podemos construir una extensión f_n de g_n sobre $[0,1]$ que es continua sobre $[0,1]$. Es realmente fácil verificar que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f sobre $[0,1]$. Por esto, $f \in \mathfrak{B}_1[0,1]$. ■

Observación. De nuevo, haciendo uso del Teorema 3.1.3 y la Observación 3.1.2 (4) podemos dar una demostración más corta del resultado anterior. En efecto, sea F un subconjunto perfecto y no vacío de $[0,1]$. Como F es infinito (no numerable), entonces $f|_F$ posee al menos un punto de continuidad.

(4) *Toda función escalera* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *pertenece a* $\mathfrak{B}_1[0,1]$.

Prueba. Recordemos que una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una *función escalera* si ella se puede escribir en la forma
$$f(x)\;=\;\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{J_i}$$
donde $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ y los J_i, $i=1,\ldots,n$ son intervalos de $[0,1]$ disjuntos dos a dos. Claramente toda función escalera posee un número finito de discontinuidades y gracias al resultado anterior ella pertenece a $\mathfrak{B}_1[0,1]$. ■

Sabemos que $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\notin\mathfrak{B}_1[0,1]$; sin embargo, uno puede usar el resultado anterior para demostrar que $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\in\mathfrak{B}_2[0,1]$, donde $\mathfrak{B}_2[0,1]$ es la clase de Baire-2; es decir, los elementos de $\mathfrak{B}_2[0,1]$ son limites de sucesiones de funciones que pertenecen a $\mathfrak{B}_1[0,1]$. En efecto, si $\{q_1,q_2,\ldots\}$ es una enumeración de los racionales en $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ y si definimos
$$f_n\;=\;\chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}},$$
resulta que cada f_n es una función escalera y, por lo anterior, $f_n\in\mathfrak{B}_1[0,1]$. Claramente
$$\lim_{n\to\infty}f_n\;=\;\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\in\mathfrak{B}_2[0,1].$$

(5) *En general, si* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *es una función con un conjunto a lo más numerable de discontinuidades, entonces* $f\in\mathfrak{B}_1[0,1]$.

Prueba. Sea $F\subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío. Entonces F es no numerable por lo que $f|_F$ posee al menos un punto de continuidad. El resultado sigue del Teorema 3.1.3. ■

(6) *Si* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *es de variación acotada sobre* $[0,1]$, *entonces* $f\in\mathfrak{B}_1[0,1]$.

Prueba. Puesto que f es la diferencia de dos funciones monótonas y ya que toda función monótona posee a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad, entonces $\mathrm{Disc}(f)$ es a lo más numerable. Sea F cualquier subconjunto perfecto no vacío de $[0,1]$. Como F es no numerable, entonces $f|_F$ posee al menos un punto de continuidad. El resultado sigue del Teorema 3.1.3. ■

(7) *Si* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *es diferenciable en cada punto de* $[0,1]$, *entonces* $f'\in\mathfrak{B}_1[0,1]$. *En particular,* f' *es continua en un subconjunto* G_δ*-denso de* $[0,1]$.

Esto fue establecido en el **Ejemplo** 2 de la página 101. Este ejemplo muestra que, si bien existen derivadas acotadas que son nunca Riemann integrables, no pueden existir derivadas acotadas que sean siempre discontinuas en todo su dominio.

(8) *Sea* $f\in\mathfrak{B}_1(X)$. *Si* $g:X\to\mathbb{R}$ *es una función tal que* $H_\varepsilon=\{x\in X:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\}$ *es finito para cada* $\varepsilon>0$, *entonces* $g\in\mathfrak{B}_1(X)$.

Prueba. Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos la función $g_n:X\to\mathbb{R}$ definida por
$$g_n(x)\;=\;\begin{cases}g(x) & \text{si }\;|f(x)-g(x)|>\frac{1}{n},\\ f(x) & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es claro que $g_n\in\mathfrak{B}_1(X)$ y como la convergencia $\lim_{n\to\infty}g_n=g$ es uniformemente sobre X, entonces el Teorema 3.1.2 nos asegura que $g\in\mathfrak{B}_1(X)$. ■

(9) (**Lebesgue**). *Cualquier función separadamente continua* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $\mathfrak{B}_1(\mathbb{R}^2)$.

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $j \in \mathbb{Z}$, definamos las funciones $h_{jn} : \mathbb{R} \to [0,1]$ por

$$h_{jn}(x) \;=\; \text{máx}\{\,0,\, 1 - |\,nx - j|\,\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que, fijado n, la colección $(h_{jn})_{j=-\infty}^{+\infty}$ es una partición de la unidad para $\mathbb{R}$; es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{jn}(x) \;=\; 1$$

y $h_{jn}(x) \neq 0$ a lo sumo para dos j's. Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x,y) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{jn}(x)\, f\Big(\frac{j}{2^n}, y\Big)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, son continuas y se cumple que $f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ■

Observemos que las funciones f_n son, gracias a que $(h_{jn})_{j=-\infty}^{+\infty}$ es una partición de la unidad, combinaciones convexas de funciones continuas de y, con coeficientes que son funciones continuas de x y que el conjunto $\{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Este resultado aparece por primera vez en el primer artículo publicado por H. Lebesgue en 1898 ([284]). Más recientemente, en 1981, W. Rudin [388] obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 (Rudin). *Sea X un espacio topológico K_σ-generado transportando una medida estrictamente positiva μ. Si K es cualquier espacio de Hausdorff compacto, entonces toda función separadamente continua $f : X \times K \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire.*

La demostración del resultado de Rudin requiere ciertas definiciones y algunos resultados previos. Comencemos recordando que si X es un espacio topológico de Hausdorff X, un subconjunto F de X se llama σ-compacto si existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos de X tal que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Un espacio topológico de Hausdorff X se llama **K_σ-generado** si es existe un conjunto σ-compacto que es denso en X. Notemos que todo espacio topológico separable es K_σ-generado, así como todo espacio de Hausdorff compacto. En general, todo espacio de Banach WCG es K_σ-generado respecto a la topología débil. En efecto, si X es WCG, entonces existe un subconjunto débilmente compacto F de X tal que $\overline{[F]} = X$. Pongamos $K = \overline{\text{co}}(F \cup -F)$. El teorema de Krein-Šmulian nos dice que K es débilmente compacto y, además, convexo y simétrico. Si ahora definimos $K_n = nK$ para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}$.

Un espacio topológico de Hausdorff X **transporta, o soporta, una medida estrictamente positiva** si existe una medida de probabilidad de Borel μ sobre X tal que $\mu(U) > 0$ para cualquier conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$. También, dado $n \in \mathbb{N}$, diremos que un espacio métrico (X,d) admite una **partición de la unidad localmente finita de malla** $1/n$, si existe una familia $(h_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda}$ de funciones continuas $h_{\alpha,n} : X \to [0,1]$ tales que

(a) $\displaystyle\sum_{\alpha\in\Lambda} h_{\alpha,n}(x) = 1$ para todo $x \in X$,

(b) para cada $x \in X$, existe un entorno abierto V_x de x tal que todas las funciones $h_{\alpha,n}$, salvo un número finito, son idénticamente nulas sobre V_x y,

(c) diam$\big(\mathrm{sop}(h_{\alpha,n})\big) \leq 1/n$, donde $\mathrm{sop}(h_{\alpha,n}) = \overline{\{x \in X : h_{\alpha,n}(x) \neq 0\}}$.

Es un hecho conocido que todo espacio métrico admite, para cada $n \in \mathbb{N}$, una partición de la unidad localmente finita de malla $1/n$ (véase, por ejemplo, [324], Teorema 41.4 p. 293).

Vamos ahora a probar algunos resultados que son necesarios para la prueba del teorema de Rudin.

Lema 3.2.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y Y un espacio topológico de Hausdorff. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(h_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda}$ una partición de la unidad localmente finita de X de malla $1/n$ y sea D un subconjunto denso de X tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $h_{\alpha,n}(x_{\alpha,n}) > 0$ para algún $x_{\alpha,n} \in D$. Suponga que $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función que satisface*

(a) *$f^y : X \to \mathbb{R}$ es continua para cada $y \in Y$, y*

(b) *$f_x : Y \to \mathbb{R}$ es continua para cada $x \in D$.*

Si, para cada entero positivo n, se define $F_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x,y) \;=\; \sum_{\alpha\in\Lambda} h_{\alpha,n}(x)\, f(x_{\alpha,n}, y), \qquad (*)$$

entonces cada F_n es continua sobre $X \times Y$, y $f(x,y) = \lim_{n\to\infty} F_n(x,y)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Prueba. Observemos que la continuidad de F_n es una consecuencia inmediata de la local finitud de la familia $(h_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda}$. Fijemos $(x,y) \in X \times Y$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $f^y : X \to \mathbb{R}$ es continua en x, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(\xi,y) - f(x,y)| < \varepsilon$ para todo $\xi \in U(x, 1/n_0)$. Si $n > n_0$ y $\alpha \in \Lambda$ es un índice para el cual $h_{\alpha,n}(x) > 0$, entonces nuestra hipótesis sobre $(h_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda}$ nos muestra que $d(x, x_{\alpha,n}) < 1/n_0$, de modo que $|f(x_{\alpha,n},y) - f(x,y)| < \varepsilon$. Se sigue de $(*)$ y la definición de $(h_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda}$ que $|F_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Esto prueba que $F_n(x,y)$ converge a $f(x,y)$. ■

Recordemos que:

‖► *Si X es un espacio de Hausdorff compacto y si alguna sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ separa los puntos de X, entonces X es metrizable.*

En efecto, la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n(1 + |f_n(x) - f_n(y)|)}$$

para todo $x, y \in X$ hace el trabajo. ■

Lema 3.2.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff.*

(a) *Si X es K_σ-generado y si alguna sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ separa los puntos del conjunto σ-compacto, entonces X es separable.*

(b) *Si X es separable, entonces cualquier subconjunto compacto de $(C(X),\tau_p)$ es metrizable.*

(c) *Si X es K_σ-generado, entonces cualquier subconjunto separable y τ_p-compacto de $C(X)$ es metrizable.*

Prueba. (a) Como X es K_σ-generado, existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos compactos de X tal que $X = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty K_n}$. Sea $F = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(K)$ separando los puntos de F, entonces $(f_n)_{n=1}^\infty$ separa los puntos de cada K_n y, así, por la observación anterior, cada K_n es separable. De esto se sigue que F es separable y como $\overline{F} = X$, concluimos que X es separable.

(b) Sea E un subconjunto no vacío de $C(X)$ tal que (E,τ_p) es compacto. Como X es separable, podemos elegir una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ densa en X. Definamos, para cada $n\in\mathbb{N}$, la función $\varphi_n : E\to\mathbb{R}$ por $\varphi_n(f) = f(x_n)$ para cada $f\in E$. Se sigue que cada φ_n es τ_p-continua y como $(x_n)_{n=1}^\infty$ es densa en X, resulta que el conjunto $\{\varphi_n : n = 1,2,\ldots\}$ separa los puntos de (E,τ_p). Por la parte (a), aplicada al conjunto (E,τ_p), se concluye que (E,τ_p) es metrizable.

(c) Sea E un subconjunto separable de $C(X)$ tal que (E,τ_p) es compacto. Asociemos, a cada $x\in X$, el conjunto cerrado

$$J(x) \;=\; \big\{z\in X : f(z) = f(x) \textit{ para todo } f\in E\big\},$$

y sea T el correspondiente espacio de identificación; es decir, T es el conjunto de todas las clases de equivalencias $J(x)$ y la topología sobre T se obtiene declarando que un subconjunto V de T es abierto si, y sólo si, $J^{-1}(V)$ es abierto en X. Bajo ésta identificación, a cada $f\in E$ le corresponde un único $\widetilde{f}$ sobre T tal que $f = \widetilde{f}\circ J$. Es claro que $\widetilde{f}$ es continua. Más aún, $\widetilde{E} = \big\{\widetilde{f} : f\in E\big\}$ separa los puntos de T, y la aplicación

$$\psi : E\to\widetilde{E} \quad \text{definida por} \quad \psi(f) = \widetilde{f}$$

es un homeomorfismo de (E,τ_p) sobre $(\widetilde{E},\tau_p)$. Puesto que (E,τ_p) es separable, existe un subconjunto A de E que es τ_p-denso y numerable. De aquí se sigue que A y E inducen la misma relación de equivalencia en X y, por consiguiente, $\widetilde{A} = \{\widetilde{f} : f\in A\}$ separa los puntos de T. Puesto que J es continua, por la parte (a), T es separable y gracias a la parte (b), $(\widetilde{E},\tau_p)$ es metrizable; en particular, (E,τ_p) es metrizable. ■

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema de Rudin.

Prueba del Teorema de Rudin. Nuestro primer objetivo es demostrar el siguiente hecho:

(★) *Sea X un espacio topológico de Hausdorff K_σ-generado soportando una medida estrictamente positiva μ y sea E un subconjunto de $C(X)$ tal que $|g(x)|\le 1$ para todo $g\in E$ y todo $x\in X$. Si (E,τ_p) es compacto, entonces (E,τ_p) es metrizable.*

En efecto, suponga que (E,τ_p) es compacto y sea A un subconjunto infinito numerable de E. Pongamos $K = \overline{A}^{\tau_p}$. Entonces K es τ_p-compacto y, por (c) del Lema 3.2.2, se sigue que K es metrizable.

Sea $g\in(E,\tau_p)$ un punto límite de A. Como (K,τ_p) es un compacto metrizable, existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty$ en A tal que $g_n\to g$ puntualmente. Por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\|_1 \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n - g|\,d\mu \;=\; 0,$$

es decir, A tiene un punto límite en $(E,\|\cdot\|_1)$, donde $\|\cdot\|_1$ es la norma de $L^1(\mu)$. Esto muestra que $(E,\|\cdot\|_1)$ es compacto, en particular, separable. Sea B un subconjunto denso numerable de $(E,\|\cdot\|_1)$. Si $h\in E$, entonces existe una sucesión (h_n) en B tal que

$$\|h_n - h\|_1 \;=\; \int_X |h_n - h|\,d\mu\to 0.$$

De nuevo, por (c) del Lema 3.2.2 aplicado a $\overline{B}^{\tau_p}$, existe alguna subsucesión $(h_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(h_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$h_{n_j}\to h \quad \text{puntualmente}.$$

Aplicando una vez más el Teorema de la Convergencia Dominada, vemos que $\left\| h_{n_j} - h \right\|_1 \to 0$, de donde se concluye que $g = h$ μ-c.s. Pero, como μ es estrictamente positiva, $\mu(U) > 0$ para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, de donde resulta, por la continuidad de g y h, que $g = h$. Esto prueba que $h \in \overline{B}^{\tau_p}$ y, en consecuencia, B es denso en (E, τ_p); es decir, (E, τ_p) es separable. Un llamado, una vez más a la parte (c) del Lema 3.2.2, nos revela que (E, τ_p) es metrizable. □

Una vez establecido (★), prosigamos con la demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $|f(x,y)| \leq 1$ para todo $(x,y) \in X \times K$. Sea

$$E_0 = \left\{ f^y : y \in K \right\}.$$

Entonces $E_0 \subseteq C(X)$. Afirmamos que la aplicación $\pi : K \to (E_0, \tau_p)$ definida por $\pi(y) = f^y$ es continua y sobreyectiva.

En efecto, por definición π es sobreyectiva. Para probar la continuidad de π, fijemos $y \in K$ y sea V un τ_p-entorno de f^y en (E_0, τ_p). Entonces existen puntos $x_1, \ldots, x_n$ en X y un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\{ f^z \in E_0 : |f^z(x_i) - f^y(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \right\} \subseteq V.$$

Si ahora definimos

$$U = \left\{ z \in K : |f^z(x_i) - f^y(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \right\},$$

resulta que $\pi(U) \subseteq V$. La continuidad de las funciones f_x nos muestran que U es abierto en K y, por consiguiente, π es continua. Como consecuencia de lo anterior tenemos que (E_0, τ_p) es compacto y, además, homeomorfo al espacio cociente $K/\!\sim$, donde la relación $\sim$ se define sobre K por: $x \sim y$ si, y sólo si, $\pi(x) = \pi(y)$. Se sigue entonces de (★), que (E_0, τ_p) es metrizable. Para finalizar la demostración, definamos $\psi : X \times (E_0, \tau_p) \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x, f^y) = f(x,y).$$

Puesto que ψ es separadamente continua y E_0 posee la topología cociente módulo π, se sigue que ψ también es separadamente continua. Además, siendo (E_0, τ_p) metrizable, el Lema 3.2.1 nos dice que ψ es el limite de una sucesión de funciones continuas (ψ_n), donde cada ψ_n es de la forma

$$\psi_n(x, f^y) = \sum_{\alpha} h_\alpha(f^y) f(x, y_\alpha).$$

Pongamos $F_n(x,y) = \psi_n(x, \pi(y))$. Entonces $F_n \in C(X \times K)$, y

$$\operatorname*{lím}_{n\to\infty} F_n(x,y) = \operatorname*{lím}_{n\to\infty} \psi_n(x, f^y) = \psi(x, f^y) = f(x,y)$$

para todo $(x,y) \in X \times K$. ■

Finalmente queremos hacer mención de otra formulación equivalente para funciones que son de la primera clase de Baire. El siguiente resultado es de Peng-Yee Lee, Wee-Kee Tang y Dongsheng Zhao [288] y establece que:

Teorema 3.2.2 (Lee-Tang-Zhao). *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios Polacos y sea $f : X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *f es de la primera clase de Baire.*

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $\delta : X \to (0, \infty)$ tal que*

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad \textit{siempre que} \qquad d_X(x,y) < \min\{\delta(x), \delta(y)\}.$$

Combinando los resultados del Lema 3.1.3 y el Teorema 3.1.4 obtenemos el siguiente resultado de G. Myerson [326]:

Teorema 3.2.3 (Myerson). *Sean X un espacio Polaco y S un subconjunto no vacío de X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Existe una función $f \in \mathfrak{B}_1(X)$ con $S = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

(b) *S es un F_σ.*

3.3. Aplicaciones del Teorema Grande de Baire

Dos resultados fundamentales serán establecidos sin prueba en esta sección. Uno de ellos se debe a H. P. Rosenthal ([380]) el cual establece una elegante y poderosa caracterización de los espacios de Banach que no contienen copias de ℓ^1, mientras que el otro resultado es producto de los esfuerzos de J. Bourgain, D. H. Fremlin y M. Talagrand ([69]) basados en un resultado anterior debido a H. P. Rosenthal y que describe los subconjuntos compactos de $(\mathfrak{B}_1(X), \tau_p)$. Estos resultados son hermosos, sus pruebas profundas pero no triviales y con extraordinarias aplicaciones.

En todo lo que sigue $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Recordemos que si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en X, entonces

$a)$ $(x_n)_{n=1}^\infty$ es **débilmente de Cauchy** si $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$ existe para cada $x^* \in X^*$.

Recordemos que en ℓ_1, las sucesiones débilmente convergentes y las norma convergentes coinciden (Ejemplo **B**-21), página 237). Consideremos la sucesión estándar de ℓ_1, $(e_n)_{n=1}^\infty$, donde para cada entero positivo n, $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ en donde el número 1 sólo aparece en el lugar n. Puesto que $\|e_m - e_n\|_1 = 2$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, resulta que dicha sucesión no puede ser norma convergente y, en consecuencia, no es débilmente convergente. De hecho, $(e_n)_{n=1}^\infty$ no posee ninguna subsucesión que sea débilmente de Cauchy. En efecto, sea $(e_{n_k})_{k=1}^\infty$ cualquier subsucesión de $(e_n)_{n=1}^\infty$ y defina $\xi = (\xi_l)_{l=1}^\infty \in \ell_\infty = \ell_1^*$ del modo siguiente:

$$\xi_l = \begin{cases} 1, & \text{si } l = n_{2k} \text{ para algún } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Entonces, $\big(\langle e_{n_k}, \xi\rangle\big)_{k=1}^\infty$ no es de Cauchy quedando así demostrada nuestra afirmación. Lo que deseamos es estudiar el comportamiento de espacios de Banach que poseen sucesiones que se comporten de modo enteramente similar a la sucesión estándar de ℓ_1. Esto significa que se anda en la búsqueda de alguna sucesión en el espacio de Banach X que contenga una subsucesión que sea equivalente a la base $(e_n)_{n=1}^\infty$ de ℓ_1.

$b)$ $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una **ℓ^1-sucesión** si existe una constante $c > 0$ tal que

$$c\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$.

Observemos que si definimos $C = \sup_{i=1,\dots,n} \|x_i\|$, entonces

$$c\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \le C\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$. Denotemos por $[(e_n)]$ el subespacio lineal de ℓ^1 generado por la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las anteriores desigualdades establecen que la aplicación lineal $T : [(e_n)] \to X$ definida por

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

es un isomorfismo. Puesto que el subespacio $[(e_n)]$ es norma denso en ℓ^1, el isomorfismo T se puede extender de modo único a todo ℓ^1. A dicha extensión la seguiremos denotando por T.

Podemos ahora formular uno de los resultados más profundo e importante sobre la caracterización de los espacios de Banach que no poseen copias isomorfas de ℓ_1.

Teorema 3.3.1. (***Rosenthal-Dor***) *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach (real o complejo). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Toda sucesión acotada en* X *posee una subsucesión débilmente de Cauchy.*

(2) X *no posee copias de* ℓ_1.

Este resultado de Rosenthal-Dor abrió las puertas para un estudio en profundidad de la estructura de los espacios de Banach. Por ejemplo, los libros de Diestel ([129]) y van Dulst ([146]) dan cuentan de la profundidad de ese resultado así como algunas de sus aplicaciones. Cuando uno se asoma por la rendija de la puerta que esconde la estructura de los espacios de Banach, el resultado de Rosenthal-Dor permite descubrir una propiedad de los espacios débilmente secuencialmente completos que era sólo conocida para L^1. En efecto, M. I. Kadec y A. Pełczyński ([243]) habían demostrado que:

L^1 *contiene un subespacio isomórfico a* ℓ_1.

El teorema de Rosenthal-Dor nos conduce a la obtención de un resultado más general que el de Kadec-Pełczyński ya que L^1 es un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo que no es reflexivo (véase, por ejemplo, [381]). Recordemos que un espacio de Banach se dice que es *débilmente secuencialmente completo* si cada sucesión débilmente Cauchy es débilmente convergente.

Corolario 3.3.1. *Sea* X *un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo. Entonces* X *es reflexivo o bien contiene un subespacio isomorfo a* ℓ_1.

Prueba. Supongamos que X no contiene ningún subespacio isomórfico a ℓ_1 y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en B_X. Por el Teorema de Rosenthal-Dor, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión débilmente Cauchy $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ y como X es débilmente secuencialmente completo, $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a algún elemento de B_X. Esto nos dice que B_X es débilmente secuencialmente compacto y, gracias al teorema de Eberlein-Šmulian, B_X es débilmente compacto. Como una consecuencia de un resultado bien conocido de R. C. James sobre compacidad débil, X es reflexivo (ver, por ejemplo, [129], pág. 18). ∎

Antes de formular el resultado de J. Bourgain, D. H. Fremlin y M. Talagrand [69], es menester pasearnos por algunas definiciones y resultados ya conocidos para así poder situarnos en el marco apropiado. Recordemos que:

Si (X,τ) es un espacio topológico de Hausdorff y si $K \subseteq X$, decimos que:

(a) *K es **relativamente secuencialmente compacto** si toda sucesión en K posee una subsucesión convergente en X.*

(b) *K es **relativamente numerablemente compacto** si toda sucesión en K posee un punto de acumulación en X.*

(c) *K es **secuencialmente denso en su clausura** si cada $x \in \overline{K}$ es límite de alguna sucesión de K.*

Situándonos en un espacio métrico cualquiera, el siguiente resultado establece que sucesiones son suficientes para caracterizar a los conjuntos compactos que viven en dichos espacios, una propiedad altamente envidiada por casi todos los espacios topológicos.

$\|$► **(C**1) *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $K \subseteq X$. Son equivalentes:*

(1) *K es relativamente compacto.*

(2) *K es relativamente secuencialmente compacto.*

(3) *K es relativamente numerablemente compacto.*

Este hermoso resultado sigue siendo válido para algunos espacios que no son metrizables. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces, como ya hemos visto, (X,ω) (X provisto con la topología débil) es un espacio no metrizable, y sin embargo, gracias al Teorema de Eberlein-Šmulian, los subconjuntos relativamente compactos en (X,ω) satisfacen las equivalencias dadas en (**C**1).

Los resultados anteriores condujeron a la búsqueda de espacios topológicos más generales que satisfacieran las tres equivalencias anteriores. Nacen así los espacios angelicales.

Definición 3.3.1. *Un espacio topológico de Hausdorff (X,τ) se llama **angelical** si cada subconjunto relativamente numerablemente compacto F de X es:*

(1) *relativamente compacto en X, y*

(2) *secuencialmente denso en su clausura.*

Es un hecho ya establecido que en espacios angelicales las nociones de compacidad, compacidad numerable y compacidad secuencial son equivalentes. Lo que Haskell Rosenthal [381], Jean Bourgain, David Fremlin y Michel Talagrand [69] demuestran, por medio de sofisticadas y nada convencionales técnicas topológicas, es que si X es un espacio Polaco, entonces $\mathfrak{B}_1(X)$, provisto de la topología de la convergencia puntual τ_p, es angelical. Otra prueba de este resultado se puede ver en [146], p.41-42.

Teorema 3.3.2 (Rosenthal-Bourgain-Fremlin-Talagrand). *$(\mathfrak{B}_1(X),\tau_p)$ es angelical para cualquier espacio Polaco (X,τ).*

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sabemos que la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ dada por $\langle Jx, x^*\rangle = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$, es una isometría; es decir, se cumple la igualdad $\|Jx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Esta afortunada circunstancia permite identificar a X con el subespacio norma cerrado $J(X)$ de

X^{**} y pensar a cada $x \in X$ como un funcional lineal ω^*-continuo definido sobre X^*, es decir, identificamos a x con Jx y escribiremos algunas veces $\langle x, x^* \rangle$ como $\langle Jx, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Desde este punto de vista, el Teorema de Goldstine se puede presentar en los siguientes términos: B_X es ω^*-denso en $B_{X^{**}}$; esto es,

$$\overline{B}_X^{\omega^*} = B_{X^{**}}.$$

Por supuesto, esto significa que dado cualquier $x^{**} \in B_{X^{**}}$, existe una *red* $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ en B_X convergiendo a x^{**} en la ω^*-topología. La pregunta natural es: ¿bajo qué condiciones puede uno sustituir redes por sucesiones?, es decir, ¿cuándo puede uno encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en B_X que converja a x^{**} en la ω^*-topología, cualquiera sea $x^{**} \in B_{X^{**}}$? Antes de la aparición del resultado de Odell-Rosenthal, varias soluciones parciales eran conocidas. Por ejemplo:

(1) cuando X es separable y reflexivo,

(2) cuando X^* es separable, o

(3) cuando X^* es débilmente compacto generado (WCG).

En el caso en que X es separable vamos a demostrar, como una aplicación del Teorema Grande de Baire, el siguiente resultado de E. Odell y H. P. Rosenthal (véase, [342] y también [129], Theorem 10, p. 236).

Teorema 3.3.3. (***Odell-Rosenthal***) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach* ***separable****. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X no contiene copias de l_1.*

(b) *Cada elemento de $B_{X^{**}}$ es el ω^*-límite de una sucesión de B_X.*

Los preparativos para la demostración de este resultado requieren de una adecuada interpretación de los elementos que viven en X^{**}. Para ello invocaremos la caracterización del Teorema Grande de Baire. Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 3.3.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un elemento $x^{**} \in X^{**}$ se llama un* ***funcional de la primera clase de Baire*** *si existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \langle Jx_n, x^* \rangle \;=\; \langle x^{**}, x^* \rangle$$

para cada $x^* \in X^*$; es decir, x^{**} es el ω^*-límite de la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Denotaremos por $\mathfrak{B}_1^{**}(X)$ el conjunto de todos los funcionales de la primera clase de Baire en X^{**}, mientras que $\widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$ representará el conjunto de todos los elementos x^{**} en X^{**} tal que, para cada subconjunto ω^*-compacto F de X^*, la restricción de x^{**} a F, $x^{**}|_F$, posee al menos un punto de ω^*-continuidad, es decir, x^{**} es un **funcional ω^*-puntualmente discontinuo**.

Observe que

$$\mathfrak{B}_1^{**}(X) \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X). \tag{OD}_1$$

En efecto, sea $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(X)$ y suponga que (F, ω^*) es un subconjunto compacto de X^*. Entonces (F, ω^*) es un espacio de Baire y por lo tanto $x^{**}|_F \in \mathfrak{B}_1(F)$. Se sigue del Corolario 3.1.4 que $x^{**}|_F$ posee al menos un punto de continuidad, esto es, $x^{**} \in \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$. En el transcurso de esta sección veremos que $\mathfrak{B}_1^{**}(X) = \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$ siempre que X sea separable y no contenga copias de ℓ_1.

Supongamos ahora que nuestro espacio de Banach X es separable y denotemos por K la bola dual $B_{X^*} \subseteq X^*$, provista de la topología ω^*. Entonces K es un espacio métrico compacto y, en particular, un espacio Polaco. En esta sección, $\mathfrak{B}_1(K)$ denotará el espacio de todas las funciones **acotadas** $f : K \to \mathbb{R}$ que son de la primera clase de Baire. Puesto que X puede ser naturalmente identificado con un subespacio norma-cerrado de $C(K)$ y, similarmente, X^{**} puede también ser identificado con un subespacio norma-cerrado de $A_\infty(K)$, el espacio de Banach de todas las funciones afines acotadas sobre K con la norma del supremo, el Teorema de Odell-Rosenthal se puede reescribir del modo siguiente siempre que cada elemento x^{**} de $X^{**} \subseteq A_\infty(K)$ se piense como una función (acotada) definida sobre K.

Teorema de Odell-Rosenthal. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X no contiene copias de l_1.*

(b) $X^{**} \subseteq \mathfrak{B}_1(K)$.

Observe que, desde este punto de vista, el Teorema de Odell-Rosenthal muestra que si X es un espacio de Banach *separable*, entonces su doble dual X^{**}, con la topología ω^*, consiste sólo de funciones de la primera clase de Baire definida sobre la bola unitaria de X^* si, y sólo si, X no contiene copias isomórficas de ℓ_1.

Como un aperitivo para lo que viene vamos a probar el siguiente resultado:

$\|\blacktriangleright$ **(C2)** *Si Ω es un espacio de Hausdorff compacto, entonces $\mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$ y $\mathfrak{B}_1(\Omega)$ son identificables.*

Prueba. En primer lugar notemos que la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : \Omega &\longrightarrow B_{C(\Omega)^*} \\ \omega &\mapsto \delta_\omega \end{aligned}$$

definida por $\delta_\omega(f) = f(\omega)$ para todoa $f \in C(\Omega)$ y toda $\omega \in \Omega$ es una inmersión topológica, lo cual permite identificar a Ω con su imagen en $B_{C(\Omega)^*} = M(\Omega)$. De aquí se sigue que la aplicación

$$\widetilde{\delta} : C(\Omega)^{**} \longrightarrow \ell_\infty(\Omega)$$

definida por

$$(\widetilde{\delta} x^{**})(\omega) = x^{**}(\delta_\omega)$$

para todo $x^{**} \in C(\Omega)^{**}$ y todo $\omega \in \Omega$ está bien definida. Veamos en primer lugar que $\widetilde{\delta}$ asigna, a cada $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$, la función $f := \widetilde{\delta} x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$.

$\|\blacktriangleright$ (C2 a) $f := \widetilde{\delta} x^{**} \in \mathfrak{B}_1(\Omega)$ *siempre que* $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$.

En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $C(\Omega)$ tal que $x^{**} = \omega^* - \text{lím}_{n\to\infty} J f_n$, donde $J : C(\Omega) \to C(\Omega)^{**}$ es la aplicación canónica, es decir,

$$x^{**}(\mu) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(J f_n\big)(\mu) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu, \qquad \text{para todo } \mu \in C(\Omega)^{**}.$$

En particular,

$$f(\omega) \;=\; \widetilde{\delta} x^{**}(\omega) \;=\; x^{**}(\delta_\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\delta_\omega \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(\omega), \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

lo cual muestra que $f \in \mathfrak{B}_1(\Omega)$.

Lo acabado de probar nos dice que la aplicación $\widetilde{\delta}$, cuando se restringe a $\mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$, envía dicho conjunto en $\mathfrak{B}_1(\Omega)$ y claramente tal restricción es inyectiva. Falta por establecer, para terminar la demostración, que dicha restricción también es sobreyectiva.

$\|\blacktriangleright$ (C2 b) *Cada $f \in \mathfrak{B}_1(\Omega)$ es de la forma $\widetilde{\delta}x^{**}$, para un único $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$.*

Sea $f \in \mathfrak{B}_1(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $C(\Omega)$ tal que $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. Por el Teorema 3.1.2 (1) podemos suponer, y así lo haremos, que $\| f_n\|_\infty \leq \| f\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos invocar al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para que nos garantice que

$$\lim_{n\to\infty} \big(Jf_n\big)(\mu) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \;=\; \int_\Omega f \, d\mu$$

para cada $\mu \in C(\Omega)^*$. Esto, por supuesto, lo que nos revela es que la sucesión $\big(Jf_n\big)_{n=1}^{\infty}$ converge, en la ω^*-topología de $C(\Omega)^{**}$, a un elemento $x^{**} \in C(\Omega)^{**}$ que cumple

$$x^{**}(\mu) \;=\; \int_\Omega f \, d\mu, \qquad \text{para todo } \mu \in C(\Omega)^*.$$

Por definición, $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$. Además, x^{**} satisface $\widetilde{\delta}x^{**} = f$, pues

$$\big(\widetilde{\delta}x^{**}\big)(\omega) \;=\; x^{**}\big(\delta_\omega\big) \;=\; \int_\Omega f \, d\delta_\omega \;=\; f(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$.

$\|\blacktriangleright$ (C2 c) Observe, finalmente, que cualquier $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$ que cumpla $\widetilde{\delta}x^{**} = f$ con $f \in \mathfrak{B}_1(\Omega)$, satisface

$$x^{**}(\mu) \;=\; \int_\Omega f \, d\mu, \qquad \text{para cada } \mu \in C(\Omega)^*,$$

lo cual significa que x^{**} queda completamente determinado por f, es decir, $x^{**} \in C(\Omega)^{**}$. En efecto, si $x^{**} = \omega^* - \lim_{n\to\infty} Jg_n$ para alguna sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ en $C(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(Jg_n\big)(\delta_\omega) \;=\; x^{**}\big(\delta_\omega\big) \;=\; \widetilde{\delta}x^{**}(\omega) \;=\; f(\omega)$$

y, así, por una nueva aplicación del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos que

$$x^{**}(\mu) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(Jg_n\big)(\mu) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu \;=\; \int_\Omega f \, d\mu.$$

■

Para poder abordar la demostración del Teorema de Odell-Rosenthal vamos a requerir un poco más que el resultado anterior. Para comenzar, consideremos el espacio de Hausdorff $B_{C(\Omega)^*}$ el cual es compacto en la ω^*-topología y pongamos $K := (B_{C(\Omega)^*}, \omega^*)$. Lo que tenemos en mente es el siguiente resultado:

Lema 3.3.1 (Lema Básico). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $x^{**} \in X^{**}$. Son equivalentes:*

(1) $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(X)$.

(2) $x^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K)$.

La demostración del Lema Básico se obtendrá como consecuencia de dos resultados adicionales, siendo el primero de ellos el siguiente:

Lema 3.3.2. *Sea $x^{**} \in C(\Omega)^{**}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$.

(2) $x^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K)$.

Prueba. Es claro que $(1) \Rightarrow (2)$, por lo que la implicación $(2) \Rightarrow (1)$ es la que requiere prueba. Supongamos entonces que (2) se cumple pero que (1) es falso; es decir, supongamos que

$$x^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K) \qquad \text{pero que} \qquad x^{**} \notin \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega)).$$

Observemos que esta suposición implica que

$$x^{**}\delta \in \mathfrak{B}_1(\Omega),$$

donde $\delta : \Omega \to K$ es la aplicación definida por $\delta(\omega) = \delta_\omega$ para cada $\omega \in \Omega$ y δ_ω es la medida de Dirac concentrada en $\omega \in \Omega$. Como ya hemos visto en la prueba de **(C2)**, ello permite concluir que el funcional $y^{**} \in M(\Omega)^*$ definido por

$$y^{**}(\mu) = \int_\Omega x^{**}\delta_\omega \, d\mu(\omega)$$

pertenece a $\mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$. Se sigue de la implicación $(1) \Rightarrow (2)$ que $y^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K)$. Definamos ahora

$$z^{**} = x^{**} - y^{**}.$$

Es claro que $z^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K)$. Este funcional será el encargado de producir la contradicción que buscamos. En efecto, como mostraremos de inmediato, apelando al Teorema Grande de Baire, veremos que $z^{**}|_K \notin \mathfrak{B}_1(K)$.

Para demostrar lo anterior es importante destacar tres propiedades importantes que posee z^{**}.

(I) $z^{**}(\mu) = 0$ *para toda* $\mu \in M(\Omega)$ *que es puramente atómica*.

En efecto, observemos en primer lugar que, para cualquier $\omega_0 \in \Omega$,

$$y^{**}(\delta_{\omega_0}) = \int_\Omega x^{**}(\delta_\omega) \, d\delta_{\omega_0}(\omega) = x^{**}(\delta_{\omega_0})$$

por lo que $z^{**}(\delta_{\omega_0}) = 0$. Pero, además, como cualquier $\mu \in M(\Omega)$ puramente atómica está en el subespacio lineal cerrado generado por el conjunto $\{\delta_\omega : \omega \in \Omega\}$, resulta que

$$z^{**}(\mu) = 0.$$

(II) $z^{**}(\nu) > 0$ *para alguna medida* $\nu \in P(\Omega)$.

Veamos esto. Notemos que $z^{**} \neq 0$, pues en caso contrario, $x^{**} = y^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(C(\Omega))$ contrario a nuestra suposición. De aquí se sigue que $z^{**}(\nu) \neq 0$ para algún $\nu \in M(\Omega)$. Podemos asumir que $\nu \geq 0$, ya que si z^{**} se anula sobre el conjunto de todas la medidas no negativas $M^+(\Omega) \subseteq M(\Omega)$, ella debería anularse sobre $M^+(\Omega) - M^+(\Omega) = M(\Omega)$, y entonces, $z^{**} = 0$. Más aún, normalizando y, posiblemente, multiplicando por -1, podemos asumir, y así lo haremos, que

$$z^{**}(\nu) > 0 \quad \text{para alguna medida } \nu \in P(\Omega).$$

(III) *Existen una constante $c > 0$ y una medida $\mu \in P(\Omega)$ tal que*

$$z^{**}(\lambda) \geq c > 0 \quad \textit{para cada} \ \ \lambda \in P(\operatorname{sop}\mu) \ \ \textit{tal que} \ \ \lambda << \mu.$$

Sea $Z = \{\lambda \in M(\Omega) : \lambda << \nu\}$. Por el Teorema de Radon-Nikodym, Z puede ser identificado con $L_1(\nu)$. De allí que si restringimos z^{**} a Z obtenemos un miembro de $Z^* = L_\infty(\nu)$. En consecuencia, existe una función acotada medible Borel $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$z^{**}(\lambda) = \int_\Omega \varphi \, d\lambda \quad \text{para cada} \quad \lambda << \nu.$$

En particular, por (II)

$$z^{**}(\nu) = \int_\Omega \varphi \, d\nu > 0.$$

Observemos que si $\varphi^+ = \text{máx}\{\varphi, 0\}$, entonces

$$\int_\Omega \varphi^+ \, d\nu > 0.$$

Sea $c > 0$ tal que

$$\nu([\varphi(\omega) \geq c]) > 0.$$

Notemos que si $\lambda \in P(\Omega)$ se anula sobre $[\varphi(\omega) < c]$, entonces

$$\int_\Omega \varphi \, d\lambda = \int_{[\varphi(\omega) \geq c]} \varphi \, d\lambda \geq c.$$

Todo lo anterior nos permite definir, sin ambigüedad, la medida $\mu \in P(\Omega)$ por

$$\mu(B) = \frac{\nu(B \cap L)}{\nu(L)}, \quad \text{donde} \quad L = [\varphi(\omega) \geq c].$$

Es claro que si $\lambda \in P(\operatorname{sop}\mu)$ y $\lambda << \mu$, entonces

$$z^{**}(\lambda) = \int_{[\varphi(\omega) \geq c]} \varphi \, d\lambda \geq c > 0.$$

Esto prueba (III).

¿A qué nos conduce realmente estas tres propiedades de z^{**}? Veamos. Hemos visto que z^{**} se anula sobre los miembros puramente atómicos de $M(\Omega)$ y, además, es mayor que algún número real positivo c sobre aquellas medidas de probabilidad definidas sobre el soporte de μ que son μ-continuas. Cabe entonces preguntarse: ¿Tendrá z^{**} algún punto de continuidad sobre el conjunto $P(\operatorname{sop}\mu)$? La respuesta es no. En efecto, sabemos que los conjuntos $P_{pa}(\operatorname{sop}\mu) = \{\lambda \in P(\operatorname{sop}\mu) : \ \lambda \text{ es puramente atómica}\}$ y $P_{ac} = \{\lambda \in P(\operatorname{sop}\mu) : \lambda << \mu\}$ son ω^*-densos en $P(\operatorname{sop}\mu)$, Teorema 2.2.41, por lo que, si z^{**} tuviera al menos un punto de continuidad en $P(\operatorname{sop}\mu)$, digamos λ_0, entonces por (I) y la ω^*-densidad de $P_{pa}(\operatorname{sop}\mu)$, tendríamos que $z^{**}(\lambda_0) = 0$, mientras que la propiedad (III) en combinación con la ω^*-densidad de P_{ac}, conduciría a que $z^{**}(\lambda_0) \geq c > 0$. Esta contradicción establece que el misterioso z^{**} no posee puntos de continuidad en el conjunto cerrado $P(\operatorname{sop}\mu)$ de $M(\Omega)$ y, entonces, por el Corolario 3.1.4, $z^{**}|_K \notin \mathfrak{B}_1(K)$. Esto finaliza la prueba del lema. ■

El segundo eslabón en la cadena de resultados que requerimos en la prosecución de la prueba del Lema Básico requiere recordar el siguiente resultado:

Si X es un subespacio del espacio de Banach Y, entonces X^{**} es isométricamente isomorfo a $X^{\perp\perp}$ en Y^{**},

donde, como siempre, $A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(a) = 0 \textit{ para todo } a \in A\}$ para cada $A \subseteq X$.

Lema 3.3.3. *Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y X un subespacio de Y. Identifique X^{**} con el subespacio $X^{\perp\perp}$ de Y^{**}. Sea $G \in X^{**}$ tal que $G \in \mathfrak{B}_1^{**}(Y)$. Entonces $G \in \mathfrak{B}_1^{**}(X)$. Más aún, si $\|G\| = 1$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en B_X convergiendo a G en la ω^*-topología.*

Prueba. Suponga que $\|G\| = 1$. Puesto que $G \in \mathfrak{B}_1^{**}(Y)$, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $G = \omega^* - \lim_n Jy_n$. Afirmamos que

$$\operatorname{dist}\big(B_X, \overline{co}\{y_n, y_{n+1}, \cdots\}\big) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, si esto no fuera cierto existiría algún $n \in \mathbb{N}$ para el cual se cumpliría la desigualdad

$$\operatorname{dist}\big(B_X, \overline{co}\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}\big) > 0.$$

Podemos ahora invocar el Teorema de Hahn-Banach para producir un $y^* \in Y^*$ tal que

$$0 \leq \sup y^*(B_X) < \inf_{k \geq n} y^*(y_k).$$

Pero, por otro lado, el Teorema de Goldstine nos dice que

$$\begin{aligned} |G(y^*)| &\leq \sup |y^*(B_X)| \\ &< \inf |y^*(y_k)| \\ &\leq \lim_n y^*(y_k) = G(y^*). \end{aligned}$$

Esta evidente contradicción prueba que la distancia de B_X a $\overline{co}\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}$ es cero para cada $n \in \mathbb{N}$.

De lo acabado de demostrar se sigue que para cada entero positivo n, podemos encontrar un $x_n \in B_X$ y un $\sigma_n \in co\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \sigma_n\| = 0$. Puesto que $Jy_n \to G$ en la ω^*-topología de Y^{**}, entonces lo mismo ocurre con la sucesión $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$; es decir, $J\sigma_n \to G$ en la ω^* - topología de Y^{**}. Pero esto implica que $Jx_n \to G$ en la ω^* - topología de Y^{**} y, por supuesto, por el Teorema de Hahn-Banach esto implica que $Jx_n \to G$ en la ω^*-topología de X^{**}. ■

Estamos listo para probar el Lema Básico.

Prueba del Lema Básico. Sólo (2) $\Rightarrow$ (1) requiere una demostración. En primer lugar, pongamos $K = \big(B_{X^*}, \omega^*\big)$ y sumerjamos X isométricamente en $Y := C(K)$. Sea $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}|_K \in \mathfrak{B}_1(K)$. Sabemos, de la prueba de **(C2)**, que podemos identificar x^{**} con un elemento $y^{**} \in Y^{**}$ tal que $y^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(Y)$, y que este y^{**} cumple

$$y^{**}(\mu) = \int_K x^{**}(x^*)\, d\mu(x^*), \qquad \text{para todo } \mu \in M(K).$$

Dejamos al lector la tarea de convencerse de que este y^{**} coincide con el elemento de Y^{**} que corresponde a x^{**} bajo la inmersión canónica $X^{**} \hookrightarrow Y^{**}$. Esto nos permite aplicar el Lema 3.3.3 y concluir que el funcional $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(X)$. ■

Recordemos que nuestro interés es demostrar el teorema de Odell-Rosenthal el cual se puede reescribir en la siguiente forma, donde hemos puesto $K = (B_{X^*}, \omega^*)$

Teorema 3.3.4. (***Odell-Rosenthal***) *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach* ***separable****. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X no contiene copias de l_1.*

(b) $X^{**} \subseteq \mathfrak{B}_1^{**}(X)$.

(c) $X^{**} \subseteq \mathfrak{B}_1(K)$.

Ya hemos avanzado en el camino para la demostración de éste resultado. Nuestra estrategia ahora es mostrar que si X es separable y si existe un $x^{**} \in X^{**}$ que no está en $\mathfrak{B}_1^{**}(X)$, entonces X contendrá una copia de ℓ_1. Observemos que si $x^{**} \in X^{**}$ no está en $\mathfrak{B}_1^{**}(X)$, entonces, por el Lema Básico, x^{**} no está en $\mathfrak{B}_1(K)$ y, así, por el Teorema Grande Baire, (nótese que es aquí donde hace falta la separabilidad de X para garantizar que $K=(B_{X^*},\omega^*)$ sea un espacio Polaco), existe un subconjunto ω^*-cerrado F de B_{X^*} tal que x^{**} es siempre ω^*-discontinua sobre F. De hecho, uno puede "medir" que tan discontinuo es x^{**} a través del siguiente resultado.

Lema 3.3.4. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Si $f: K \to \mathbb{R}$ es una función acotada sin puntos de continuidad, entonces existe un subconjunto cerrado no vacío L de K y números reales r y δ con $\delta > 0$ tal que la siguiente condición se cumple:*

> *Para cualquier subconjunto no vacío relativamente abierto U de L, existen $y,z \in U$ tal que $f(y) > r+\delta$ y $f(z) < r$.* $(*)$

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$C_n = \big\{x \in K : \text{si } U \text{ es un conjunto abierto conteniendo a } x, \text{ existen } y,z \in U \text{ tal que } f(y)-f(z) > 1/n\big\}.$$

Puesto que f no posee puntos de continuidad, $K=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Además, como cada C_n es cerrado en K, el Teorema de Categoría de Baire nos provee de la existencia de un N tal que C_N tiene interior no vacío. Pongamos $U_N = \operatorname{int}(C_N)$ y sean $K_N = \overline{U}_N$ y $\delta = 1/N$. Tenemos ahora que

> *si V es un subconjunto no vacío relativamente abierto de K_N, entonces $U_N \cap V$ es un subconjunto abierto no vacío de K_N, y así, existen y,z en $U_N \cap V$ para el cual $f(y)-f(z) > \delta$.*

Sea (r_n) una enumeración de todos los números racionales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n el conjunto

$$F_n = \left\{ \begin{array}{lll} x \in K_N & : & \textit{si } U \textit{ es abierto conteniendo a } x\textit{, existen } y,z \in U \cap K_N \\ & & \textit{con } \ f(z) < r_n < r_n+\delta < f(y). \end{array} \right\}$$

De nuevo, es fácil establecer que cada F_n es cerrado y, por lo probado anteriormente, $K_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Aplicando una vez más el Teorema de Categoría de Baire, obtenemos la existencia de un F_p con interior no vacío, al que denotaremos por V_p. Definiendo $L=\overline{V}_p$ y $r=r_p$ conseguimos $(*)$. ■

Recordemos que una sucesión $(A_n,B_n)_{n=1}^{\infty}$ de pares de subconjuntos de algún conjunto S, se dice **independiente** siempre que:

(1) $A_n \cap B_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

(2) para cualquier par de subconjuntos finitos y disjuntos F y G de $\mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n\in F} A_n \cap \bigcap_{n\in G} B_n \neq \emptyset.$$

Lema 3.3.5. *Sean L un espacio de Hausdorff compacto y $f : L \to \mathbb{R}$ una función acotada. Suponga que r y δ son números reales con $\delta > 0$ y suponga que se cumple la condición*

Para cada subconjunto no vacío relativamente abierto U de L, existen y, z en U con $f(y) > r + \delta$ y $f(z) < r$. $(**)$

Asuma, además, que f está en la clausura puntual de alguna familia acotada $\mathcal{G}$ de $C(L)$. Entonces existe una sucesión (g_n) en $\mathcal{G}$ tal que la sucesión de pares $(A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ es independiente, donde $A_n = [g_n(x) > r + \delta]$ y $B_n = [g_n(x) < r]$ para todo n.

Prueba. Por $(**)$ existen $a, b \in L$ con $f(a) > r + \delta$ y $f(b) < r$. Puesto que f está en la clausura puntual de $\mathcal{G}$, podemos elegir una función g_1 en $\mathcal{G}$ tal que

$$g_1(a) > r + \delta \qquad \text{y} \qquad g_1(b) < r.$$

Consideremos ahora los conjuntos abiertos y no vacíos

$$A_1 := [g_1(x) > r + \delta] \qquad \text{y} \qquad B_1 := [g_1(x) < r].$$

Usemos de nuevo $(**)$, pero ahora aplicado a los abiertos A_1 y B_1, para obtener puntos a_1^1, a_2^1 en A_1 y b_1^1, b_2^1 en B_1 para los cuales $f(a_1^1),\ f(b_1^1) > r + \delta$ y $f(a_2^1),\ f(b_2^1) < r$. Escojamos g_2 en $\mathcal{G}$ tal que

$$g_2(a_1^1),\ g_2(b_1^1) > r + \delta \qquad \text{y} \qquad g_2(a_2^1),\ g_2(b_2^1) < r.$$

Consideremos los conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos

$$A_2 := [g_2(x) > r + \delta] \qquad \text{y} \qquad B_2 := [g_2(x) < r].$$

Notemos que

$$a_1^1 \in A_1 \cap A_2, \qquad a_2^1 \in A_1 \cap B_2, \qquad b_1^1 \in B_1 \cap A_2, \qquad b_2^1 \in B_1 \cap B_2.$$

Repitamos, una vez más, el procedimiento anterior a los conjuntos abiertos $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2$ y $B_1 \cap B_2$, para obtener puntos $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2$, $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2$ tales que

$$a_1^2, b_1^2 \in A_1 \cap A_2, \qquad a_2^2, b_2^2 \in A_1 \cap B_2, \qquad a_3^2, b_3^2 \in B_1 \cap A_2, \qquad a_4^2, b_4^2 \in B_1 \cap B_2$$

y, además, que

$$f(a_i^2) \ > \ r + \delta \qquad \text{y} \qquad f(b_i^2) < r, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

La densidad puntual de $\mathcal{G}$ permite fijar $g_3 \in \mathcal{G}$ tal que

$$g_3(a_i^2) \ > \ r + \delta \qquad \text{y} \qquad g_3(b_i^2) < r, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Definamos

$$A_3 := [g_3(x) > r + \delta] \qquad \text{y} \qquad B_3 := [g_3(x) < r].$$

Se sigue que tanto A_3, así como B_3, intersectan a cada uno de los conjuntos $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2$ y $B_1 \cap B_2$. Continuando con este proceso podemos finalizar la demostración. ■

Estamos ahora en posición de los argumentos para demostrar el resultado de Odell-Rosenthal.

Prueba del Teorema de Odell-Rosenthal. Basta demostrar, en vista del Lema Básico, las equivalencias (a) y (b). Supongamos que (a) se cumple pero no (b). Entonces existe un $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $x^{**} \notin \mathfrak{B}_1^{**}(X)$. Por el Lema Básico esto significa que $f := x^{**}|_K \notin \mathfrak{B}_1(K)$ y, así, por el Teorema Grande de Baire, existe un subconjunto no vacío ω^*-compacto L de B_{X^*} tal que $f|_L$ no tiene puntos de ω^*-continuidad. Por el Lema 3.3.4, existen un subconjunto cerrado no vacío L_0 de L y números reales r y $\delta > 0$ tales que, para cualquier subconjunto relativamente abierto no vacío U de L_0, existen $y, z \in U$ satisfaciendo $f(y) > r + \delta$ y $f(z) < r$.

Sabemos que cada $x \in B_X \subseteq X^{**}$ puede ser pensado como un elemento de $C(B_{X^*}, \omega^*)$ vía la aplicación $x : B_{X^*} \to \mathbb{R}$ dada por $x(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in B_{X^*}$, pero además, como la topología puntual y la topología ω^* son la misma sobre $B_{X^{**}}$ y ya que $B_{X^{**}} = \overline{B}_X^{\omega^*}$, (Teorema de Goldstine), resulta entonces $B_{X^{**}} = \overline{B}_X^{\tau_p}$; es decir, f está en la clausura puntual de $B_X \subseteq C(B_{X^*}, \omega^*)$. Lo anterior, en combinación con el Lema 3.3.5, producen una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en B_X tal que la sucesión de pares de conjuntos $(A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión independiente, donde $A_n = \{x^* \in L_0 : x_n(x^*) > r + \delta\}$ y $B_n = \{x^* \in L_0 : x_n(x^*) < r\}$ para todo n con r y δ obtenidos en el parágrafo anterior.

Veamos ahora que

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\| \geq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{k} |a_n|$$

para cualquier sucesión $(a_n)_{n=1}^{k}$ en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $(a_n)_{n=1}^{k}$ en $\mathbb{R}$ con $\sum_{n=1}^{k} |a_n| = 1$ y consideremos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, $F = \{i \leq k : a_i \geq 0\}$ y $G = \{i \leq k : a_i < 0\}$. Puesto que la sucesión $(A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ es independiente, tenemos que $\bigcap_{n\in F} A_n \cap \bigcap_{n\in G} B_n \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n\in G} A_n \cap \bigcap_{n\in F} B_n \neq \emptyset$. Sean

$$x_1^* \in \bigcap_{n\in F} A_n \cap \bigcap_{n\in G} B_n \quad \text{y} \quad x_2^* \in \bigcap_{n\in G} A_n \cap \bigcap_{n\in F} B_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\| &\geq \sum_{n=1}^{k} a_n x_n(x_1^*) - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n(x_2^*) \\ &= \sum_{n\in F} a_n \big(x_n(x_1^*) - x_n(x_2^*)\big) - \sum_{n\in G} a_n \big(x_n(x_1^*) - x_n(x_2^*)\big) \\ &> \sum_{n=1}^{k} |a_n|(r + \delta - r) = \delta; \end{aligned}$$

es decir,

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\| \geq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{k} |a_n|$$

lo cual significa que X contiene una copia de ℓ_1. Esta contradicción establece que $x^{**} \in \mathfrak{B}_1^{**}(X)$.

Para probar la implicación $(b) \Rightarrow (a)$ supongamos que (b) se cumple y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X. Para poder invocar el Teorema de Rosenthal-Dor todo lo que tenemos que hacer es demostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión débilmente de Cauchy. Sin perder generalidad, podemos suponer que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está en $B_X \subseteq B_{X^{**}}$. Como X es separable, resulta que $K = \big(B_{X^*}, \omega^*\big)$ es un espacio Polaco y, por el Teorema de Rosenthal-Bourgain-Fremlin-Talagrand, $(\mathfrak{B}_1(X), \tau_p)$ es angelical. Además, $\big(\mathfrak{B}_1(X), \tau_p\big) = \big(X^{**}, \omega^*\big)$. Por esto, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ posee la propiedad de ser secuencialmente denso en su ω^*-clausura y, en consecuencia, posee al menos una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \to x^{**}$ en la ω^*-topología. Es claro que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es la subsucesión débilmente de Cauchy que andamos buscando y, entonces, el Teorema de Rosenthal-Dor nos dice que X no contiene copias de ℓ_1. ■

El siguiente resultado de Elias Saab y Paulette Saab (véase, [391]) es una generalización del Teorema de Odell-Rosenthal en el sentido de que éste evita la separabilidad del espacio de Banach X y, además, lo hace bajo una hipótesis más débil: exige que $X^{**} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$ en lugar de que $X^{**} \subseteq \mathfrak{B}_1^{**}(X)$.

Teorema 3.3.5 (Saab-Saab). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X no contiene copias de ℓ_1.*

(2) *$X^{**} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$.*

Un interesante ingrediente para demostrar el Teorema de Saab-Saab es el siguiente resultado.

Lema 3.3.6. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : Y \to X$ un operador lineal acotado. Si $X^{**} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$, entonces cualquier funcional lineal $y^{**} \in Y^{**}$ fragmenta al compacto $(T^*(K), \omega^*)$, donde K es para cualquier subconjunto ω^*-compacto de X^*. En particular, la restricción de y^{**} a $(T^*(K), \omega^*)$ posee al menos un punto de continuidad.*

Prueba. Sea K un subconjunto ω^*-compacto de X^* y sea $y^{**} \in Y^{**}$. Para ver que y^{**} fragmenta al compacto $(T^*(K), \omega^*)$ tomemos un subconjunto arbitrario ω^*-cerrado B de $T^*(K)$ y sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $A = (T^*)^{-1}(B) \cap K$. Entonces A es un subconjunto ω^*-compacto de X^* satisfaciendo $T^*(A) = B$. Sea A_1 un subconjunto ω^*-compacto minimal (bajo inclusión) de X^* tal que $T^*(A_1) = B$. Puesto que el funcional lineal $y^{**}T^* \in X^{**}$, nuestra hipótesis nos dice que $y^{**}T^* \in \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$; es decir, A_1 contiene un subconjunto relativamente ω^*-abierto W tal que $diam(y^{**}T^*(W)) \leq \varepsilon$.

Sea $B_1 = T^*(A_1 \setminus W)$. Entonces B_1 es un subconjunto ω^*-compacto de Y^* y, además, por la minimalidad de A_1, tenemos que $B_1 \neq B$. Sean $u, v \in B \setminus B_1$. Entonces existen $u_1, v_1 \in W$ tales que $u = T^*(u_1)$ y $v = T^*(v_1)$. Finalmente,

$$|y^{**}(u) - y^{**}(v)| \;=\; |y^{**}T^*(u_1) - y^{**}T^*(v_1)| \;\leq\; \mathrm{diam}(y^{**}T^*(W)) \;\leq\; \varepsilon.$$

Esto prueba que $diam(y^{**}(B \setminus B_1)) \leq \varepsilon$ y, por lo tanto, y^{**} fragmenta a $(T^*(K), \omega^*)$. Para completar la prueba todo lo que tenemos que hacer es aplicar el Teorema 2.2.63. ■

Prueba del Teorema 3.3.5. La implicación $(1) \Rightarrow (2)$ es consecuencia de la implicación $(a) \Rightarrow (b)$ del Teorema de Odell-Rosenthal: en efecto, observe que el único lugar en esa implicación donde hacía falta la separabilidad de X era poder invocar el Teorema Grande de Baire para obtener un subconjunto no vacío ω^*-compacto L de B_{X^*} tal que $f|_L$ no tuviera puntos de ω^*-continuidad y entonces poder concluir que

$$x^{**} \notin \mathfrak{B}_1^{**}(X) \quad\Longrightarrow\quad x^{**} \notin \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X).$$

Sin embargo, como el objetivo en el Teorema de Saab-Saab es menos ambicioso, es decir, demostrar que $X^{**} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$, entonces uno puede saltarse el Teorema Grande de Baire pues la existencia de un tal conjunto L se garantiza suponiendo que $x^{**} \notin \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$ y la prueba continúa como se hizo en la demostración de $(a) \Rightarrow (b)$ del Teorema de Odell-Rosenthal. Es por esta razón que podemos prescindir de la separabilidad de X.

Vamos a demostrar la otra implicación, es decir, $(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos entonces que (2) se cumple pero que X contiene una copia de ℓ_1. Sea $T : \ell_1 \to X$ el isomorfismo isométrico entre ℓ_1 y el subespacio norma-cerrado $Z = T(\ell_1)$ de X. Entonces $T^* : X^* \to \ell_1^* = \ell_\infty$ es sobreyectivo. Sean $y^* \in \ell_\infty^* = \ell_1^{**}$ y K un subconjunto ω^*-compacto de B_{ℓ_∞}. Puesto que claramente K puede escribirse en la forma $T^*(K_1)$ para algún subconjunto ω^*-compacto K_1 de X^*, se sigue entonces del Lema 3.3.6, que la restricción de y^* a (K,ω^*) tiene al menos un punto de continuidad. Por el Teorema Grande de Baire (K es un compacto metrizable pues ℓ_1 es separable, en particular, un espacio Polaco) y^* es de la primera clase de Baire. Hemos demostrado que cualquier elemento $y^* \in \ell_\infty^* = \ell_1^{**}$ es de la primera clase de Baire lo cual es imposible pues $\ell_1^{**} \not\subseteq \mathfrak{B}_1\big(B_{\ell_\infty}\big)$ en virtud del Teorema de Odell-Rosenthal. Esta contradicción establece que X^* no puede contener copias de ℓ_1. ■

Comentario Adicional 3.3.3 Si X es un espacio de Banach no separable, entonces las condiciones

(a) $X^{**} \subseteq \mathfrak{B}_1^{**}(X)$,

(b) $X^{**} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_1^{**}(X)$

no son necesariamente equivalentes. En efecto, siempre ocurre que (a) implica (b), pero en general (b) no siempre implica (a). En efecto, Elias Saab y Paulette Saab prueban en [391] que $c_0(\Gamma)$ con Γ no numerable, cumple (b) pero no (a).

3.4. Índices de Szlenk, de Bourgain y de oscilación

Las equivalencias dadas en el Teorema Grande de Baire permite definir o asociar, a los subconjuntos cerrados de un espacio métrico compacto, un ordinal numerable que hace posible caracterizar las funciones de la primera clase de Baire. Si bien estos índices se originaron en la búsqueda de espacios de Banach "*universales*" para cierta clase de espacios de Banach separables, algunas modificaciones conllevan a las caracterizaciones antes señaladas.

Los orígenes del uso de índices ordinales en la teoría de los espacios de Banach se remontan desde la aparición del famoso libro de Stefan Banach "*Théorie des opérationes linéaires*", en el año de 1932 [29]. Allí, Banach demuestra que $C[0,1]$ es *universal* para la clase de todos los espacios de Banach separables, lo cual significa que cualquier espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio norma-cerrado de $C[0,1]$. Dichos índices comienzan otra vez a ser objeto de estudio por algunos matemáticos cuando Szlenk [419], en el año de 1968, demuestra la imposibilidad de hallar un espacio de Banach separable y reflexivo que sea *universal* para la clase de todos los espacios de Banach separables y reflexivos. En general, la construcción de algunos índices ordinales permiten medir la complejidad de ciertos aspectos de la estructura de un espacio de Banach separable. Por ejemplo, supongamos que se considera una cierta propiedad **P** y queremos ver si un espacio de Banach X la satisface o no. La construcción de un índice ordinal en X, digamos α, nos permite saber que si dicho índice es ω_1, el primer ordinal no numerable, entonces X tendrá la propiedad **P**, mientras que si $\alpha < \omega_1$, entonces X no podrá satisfacer la propiedad **P**. Una ventaja de operar con este tipo de enfoque es que se puede demostrar, de manera indirecta, que X tiene la propiedad **P** mostrando que su índice excede cualquier ordinal $\alpha < \omega_1$.

Sean K un espacio *métrico compacto* y $\mathfrak{F}(K)$ la familia de todos los subconjuntos cerrados de K. Una **derivación** en K es una aplicación $d : \mathfrak{F}(K) \to \mathfrak{F}(K)$ la cual satisface las siguientes propiedades:

(a) $F \subseteq G \;\Rightarrow\; d(F) \subseteq d(G)$.

(b) $d(F) \subseteq F$.

El proceso anterior se puede llevar a cabo tantas veces como se desee, es decir, para cada ordinal $\xi \leq \omega_1$, se define

$$d^{\xi}(F) = \bigcap_{\alpha<\xi} d(d^{\alpha}(F)).$$

Puesto que la topología de K tiene base numerable, se sigue que cualquiera sea el conjunto $F \in \mathfrak{F}(K)$, existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $d^{\alpha}(F) = d^{\omega_1}(F)$. Un ejemplo concreto de una derivación es la derivación de Cantor ya estudiada: $d(F) = F'$.

Observemos que si existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $d^{\alpha}(F) = \varnothing$ y si α es el primer ordinal con esa propiedad, entonces α no puede ser un ordinal límite. En efecto, si α fuera un ordinal límite, entonces $\varnothing = d^{\alpha}(F) = \bigcap_{\beta<\alpha} d^{\beta}(F) \neq \varnothing$, pues $\big(d^{\beta}(F)\big)_{\beta<\alpha}$, siendo una familia no creciente de conjuntos compactos no vacíos posee, en consecuencia, una intersección no vacía. Esta contradicción dice que α no puede ser un ordinal límite.

Es importante destacar, como un resumen de lo que acabamos de probar, que la anterior definición de derivación permite sólo dos alternativas:

Alternativa $\mathbf{A}_1$: *La familia $\{d^{\alpha}(F) : \alpha < \omega_1\}$ nunca alcanza el vacío pero se hace estacionaria, es decir,*

$$F \supsetneqq d(F) \supsetneqq \cdots \supsetneqq d^{\alpha}(F) = d^{\alpha+1}(F) = \cdots \neq \varnothing,$$

donde α es el primer ordinal tal que $d^{\alpha}(F) = d^{\alpha+1}(F)$. Observe que α es numerable pero puede ser un ordinal límite.

Alternativa $\mathbf{A}_2$: *La familia $\{d^{\alpha}(F) : \alpha < \omega_1\}$ alcanza el vacío, es decir,*

$$F \supsetneqq d(F) \supsetneqq \cdots \supsetneqq d^{\alpha-1}(F) \supsetneqq d^{\alpha}(F) = \varnothing,$$

donde α es el primer ordinal tal que $d^{\alpha}(F) = \varnothing$. Observe de nuevo que α es numerable pero nunca es un ordinal límite.

Nuestro siguiente objetivo es definir algunos índices asociados a un espacio métrico compacto a través de ciertas derivaciones y demostrar que ellos son finitos si, y sólo si, las funciones definidas sobre dicho conjunto son de la primera clase de Baire.

3.4.1. || ► Índice de Szlenk

La derivación de Szlenk consiste en remover de la bola unitaria B_{X^*} del dual X^* de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, los conjuntos ω^* - abiertos que poseen diámetro pequeño e iterar la operación. ¿Cuántos veces hay que iterar dicho proceso para alcanzar el vacío? Pues bien, el *índice de Szlenk*, el cual es un número ordinal bien definido, se obtiene *contando* el número de pasos que se necesitan, en la iteración anterior, para alcanzar el conjunto vacío.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea K un subconjunto ω^* compacto de X^*. Para cada $\varepsilon > 0$, definamos

$$\begin{aligned} K'_{\varepsilon} &= \big\{x \in K \,:\, \|\cdot\| - \operatorname{diam}(V \cap K) \geq \varepsilon \ \textit{para todo entorno } \omega^* \textit{ - abierto } V \textit{ de } x\big\} \\ &= K \setminus \bigcup \big\{V \subseteq X^* \,:\, V \ \textit{es } \omega^* \textit{ - abierto},\ \|\cdot\| - \textit{diam}(V \cap K) < \varepsilon\big\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, K'_{ε} es lo que queda de K cuando a éste se le remueven todos los subconjuntos ω^*-abiertos de norma-diámetro menor que ε. Inductivamente definimos, para cada ordinal $\alpha < \omega_1$,

$$K^0_{\varepsilon} = K, \qquad K^{\alpha+1}_{\varepsilon} = \big(K^{\alpha}_{\varepsilon}\big)'$$

y si β es un ordinal límite,

$$K_\varepsilon^\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} K_\varepsilon^\alpha.$$

El **índice de Szlenk** de un espacio de Banach X se define como sigue. Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$Sz(X,\varepsilon) = \begin{cases} \min\left\{\alpha : \left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^\alpha = \varnothing\right\}, & \text{si } \alpha \text{ existe} \\ \omega_1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $Sz(X,\varepsilon_1) \leq Sz(X,\varepsilon_2)$ siempre que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Finalmente,

$$Sz(X) = \sup_{\varepsilon>0} Sz(X,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} Sz(X,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} Sz(X,\varepsilon_k), \quad \text{donde } \varepsilon_k \downarrow 0.$$

Este índice fue introducido por W. Szlenk [419], en 1968, para demostrar que no existe espacio de Banach separable reflexivo que sea universal para la clase de todos lo espacios de Banach separables reflexivos. Observe que $Sz(X)$ mide "*cuan cercana*" están las topologías de la norma y la ω^* sobre B_{X^*}.

Teorema 3.4.1. *Sea X un espacio de Banach separable. Son equivalentes:*

(1) $Sz(X) < \omega_1$.

(2) *la función identidad* $\mathrm{Id} : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*}, \|\cdot\|)$ *es de la primera clase de Baire.*

(3) X^* *es norma-separable.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2). La hipótesis (1) implica que la **Alternativa $\mathbf{A}_2$** es aplicable, para cualquier $\varepsilon > 0$, a la familia $\left\{\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^\alpha : \alpha \text{ un ordinal}\right\}$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que

$$\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^\alpha = \varnothing, \qquad \text{pero} \qquad \left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^{\alpha-1} \neq \varnothing.$$

Sea F un subconjunto ω^*-cerrado no vacío de B_{X^*}. Ya que,

$$B_{X^*} = \bigcup_{\beta<\alpha} \left(\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^\beta \setminus \left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^{\beta+1}\right)$$

existe un primer ordinal, digamos $\beta < \omega_1$, tal que

$$F \cap \left(\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^\beta \setminus \left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^{\beta-1}\right) \neq \varnothing.$$

Se sigue de la definición de $\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^{\beta+1}$ que existe un conjunto ω^*-abierto V disjunto de $\left(B_{X^*}\right)_\varepsilon^{\beta+1}$ tal que

$$F \cap V \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad \|\cdot\| - \operatorname{diam}\left(F \cap V\right) < \varepsilon.$$

Esto prueba que $\left(B_{X^*}, \omega^*\right)$ es norma-fragmentable y entonces el Teorema 2.2.52, página 301, nos garantiza que la restricción de la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*}, \|\cdot\|)$ al conjunto F, posee al menos un punto de continuidad. Un llamado al Teorema 3.1.9, página 489, nos revela que Id es de la primera clase de Baire.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que (2) se cumple. Entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones continuas de (B_{X^*}, ω^*) en $(B_{X^*}, \|\cdot\|)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{Id}$ puntualmente. Puesto que X es separable, el conjunto (B_{X^*}, ω^*)

es un compacto metrizable y, en particular, separable. Como cada f_n es continua, entonces $f_n(B_{X^*})$ es norma-separable y ya que

$$B_{X^*} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(B_{X^*})},$$

resulta que B_{X^*} es norma-separable y, en consecuencia, X^* es norma-separable.

$(3) \Rightarrow (1)$. Para demostrar esta última implicación será suficiente probar que $Sz(X,\varepsilon) < \omega_1$ para cada $\varepsilon > 0$ o, de modo equivalente, que para la familia $\{(B_{X^*})^{\alpha}_{\varepsilon} : \alpha \text{ un ordinal}\}$ vale la **Alternativa A**$_2$. Puesto que X^* es norma-separable, resulta que X es un espacio de Asplund y, así, gracias al Teorema 2.2.56, página 305, (B_{X^*}, ω^*) es norma-fragmentable lo que, evidentemente, excluye la posibilidad de que $(B_{X^*})^{\alpha}_{\varepsilon} = (B_{X^*})^{\alpha+1}_{\varepsilon} \neq \varnothing$, es decir, la **Alternativa A**$_1$. ■

3.4.2. ‖ ▶ Índice de Bourgain

Sean K un espacio métrico compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función. Para cada par de números racionales p,q con $p < q$, consideremos los conjuntos

$$[f \leq p] = \{x \in K : f(x) \leq p\} \qquad \text{y} \qquad [f \geq q] = \{x \in K : f(x) \geq q\}.$$

Definamos $K_0 = K$ y para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, sea

$$K_{\alpha+1}(f,p,q) = \left(\overline{K_\alpha(f,p,q) \cap [f \leq p]}\right) \cap \left(\overline{K_\alpha(f,p,q) \cap [f \geq q]}\right),$$

es decir,

$$K_{\alpha+1}(f,p,q) = \left\{ \begin{array}{l} x \in K_\alpha(f,p,q) : \textit{para cada } \varepsilon > 0 \ \textit{y} \ \ j = 1,2, \ \textit{existe} \ \ x_j \in K_\alpha(f,p,q) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{con} \quad d(x_j,x) \leq \varepsilon, \quad f(x_1) \geq q \quad \text{y} \quad f(x_2) \leq p \end{array} \right\}$$

mientras que si α es un ordinal límite, entonces definimos

$$K_\alpha(f,p,q) = \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta(f,p,q).$$

Como antes, la familia $(K_\alpha(f,p,q))_{\alpha<\omega_1}$ es cerrada y no creciente. Sean

$$\alpha(f,p,q) = \begin{cases} \text{mín}\,\{\alpha : K_\alpha(f,p,q) = \varnothing\}, & \textit{si un tal } \alpha \textit{ existe,} \\ \omega_1, & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\alpha(f) = \sup\{K_\alpha(f,p,q) : p,q \in \mathbb{Q}, \ p < q\}.$$

Teorema 3.4.2. *$f \in \mathfrak{B}_1(K)$ si, y sólo si, $\alpha(f) < \omega_1$.*

Prueba. Supongamos que $\alpha(f) < \omega_1$. Entonces $\alpha(f,p,q) < \omega_1$ para todo $p,q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$. Fijemos $p,q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$ y escribamos K_β en lugar de $K_{\beta(f,p,q)}$. Entonces $K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_\alpha = \varnothing$, para algún $\alpha = \alpha(f,p,q)$. Sea

$$D = \bigcup_{\beta<\alpha} \left(\overline{[f \leq p] \cap K_\beta} \setminus \overline{[f \geq q] \cap K_\beta}\right).$$

Entonces, puesto que $K_{\beta+1} = \left(\overline{[f \leq p] \cap K_\beta}\right) \cap \left(\overline{[f \geq q] \cap K_\beta}\right)$, resulta que

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{\beta<\alpha} \left(\overline{[f \leq p] \cap K_\beta} \setminus K_{\beta+1}\right) \\ &\supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \left[\left([f \leq p] \cap K_\beta\right) \setminus K_{\beta+1}\right] \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} \Big([f \leq p] \cap (K_\beta \setminus K_{\beta+1})\Big) = [f \leq p]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} D &\subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \left(K_\beta \setminus \overline{[f \geq q] \cap K_\beta}\right) \\ &\subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \Big(K_\beta \setminus [f \geq q] \cap K_\beta\Big) \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} \Big(K_\beta \setminus [f \geq q]\Big) \\ &= K \setminus [f \geq q]. \end{aligned}$$

Escojamos una sucesión $(p_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{Q}$ tal que $p_n \uparrow q$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n = D$ el conjunto de arriba con $p = p_n$. Observemos que, por la numerabilidad de α, cada D_n es un F_σ y, por consiguiente, también lo es $\bigcup_{n=1}^\infty D_n$. Se sigue de las inclusiones

$$\bigcup_{n=1}^\infty D_n \supseteq \bigcup_{n=1}^\infty [f \leq p_n] = [f < q] \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n=1}^\infty D_n \subseteq K \setminus [f \geq q] = [f < q]$$

que $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = [f < q]$, de donde se obtiene que $[f < q]$ es un F_σ.

Repitiendo el razonamiento anterior intercambiando $[f \leq p]$ y $[f \geq q]$, se llega a la conclusión de que también $[f > p]$ es un F_σ. Finalmente, sea $O \subseteq \mathbb{R}$ un abierto no vacío y escribamos dicho conjunto en la forma $O = \bigcup_{k=1}^\infty (p_k, q_k)$ con $p_k, q_k \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k=1}^\infty f^{-1}(p_k, q_k) = \bigcup_{k=1}^\infty \Big([f > p_k] \cap [f < q_k]\Big)$$

es un F_σ. Invocando al Teorema Grande de Baire se concluye que $f \in \mathfrak{B}_1(K)$.

Recíprocamente, supongamos que $f \in \mathfrak{B}_1(K)$. Fijemos $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$ y veamos que para los conjuntos $K_{\beta(f,p,q)}$ vale la **Alternativa A**$_2$, es decir, $\alpha(f, p, q) < \omega_1$. Supongamos, para arribar a una contradicción, que para algún ordinal β se tiene que $K_{\beta(f,p,q)} = K_{\beta(f,p,q)+1} \neq \varnothing$. Por el Teorema Grande Baire, los conjuntos disjuntos $K_\beta \cap [f \leq p]$ y $K_\beta \cap [f \geq q]$ son G_δ's y, además, densos en $K_{\beta(f,p,q)}$ por ser $K_{\beta(f,p,q)} = K_{\beta(f,p,q)+1}$. Claramente esto contradice el Teorema de Categoría de Baire y termina la prueba. ■

3.4.3. || ► Índice de oscilación

El puente de enlace natural entre las funciones de la primera clase de Baire y derivaciones oscilatorias proviene de la siguiente observación. Sean K un espacio métrico compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ una función y $\varepsilon > 0$.

Definamos

$$\begin{aligned}\left(K_\varepsilon^f\right)' &= K \setminus \bigcup\left\{V \subseteq K : V \textit{ es abierto},\ \operatorname{diam}(f(V)) < \varepsilon\right\}\\ &= \left\{x \in K : \operatorname{osc}\left(f|_K, x\right) \geq \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

Por inducción transfinita, para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, sea

$$\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha+1)} = \left(\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha)}\right)'$$

y si β es un ordinal límite,

$$\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha<\beta} \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha)}.$$

El **índice de oscilación** de un espacio métrico compacto K se define como sigue. Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$\beta(f,\varepsilon) = \begin{cases} \text{mín}\left\{\alpha : \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha)} = \varnothing\right\}, & \textit{si } \alpha \textit{ existe,}\\ \omega_1, & \textit{en otro caso}.\end{cases}$$

$\beta(f,\varepsilon)$ nos proporciona un índice el cual mide "*cuan lejos*" está f de ser continua. Finalmente,

$$\beta(f) = \sup\left\{\beta(f,\varepsilon) : \varepsilon > 0\right\}.$$

El resultado que nos interesa es el siguiente.

Teorema 3.4.3. *Sean K un espacio métrico compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

(1) $f \in \mathfrak{B}_1(K)$.

(2) $\beta(f) < \omega_1$.

Prueba. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que $f \in \mathfrak{B}_1(K)$ y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que los $\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta)}$ cumplen la **Alternativa $\mathbf{A}_2$**. Suponga, para obtener una contradicción, que $\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta)} = \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta+1)} \neq \varnothing$ para algún β. De esto se sigue que $f|_{\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta)}}$ no posee ningún punto de continuidad, lo cual, por el Teorema Grande Baire, contradice el hecho de que $f \in \mathfrak{B}_1(K)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que (2) se cumple. Vamos a demostrar, en primer lugar, que f es fragmentada por conjuntos cerrados. Sea $F \subseteq K$ un conjunto cerrado y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\beta(f) < \omega_1$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que

$$K \supsetneqq \left(K_\varepsilon^f\right)^{(1)} \supsetneqq \cdots \supsetneqq \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha)} \supsetneqq \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\alpha+1)} = \varnothing.$$

Sea β el primer ordinal para el cual

$$F \cap \left(\left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta)} \setminus \left(K_\varepsilon^f\right)^{(\beta+1)}\right) \neq \varnothing.$$

De esto se deduce la existencia de conjunto abierto no vacío $V \subseteq X$ tal que

$$F \cap V \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam}\big(f(F \cap V)\big) < \varepsilon.$$

Podemos hacer uso del Teorema 2.2.63, página 320, para concluir que $f|_F$ posee al menos un punto de continuidad. Finalmente, el Teorema Grande de Baire nos garantiza que $f \in \mathfrak{B}_1(K)$. ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. M. Aarts and D. J. Lutzer, *Completeness properties designed for recognizing Baire spaces*, Dissertationes Math. 116(1974), 1-48.

[2] J. M. Aarts and D. J. Lutzer, *Pseudo-completeness and the product of Baire spaces*, Pacific J. Math., 48(1973), 1-10.

[3] E. Abakumov and J. Gordon, *Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift*, J. Funct. Anal., 200(2003), no. 2, 494–504.

[4] R. P. Agnew, *On rearrangements of series*, Bull. Amer. Math. Soc., 46(1940), 797-799.

[5] S. J. Agronsky, J. G. Ceder and T. L. Pearson, *Some characterizations of Darboux Baire 1 functions*, Real Anal. Exch., 23(2) (1997/98), 421-430.

[6] A. Aizpuru, C. Pérez-Eslava and J.B. Seoane-Sepúlveda, *Linear structure of sets of divergent sequences and series*, Linear Algebra and its Applications, 418(2006), 595–598.

[7] C. D. Aliprantis and K. C. Border, **Infinity Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide** (3rd ed.), Springer, 2005.

[8] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math., 88(2) (1968), 35-46.

[9] R. Anantharaman, *On exposed points of the range of a vector measure*, Proc. Conf. on Vector Measures (Snowbird, Utah), Academic Press, New York, 1973, pp. 7—22.

[10] R. Anantharaman and K. M. Garg, *The properties of a residual set of vector measures*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1033/1983, Measure Theory and its Applications (1983), 12-35.

[11] R. Anantharaman, *On exposed points of the range of a vector measure. II*, Proc. Amer. Math. Soc., 55(1976), 334-338.

[12] S. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. 128(1995), 374-383.

[13] T. M. Apostol, **Análisis Matemático**, 2a. Edición, Editorial Reverté, España, 1976.

[14] A. V. Arhangel'skiĭ, *Remainders in compactifications and generalized metrizability properties*, Topology Appl., 150(2005), 79–90.

[15] R. Aron, J. A. Conejero, A. Peris and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sums and products of bad functions*, Contemporary Math., (2008).

[16] J. Arias de Reyna, *Dense hyperplanes of first category*, Math. Ann. 249(1980), 111-114.

[17] R. Aron, D. García and M. Maestre, *Linearity in non-linear problems*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat., 95(2001), 7-12.

[18] R. Aron, V. I. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc., 133(2005), 795-803.

[19] R. Aron, D. Pérez-García and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of nonconvergent Fourier series*, Studia Math., 175(2006), 83-90.

[20] , R. Aron and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on* $\mathbb{C}$, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14(2007) 25-31.

[21] E. Asplund, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Math., 121(1968), 31-47.

[22] J. T. Astin, *A study of Baire-Moore Theorems*, M. S. Thesis, Emory University, 1966.

[23] S. Axler, **Linear Algebra Done Right**, 2nd Edition, Springer-Verlag, N. Y., Inc., 1997.

[24] E. A. Azoff y F. Gilfeather, *Measurable choice and the invariant subspace proble*, Bull. Amer. Math. Soc., Volume 80, Number 5, (1974), 893-895.

[25] L. Babinkostova, *Selective screenability and the Hurewicz property*, Topology Proceedings, 32(2008), 245-252.

[26] G. Bachman, L. Narici and E. Beckenstein, **Fourier and Wavelet Analysis**, Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[27] F. Bagemihl, *A note on Scheeffer's theorem*, Michigan Math. J. 2(1954), 149-150.

[28] R. Baire, *Sur les functions de variables réelles*. Annali di Mat. Pura ed Appl., 3(1899), 1-123.

[29] S. Banach, **Théorie des Opérationes Linéaires**, Monogr. Mat. 1, Warszawa, 1932.

[30] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math., 3(1931), 174-179.

[31] S. Banach and H. Steinhauss, *Sur le principe de la condensation de singularites*, Fundamenta Math., 9(1927), 51-57.

[32] P. Bandyopadhyay and G. Godefroy, *Linear structures in the set of norm-attaining functionals on a Banach space*, Pre-print Version: April, 2005.

[33] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly, 99(1992), 332-334.

[34] A. Bareche and A. Bouziad, *Some results on separate and joint continuity*, Topology Appl., 157(2010), 319-516.

[35] D. Basile and J. van Mill, *Ohio completeness and products*, Topology and its applications, 155(2008), 180-189.

[36] F. Bayart, *Common hypercyclic vectors for composition operators*, J. Operator Theory, 52(2004), no. 2, 353–370.

[37] F. Bayart, *Linearity of sets of strange functions*, Michigan Math. Journal, 53(2005), 291-303.

[38] F. Bayart, *Topological and algebraic genericity of divergence and universality*, Studia Math. 167(2005), 161-181.

[39] F. Bayart, S. Konyagin and H. Queffélec, *Convergence almost everywhere and divergence everywhere of Taylor and Dirichlet series*, Real Anal. Exch., 29(2), 2003/2004, 557-586.

[40] F. Bayart and É. Matheron, *Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces*, J. Funct. Anal., 250(2007), 426-441.

[41] F. Bayart and É. Matheron, **Dynamics of Linear Operators**, Cambridge Tracts in Mathematics 179, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2009.

[42] F. Bayart and L. Quarta, *Algebras in sets of queer functions*, Israel J. Math., 158(2007), 285-296.

[43] F. Bayart and L. Quarta, *On linability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., 294(2004), 62-72.

[44] B. Beauzamy, *An operator on a separable Hilbert space with all polynomials hypercyclic*, Studia Math., 96(1990), 81-90.

[45] B. Beauzamy, *Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l'example de P. Enflo*, Integral Equations Operator Theory 8(1985), 314-384.

[46] F. Bagemihl and W. Seidel, *A General Principle Involving Baire Category with Application to Function Theory and other Fields*. The Institute for Advanced Study; August 17(1953), 1068-1075.

[47] L. Bernal-González, *Lineability of sets of nowhere analytic functions*, J. Math. Anal. Appl. (2008).

[48] Y. Benyamini, *Applications of the Universal Surjetivity of the Cantor Set*, Amer. Math. Monthly, 105(1998), 832-839.

[49] I. Bergman, *Baire category theorem*, Master Thesis, University of Kalstad, 2009.

[50] L. Bernal-Gonzalez, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 127(1999), 1003-1010.

[51] J. Bès and A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal., 167(1999), 94-112.

[52] E. Bishop, *A minimal boundary for function algebras*, Pacific J. Math., 9(1959), 629-642.

[53] E. Bishop and R. R. Phelps, *A proof that every Banach spaces is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc., 67(1961), 97-98.

[54] W. W. Bledsoe, *Neighbourly functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 3(1972), 114-115.

[55] G. D. Birkhoff, *Démostration d'un théorème élémentaire sur les functions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris, 189(1929), 473-475.

[56] R. P. Boas, **A Primer of Real Functions**, The Carns Mathematical Monographs no. 13, 4th, ed. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996.

[57] D. Boes, R. Darst and P. Erdös, *Fat, symmetric, irrational Cantor sets*, The American Mathematical Monthly, 88(1981), 340-341.

[58] V. I. Bogachev, **Measure Theory, Vol. I**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[59] W. Bogdanowicz, *On nowhere differentiable functions being a convolution of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 97-108.

[60] B. Bolzano, **Paradoxes of the Infinite**, Routledge and Kegan Paul, London 1950.

[61] J. M. Borwein, *On strongly exposing functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., 69(1978), 46-48.

[62] J. Borwein, L. Cheng, M Fabian and J. P. Revalski, *A One Perturbation Variational Principle and Applications*, Set-Valued Analysis, 12(2004), 49-60.

[63] J. M. Borwein and D. Preiss, *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and differentiability of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 303(1987), 517-527.

[64] J. M. Borwein and X. Wang, *Subdifferentiability of typical continuous functions*, Proceedings of CMS, St. John's, NF, 1999. Nonlinear Anal. Forum 6(2001), no. 1, 49-58.

[65] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, **Techineques of Variational Analysis: An Introduction**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-Newyork, 2004.

[66] A. Bourass, B. Ferrahi and N. Saidou, *A new characterization of the Radon-Nikodym property*, (Por publicarse).

[67] N. Bourbaki, **Topologie générale**, Chap. 9, Paris 1958.

[68] P. S. Bourdon and N. S. Feldman, *Somewhere dense orbits are everywhere dense*, Indian Univ. Math. J., 52(2003), 811-819.

[69] J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire measurable functions*, Amer. J. Math., 100(4)(1978), 845-886.

[70] J. Bourgain and H. P. Rosenthal, *Applications of the Theory of Semi-embeddings to Banach Space Theory*, Journal of Funct. Anal., 52(1983), 149-188.

[71] R. D. Bourgin, **Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property**, Lecture Notes in Math. Vol. 993, Spriger Verlag, Berlin, 1983.

[72] A. Bouziad, *Notes sur la Propiété de Namioka*, Trans. Amer. Math. Soc., 344(1994), 873-883.

[73] W. Brito, *Compacidad Débil en Espacios de Banach y Aplicaciones de un Teorema de R. C. James*, Notas de Matemática, 180(1998), 1-42.

[74] W. Brito, *Impacto de la Topología Débil en Espacios de Banach*, Notas de Matemática, 135(1993), 1-129.

[75] J. B. Brown; U. B. Darji and E. P. Larsen, *Nowhere Monotone Functions and Functions of Nonmonotonic Type*, Proc. Amer. Math. Soc., 127(1999), 173-182.

[76] A. M. Bruckner, **Differentiation of Real Functions**, Lecture Notes in Math. Vol. 659, Spriger Verlag, Berlin, 1978.

[77] A. M. Bruckner, *The differentiability properties of typical functions in* $C[a,b]$, The Amer. Math. Monthly, 80(1973), 679-683.

[78] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner and B. S. Thomson, **Real Anlysis**, Prentice-Hall, 1994.

[79] A. M. Bruckner, J. G. Ceder and M. L. Weiss, *On the differentiability structure of real functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 142(1969), 1-13.

[80] A. M. Bruckner and K. M. Garg, *The level structure of a residual set of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 332(1977), 307-321.

[81] J. Cao and D. Gauld, *Volterra spaces revisited*, Journal of the Australian Mathematical Society, 79(2005), 61-76.

[82] J. Cao and W. Moors, *A survey on topological games and their applications in analysis*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. Vol., 100(1-2)(2006), 39-49.

[83] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116(1966), 133-157.

[84] N. L. Carothers, **Real Analysis**, Cambridge University Press, 2000.

[85] B. Cascales, I. Namioka and G. Vera, *The Lindelöf property and fragmentability*, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 3301-3309.

[86] F. S. Cater, *Differentiable, nowhere analytic functions*, The Amer. Math. Monthly, 91(1984), 618-624.

[87] F. S. Cater, *On the level structure of bounded derivatives*, Real Anal. Exchange, 29(2003/2004), 657-662.

[88] F. S. Cater, *Two large subsets of a functional space*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 8(1985), 189-191.

[89] A. L. Cauchy, **Course d'Analyse**, (1821).

[90] E. Čech, *On bicompact spaces*, Ann. of Math., 38(1937), 823-844.

[91] J. Červeňanský, *Rearrangements of series and a topological characterization of the absolute convergence of series*, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Com. 34(1979), 75-91.

[92] K. C. Chan, *The density of hypercyclic operators on a Hilbert space*, J. Operator Theory, 47(2001), 131-143.

[93] Y. S. Choi, H. J. Lee and H. G. Song, *Bishop's theorem and differentiability of a subspace of* $C_b(K)$, Israel Journal of Mathematics, 180(2010), 93-118.

[94] J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981), 455-461.

[95] J. P. R. Christensen, *A topological analogue of the Fubini theorem and some applications*, in: Papers from the Open House for Probabilists, Mat. Inst. Aarhus Univ., Arhus, 1971, 26-31.

[96] J. P. R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Proceedings of the International Symposium on Partial Differential Equations and the Geometry of Normed Linear Spaces (Jerusalen, 1972), vol. 13, 1972, pp. 255-260 (1973).

[97] G. Choquet, **Lectures on Analysis, Vol. I**, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amstrdam, 1969.

[98] M. M. Čoban and P. S. Kenderov, *Dense Gâteaux differentiability of the sup-norm in $C(T)$ and the topological properties of T*, C. R. Acad. Bulgare. Sci. 38(1985), 1603-1604.

[99] M. M. Čoban and P. S. Kenderov, *Generic Gâteaux differentiability of convex functionals in $C(T)$ and the topological properties of T*, Math. and Education in Math., Proc. 15th Spring Conf. of the Union of Bulgare Math., 1986, pp. 141-149.

[100] M. M. Čoban, P. S. Kenderov and J. P. Revalski, *Generic well-posedness of optimization problems in topological spaces*, Mathematica, 36(1989), 301-324.

[101] M. M. Čoban, P. S. Kenderov and J. P. Revalski, *Densely defined selections of multivalued mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 344(1994), 533-552.

[102] M. M. Čoban, P. S. Kenderov and J. P. Revalski, *Topological spaces related to Banach-Mazur game and the generic well-posedness of optimization problems*, Set-Valued Analysis, 3(1995), 263-279.

[103] J. Connor, *A short proof of Steinhaus's theorem on summability*, The Amer. Math. Monthly, 92(1985), 420-421.

[104] J. Conway, **Course in Functional Analysis**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[105] J. Conway, **Course in Operator Theory**, Graduate Studies in Mathematics Vol. 21, AMS 2000.

[106] R. G. Cooke, **Infinite Matrices and Sequence Spaces**, MacMillan, London, 1950.

[107] G. Costakis and M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*, Advances in Math. 182(2004), 278-306.

[108] K. R. Davidson, emphNormal operators are diagonal plus Hilbert-Schmidt, J. Operator Theory, 20(1988), 241-248.

[109] R. B. Darst, *On measure and other properties of a Hamel basis*, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 645-646.

[110] R. B. Darst, *Most infinitely differentiable functions are nowhere analytic*, Canadian Math. Bull., 16(1973), 597-598

[111] U. B. Darji, M. J. Evans and R. J. O'Malley, *A first return characterization of Baire 1 functions*, Real Anal. Exch., 19(1993-94), 510-515.

[112] U. B. Darji and M. Morayne, *Level sets of a typical C^n function*, Proc. Amer. Math. Soc., 127(1999), 2917-2922.

[113] G. de Barra, **Introduction to Measure Theory**, Van Nostrand Reinhold Co. LTD., 1974.

[114] M. De La Rosa and C. Read, *A hypercyclic operator whose direct sum $T \bigoplus T$ is not hypercyclic*, J. Operator Theory, 61(2009), 369–380.

[115] G. Debs, *Strategies gagnantes dans certains jeux topologiques*, Fund. Math., 126(1985), 93-105.

[116] G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparédent continue*, Proc. Amer. Math. Soc., 97(1986), 167-176.

[117] G. Debs, *Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space*, Topology Appl., 23(1986), 299-303.

[118] G. Debs, *Fonctions séparement continues et de premiere classe sur un espace produit*, Math. Scand., 59(1986), 122-130.

[119] G. Debs, *Espaces héreditairement de Baire*, Fund. Math., 129(1988), 199-206.

[120] G. Debs and J. Saint Raymond, *Ensembles boréliens d'unicité et d'unicité au sens large*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 37(1987), 217-239.

[121] A. Denjoy, *Sur les functions dérivées sommables*, Bul. Soc. Math. France, 43(1915), 161-248.

[122] R. I. Devaney, **Introduction to Chaotic Dynamical Systems**, Addison-Wesley, 1989.

[123] R. Deville, *Convergence punctuelle et uniforme sur un espace compact*, Bull. Acad. Polon. Sci., 37(1989), 7-12.

[124] R. Deville and M. Fabian, *Principes variationnels et differentiabilite d'applications definies sur un espace de Banach*, Publications Math. de la Faculté des Sciences de Besançon, Fas. 11(Année 1988/89).

[125] R. Deville and N. Ghoussoub, *Perturbed minimization principles and applications*, The Pacific Institute for the Mathematical Sciences (PIMS), 1(1999), 1-40. (Por publicarse).

[126] R. Deville and G. Godefroy, *Some applications of projective resolutions of identity*, Proc. London Math. Soc., 22(1990), 261-268.

[127] R. Deville and É. Matheron, *Infinite games, Banach space geometry and the Eikonal equation*, Proc. London Math. Soc., 95(2007), 49-68.

[128] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, **Smoothness and Renorming in Banach Spaces**, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., Longman Scientific and Technical, 1993.

[129] J. Diestel, **Sequences and Series in Banach Spaces**, Springer-Verlag New York, Inc. 1984.

[130] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., **Vector Measure**, Mathematical Surveys No. 15, American Math. Society, Providence, 1977.

[131] M. Dindoš, *On a typical series with alternanting signs*, Real Anal. Exchange 25(1999), 617-628.

[132] M. Dindoš, I. Martišovitš and T. Šalát, *Remarks on infinite series in linear normed spaces*, (Por publicarse).

[133] J. Doboš and T. Šalát, *Cliquish functions, Riemann integrable functions and quasi-uniform convergence*, Acta Math. Univ. Comen. XL-XLI(1982), 219-223.

[134] T. Domínguez Benavides, *How many zeros does a continuous function have?*, The Amer. Math. Monthly, 93(1986), 464-466.

[135] T. Domínguez Benavides, *Aplicaciones de las categorías de Baire a la existencia de solución de una ecuación diferencial en un espacio de Banach*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, 75(1981), 263-271.

[136] T. Domínguez Benavides, *Some topological properties on the* 1*-set-contractions*, Proc. Amer. Mmath. Soc., 93(1085), 252-254.

[137] A. L. Dontchev and T. Zolezzi, **Well-Posed Optimization Problems**, Lecture Notes in Math., Vol. 1543, Springer-Verlag, 1993.

[138] L. Dor, *On sequences spanning a complex* ℓ_1 *spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 515-516.

[139] R. Dougherty, *Examples of non-shy sets*, Fund. Math., 144(1994), 73-88.

[140] V. Drobot and M. Morayne, *Continuous functions with a dense set of proper local maxima*, The Amer. Math. Monthly, 92(1985), 209-211.

[141] J. Dugungji, **Topology**, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[142] N. Dunford and J. T. Schwartz, **Linear Operators, Part I**, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

[143] W. Dunham, *A Historical Gem from Vito Volterra*, Math. Magazine, 63(1990), 234-237.

[144] W. Dunham, **The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue**, Pnnceton University Press, 2005.

[145] J. Duoandikoetxea, **Análisis de Fourier**, Addison-Wesley and Universidad Aut6noma de Madrid, 1995.

[146] D. van Dulst, **Characterizations of Banach spaces not containing ℓ_1**, CWI Tract 59. Centre for Mathematics and Computer Science, 1989.

[147] J. A. Dyer, E. A. Pedersen and P. Porcelli, *An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 1020-1023.

[148] G. A. Edgar and R. F. Wheeler, *Topological properties of Banach spaces*, Pacific Jour. of Math., 115(1984), 317-350.

[149] T. Eisner, *A "Typical" contraction is unitary*, (Por publicarse).

[150] T. Eisner and T. Mátrai, *On typical properties of Hilbert space operators*, (Por publicarse).

[151] T. Eisner and A. Sserény, *Category theorems for stable operators on Hilbert spaces*, (Por publicarse).

[152] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., 47(1974), 324-353.

[153] P. Enflo, *On yhe invariant subspace problem in Banach spaces*, Acta Math. 158(1987), 213-313.

[154] P. Enflo and V. I. Gurariy, *On lineability and spaceability of sets in function spaces*. Aun no publicado.

[155] R. Engelking, **General Topology**, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977. Amer. J. Math., 74(1952), 168-186.

[156] P. Erdös, *Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers*, Michigan Math. J., 9(1962), 59-60.

[157] M. J. Fabian, **Gâteaux Differentiability of Convex Functions and Topology: *Weak Asplund Spaces***, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc., 1997.

[158] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant and V. Zizler, **Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry**, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[159] M. Fabian and J. Revalski, *A variational principle in reflexive spaces with Kadec-Klee norm*, Journal of Convex Analysis 16(2009), 211-226.

[160] V. Fermaki and V. Nestoridis, *A dichotomy principle for universal series*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 56(2008), 93-104.

[161] V. Fonf, V. I. Gurariy and V. Kadeč, *An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differntiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 52(1999), 11-12, 13-16.

[162] C. K. Fong, *Most normal operators are diagonal*, Proc. Amer. Math. Soc., 99(1987), 671-672.

[163] J. Foran, **Fundamentals of Real Analysis**, Marcel Dekker, Inc., 1991.

[164] D. H. Fremlin, *Weakly α-favourable spaces*, Fund. Math. 165(2000), 67-94.

[165] Z. Frolík, *Generalizations of the G_δ-property of complete metric spaces*, Czech. Math. J. 10(1960), 359-379.

[166] Z. Frolík, *Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces*, Czech. Math. J. 11(1961), 237-247.

[167] F. Galvin, *Closed sets of irrationals*, The Amer. Math. Monthly. Problems and Solutions, 71(1964), 808.

[168] F. Galvin and R. Telgársky, *Stationary strategies in topological spaces*, Topology Appl., 22(1986), 51-69.

[169] E. Gallardo Gutiérrez and J. R. Partington, *Common hypercyclic vectors for families of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 136(2008), 119-126.

[170] F. J. García-Pacheco and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Vector Spaces of Non-measurable Functions*, Acta Math. Sinica, English Series, 12(2006), 1-4.

[171] F. J. García-Pacheco, M. Martín and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability, spaceability and algebrability of certain subsets of function spaces*, Taiwanese J. of Math., 13(2009), 1257-1269.

[172] F. J. García-Pacheco, N. Palmberg and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and algebrability of pathologcal phenomena in analysis*, J. Math. Anal. Appl., 326(2007), 929-939 .

[173] D. B. Gauld, S. Greenwood and Z. Piotrowski, *On Volterra spaces II*, Papers on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci. 806(1996), 169-173.

[174] D. B. Gauld, S. Greenwood and Z. Piotrowski, *On Volterra spaces III*, Topology Proceedings, 23(Spring 1998), 167-182.

[175] D. B. Gauld and Z. Piotrowski, *On Volterra spaces*, Far East J. Math. Sci., 1(2)(1993), 209-214.

[176] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted, **Counterexamples in Analysis**, Holden-Day 3rd printing (1966).

[177] J. Gerver, *The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of* π, Amer. J. of Math., 92(1970), 33-55.

[178] J. Gerver, *More on the Differentiability of the Riemann Function*, Amer. J. of Math., 93(Jan., 1971), 33-41.

[179] S. Geschke, *Models of set theory*. `E-mail address: geschke@math.boisestate.edu`. (Por publicarse).

[180] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 100(1987), 281-288.

[181] J. R. Giles, **Convex Analysis with Applications in Differentiation of Convex Functions**, Res. Notes in Math., 58 Pitman, 1982.

[182] J. R. Giles, **Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces**, Australian Math. Soc., Lecture Series 13, 2000.

[183] J. R. Giles, P. S. Kenderov, W. B. Moors and S. D. Sciffer, *Generic differentiability of convex functions on the dual of a Banach spaces*, Pacific J. of Math., 172(1996), 413-431.

[184] G. Godefroy, *Le Lemme de Baire*, `http://dma.ens.fr/culturemath`

[185] G. Godefroy, *Some applications of Simons's inequality*, Serdica Math. J. 26(2000), 59–78.

[186] G. Godefroy, *The Szlenk index and its applications*, Extracta Mathematicae, 19(2004), 93-125.

[187] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense invariant cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. 98(1991), 229–269.

[188] K. Goebel and W. A. Kirk, **Topics in metric fixed point theory**, Cambridge Univ. Press, 1990.

[189] R. Goldblatt, *On the role of the Baire category theorem and dependent choice in the foundations of logic*, J. Symbolic Logic, 50(1985), 412–422.

[190] R. A. Gordon, **The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock**, Graduate Studies in Math. 4, 1994, Amer. Math. Soc.

[191] S. Grivaux, *Sums of hypercyclic operators*, J. Functional Analysis, 202(2003), 486-503.

[192] K. -G. Grosse-Erdmann, *Recent developments in hypercyclicity*, Rev. Real Acad. Cien. Serie A. Mat., 97(2003), 273-286.

[193] K. -G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., 36(1999), 345-381.

[194] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris, **Linear Chaos**, Sringer-Verlag, 2011.

[195] V. Guillemin, A. Pollack, **Differential Topology**, Prentice-Hall, 1974.

[196] V. I. Gurariy and L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., 294(2004), 62-72.

[197] V. I. Gurariy, *Subspaces of differentiable functions in the space of continuous functions*, Teo. Funktsiĭ Funktsional Anal. i Prilozhen, 4(1967), 161-121. (En ruso).

[198] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 167(1966), 971-973. (En ruso).

[199] V. I. Gurariy, *Linear subspaces composed of everywhere nondifferentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 44(1991), 13-16. (En Ruso)

[200] P. Habala, P. Hajek and V. Zizler, **Introduction to Banach Spaces I, II**, MATFYZPRESS, Univerzity Karlovy, 1996.

[201] D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi and P. Rosenthal, *Most similarity orbits are strongly dense*, Proc. Amer. Math. Soc., 76(1979),250-252.

[202] P. R. Halmos, **A Hilbert Space Problem Book**, *Second Edition*, Springer-Verlag, New York Inc., 1982.

[203] P. R. Halmos, *Irreducible operators*, Michigan Math. J., 15(1968), 215-223.

[204] R. W. Hansell, J. E. Jayne and M. Talagrand, *First class selector for weakly upper semi-continuous multivalued maps in Banach sapces*, J. Reine Angew. Math., 361(1985), 201-220.

[205] G. Hansel and J. P. Troallic, *Quasicontinuity and Namioka's theorem*,

[206] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*. Trans. Amer. Math. Soc., 17(1916), 301-325.

[207] M. Hata, *Differentiable functions which do not satisfy a uniform Lipschitz condition of any order*, Proc. Amer. Math. Soc., 111(1991), 443-450.

[208] R. C. Haworth and R. A. McCoy, *Baire spaces*, Dissertationes Mathematicae, 141(1977).

[209] S. Hencl, *Isometrical embeddings of separable Banach spaces into the set of nowhere approximatively differentiable and nowhere Hölder functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 128(2000), 3505-3511.

[210] J. Hennefeld, *A non topological proof of the uniform bounded theorem*, The Amer. Math. Monthly, 87(1980), 217.

[211] M. Henriksen and J.R. Isbell, *Some properties of compactifications*, Duke Math. J. 25(1958) 83–106.

[212] M. Henriksen, R. Kopperman, M. Rayburn and A. R. Todd, *Oxtoby's pseudocompleteness revisited*, Topol. Appl. 100(2000), 119-132.

[213] D. Herrero, *Hypercyclic operators and chaos*, J. Operator Theory, 28(1992), 93-103.

[214] D. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operatos*, J. Funct. Anal., 99(1991), 179-190.

[215] H. Herrlich, **Axiom of Choice**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[216] E. Hewitt and K. Stromberg, **Real and Abstract Analysis**, Springer-Verlag, New York, 1975.

[217] E. W. Hobson, H. P. Hudson, A. N. Singh and A. B. Kempe, **Squaring the Circle and other Monographs**, Chelsea Pub. Co., 1953.

[218] L. Holá and D. Holý, *Pointwise convergence of quasicontinuous mappings and Baire spaces*, Rocky Mountain J. Math. (Por publicarse).

[219] R. B. Holmes, **Geometric functional analysis and its applications**. 1975, Graduate Texts in Mathematics, 24. Berlin: Springer–Verlag.

[220] Hu and Smith, *On the extremal structure of the unit ball of Banach spaces of weakly continuous functions and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc., 349(1997), 1901-1918.

[221] B. R. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 122(1994), 711-717.

[222] B. R. Hunt, T. Sauer and J. A. Yorke, *PREVALENCE: A translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 27(1992), 217-238.

[223] B. R. Hunt, T. Sauer and J. A. Yorke, *PREVALENCE: an addendum to: PREVALENCE: A translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 28(1993), 306-307.

[224] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, in Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (D. T. Haimo, ed.), Southern Illinois Univ. Press, 1968, 235-255.

[225] W. Hurewicz, *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen* (A), Fund. Math., 12(1928) 78–109.

[226] W. Hurewicz, *Über Folgen stetiger Funktionen*, Fundamenta Math., 9(1927), 193–204.

[227] W. Hurewicz, *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Math. Z., 24(1925), 401–425.

[228] A. D. Ioffe and R. E. Lucchetti, *Generic well-posedness in minimization problems*, Abstract and Appl. Anal., 4(2005), 343-360.

[229] A. D. Ioffe and A. J. Zaslavski, *Variational principles and well-posedness in optimization and calculus of variations*, SIAM J. Control Optm., 38(2000), 566-581.

[230] C. Ivorra, **La Axiomática de la Teoría de Conjuntos**, `http://www.uv.es/~ivorra`.

[231] D. Jankovic, M. Ganster and I. Reilly, *A Characterization of Baire Spaces*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 98, No. 7 (Aug. - Sep., 1991), 624-625.

[232] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, *Norm fragmented weak* compact sets*, Collectanea Math., 41(1990), 133-163.

[233] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, *Topological properties of Banach spaces*, Proc. London Math. Soc., 66(1993), 651-672.

[234] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, σ-*fragmented Banach spaces*, Mathematika, 39(1992), 161-188.

[235] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, σ-*fragmented Banach spaces*, Mathematika, 39(1992), 197-215.

[236] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, *Fragmentability and* σ-*fragmentability*, Fundam. Math., 143(1993), 207-220.

[237] J. E. Jayne, J. Orihuela, A. J. Pallarés and G. Vera, σ-*Fragmentability of Multivalued Maps and Selection Theorems*, Journal of Funct. Analysis, 117(1993), 243-273.

[238] J. E. Jayne and C. A. Rogers, *K-analytic sets*, in Analytic sets, Academic Press, 1980, 1-181.

[239] J. E. Jayne and C. A. Rogers, *Borel selectors for upper semi-continuous set-valued maps*, Acta Math., 155(1985), 41-79.

[240] T. Jech, **Set Theory -** The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer, 2002.

[241] S. H. Jones, *Applications of the Baire Category Theorem*, Real Anal. Exch., 23(2) (1997), 363-394.

[242] H. J. K. Junnila, *Embeddings of weakly compact sets and *-paired Banach spaces*, Journal of Funct. Anal., 177(2000), 442-458.

[243] M. Kadec and A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces* L_p, Studia Math., 21(1962), 161-176.

[244] V. M. Kadets and M. I. Kadets, **Rearrangements of Series in Banach Spaces**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[245] R. V. Kadison and G. K. Pedersen, *Means and convex combinations of unitary operators*, Math. Scand., 57(1985), 249-266.

[246] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, **Fundamentals of the Theory of Operator Algebras - Vol. I**, Academic Press, 1983.

[247] J.-P. Kahane, *Baire's category theorem and trigonometric series*, Journal d' Analyse Mathématiques, 80(2000), 143-182.

[248] J.-P. Kahane, *Probabilities and Baire's theory in harmonic analysis*, J. S. Byrnes (ed.), Twentieth Century Harmonic Analysis - A Celebration (2001), 57-72. Kluwer Acad. Pub.

[249] J.-P. Kahane and Y. Katznelson, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Math., 26(1966), 305-306.

[250] J.-P. Kahane and V. Nestoridis, *Séries de Taylor et séries trigonométriques universelles au sens de Menchoff*, J. Math. Pures Appl., 79, 9(2000), 855-862.

[251] O. Kalenda, *Stegall compact spaces wich are not fragmentable*, Topol. Appl., 96(1999), 121-132.

[252] O. Kalenda, *A weak Asplund space whose dual is not in Stegall class*, Proc. Amer. Math. Soc., 130(2002), 2139-2143.

[253] A. B. Kharazishvili, **Strange Functions in Real Analysis**, 2nd Edition, Chapman and Hill/CRC, Taylor and Francis Group, LLC, N.Y., 2006.

[254] Y. Katznelson and K. Stromberg, *Everywhere differentiable, nowhere monotone functions*, The Amer. Math. Montly, 81(1974), 349-354.

[255] A. Kechris, **Classical Descriptive Set Theory**(Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 1995.

[256] A. Kechris, *Set Theory and Uniqueness for Trigonometric Series*, (Por publicarse).

[257] A. Kechris and A. Louveau, *A classification of Baire class 1 functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 318(1990), 209-236.

[258] S. Kempisty, *Sur les fonctions quasi-continues*, Fund. Math. 19(1932), 184-197.

[259] P. S. Kenderov, I. S. Kortezov and W. B. Moors, *Continuity points of quasi-continuous mappings*, Topol. and its Appl., 109(2001), 321-346.

[260] P. S. Kenderov and W. B. Moors, *Fragmentability and* σ*-fragmentability of Banach spaces*, J. London Math. Soc., 60(1999), 203-223.

[261] P. S. Kenderov and W. B. Moors, *Game characterization of fragmentability of topological spaces*, in Proceeding of the 25th Spring Conference of the Union Bulgarian Mathematicians, April 1996, Kazanlak, Bulgaria, (1996), 8-18.

[262] P. S. Kenderov, W. B. Moors and S. Sciffer, *Norm attaining functionals on* $C(T)$, Proc. Amer. Math. Soc., 126(1998), 153-157.

[263] P. S. Kenderov and J. P. Revalski, *The Banach-Mazur game and generic existence of solutions to optimization problems*. Proc. Amer. Math. Soc., 118(1993), 911-917.

[264] S. Kierst and E. Szpirajn, *Sur certaines singularités des functions analytiques uniformes*, Fundamenta Math., 21(1933), 267-294.

[265] S. S. Kim and K. H. Kwon, *Smooth (*C^∞*) but nowhere analytic functions*, The Amer. Math. Monthly, 107(2000), 264-266.

[266] C. Kitai, *Invariant closed sets of linear operators*, Ph. D. Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[267] K. Knopp, **Infinite Sequences and Series**, Dover Publications, 1956.

[268] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, Fundamenta Math. 4(1923), 324-328.

[269] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, C. R. Acad. Sci. Paris, 183(1926), 1327-1328.

[270] T. Körner, *Kahane's Helson curve*, J. Fourier Anal. Appl. Special Issue Orsay, 1993(1995), 325-346.

[271] T. Körner, *On the representation of functions by trigonometric series* Annals de la Faculté des Sciences de Toulouse 6^e, Tome spécial « 100 ans après Th. -J. Stieljes» (1996), 77-119.

[272] P. Kostyrko and T. Šalát, *On the structure of some function space*, Real Anal. Exchange, 10(1984–85), no. 1, 188–193.

[273] M. R. Krom, *Infinite games and special Baire space extensions*, Pacific J. Math., 55(1974), 483-487.

[274] K. Kuratowski, **Topology, Vol I**, Academic Press, New York, 1966.

[275] E. Lages Lima, **Espaços Métricos**, Projeto Euclides, São Paulo, SP, Brasil, 1977.

[276] B. K. Lahiri and P. Das, *On some properties connecting infinite series*, Turk J. Math., 26(2002), 339-353.

[277] G. Lancien, *A survey on the Szlenk index and some its applications*, Rev. Real Acad. Cien. Serie A. Mat., 100(2006), 209-235.

[278] S. Lang, **Real Analysis**, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1983.

[279] D. G. Larman and R. R. Phelps, *Gâteaux differentiability of convex functions on Banach spaces*, J. London Math Soc., 20(1979), 115-127.

[280] M. Lassonde and J. P. Revalski, *Fragmentability of sequences of set-valued mappings with applications to variational principles*. Proc. Amer. Math. Soc., 133(2005), 2637-2646.

[281] K. S. Lau, *A remark on strongly exposing functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., 59(1976), 242-244.

[282] K. S. Lau, *Almost Chebyshev subsets in reflexive spaces*, Indiana Univ. Math., 27(1978), 791-795.

[283] H. Lebesgue, *Sur les functions représentables analytiquement*. Journal Math. Pure ed Appl., 6(1905), 139-216.

[284] H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*. Bull. Sci. Math., 22(1898), 278-287.

[285] H. Lebesgue, *Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1*, Bull. Soc. Math. de France, 32(1904), 1-14.

[286] H. J. Lee, *Strong peak points and denseness of strong peak functions*, (Por publicarse).

[287] J. P. Lee and Z. Piotrowski, *A note on spaces related to Namioka spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., 31(1985), 285-292.

[288] P. Y. Lee, W. K. Tang and D. Zhao, *An equivalent definition of functions of the first Baire class*, Proc. Amer. Math. Soc., 129(2000), 2273-2275.

[289] D. Lenz and P. Stollmann, *Generic subsets in spaces of measures and singular continuous spectrum*, Lect. Notes Phys., 690(2006), 333-341.

[290] F. León Saavedra and V. Müller, *Rotations of hypercyclic and supercyclic operators*, Integral Equations Operator Theory 50(2004), 385-391.

[291] M. Lerch, *Über die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Functionen*, Crelles Jour. 103(1888), 126-138.

[292] D. H. Leung and W-K. Tang, *Functions of Baire class one*. Fund. Math., 179(2003), 225–247.

[293] B. Levine and D. Milman, *On linear sets in space* $\mathcal{C}$ *consisting of functions of bounded variation*, Comm. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. Kharkoff, 16(1940), 102-105. (En Ruso)

[294] J. S. Lipiński and T. Šalát, *On the points of quasicontinuity and cliquishness of functions*, Czechosl. Math. J., 21(96), (1971), 484-490.

[295] S. Lojasiewicz, **An Introduction to the Theory of Real Functions**, John Wiley and Sons Ltd., 1988.

[296] V. Lomonosov, *A counterexample to the Bishop-Phelps theorem in complex spaces*, Israel Jour. Math., 115(2000), 25-28.

[297] D. H. Lorenzo, *Funciones de la Primera Clase*, Tesina de Licenciatura, Murcia, 2000.

[298] H. P. Lotz, N. T. Peck and H. Porta, *Semi-embedding of Banach spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 22(1979), 233-240.

[299] R. E. Megginson, **An Introduction to Banach Spaces**, Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

[300] S. Marcus, *Sur les fonctions quasi-continues au sens de S. Kempisty*, Coll. Math., VIII(1961), 47-53.

[301] F. Martínez-Giménez, *Operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet*, Rev. Colombiana de Math., 33(1999), 51-76.

[302] R. D. Mauldin, **The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café**, Birkhauser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.

[303] S. Mazur, *Über konvex Mengen in linearen normierten Raümen*, Studia Math., 4(1933), 70-84.

[304] S. Mazurkiewicz, *Sur les functions non-dérivables*, Studia Math., 3(1932), 92-94.

[305] M. K. Menger, *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie 133(1924), 421–444.

[306] R. Mercer, *Dense* G_δ*'s Contain Orthonormal Bases*, Proc. Amer. Math. Soc., 97(1986), 449-452.

[307] S. Mercourakis and S. Negrepontis, *Banach spaces and Topology II*, in Recent Progress in General Topology, M. Hušek and J. van Mill, editors. Elsevier Sciences Publishers B. V. (1992), 494-536.

[308] S. Mercourakis and E. Stamati, *Compactness in the first Baire class and Baire-1 operators*, Serdica Math. J., 28(2002), 1-36.

[309] K. G. Merryfield, *A nowhere analytic* C^∞ *function*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 4(1992), 132-138.

[310] E. Michael, *A note on completely metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 96(1986), 513-522.

[311] E. Michael, *Almost complete spaces, hypercomplete spaces and related mapping theorems*, Topology Appl., 41(1-2)(1991), 113-130.

[312] I. Mihaila, *Cantor,* $1/4$, *and its Family and Friends*, The College Math. J., 33(2002), 21-23.

[313] A. W. Miller, *Special subsets of the real line*, Handbook of set-theoretic topology, Nort-Holland, Amsterdam, 1984, 201-233.

[314] R. A. Mimna, *Typical continuous functions are not chaotic in the sense of Daveney*, Real Anal. Exchange, 25(1999), 947-954.

[315] R. A. Mimna, *Errata: Typical continuous functions are not chaotic in the sense of Daveney*, Real Anal. Exchange, 27(2001), 397-400.

[316] A. K. Mirmostafaee, *Fragmentability and Joint Continuity*, The Math. Student, Vol. 70(2001), 227-230.

[317] A. Montes Rodríguez, *Banach spaces of hypercyclic vectors*, Michigan Math. J., 43(1996), 419-436.

[318] R. L. Moore, **Foundations of Point Set Theory**, Revised ed., American Mathematical Society, Providence, RI 1962.

[319] W. B. Moors, *The Relationship between Goldstine's Theorem and the Convex Point of Continuity Property*, Jour. Math. Anal. and Appl., 188(1994), 819-832.

[320] W. B. Moors and S. Sciffer, *Sigma-fragmentable spaces that are not countable unions of fragmentable subspaces*, Topology and its Appl., 119 (2002), 279-286.

[321] W. B. Moors and S. Somasundaram, *A Gateaux differentiability spaces that is not weak Asplund*, Proc. Amer. Math. Soc., 134(2006), 2745–2754.

[322] A. P. Morgenstern, *Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen*, Mathematiche Nachrichten, 12(1954), 74.

[323] M. Morillon, *A new proof of James'Sup theorem*, Extracta Math., 20(2005), 261-271.

[324] J. R. Munkres, **Topología**, 2.^{a} edición, Prentice Hall Inc. 2002.

[325] M. Muñoz Guillermo, *Índice de K-determinación de espacios topológicos y* σ*-fragmentabilidad de aplicaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 2003.

[326] G. Myerson, *First-Class Functions*, The Amer. Math. Monthly, 98(1991), 237-240.

[327] T. Nagamizu, *On topological spaces with dense completely metrizable subspaces*, Pub. Línstitut Math. 54(1993), 120-125.

[328] I. Namioka, *Radon-Nikodým compact spaces and fragmentability*, Mathematika., 34(1987), 258-281.

[329] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math., 51(1974), 515-531.

[330] I. Namioka, *Fragmentability in Banach spaces. Interaction of topologies*, Pasely, April 1999. (Notas no publicadas).

[331] I. Namioka and E. Asplund, *A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 443-445.

[332] I. Namioka and R. R. Phelps, *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math. J., 41(1975), 735-750.

[333] I. Namioka and R. Pol, *Mappings of Baire spaces into function spaces and Kadeč renorming*, Israel J. of Math., 78(1992), 1-20.

[334] I. Namioka and R. Pol, *Sigma-fragmentability of mappings into $C_p(K)$*, Topology and its Appl., 89(1998), 249-263.

[335] I. Namioka and R. Pol, σ-*fragmentability and analyticiy*, Mathematika, 43(1996), 172-181

[336] L. Narici and E. Beckenstein, **Topological Vector Spaces**, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1985.

[337] S. Negrepontis, **Banach Spaces and Topology**, Handbook of Set-theoretic Topology, Chapter 23, Ed. K. Kunen and J. E. Vaughan, 1984, 1045-1142.

[338] V. Nestoridis, *Universal Taylor series*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 46(1996), 1293-1306.

[339] A. Neubrunnová, *On quasicontinuous and cliquish functions*, Čas. Pro Pěs. Mat., 99(1974), 109-114.

[340] C. P. Niculescu and Lars-Erik Persson, **Convex Functions and Their Applications - A Contemporary Approach**, CMS Books in Mathematics, Springer Science+Business Media, Inc., 2006.

[341] D. Noll, *Generic Fréchet-differentiability of convex functions on small sets*, Arch. Math., 54(1990), 487-492.

[342] E. Odell and H. P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing* ℓ_1, Israel J. Math., 20(1975), 375-384.

[343] W. F. Osgood, *Non-uniform convergence and the integration of series term by term*, Amer. J. Math., 19(1897), 155-190.

[344] W. Ott and J. A. Yorke, *Prevalence*, Bull. Amer. Math. Soc. 42(2005), 263-290.

[345] J. C. Oxtoby, **Measure and Category**, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1971.

[346] J. C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Banach Category Theorem*, in Contributions to the theory of games, Vol. III, Annals of Math. Studies, 39(Princeton 1957), 159-163.

[347] J. C. Oxtoby, *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math., 49(1961), 157-166.

[348] K. R. Parthasarathy, **Probability Measures on Metric Spaces**, Academic Press, New York and London. 1967.

[349] A. Peris, *Multihypercyclic operators are hypercyclic*, Math. Z., 236(2001), 779-786.

[350] I. N. Pesin, *On the measurability of symmetrically continuous functions,* Teo. Funkcii Funkcional Anal. i Prilozen 5(1967), 99-101.

[351] R. R. Phelps, **Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability**, Lecture Notes in Math., Vol. 1364, Springer-Verlag, 1989.

[352] R. R. Phelps and I. Namioka, *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math., 42(1974), 735-749.

[353] A. Pinkus, *Weierstrass and Approximation Theory*, Journal of Approx. Theory, 107(2000), 1-66.

[354] Z. Piotrowski, *Separate and Joint Continuity*, Real Anal. Exchange, 11(1985-86), 293-322.

[355] Z. Piotrowski, *Separate and Joint Continuity II*, Real Anal. Exchange, 15(1989-90), 248-258.

[356] Z. Piotrowski, *Separate versus Joint Continuity - An Update*, in Proceeding of the 29th Spring Conference of the Union Bulgarian Mathematicians, Lovetch, Bulgaria, April 3-6, (2000), 93-106.

[357] Z. Piotrowski, *The Genesis of Separate versus Joint Continuity*, Tatra Mountains Math. Publ., 8(1995), 113-126.

[358] Z. Piotrowski and E. Wingler, *A Note on Continuity Points of Functions*, Real Anal. Exchange, 16(1990-91), 408-414.

[359] E. E. Posey and J. E. Vaughan, *Functions with a proper local maximum in each interval*, The Amer. Math. Monthly, 90(1983), 281-282.

[360] R. E. Powell and S. M. Shah, **Summability Theory and Its Applications**, Van Nostrand Reinhold, London, 1972.

[361] H. Radjavi and P. Rosenthal, **Invariante Subspaces**, Courier Dover Publications, 2003.

[362] T. I. Ramsamujh, *Nowhere Analytic* C^∞ *Functions*, Journal of Math. Anal. and Appl., 160(1991), 263-266.

[363] T. I. Ramsamujh, *Corrigendum: Nowhere Analytic* C^∞ *Functions*, (Comunicación personal).

[364] J. F. Randolph, **Basic Real and Abstract Analysis**, Academic Press, New York and London, 1968.

[365] M. M. Rao, **Measure Theory and Integration**, John Wiley and Sons, Inc., 1985.

[366] T. S. S. R. K. Rao, *Weakly Continuous Functions of Baire Class 1*, Extracta Mathematicae, 15(2000), 207-212.

[367] J. S. Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc., 87(1983), 499-504.

[368] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem*. J. London Math. Soc., 16(1984), 337-401.

[369] C. J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, II. Hypercyclic operators*, Israel J. Math. 63(1988), 1-40.

[370] J. P. Revalski, *Densely defined selections of set-valued mappings and applications to the geometry of Banach spaces and optimization*, Pre-print.

[371] J. P. Revalski, *The Banach-Mazur Game: Histrory and Recent Developments*, Universié des Antilles et de la Guyane, Guadeloupe, France 2003-2004, 1-48.

[372] N. K. Ribarska, *A note on fragmentability of some topological spaces*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 43(1990), 13-15.

[373] N. K. Ribarska, *Internal characterization of fragmentable spaces*, Mathematika, 34(1987), 243-257.

[374] N. K. Ribarska, *The dual of Gateaux smooth Banach space is weak star fragmentable*, Proc. Amer. Math. Soc., 114(1992), 1003-1008.

[375] C. Richter, *Entropy and the approximation of functions on compact metric and topological spaces*, Habilitationsschrift(2000).

[376] M. A. Rieffel, *Dentable subsets of Banach spaces, with applications to a Radon-Nikodým theorem*, Functional Analysis. Proc. Conference, Irvine, Calif. 1966. (Academic Press, 1967).

[377] L. Rodríguez Piazza , *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 123(1995), 3649-3654.

[378] C. A. Rogers and J. E. Jayne, *Analytic sets*, Academic Press, (1980), 1-181.

[379] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Mmath., 32(1969), 17-22.

[380] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 71(1974), 2411-2413.

[381] H. P. Rosenthal, *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(1978), 803-831.

[382] H. P. Rosenthal, *Point-wise compact subsets of the first Baire class*, Amer. Jour. of Math., 99(2) (1977), 362-378.

[383] H. P. Rosenthal, *The hereditary problem for weakly compactly generate Banach spaces*, Compositio Math., 28(1974), 83-111.

[384] H. Royden, **Real Analysis**, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

[385] W. Rudin, **Real and Complex Analysis**, Tata McGraw-Hill Book Company, 1974.

[386] W. Rudin, **Principles of Mathematical Analysis**, International Student Analysis, McGraw-Hill, Inc., 3rd Edition, 1976.

[387] W. Rudin, **Functional Analysis**, McGraw-Hill Pub. Co. Ltd. New Delhi, 1973.

[388] W. Rudin, *Lebesgue's first theorem*. Mathematical Analysis and Applications, Part B. Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 7B, Academic Press, New York 1981, 741-747.

[389] V. I. Rybakov, *Banach spaces with the PC property*, Mathematical Notes, 76(2004), 568-577.

[390] V. I. Rybakov, *Theorem of Bartle, Dunford and Schwartz concerning vector measures*, Mat. Zametki 7 (1970),2 47—254 = Math. Notes 7(1970), 147—151.

[391] E. Saab and P. Saab, *A dual characterization of Banach spaces not containing* ℓ_1, Pacif. J. Math., 105(1983), 415-425.

[392] J. Saint-Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc., 87(1984), 499-504.

[393] S. Saito, *Continuity points of typical bounded functions*, Real Anal. Exchange, Volume 34(2008), 249-254.

[394] H. Salas, *Supercyclicity and weighted shifts*, Studia Math., 135(1999), no. 1, 55–74.

[395] T. Šalát, *On functions that are monotone on no interval*, The Amer. Math. Monthly, 88(1981), 754-755.

[396] H. Salzmann, K. Zeller, *Singularitäten unendlicht oft differenzierbarer Funktionen*, Math. Z. 62(1955), 354–367.

[397] E. Schechter, **Handbook of Analysis and Its Foundations**, Academic Press, INC., USA, 1997.

[398] M. Scheepers, *Selection Principles and Baire spaces*, Mat. Vesnik, 61(2009), 195–202.

[399] M. Scheepers, *Selection principles and covering properties in Topology*, Note di Matematica 22(2003), 3-41.

[400] J. Schmets and M. Valdivia, *On the extent of the (non) quasi-analytic classes*, Arc. Math., 56(1991), 593-600.

[401] J. H. Shapiro, *Notes on the dynamics of linear operators*. http://www.math.msu.edu/∼shapiro.

[402] J. H. Shapiro, *Some negative theorems of approximation theory*, Michigan Math. J., 11(1964), 211-217.

[403] H. R. Shatery, *Complemented subalgebras of the Baire-1 functions defined on the interval* $[0,1]$, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005:3, (2005), 445-449.

[404] H. Shi, *Measure-theoretic notions of prevalence*, Simon Fraser University, Tesis Doctoral 1997. http://www.collectionscanada.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/nq24355.pdf

[405] H. Shi, *Prevalence of some known typical properties*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXX, 2(2001), 185-192.

[406] H. Shi, *Some typical properties of continuous functions, symmetric functions and continuous functions*, Real Analysis Exchange 21(1995-96), 708-714.

[407] J. R. Shoenfield, *Martin's Axiom*, The Amer. Math. Monthly, 82(1975), 610-617.

[408] K. Simon, *Some dual statements concerning Wiener measure and Baire category*, Proc. Amer. Math. Soc., 106(1989), 455-463.

[409] J. Spurný, *A note on compact operators on normed spaces*, Expositions Mathematicae, 25(2007), 261-263.

[410] S. M. Srivastava, **A Course on Borel Sets**, Graduate Texts in Math. 180, Springer-Verlag, New York, 1998.

[411] V. V. Srivatsa, *Baire class 1 selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Trans. Amer. Math. Soc., 337(1993), 609-624.

[412] L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr., **Counterexamples in Topology**, Dover Publications, Inc., New York, 1995.

[413] C. Stegall, *Functions of the first Baire class with values in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 111(1991), 981-991.

[414] C. Stegall, *Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces*, Math. Ann., 236(1978), 171-176.

[415] C. Stegall, *Topological spaces with dense subspaces that are homeoporphic to complete metric space and the classification of $C(K)$ Banach spaces*, Mathematika 34(1987), 101-107.

[416] E. M. Stein and A. Zygmund, *On the differentiability of functions*, Studia Math., 23(1960), 247-283.

[417] H. Steinhauss, *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie*, Studia Math., 1(1929), 51-81

[418] N. Suzuki, *On the irreducibility of weighted shifts*, Proc. Amer. Math. Soc., 22(1969), 579-581.

[419] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math., 30(1968), 53-61.

[420] M. Talagrand, *Espaces de Baire et espaces de Namioka*, Math. Ann., 270(1985), 159-164.

[421] M. Talagrand, *Deus généralisations d'un théorème de I. Namioka*, Pacific J. Math. 81(1979), 239-251.

[422] R. Telgárski, *Topological games: On the 50-th anniversary of Banach-Mazur game*, Rocky Mount. J. Math., 17(1987), 227-276.

[423] H. Thielman, *Types of functions*, Amer. Math. Monthly, 60(1953), 156-161.

[424] J. Thim, *Continuous Nowhere Differentiable Functions*, Master Thesis, Luleâ University of Technology, (2003), 1-94.

[425] B. S. Thomson, **Symmetric Properties of Real Functions**, Marcel Dekker Inc., New York, 1994.

[426] B. S. Thomson, J. B. Bruckner and A. M. Bruckner, **Elementary Real Analysis**, Prentice-Hall, Inc., 2001.

[427] A. R. Todd, *Quasiregular, pseudocomplete and Baire spaces*, Pacific J. Math., 95(1981), 233-250.

[428] S. Todorcevic, *Compact subsets of the first Baire class*, Jour. Amer. Math. Soc., 12(1999), 1179-1212.

[429] S. Todorcevic, **Topics in Topology**, Lecture Notes in Math., Vol. 1652, Springer Verlag, 1997.

[430] T. C. Tran, *Symmetric functions whose set of points of discontinuity is uncountable*, Real Anal. Exchange, 12(1986-87), 498-509.

[431] B. Tsaban, *Menger's and Hurewicz's Problems: Solutions from "The Book" and Ramifications*, (Por publicarse).

[432] P. L. Ul'yanov, *Kolmogorov and divergent Fourier series*, Russian Math. Surveys, 38:4(1983), 57-100.

[433] M. Valdivia, *Subespacios de primera categoría en espacios vectoriales topológicos de Baire*, Collectanea Mathematica, 34(1983), 287-296.

[434] D. Voiculescu, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, Rev. Rounamine Math. Pures and Appl., 21(1976), 97-113.

[435] P. Vrbová, *On local properties of operators in Banach spaces*, Czechoslovak Math. J., 25(1973), 483-492.

[436] A. Wachowicz, *Baire category and standar operations on pairs of continuous functions*, Tatra Mt. Math. Pub. 24(2002), 141-146.

[437] B. Walsh, *Mutual absolute continuity of sets of measures*, Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971), 506-51.

[438] X. Wang, *Subdifferentiability of real functions*, Real Anal. Exchange, 30(2004/2005), 137-172.

[439] S. G. Wayment, *Sizing up sets and continuity-differentiability relationships*, The Amer. Math. Monthly, 77(1970), 740-743.

[440] C. Weil, *On nowhere monotonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 56(1976), 388-389.

[441] N. Weaver, *Set theory and cyclic vectors*, J. Operator Theory, 52(2004), 133-138.

[442] D. Werner, *A remark about Müntz spaces*, (Por publicarse)

[443] H. E. White, Jr., *Topological spaces that are α-favorable for a player with perfect information*, in: Proc. Second Pittsburg Internat. Conference, 1972, Lecture Notes in Math., Vol. 378, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974, 551-556.

[444] H. E. White, Jr., *Topological spaces that are α-favorable for a player with perfect information*, Proc. Amer. Math. Soc., 50(1975), 447-482.

[445] N. Wiener, *Differential space*, J. Math. Phys., 58(1923), 131-174.

[446] S. Willard, **General Topology**, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970.

[447] P. Y. Wu, *Sums and products of cyclic operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 122(1994), 1053-1063.

[448] D. Yost, *Asplund spaces for beginners*, Acta Univ. Carolinae Math. Phys., 34(1993), 159-177.

[449] G. C. Young and W. H. Young, **The Theory of Sets of Points**, Cambridge, 1906. (2nd edition, Chelsea 1972).

[450] Z. Zahorsky, *Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres*, Fund. Math., 34(1947), 183-247; Fund. Math., 36(suppl.)(1949), 319-320.

[451] L. Zajíček, *On differentiability properties of typical continuous functions and Haar null sets*, Proc. Amer. Math. Soc., 134(2005), 1143-1151.

[452] L. Zajíček, *On preponderant differentiability of typical continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 789-798.

[453] T. Zamfirescu, *A generic view on the theorems of Brouwer and Schauder*, Math. Z., 213(1993), 387-392.

[454] T. Zamfirescu, *Most Monotone Functions are Singular*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 88(1981), 47-49.

[455] P. Zorin Kranich, *Typical bounded operators admit common cyclic vectors*, (Por publicarse)

[456] M. Zorn. *A remark on method in transfinite algebra*. Bull. of the Amer. Math. Soc., 41(1935), 667–670.

[457] A. Zygmund, **Trigonometric Series**, Cambridge University Press, Second edition, Vol. I, II, 1968

ÍNDICE ALFABÉTICO