La Teoría del Grado en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

Prof. Jesús Pérez Sánchez

Marzo 2008

Índice general

Introducción

En la presente monografía sobre la "La teoría del Grado, en $\mathbb{R}^n$ ", encontramos aplicaciones de la misma, para resolver algunos ejercicios y obtener demostraciones elegantes y simples de conocidos teoremas, como el Teorema del punto fijo de Brouwer, el teorema del puerco espín, el teorema de la esfera cabelluda, entre otros.

En verdad, estas breves notas fueron en parte, hechas con la intención de aclarar, para mí mismo, muchos puntos de la teoría, la cual me atrajo desde un principio, por su belleza y utilidad.

Jesús A. Pérez Sánchez
jesusp@ula.ve

Capítulo 1

Teoría del Grado en $\mathbb{R}^n$

Seguramente, muchos de los problemas que el lector ha tratado encajan perfectamente en el siguiente modelo:
Dados: un elemento y, una función continua f, hallar x, tal que,

$$f(x) = y$$

Más específicamente. Sean: $y \in \mathbb{R}^n$; Ω, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, **abierto y acotado**; $\overline{\Omega}$, la clausura (o cerradura) de Ω en R^n; $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, función continua.

Nota 1.1. *Siempre consideremos $\mathbb{R}^n$, provisto de la topología euclideana, es decir, si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces, la norma de x, denotada por $|x|$, es $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. También, $\partial\Omega$ denota el conjunto frontera de Ω. Veamos dos ejemplos:*

a.- Sean:

$n = 1;\ \Omega = (-5, 11);\ y = 0;\ f(x) = x^7 + 5x^4 - 3x + 6.$

Aquí, nuestro problema indicado con $f(x) = y$, no es otro que el de hallar ***las raíces****, en $[-5, 11]$, de la ecuación $x^7 + 5x^4 - 3x + 6 = 0$*

b.- Dados: $y \in \mathbb{R}^n$; A, matriz real, $n \times n$, invertible; $\Omega = B(\mathbf{0}; \rho)$, bola abierta de centro el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\rho > 0$; hallar $x \in \overline{B}(\mathbf{0}, \rho)$, tal que $f(x) = Ax = y$

■

Regresando a la situación inicial, planteada la ecuación $f(x) = y$, estaremos interesados, no sólo en saber si existe, o no, solución a la misma sino, en caso afirmativo, nos gustaría saber si ella es única.

Si hay varias ***soluciones****, nos podemos preguntar, además, cómo* ***están*** *distríbuidas en* $\overline{\Omega}$*. Pero hay otra inquietud sumamente importante:*

Supongamos resuelto el problema para cierta ecuación $f(x) = y$*.*
Entonces, será interesante averiguar cómo cambia el resultado si la ecuación es $\tilde{f}(x) = \tilde{y}$*, para* $\tilde{f}$ *y* $\tilde{y}$ *"cercanos", en algún sentido, a* f *e* y*, respectivamente.*

Es decir, nos interesamos en saber si hay alguna "estabilidad" de las respuestas obtenidas en una situación concreta. Pongamos por caso que en la ecuación polinomial:

$$x^7 + 5x^4 - 3x + 6 = 0$$

los coeficientes 1, 5, -3, 6 han sido obtenidos por interpolación de ciertos datos experimentales (los cuales, usualmente contienen pequeños, pero inevitables errores). En esta situación es deseable saber si los ceros (raíces) del polinomio x^7+5x^4-3x+6 *están cercanos a los ceros del polinomio verdadero.*

Además, en el problema de encontrar los ceros de un polinomio sobre $\mathbb{C}$ *(recordar el teorema fundamental del Álgebra), el investigador estará interesado, sobretodo, en saber la ubicación de dichas raices en el plano complejo: ¿ellas están en el eje imaginario? ¿en el semi-plano izquierdo? ¿en el semi-plano derecho?*

$\blacksquare$

Siguiendo con nuestra ecuación inicial

$$f(x) = y$$

consideremos el siguiente caso:

Sean: $\Omega = B((0,0);1) \subset \mathbb{R}^2$*, bola abierta de centro* $(0,0)$ *y radio 1;* $y = (0,0)$*;*

$$f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por $f(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 0)$*.*

Tenemos, entonces, que: f *es continua,*

$$\begin{aligned} f^{-1}\{y\} &= f^{-1}\{(0,0)\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \overline{\Omega} : f(x_1,x_2) = (0,0)\} \\ &= \partial\Omega \\ &= S^1 \text{ (esfera unitaria)} \end{aligned}$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$ *y* Ω *e* *y*, ***como antes*** *definamos:*

$$\tilde{f} : \overline{\Omega} \longrightarrow R^2,\ por\ \tilde{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1 - \epsilon, 0)$$

Resulta que $\tilde{f}$ *es continua y*

$$\begin{aligned} f^{-1}\{y\} &= f^{-1}\{(0,0)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} : \tilde{f}(x_1, x_2) = (0,0)\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Como podemos tomar $\epsilon > 0$, *tan pequeño como se quiera, concluímos que* f *y* $\tilde{f}$ *están* ***tan próximas como se desee****; sin embargo, las soluciones de las ecuaciones:*

$$f(x) = y \qquad , \qquad \tilde{f}(x) = y$$

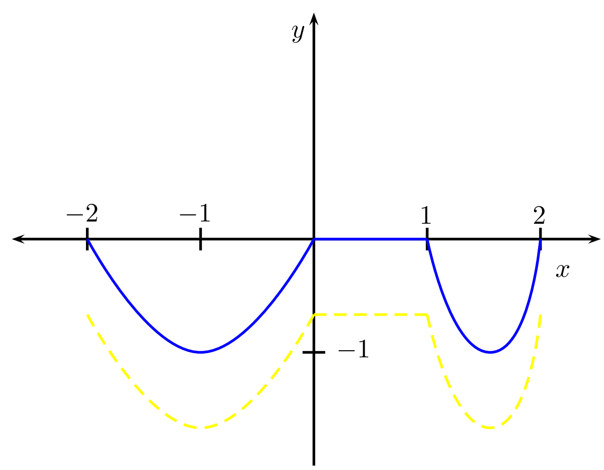
son drásticamente diferentes. (Notemos que $\mathbf{y} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbf{f}(\partial\Omega)$*)*

■

Veamos otro caso, más simple aún.

Sean: $n = 1$; $\quad y = 0$; $\quad \Omega = (-2, 2)$; $\quad f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \{2,2\} \cup [0,1] \\ x^2 + 2x & si\ x \in (-2, 0) \\ x^2 - 3x + 2 & si\ x \in (1, 2) \end{cases}$$



$\tilde{f} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x) - \epsilon$ *con* $\epsilon > 0$. *Resulta que:*

$$f^{-1}\{0\} = \{-2, 2\} \cup [0, 1] \tag{1.1}$$

$$\tilde{f}^{-1}\{0\} = \emptyset \tag{1.2}$$

Notemos que, a pesar de que f *y* $\tilde{f}$ *están "próximas" una de la otra , o que una es una "deformación continua"de la otra, 1.1 y 1.2 indican situaciones bastante diferentes. Observemos, también, que:*

$$\partial\Omega = \{-2, 2\} \qquad y \quad que \qquad \mathbf{0} \in \mathbf{f}(\partial\Omega)$$

Es para evitar situaciones como las que acabamos de presentar, que colocaremos durante la construcción de la Teoría del Grado, la condición:

$$\mathbf{y} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$$

Recordemos que queremos construir una herramienta que nos sea útil al tratar de responder a las preguntas surgidas en relación a la ecuación $f(x) = y$.

En el camino hacia nuestro objetivo, cuando tengamos una función $\mathbf{f} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, ***continua, con*** $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, ***abierto y acotado****, e* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$*, tal que* $\mathbf{y} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$, *diremos que la terna* $(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{y})$ ***es admisible****, y asociaremos, que denotaremos a dicha terna un* ***número entero****, denotaremos por* $\mathbf{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{y})$.

Así que, nuestra meta es construir ***una función***

$$d : \{\textit{ternas admisibles}\} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

la cual nos dé respuestas significativas a las interrogantes planteadas al comienzo del capítulo.

Para comenzar, ¿cuáles requisitos debe cumplir tal función d*?*

En primer lugar, si $f = i\mathbf{d}$*, la aplicación identidad de* $\mathbb{R}^n$*,*
definida por $id(x) = x$*, entonces,* $f(x) = y$*, con* $y \in \Omega$*,*
tiene la ***única*** *solución* $x = y$.

De modo que, es natural requerir que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{id}, \Omega, \mathbf{y}) = \mathbf{1}, \quad \textbf{\textit{para todo}}\ \mathbf{y} \in \Omega; \tag{d1}$$

(Esta condición es conocida como ***normalización****).*

La segunda exigencia es una expresión natural del anhelo de que **d** *debería proporcionar información sobre la localización de las soluciones de nuestra ecuación:* $f(x) = y$.

Supongamos que Ω_1 *y* Ω_2 *son subconjuntos de* Ω, ***abiertos y disjuntos****, tales que* $f(x) = y$ *tiene un número finito de soluciones en* $\Omega_1 \cup \Omega_2$*, pero ninguna solución en* $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. $\qquad (A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\})$

Entonces, el número de soluciones en Ω *es la suma del número de soluciones en* Ω_1 *y* Ω_2*, lo cual sugiere la condición:*

$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$*, donde,* Ω_1, Ω_2 ***son conjuntos de*** Ω ***abiertos, disjuntos, tales que*** $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ *(d2)*
(Tal condición es llamada ***aditividad****)*

El tercer, y último, requisito para d tiene una motivación práctica: muchas veces, calcular $\mathbf{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{y})$ *puede ser muy complicado o difícil, entonces, en su lugar se halla* $\mathbf{d}(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{y_0})$*, donde,* $\mathbf{g}$ *y* $\mathbf{y_0}$ *son* ***"deformaciones continuas"*** *de* **f** *e* **y***, respectivamente.*

Precisemos:

Sean: $\begin{array}{ccccc} f & : & \overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ g & : & \overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$

continuas, tales que: $y \notin f(\partial\Omega), \quad y \notin g(\partial\Omega)$.

Supongamos que existe

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

continua que verifica

$$\begin{array}{rcl} h(0,x) & = & f(x) \\ h(1,x) & = & g(x), \end{array} \qquad \textit{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

*Se dice, entonces, que h es una **homotopía** entre f y g, o que, f y g son **homotópicas** , o que, cada una es una **"deformación continua"** de la otra.*

*Si, además, $\mathbf{h(t,x) \neq y}$ **para todo** $\mathbf{t \in [0,1]}$ y **para todo** $\mathbf{x \in \partial\Omega}$, se dice que h es una **homotopía admisible, respecto a $\mathbf{y}$. Así, el último requisito para d se expresa, en su forma más general, como:***

$\mathbf{d(h(t,\cdot),\Omega,y(t))}$ ***es independiente de*** $\mathbf{t \in [0,1]}$***, donde,***

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \qquad y : [0,1] \to \mathbb{R}^n,$$

son continuas y, además, $\mathbf{y(t) \notin h(t, \partial\Omega)}$***, para todo*** $t \in [0,1]$***.*** ***(d3)***

La condición (d3) es conocida como invariancia homotópica.

Ejemplo 1.1. *Sean $\Omega = (-1,1)$;*

$$\begin{array}{cc} f : [-1,1] \to \mathbb{R} & g : [-1,1] \to \mathbb{R} \\ f(x) = x & g(x) = xe^x \end{array}$$

Queremos hallar $d(f,\Omega,0)$

Consideremos

$$h : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$$h(t,x) = (1-t)f(x) + t\, g(x);$$

$$y(t) = 0, \ \textit{para todo}\ t \in [0,1].$$

*Resulta que h es una **homotopía admisible,** respecto a 0, entre f y g, pues:*

$h(0,x) = f(x);\ \ h(1,x) = g(x)$; *además,*

$$\begin{array}{rcl} h(t,-1) & = & (1-t)f(-1) + tg(-1) \\ & = & -(1-t)e^{-1} - t \\ & \neq & 0, \qquad \textit{para todo} \quad t \in [0,1]; \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
h(t,1) &= (1-t)f(1)+tg(1)\\
&= (1-t)e+t\\
&\neq 0, \qquad \textit{para todo} \quad t\in[0,1];
\end{aligned}
$$

Luego, usando (d3) y (d1), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
d(f,\Omega,0) &= d(g,\Omega,0)\\
&= d(id,\Omega,0)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

■

Más adelante veremos que (d1), (d2) y (d3) determinan (únivocamente) la función d; así que, aunque hay varias maneras de construir la función d, es irrelevante cual forma elijamos; la más antigua, usa conceptos topológicos, como: conjuntos abiertos, funciones continuas, y un poco de teoría de grupos. Nosotros escogeremos un enfoque más reciente, el cual utiliza herramientas analíticas básicas, como: ***el teorema de aproximación de Weierstrass, el teorema de la función inversa*** *y el llamado* ***Lema de Sard.***

L.E.J. Brouwer estableció el grado para funciones continuas, en 1912. Y ya es tradición hablar del ***grado de Brouwer.*** *Pero en verdad, debemos señalar que el camino hacia una construcción analítica del grado fue allanado por la investigacion de* ***Sard*** *sobre la medida de los valores críticos de funciones diferenciables, en 1942.*

■

Antes de continuar, aclararemos sobre algunas notaciones que emplearemos y, también, daremos varias definiciones:

- Ω *siempre indicará un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, abierto y acotado.*

- *Para funciones* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, indicaremos por*

$$
\begin{aligned}
f(D) &= \{f(x) : x \in D\} \\
f^{-1}\{y\} &= \{x \in D : f(x) = y\}
\end{aligned}
$$

- *Cada aplicación lineal de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$ *será identificada con su matriz* $A = (a_{ij})$ *y escribiremos* $\det A$, *para el determinante de* A. *En el caso que* A *sea* ***invertible****, es decir,* $\det A \neq 0$, *definimos:*

$$
sig(\det A) = \begin{cases} \;\;1 & si \;\det A > 0 \\ -1 & si \;\det A < 0 \end{cases}
$$

- *Si* $D \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado y acotado (o sea, compacto), entonces* $\mathcal{C}(D)$ *denota el espacio de las funciones continuas* $f : D \to \mathbb{R}^n$, *y* $|f|_0 = \max_{x \in D} |f(x)|$.

- *Se dice que* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *es diferenciable en* $x_0 \in \Omega$, *si existe una matriz, que denotaremos por* $f'(x_0)$, *tal que:*

$$
f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + w(h),
$$

donde, $h \in \Omega - x_0 = \{x - x_0 : x \in \Omega\}$, *y el* ***"resto"*** $w(h)$ *satisface:*

$$
|w(h)| \leq \varepsilon |h|, \quad para \quad |h| \leq \delta = \delta(\varepsilon, x_0).
$$

Notemos que $f'(x_0)_{ij} = \partial_j f_i(x_0) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, *la derivada parcial de la* $i-$*ésima componente de* f, *con respecto a* x_j.

En otras palabras, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *y cada* f_i *es función de* $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *De modo que:*

$$
f`(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}
$$

- *Usando el* ***símbolo de Landau****, la diferenciabilidad de* f *en* x_0 *se expresa así:*

$$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h = 0(|h|),$$

cuando $h \to \mathbf{0}$*, donde,* $0(|h|) = w(h)$ *y* $\dfrac{w(h)}{|h|} \to 0$*, cuando* $|h| \to 0$.

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *denotará al conjunto de las* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$*, que son* $k-$*veces continuamente diferenciables en* Ω*, mientras que*

$$\overline{\mathcal{C}}^{\,k}(\Omega) \quad = \quad C^k(\Omega)\cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

y

$$\overline{\mathcal{C}}^{\,\infty}(\Omega) \quad = \quad \bigcap_{k\geq 1} \overline{\mathcal{C}}^{\,k}(\Omega)$$

- *Si* $f'(x_0)$ *existe, entonces,* $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ *es llamado el*

Jacobiano de f en $\mathbf{x_0}$;

x_0 *es llamado un* ***punto crítico de f*** *si* $J_f(x_0) = \det f'(x_0) = 0$.
También, denotaremos por: $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$*; muchas veces, por brevedad, escribiremos* S_f*. Por otra parte, un punto* $y \in \mathbb{R}^n$ *será llamado* ***valor regular de f****, si*

$$f^{-1}\{y\} \cap S_f = \emptyset$$

Si éste no es el caso, y *será llamado un* ***valor singular de f.***

Ejemplo 1.2. *Sean:* $\Omega = B((0,0);2) \subset \mathbb{R}^2$; $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $f(x,y) = (x^3-3xy^2, -y^3+3x^2y)$.
Tenemos:

$$\begin{aligned} J_f(x,y) &= \begin{vmatrix} 3x^2-3y & -6xy \\ 6xy & -3y^2+3x^2 \end{vmatrix} \\ &= -9x^2y^2+9x^4+9y^4-9x^2y^2+36x^2y^2 \\ &= 9x^4+9y^4+18x^2y^2 \\ &= (3x^2+3y^2)^2. \end{aligned}$$

Luego, el único punto crítico de f es el $(0,0)$. Así que, $S_f(\Omega) = \{(0,0)\}$. Por consiguiente, para que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ***no*** *sea un valor regular de f , debe tenerse:*

$$f^{-1}\{(a,b)\} = (0,0)$$

Es decir, $f(0,0) = (a,b)$. Pero $f(0,0) = (0,0)$. De modo que, $a = 0$ y $b = 0$. O sea, $(0,0)$ es el único valor singular de f.

Recordemos que dados:

$$y_0 \in \mathbb{R}^n; \quad A \subset \mathbb{R}^n,$$

se define la distancia de y_0 al conjunto A, como:

$$\inf_{a \in A} |y_0 - a|$$

Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, entonces la distancia de y_0 al conjunto $f(\partial\Omega)$ es un número ***positivo****, que denotaremos por:*

$$\alpha = \rho(\mathbf{y_0}, \mathbf{f}(\partial\Omega)) > \mathbf{0},$$

número que será clave en el desarrollo de la Teoría del Grado en $\mathbb{R}^n$.

La justificación de que $\alpha > 0$ se basa en el hecho de que $f(\partial\Omega)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, y en que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. (Ver [10], página 73)
Un hecho que no podemos dejar de mencionar es que $\mathbf{d}$ *está únivocamente determinada por sus valores en las funciones que están en $\overline{\mathcal{C}}^{\infty}(\Omega)$. Veámoslo:*

Sea $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continua. Ya que $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, podemos usar la proposición 1.2 de [4], parte a.), página 6, para concluir que:

Dado $\epsilon > 0$, existe una función $\mathbf{g} \in \overline{\mathcal{C}}^{\infty}(\Omega)$,

$$\textit{tal que} \quad |f(x) - g(x)| < \epsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Recordemos que $y \in \mathbb{R}^n$ es tal que $y \notin f(\partial\Omega)$.

De modo que $\alpha = \rho(y, f(\partial\Omega)) > 0$.

Tomemos $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2}$.

Podemos expresar lo afirmado más arriba, así: existe $g \in \overline{\mathcal{C}}^{\infty}(\Omega)$, tal que:

$$|f - g|_0 < \frac{\alpha}{2}$$

Ahora, vamos a definir una homotopía entre f y g:

Sea $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *dada por:* $h(t,x) = (1-t)f(x) + t\, g(x)$.

Resulta que h *es continua; con* $h(0,x) = f(x)$, $\quad h(1,x) = g(x)$;
pero, además, es una ***homotopía admisible, respecto a y.***

En efecto, para $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *tenemos:*

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y| &= |(1-t)f(x) + t\, g(x) - y| \\ &\geq |f(x) - y| - |t(g(x) - f(x))| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Luego, usando (d3), con $y(t) \equiv y$, *concluímos que:*

$$d(f,\Omega,y) = \mathbf{d}(\mathbf{g},\Omega,\mathbf{y}).$$

$\blacksquare$

Tenemos así, que basta conocer el grado, en el caso de las funciones de $\overline{\mathcal{C}}^{\infty}(\Omega)$. *Sin embargo, en la construcción de la Teoría del Grado, no necesitaremos tanta regularidad en las funciones. En realidad, nos bastará con que* $f \in \overline{\mathcal{C}}^{1}(\Omega)$.

A estas alturas, el lector puede estar algo impaciente, pues aún no tenemos una expresión para $d(f,\Omega,y)$; *ella será encontrada en el próximo capítulo; por los momentos, veamos dos propiedades, bastante útiles de la función* $\mathbf{d}$. *La primera, está relacionada con problemas de existencia de soluciones para la ecuación* $f(x) = y$.

Supongamos que $f^{-1}\{y\} = \emptyset$. *Entonces, en* (d2), *tomemos* $\Omega_1 = \Omega$ *y* $\Omega_2 = \emptyset$, *para obtener:*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_{\mathbf{1}},y) + d(f,\emptyset,y)$$

(tener cuenta que $y \notin f(\partial\Omega) = f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. *Luego,* $\mathbf{d}(\mathbf{f},\emptyset,\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

En seguida (nuevamente usando (d2)) se llega a:

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(f,\emptyset,y) = d(f,\Omega_1,y), \tag{1.3}$$

si Ω_1 *es un subconjunto de* Ω*, abierto, tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} - \Omega_1)$.

Aprovechando que $f^{-1}\{y\} = \emptyset$*, podemos elegir en* (1,3), $\Omega_1 = \emptyset$*, y conseguir:*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\emptyset,y) = 0. \tag{1.4}$$

De forma que, y esto es lo importante, si en un problema llegáramos a conseguir que $\mathbf{d}(\mathbf{f},\Omega,\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$*, nuestra conclusión será, que en ese caso,* $\mathbf{f^{-1}}\{\mathbf{y}\} \neq \emptyset$*, y nuestra ecuación* $f(x) = y$*, tendrá, al menos, una solución en* Ω*.*

Nota 1.2. *Sin embargo, puede suceder que sea*

$$d(f,\Omega,y) = 0 \qquad y \qquad f^{-1}\{y\} \neq \emptyset.$$

La segunda propiedad que queremos considerar, y con ella cerramos este capítulo, establece que si:

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$
$$g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$

son continuas, con $(y \notin f(\partial\Omega) \cup g(\partial\Omega))$*, y además,* $f_{|\partial\Omega} \equiv g_{|\partial\Omega}$*, entonces:*

$$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

Demostración. *Definamos* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$*, por:*

$$h(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x).$$

Entonces, h *es continua;* $h(0,x) = g(x)$*, y* $h(1,x) = f(x)$*.*

Así, h *es una homotopía entre* f *y* g*.*

Para ver que dicha ***homotopía es admisible, respecto a*** y*, consideremos* $x \in \partial\Omega$.

Como entonces se tiene $f(x) = g(x)$*, resulta:*

$$h(t, x) = g(x) \neq y, \quad \textit{para todo} \;\; t \in [0, 1].$$

Ahora, podemos utilizar (d3), con $y(t) \equiv y$*, para concluir que*

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

En la búsqueda de una expresión (Fórmula) para $\mathbf{d(f, \Omega, y)}$.

Comencemos con una $f \in \overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$ *y* $x_0 \in \Omega$*, tal que* $f(x_0)$ *es valor regular de* f *(o sea,* $J_f(x_0) \neq 0$*)). Entonces, por el* ***Teorema de la función inversa*** *(ver [6], página 283) existe una vecindad* U *de* x_0*, tal que* $f_{|_{U_0}}$ *es un homeomorfismo sobre una vecindad de* $f(x_0)$*.*

Llamaremos y *a* $f(x_0)$*. Tenemos, entonces, que* **y** ***es un valor regular de f.*** *Por lo que acabamos de afirmar, resulta que* $f^{-1}\{y\}$ *consiste de* ***puntos aislados.*** *Es decir, si* $x_i \in f^{-1}\{y\}$*, entonces, existe una vecindad* $\cup(x_i)$ *tal que:*

$$\cup(x_i) \cap f^{-1}\{x_i\} = \{x_i\}.$$

En consecuencia, $f^{-1}\{y\}$ ***debe ser finito****.*

Efectivamente, si $f^{-1}\{y\}$ *fuese* ***infinito****, existiría, en virtud de la compacidad de* $\overline{\Omega}$*, un punto de acumulación, digamos* $x^* \in \overline{\Omega}$*, de* $f^{-1}\{y\}$

Por la continuidad de f*, se sigue que:*

$$f(x^*) = y$$

Pero ya sabemos que $f^{-1}\{y\}$ *consiste de puntos aislados.*

Luego, hemos arribado a una contradicción. De manera que, $f^{-1}\{y\}$ es finito. ∎

¿Y qué sucede en el caso en que y no es un valor regular de f?

Veremos que en esa situación, basta elegir un $\mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, ***valor regular*** *de f, suficientemente cercano a y, y definir:*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0)$$

¡Claro!, será necesario probar que esta definición no depende del y_0 escogido. ¿Y cómo sabemos que existirá tal y_0? Esto está garantizado por el:

Lema 2.1. ***(Lema de Sard).***

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es abierto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\Omega^* \subset \Omega$ es medible, entonces, $f(\Omega^*)$ es medible y

$$\mu_n(f(\Omega^*)) \leq \int_{\Omega^*} |J_f(x)| dx, \qquad (ver[7]),$$

donde, μ_n denota la medida de Lebesgue, en $\mathbb{R}^n$. ∎

Una consecuencia muy importante de este lema es: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces,

$$\mu_{\mathbf{n}}(\mathbf{f}(\mathbf{S_f})) = \mathbf{0}$$

∎

Sea, ahora, $y \in \mathbb{R}^n$, tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, ***no necesariamente****, valor regular de f. Consideremos la bola abierta $B(y;\alpha)$, de centro y, con radio $\alpha = \rho(y, f(\partial\Omega))$. Tenemos que:*

$$B(y;\alpha) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset,$$

y además, como $\mu_n(B(y;\alpha)) > 0$, podemos afirmar, ***en virtud del Lema de Sard****, que existe $y_0 \in B(y;\alpha)$, tal que: y_0 es* ***valor regular de f.***

Ahora definamos:

- $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *por* $h(t,x) = f(x)$,
- $y(t) = ty + (1-t)y_0$.

Como consecuencia de (d3), se sigue que:

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega,y_0)$$

■

Notemos que cualquiera sea el valor regular y_0, escogido en $B(y;\alpha)$, el resultado es el mismo, pues el $y(t)$ correspondiente cumple lo exigido en (d3). De modo que podemos afirmar:

$$d(f,\Omega,\cdot) \text{ es constante en } B(y;\alpha). \tag{2.1}$$

*Continuamos en nuestro camino hacia el hallazgo de una fórmula para $d(f,\Omega,y)$. Sean: $f\in\overline{\mathcal{C}}^1(\Omega)$; $\quad y$, **valor regular de f**, tal que $y\notin f(\partial\Omega)$, más brevemente, $y\notin f(\partial\Omega\cap S_f)$.*

Si $f^{-1}\{y\}=\emptyset$, ya vimos que $d(f,\Omega,y)=0$.

Suupongamos entonces que, $f^{-1}\{y\}\neq\emptyset$.

Ya sabemos que $f^{-1}\{y\}$ es finito, digamos,

$$f^{-1}\{y\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}.$$

Para cada x_i elegimos una vecindad U_i, tal que $U_i\cap U_j=\emptyset$, si $i\neq j$. Utilizando (d2), llegamos a:

$$d(f,\Omega,y)=\sum_{i=1}^{k}d(f,U_i,y) \tag{2.2}$$

Ahora, analicemos $d(f,U_i,y)$. Llamemos $A=f'(x_i)$.

*Empleando **la notación de Landau**, tenemos*

$$f(x)=f(x_i)+A\cdot(x-x_i)+0\,(|x-x_i|),\quad \text{cuando } x-x_i\to\mathbf{0},$$

O sea,

$$f(x)=\mathbf{y}+A\cdot(x-x_i)+0\,(|x-x_i|),\quad \text{cuando } x-x_i\to\mathbf{0},$$

donde, $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$. Por otro lado, como $\det A\neq 0$, resulta que A^{-1} existe. Esto nos permitirá demostrar que

$$d(f,B(x_i;\delta),y)=d(A-Ax_i,B(x_i;\delta),\mathbf{0}),$$

para $\delta > 0$, suficientemente pequeño, y donde,

$$(A - Ax_i)(x) = Ax - Ax_i.$$

En efecto, definamos:

- $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *por:*

$$h(t,x) = tf(x) + (1-t)A(x - x_i)$$

- $y(t) = ty$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y(t)| &= |tf(x) + (1-t)A(x-x_i) - ty| \\ &= |\mathbf{tf(x)} - \mathbf{ty} + (1-t)A(x-x_i)| \\ &= |\mathbf{tA(x - x_i)} + \mathbf{t\,0(|x - x_i|)} + (1-t)A(x-x_i)| \\ &= |A(x-x_i) + 0(|\mathbf{x - x_i}|)| \\ &\geq |A(x-x_i)| - 0(|x - x_i|). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pero,

$$\begin{aligned} |x - x_i| &= |A^{-1}A(x-x_i)| \\ &\leq |A^{-1}|\ |A(x-x_i)|; \end{aligned}$$

llamando $\dfrac{1}{|A^{-1}|} = c$, *llegamos a:* $\quad |A(x-x_i)| \geq c|x - x_i|$.

Introduciendo esto último en 2.3, resulta:

$$|h(t,x) - y(t)| \geq c|x - x_i| - 0(|x - x_i|) > 0,$$

para todo $t \in [0,1]$, con la condición $|x - x_i| \leq \delta$, para $\delta > 0$, suficientemente pequeño.

De manera que, usando (d3), obtenemos:

$$d(f, B(x_i;\delta), y) = d(A - Ax_i, B(x_i;\delta), \mathbf{0}). \tag{2.4}$$

Por otro lado, como $f(x) \neq y$ en $\overline{U_i} - B(x_i,\delta)$, utilizando (d2), se sigue que:

$$d(f, U_i, y) = d(f, B(x_i;\delta), y)$$

Luego, llegamos a:

$$d(f, U_i, y_i) = d(A - Ax_i, B(x_i; \delta), \mathbf{0}). \tag{2.5}$$

También, como x_i *es la* ***única solución*** *de la ecuación* $Ax - Ax_i = \mathbf{0}$*, usando, nuevamente, (d2), se deduce que:*

$$d(A - Ax_i,\ B(x_i; \delta), \mathbf{0}) = d(A - Ax_i,\ B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}), \tag{2.6}$$

donde, $B(\mathbf{0}, r) \supset B(x_i; \delta)$.

Ahora es momento de establecer una ***homotopía admisible****, respecto a* $\mathbf{0}$*, entre* A *y* $A - Ax_i$.

Sea $h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^n$*, dado por:* $h(t, x) = Ax - t\, A\, x_i$.

Tenemos que h *es continua,*

$$h(0, x) = Ax \qquad y \qquad h(1, x) = Ax - Ax_i = (A - Ax_i)x.$$

Falta probar que, para $x \in \partial B(\mathbf{0}; r)$*, y* ***todo*** $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$*, se cumple* $h(t, x) \neq \mathbf{0}$*. En caso contrario, existirían:* $t_0 \in [0, 1]$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, con* $|x_0| = r$*, tales que:*

$$Ax_0 - t_0 A x_i = \mathbf{0}.$$

De la inyectividad de A*, se deduce que:*

$$x_0 - t_0 x_i = \mathbf{0}.$$

Luego, $|x_0| = t_0|x_i|$*. Es decir,* $r = t_0|x_i| \leq |x_i|$*, lo cual es absurdo, pues* $x_i \in B(\mathbf{0}; r)$.

Así que, podemos usar (d3) y escribir:

$$d(A,\ B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(A - Ax_i,\ B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}). \tag{2.7}$$

Entonces, de 2.5, 2.6 y 2.7, se obtiene:

$$d(f, U_i, y) = d(A,\ B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(f'(x_i), B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}).$$

Como $r > 0$ *puede ser arbitrario, tenemos, finalmente:*

$$d(f, U_i, y) = d(f'(x_i), \Omega, \mathbf{0}), \tag{2.8}$$

Así que, mirando a 2.2, podemos escribir:

$$d(f,\Omega,y)=\sum_{i=1}^{k} d(f'(x_i),\Omega,\mathbf{0}), \tag{2.9}$$

Vemos entonces, que nuestro problema se ha reducido a calcular $d(f'(x_i),\Omega,\mathbf{0})$. *Y es aquí donde el Álgebra lineal llega en nuestro auxilio.*

Probaremos que si $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, *es una transformación lineal,* ***con*** $\det \mathbf{A}\neq \mathbf{0}$, *entonces*

$$d(A,\Omega,\mathbf{0})=sig\det A \tag{2.10}$$

Si damos 2.10 por demostrada, llegamos a la expresión buscada para $\mathbf{d}$*:*

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,y) &= \sum_{i=1}^{k} sig\det f'(x_i) \\ &= \sum_{x\in f^{-1}\{y\}} sig\ J_f(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nota 2.1. *para abarcar el caso* $f^{-1}\{y\}=\emptyset$, *convenimos en que* $\sum_{\emptyset}=0$

Nota 2.2. *No debemos olvidar, que hemos llegado a 2.11 bajo las condiciones:*

$$f\in\overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega),\quad y\neq f(\partial\ \Omega),\qquad y\ \ \textit{valor regular de}\ \ f.$$

Ya sabemos qué ocurre en el caso de que y *es un valor singular de* f *(Ver 2.1, despues del Lema de Sard). Ya, al final del presente capítulo, consideraremos el caso en que* f, ***apenas***, *pertenece a* $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. *Por el momento, antes de analizar 2.10, apliquemos 2.11, en algunas situaciones simples.*

1. *Sea* $f:[-\frac{1}{2},1]\to\mathbb{R}$, *definida por:* $f(x)=2xe^x$.
   Hallar: $d(f,(-\frac{1}{2},1),0)$ *y* S_f.

   Solución: Encontremos, en primer lugar, $f^{-1}\{0\}$.

   Resulta que si $x\in f^{-1}\{0\}$, *entonces,* $f(x)=0$,
   o sea, $2xe^x=0$.

Luego, $x = 0$; *así,* $f^{-1}\{0\} = \{0\}$.

Además, notemos que

$$f(-\tfrac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

$$y$$

$$f(1) = 2e \neq 0$$

También, $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$.

$\therefore\ S_f = \{x \in (-\frac{1}{2}, 1) : f'(x) = 0\} = \emptyset$.

Por otra parte, $f'(0) = 2 \ \therefore\ sig f'(0) = 1$.

Por consiguiente, usando 2.11 se obtiene:

$$d(f, (-1,1), 0) = \sum_{x \in f^{-1}\{0\}} sig\ f'(x) = sig\ f'(0) = 1.$$

(Notar que 0 *es un valor regular de* f*.)*

2. *Sea* $f : [-7, 5] \to \mathbb{R}$, *definida por:* $f(x) = x^2$.
Hallar: S_f *y* $d(f, (-7, 5), 4)$

Solución: Tenemos: $f'(x) = 2x$.

Luego $S_f = \{x \in (-7, 5) : f'(x) = 0\} = \{0\}$.

Por otro lado, $f^{-1}\{4\} = \{-2, 2\}$. *También,* $f(-7) = 49$ *y* $f(5) = 25$, *de modo que* $4 \notin f(\partial\Omega) = \{49, 25\}$

También, $f^{-1}\{4\} \cap S_f = \{-2, 2\} \cap \{0\} = \emptyset$.

Utilizando 2.11, resulta:

$$d(f, (-7, 5), 4) = \sum_{x \in \{-2,2\}} sig\ f'(x) = sig\ f'(-2) + sig\ f'(2) = -1 + 1 = 0.$$

(Observar, sin embargo, que $f^{-1}\{4\} \neq \emptyset$*; Ver nota 1.1)*

$\blacksquare$

A continuación, dediquémonos a analizar 2.10.

Analicemos el caso $n = 2$*, el cual ayudará a entender el caso general, presentado en* [4]*, páginas 10, 11 y 12.*
Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *con* $ad - bc \neq 0$.
Caso 1: *Cuando el polinomio característico de* A*, o sea,*

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc,$$

tiene como raíces $\boldsymbol{\lambda_1}$ *y* $\boldsymbol{\lambda_2}$*,* ***ambos positivos.***

Sabemos que λ_1 *y* λ_2*, son los valores propios de* A*,*
y que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc = \det A$.

Vamos a definir una ***homotopía admisible*** *(respecto a* $\mathbf{0}$*)*
entre A *y la identidad* I *de* $\mathbb{R}^2$.

Sean:

$$r > 0 \;\; y \;\; h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^2,$$
$$h(t,x) = tAx + (1-t)x.$$

Tenemos que h *es continua y que*

$$h(0,x) = x; \qquad h(1,x) = Ax.$$

Supongamos que, existen: $t_0 \in [0,1]$ *y* $x_0 \in \partial B(\mathbf{0}; r)$*, tales que*

$$t_0 A x_0 + (1 - t_0) x_0 = \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

Afirmamos que $t_0 > 0$*. En efecto, si fuera* $t_0 = 0$*, de 2.12 tendríamos* $x_0 = 0$ *(lo cual es absurdo, pues* $|x_0| = r > 0$*). Entonces, de 2.12 obtenemos:*

$$Ax_0 = \frac{t_0 - 1}{t_0} x_0,$$

lo cual significa que $\dfrac{t_0 - 1}{t_0}$ *(el cual es* ≤ 0*) es un valor propio de* A *(contradicción, pues estamos en el caso en que los valores propios de* A *son*

positivos).

De manera que 2.12 no puede darse, y h es una homotopía admisible (respecto a $\mathbf{0}$) entre A y la identidad I. Así, en virtud de (d3) y (d1), se sigue:

$$d(A, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = 1 = sig\ (\lambda_1 \cdot \lambda_2) = sig\ \det A$$

Caso 2: *Cuando λ_1 y λ_2, valores propios de A,* ***son, ambos, negativos.***

Consideremos: $h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}, r) \to \mathbb{R}^2$, dada por $h(t,x) = tAx - (1-t)x$.

Esta h es una ***homotopía admisible****(respecto a $\mathbf{0}$)* ***entre A y la aplicación $-\mathbf{I}$****, pues h es continua, $h(0,x) = -x$, $h(1,x) = Ax$, y, si fuera $t_0 A x_0 - (1-t_0)x_0 = \mathbf{0}$, para algún $t_0 \in [0,1]$ y para algún $x_0 \in \partial B(\mathbf{0}; r)$, se tendría:*

$$Ax_0 = \frac{1-t_0}{t_0} x_0$$

(Ver que $t_0 = 0$ nos llevaría al absurdo: x_0 : $\mathbf{0}$.) Pero entonces, $\dfrac{1-t_0}{t_0} \geq 0$ sería un valor propio de A (Contradicción).
Así que, utilizando (d3), resulta:

$$d(A, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(-I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}). \tag{2.13}$$

Ahora, ¿ qué hacemos respecto a $d(-I, \mathbf{B}(\mathbf{0}; r), \mathbf{0})$? Para hallarlo, vamos a auxiliarnos con la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, la cual cumple que $M^2 = -I$.

Definamos $h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^2, \quad h(t,x) = tMx - (1-t)x$.

Esta h resulta ser una ***homotopía admisible*** *(respecto a $\mathbf{0}$) entre M y $-I$, ya que h es continua, $h(0,x) = -x$, $h(1,x) = Mx$, y no pueden existir $t_0 \in [0,1]$, $x_0 \in \partial B(\mathbf{0}; r)$, tales que:*

$$t_0 M x_0 - (1-t_0)x_0 = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

En efecto, sea $x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tal que 2.14 se cumple.

Entonces,

$$t_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1-t_0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

es decir:

$$t_0 x_2 = (1-t_0)x_1 \quad y \quad -t_0 x_1 = (1-t)x_2 \tag{2.15}$$

Esto nos lleva a que todo $t_0 \notin \{0,1\}$*,*
ya que en caso contrario, sería $x_1 = x_2 = 0$ *(absurdo).*

Luego, de 2.15 se obtiene:

$$\frac{x_2}{-x_1} = \frac{x_1}{x_2} \quad \therefore x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad \textit{(contradicción).}$$

De manera que, podemos emplear (d3) y concluir que:

$$d(-I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(M, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) \tag{2.16}$$

Pero, también ocurre que M *e* I *son homotópicas (respecto a* $\mathbf{0}$*); basta definir:*

$$h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^2,$$

así:

$$h(t,x) = tMx + (1-t)x.$$

La demostración es ***casi una repetición*** *de la que acabamos de hacer.*

Luego, utilizando, nuevamente, (d3), llegamos a:

$$d(M, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = 1, \tag{2.17}$$

donde, la última igualdad se debe a (d1).

De manera que, en resumidas cuentas, usando 2.13 2.16 y 2.17, tenemos que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}(\mathbf{0}; \mathbf{r}), \mathbf{0}) = 1 = sig\ (\lambda_1 \cdot \lambda_2) = \mathbf{sig} \det \mathbf{A}.$$

Caso 3: *Cuando el polinomio característico de la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ***no tiene raíces reales.*** *En otras palabras,* $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$*, tiene sus raíces complejas (las cuales, recordemos, son conjugadas) digamos,* $\alpha + i\beta$ *y* $\alpha - i\beta$*. Como el producto de ellas es igual al* $\det A$*, y* A *es invertible, tenemos:*

$$\det A = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \therefore \qquad sig \det A = 1$$

Ahora, ***tal como se hizo en el caso 1****, se define una homotopía admisible (respecto a* $\mathbf{0}$*), entre* A *y la identidad* I*; así, se llega a:*

$$\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}(\mathbf{0}; \mathbf{r}), \mathbf{0}) = d(I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = 1 = \mathbf{sig} \det \mathbf{A}.$$

Caso 4: *(Y último).*

Cuando un valor propio de A *(digamos* λ_1*) es* ***negativo*** *y el otro,* λ_2*, es* ***positivo****. Como* $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$*, resulta que el sig* $\det A = -1$*. Resta, entonces, probar que:*

$$d(A, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = -1 = sig \det A. \tag{2.18}$$

Sean: x_1*, vector propio correspondiente a* λ_1*;* x_2*, vector propio correspondiente a* λ_2*; es decir,* x_1 *y* x_2 *son elementos de* $\mathbb{R}^2$*, distintos del* $(0,0)$*, tales que:*

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad y \qquad Ax_2 = \lambda_2 x_2.$$

Sabemos que $\{x_1, x_2\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Además, denotemos por:

$$N_1 = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\},\ (subespacio\ generado\ por\ x_1),$$

$$N_2 = \{\lambda x_2 : \lambda \in \mathbb{R}\},\ (subespacio\ generado\ por\ x_2),$$

Tenemos: $\mathbb{R}^2 = N_1 \bigoplus N_2$*.*

Definimos $\begin{array}{ccccc} P_1 & : & \mathbb{R}^2 & \to & N_1, \\ P_2 & : & \mathbb{R}^2 & \to & N_2, \end{array}$

las respectivas ***proyecciones****.*

Es decir, para $x = \mu_1\ x_1 + \mu x_2\ x_2 \in \mathbb{R}^2$*, se tiene:*

$$P_1(x) = \mu_1\ x_1 \qquad y \qquad P_2(x) = \mu_2\ x_2$$

Establezcamos una ***homotopía admisible*** *(respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* A *y* $-P_1 + P_2$*.*

$$Sea \quad h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^2,$$

$$h(t,x) = tAx + (1-t)(-P_1 x + P_2 x).$$

Tenemos que h *es continua,* $h(0,x) = -P_1 x + P_2 x,\ h(1,0) = Ax$*.*

Supongamos que dicha homotopía h, ***no es admisible (respecto a*** $\mathbf{0}$***)***.

Entonces, existen:

$$t_0 \in [0,1] \quad y \quad x_0 \in \partial B(\mathbf{0}; r), \tag{2.19}$$

tales que:

$$t_0 A x_0 + (1-t_0)(-P_1 x_0 + P_2 x_0) = \mathbf{0} \tag{2.20}$$

Afirmamos que: $t_0 \notin \{0,1\}$*. En efecto, si fuera* $t_0 = 0$*, resultaría, según 2.20, que:* $P_1 x_0 = P_2 x_0$*. O sea,* $x_0 = 0$ *(absurdo).*

Por otro lado, si $t_0 = 1$*, obtenemos, de 2.20, que:*

$$A x_0 = \mathbf{0}$$

Es decir, $x_0 = \mathbf{0}$ *(pues A es invertible). Así, de nuevo llegamos a un absurdo.*

Así que, $t \neq 0$ *y* $t_0 \neq 1$*. También, como* $P_1 + P_2 = I$*, resulta que:*

$$A = AP_1 + AP_2 \tag{2.21}$$

Sustituyendo 2.21 en 2.20, se llega, después de trasponer términos, a:

$$t_0 A P_1 x_0 - P_1 x_0 + t_0 P_1 x_0 = t_0 P_2 x_0 - P_2 x_0 - t_0 A P_2 x_0 \tag{2.22}$$

Como el primer miembro de 2.22 pertenece a N_1 *y el segundo miembro de 2.22 pertenece a* N_2*, resulta que:*

$$t_0 A P_1 x_0 - P_1 x_0 + t_0 P_1 x_0 = \mathbf{0}$$

$$y$$

$$t_0 P_2 x_0 - P_2 x_0 - t_0 A P_2 x_0 = \mathbf{0}$$

Es decir,

$$A\mathbf{P_1 x_0} = \frac{1-t_0}{t_0} P_1 x_0 \qquad y \qquad A\mathbf{P_2 x_0} = \frac{t_0 - 1}{t_0} P_2 x_0.$$

Si es $P_1 x_0 \neq \mathbf{0}$*, entonces la situación es:* $\dfrac{1-t_0}{t_0}$ *es un valor propio de A, con vector propio* $\mathbf{P_1 x_0} \in \mathbf{N_1}$.

Luego, debe ser $\dfrac{1-t_0}{t_0} = \lambda_1$*, lo cual es absurdo, pues* $\lambda_1 < 0$ *y* $\dfrac{1-t_0}{t_0} > 0$.

Mientras que, si $P_2x_0 \neq \mathbf{0}$*, entonces,* P_2x_0 *es un vector propio de* A*, **perteneciente a*** $\mathbf{N_2}$ *y con valor propio* $\dfrac{t_0-1}{t_0}$*, lo cual implica que* $\dfrac{1-t_0}{t_0} = \lambda_2$.

Pero esta última igualdad constituye un absurdo, pues $\dfrac{1-t_0}{t_0} < 0$*, y* $\lambda_2 > 0$.

De manera que, debe cumplirse que:

$$P_1x_0 = P_2x_0 = \mathbf{0}.$$

O sea, $x_0 = \mathbf{0}$ *(contradicción, ya que* $|x_0| = r > 0$*).*

Conclusión: h *es una **homotopía admisible** (respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* A *y* $-P_1 + P_2$*, lo cual, en virtud de (d3), nos permite afirmar que:*

$$d(A, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(-P_1 + P_2, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}).$$

Por lo tanto, para lograr nuestro objetivo, 2.18, nos queda por probar que:

$$d(-P_1 + P_2, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = -1 \tag{2.23}$$

Empecemos por llevar en cuenta que, como el único cero (raíz) de $-P_1 + P_2$ *es* $x = \mathbf{0}$*, podemos reemplazar* $\mathbf{B}(\mathbf{0}; r)$ ***por cualquier abierto, acotado, que contenga al*** $\mathbf{0}$***, sin cambiar*** $\mathbf{d}$*, por ejemplo, por*

$$B(\mathbf{0}; r) \cap N_1 + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2$$

(aclaremos que $\Omega_1 + \Omega_2 = \{x + y : x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2\}$*).*

Consideremos $e_0 \in N_1$*, tal que* $|e_0| = 1$.

Sean:

$$\Omega = \{\lambda e_0 : \lambda \in (-\mathbf{2}, \mathbf{2})\},$$

$$\Omega_1 = \{\lambda e_0 : \lambda \in (-\mathbf{2}, \mathbf{0})\},$$

$$\Omega_2 = \{\lambda e_0 : \lambda \in (\mathbf{0}, \mathbf{2})\},$$

Ahora, definimos: $f : \overline{\Omega} \to N_1 \subset \mathbb{R}^2,$ *así:*

$$f(\lambda e_0) = (|\lambda| - 1)e_0.$$

Resulta que:

$$\mathbf{0} \notin f(\partial\Omega) = f\{-2e_0, 2e_0\} = \{e_0\}.$$

Por otro lado, si $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{1}}$*, tenemos:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\lambda e_0) = (-\lambda - 1)e_0 = -\lambda e_0 - e_0 = -\mathbf{x} - \mathbf{e_0}. \tag{2.24}$$

Mientras que, si $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{2}}$*, se cumple:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\lambda e_0) = (\lambda - 1)e_0 = -\lambda e_0 - e_0 = \mathbf{x} - \mathbf{e_0}. \tag{2.25}$$

Entonces, escribiendo $\mathbf{e_0}$*, para indicar la función constante* $\lambda e_0 \mapsto e_0$ *(con* $\lambda \in (-2, 2)$*), 2.24 y 2.25 se resumen en:*

$$f_{|\Omega_1} = -I_{|\Omega_1} - \mathbf{e_0} \qquad y \qquad f_{|\Omega_2} = I_{|\Omega_2} - \mathbf{e_0} \tag{2.26}$$

Ahora, sea

$$h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to N_1 \subset \mathbb{R}^2, \text{ dada por}: \; h(t, \lambda e_0) = t(|\lambda| - 2)e_0 + e_0$$

Tenemos que:

$$h \quad \text{es continua;}$$

$$h(0, \lambda e_0) = e_0;$$

$$h(1, \lambda e_0) = (|\lambda| - 1)e_0 = f(\lambda e_0).$$

Además, $h(t, -\mathbf{2}e_0) = h(t, \mathbf{2}e_0) = e_0 \neq \mathbf{0}$*. Luego,* h *es una **homotopía admisible** (respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* f *y la aplicación constante* $\mathbf{e_0}$*.*

De modo que, usando (d3), podemos afirmar que:

$$d(\mathbf{f} \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) = d(\mathbf{e_0} \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}), \tag{2.27}$$

Además, como

$$(\mathbf{e_0} \circ \mathbf{P_1} + P_2)(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) = e_0 + \mu_2 x_2 \neq \mathbf{0}, \tag{2.28}$$

Tenemos que:

$$d(\mathbf{e_0} \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) = 0 \tag{2.29}$$

(Ver (1.4), casi al final del capítulo 1.).

Así, de 2.27 y 2.29, conseguimos:

$$d(\mathbf{f} \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) = 0 \tag{2.30}$$

Luego, si en 2.30 utilizamos (d2), llegaremos a que:

$$d(f_0P_1+P_2,\Omega_{\mathbf{1}}+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0})+d(f_0P_1+P_2,\Omega_{\mathbf{2}}+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0})=0 \quad (2.31)$$

Notar que $\mathbf{0}\notin(f_0P_1+P_2)(\overline{\Omega}-(\Omega_1\cup\Omega_2))=\{-e_0,e_0\}$.

Ahora, analicemos cada sumando del primer miembro de 2.31. Empecemos por:

$$d(f_0P_1+P_2,\Omega_2+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0}). \quad (2.32)$$

Empleando 2.26, el número indicado en 2.32 se escribe:

$$d((I_{|\Omega_2}-e_0)\circ P_1+P_2,\Omega_{\mathbf{2}}+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0}) \quad (2.33)$$

Si ahora, reemplazamos $\Omega_{\mathbf{2}}$ *por* Ω *e* $I_{|\omega_2}-e_0$ *por* $I_{|N_1}-e_0$, ***no alteramos el valor del número indicado por*** *2.33, pues:*

$$[(I_{|N_1}-e_0)\circ P_1+P_2]\ (\lambda e_0)=\mathbf{0},\quad con\ \ \lambda\in(-\mathbf{2},\mathbf{2}),$$

implica que:

$$\lambda e_0-e_0=\mathbf{0},\quad o\ \ sea,\ \lambda=\mathbf{1},$$

de manera que el $\lambda\mathbf{e_0}$ *tomado, en verdad está en* $\Omega_2\subset\Omega$.

Entonces, 2.33 se convierte en:

$$d((I_{|N_1}-e_0)\circ P_1+P_2,\ \Omega+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0}) \quad (2.34)$$

Además, como $\lambda e_0-te_0\neq\mathbf{0}$, *para* $t\in[0,1]$ *y* $\lambda\in\{-2,2\}$, *entonces,*

$$h(t,x)=\lambda e_0-te_0,$$

define una homotopía admisible (respecto a $\mathbf{0}$*) entre* $I_{|N_1}-e_0$ *e* $I_{|N_1}$*; luego, utilizando (d3) se obtiene que el número representado en 2.34 es igual a:*

$$d((I_{|N_1}\circ P_1\ -e_0)\circ P_1\ +\ P_2,\Omega+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0}) \quad (2.35)$$

Pero, $I_{N_1}\circ P_1=P_1$, *de modo que, 2.32, finalmente, se convierte en:*

$$d(P_1+P_2,\Omega+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0})=d(I,\Omega+B(\mathbf{0};r)\cap N_2,\mathbf{0})=1, \quad (2.36)$$

la última igualdad, en virtud de (d1).

En cuanto a:

$$d(f_0 P_1 + P_2, \Omega_{\mathbf{1}} + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) \tag{2.37}$$

la situación es semejante.

Primero, $f_{|\Omega_1} = -I_{|\Omega_1} - e_0$*, (según 2.26). Luego, 2.37 es igual a:*

$$d((-\mathbf{I}_{|\Omega_{\mathbf{1}}} - e_0) \circ P_1 + P_2, \Omega_{\mathbf{1}} + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) \tag{2.38}$$

Ahora bien, cambiando $\Omega_{\mathbf{1}}$ *por* Ω*, e* $-I_{|\Omega_1}$ *por* $-I_{|N_1}$ *no se altera el número representado en 2.38, ya que si*

$$[(-I_{|N_1} - e_0) \circ P_1 + P_2](\lambda e_0) = \mathbf{0}, \qquad con \;\; \lambda \in (-2, 2),$$

entonces, $-\lambda e_0 - e_0 = \mathbf{0}$*, es decir,* $\lambda = -1$*; lo cual quiere decir que el elemento* λe_0*, en realidad está en* $\Omega_1 \subset \Omega$.

De manera que, el número indicado mediante 2.38 coincide con:

$$d((-\mathbf{I}_{|\mathbf{N_1}} - e_0) \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) \tag{2.39}$$

Pero, $-\lambda e_0 - t e_0 \neq \mathbf{0}$ *en* $[0, 1] \times \partial\Omega$*, de manera que, usando (d3) se llega a que 2.39 es igual a:*

$$d(-\mathbf{I}_{|\mathbf{N_1}} \circ P_1 + P_2, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}),$$

y ya que $-I|_{N_1} \circ P_1 = P_1$*, resulta que, finalmente, 2.37 se ha convertido en:*

$$d(-\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}.) \tag{2.40}$$

Entonces, de 2.31, 2.36 y 2.40, se deduce que:

$$d((-\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}, \Omega + B(\mathbf{0}; r) \cap N_2, \mathbf{0}) = -1 \tag{2.41}$$

Pero esto era lo que, según 2.23, nos faltaba por demostrar, para dejar bien establecida 2.18, y así, la fórmula 2.11 queda, definitivamente, probada.

■

Recordemos que 2.11 nos dice que:

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} sig J_f(x),$$

bajo las condiciones: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *abierto y acotado;* $\quad f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *perteneciente a* $\overline{\mathcal{C}}^1(\Omega)$; $\quad y \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$.

Ya sabemos qué hacer en el caso en que $y \in S_f$ *(o sea, cuando* y *es un valor singular de* f*), pero, ¿qué ocurre cuando, de* f*, sólo sabemos que es continua?. De nuevo, el número*

$$\alpha = \rho(y, f(\partial\, \Omega)) > 0$$

es clave. ***(distancia de*** $\mathbf{y}$ ***al conjunto compacto*** $\mathbf{f}(\partial\Omega)$*).*

Sean $g_1 \quad y \quad g_2$, ***funciones de*** $\overline{\mathcal{C}}^{\,\mathbf{1}}(\Omega)$, *tales que:*

$$|f - g_1|_0 < \frac{\alpha}{3}$$

$$|f - g_2|_0 < \frac{\alpha}{3}$$

Veamos que $d(g_1, \Omega, y) = d(g_2, \Omega, y)$.

Ante todo asegurémonos de que:

$$y \notin g_i(\partial\Omega), \qquad para\ i = 1, 2.$$

Sea $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} |g_i(x) - y| &= |g_i(x) - f(x) + f(x) - y| \\ &\geq |f(x) - y| - |g_i(x) - f(x)| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{3} \\ &\geq \frac{2}{3}\alpha \\ &> 0 \end{aligned}$$

Luego, $y \notin g_i(\partial\Omega)$. *Ahora, vamos a establecer una* ***homotopía admisible*** *(respecto a* y*) entre* $g_1 \quad y \quad g_2$.

Sea $\ h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, *dada por:* $h(t, x) = (1 - t)g_1(x) + tg_2(x)$.

Resulta que: h es continua, $h(0,x)=g_1(x), \quad h(1,x)=g_2(x)$.

Además, para $\mathbf{x_0}\in\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}
|h(t,x_0)| &= |(1-t)g_1(x_0)+tg_2(x_0)-y| \\
&= |(1-t)g_1(x_0)-(\mathbf{1}-\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x_0})+(\mathbf{1}-\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x_0})+tg_2(x_0)-y| \\
&= |(1-t)(g_1(x_0)-f(x_0))+t(g_2(x_0)-f(x_0))+\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{y}| \\
&\geq |f(x_0)-y|-(1-t)|g_1(x_0)-f(x_0)|-t|g_2(x_0)-f(x_0)| \\
&\geq |f(x_0)-y|-|g_1-f|_0-|g_2-f|_0 \\
&\geq \alpha-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3} \\
&\geq \frac{\alpha}{3} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

De manera que:

$$y\notin h(t,\partial\Omega), \qquad \textit{para todo } t\in[0,1].$$

Es decir, h es una homotopía admisible (respecto a y) entre g_1 y g_2, lo cual, según (d3), significa que:

$$d(g_1,\Omega,y)=d(g_2,\Omega,y),$$

cuyos cálculos se pueden hacer, usando 2.11.

En conclusión, todas las funciones de $\overline{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ suficientemente cercanas a f, poseen el mismo grado (de Brouwer) respecto a Ω e y.

Así, es natural definir,

$$\mathbf{d}(\mathbf{f},\Omega,\mathbf{y})=d(g,\Omega,y),$$

para algún $g\in\overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$, con $|g-f|_0=\dfrac{\alpha}{3}$.

Nota 2.3. *La existencia de tal g está garantizada por el **Teorema de aproximación de Weierstrass.*** $\blacksquare$.

Capítulo 3

Aplicaciones

1. ***El Teorema del punto fijo, de Brouwer:***

Sean: $D = \overline{B}(\mathbf{0}; r)$; $f : D \to D$, *continua. Entonces* f *tiene un punto fijo, es decir, existe* $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$, *tal que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Nota 3.1. *Lo mismo es cierto si* $D \subset \mathbb{R}^n$ *es homeomorfo a un subconjunto convexo y compacto (Ver [4] páginas 17 y 18).*

Demostración. *Consideremos* $h : [0, 1] \times D \to \mathbb{R}^n$, *dada por*

$$h(t, x) = x - tf(x).$$

Tenemos que: h *es continua,* $h(0, x) = x$, $\quad h(1, x) = x - f(x)$;
además, para $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{D}$, *resulta*

$$|h(t, x)| = |x - tf(x)| \geq |x| - t|f(x)| > r - tr = r(1 - t) > 0, \qquad (3.1)$$

si $\quad t \in [0, 1)$.
Por otro lado, si $h(1, x_0) = \mathbf{0}$, *para algún* $x_0 \in \partial D$, *entonces,* $\mathbf{x_0} - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$, *o sea,* $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{x_0}$, *y no tendríamos más nada que hacer.*

De modo que, supongamos:

$$h(1, x) \neq \mathbf{0}, \ \ para \ \ todo \ x \in \partial D \qquad (3.2)$$

Luego, de 3.1 y 3.2, se sigue:

$$|h(t,x) - \mathbf{0}| > 0 \ \ en \ \ [0,1] \times \partial D$$

Entonces, h es una ***homotopía admisible*** *(respecto a $\mathbf{0}$) entre I_D e $I_D - f$.*

En consecuencia, en virtud de (d3), se cumple:

$$d(I_D - f, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(I_D, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = 1, \tag{3.3}$$

donde, la última igualdad en 3.3 se debe a (d1).

Así, $\mathbf{d(I_D - f, B(0; r), 0)} \neq 0$*, lo cual nos permite afirmar que:*

$$(I_D - f)^{-1}\{\mathbf{0}\} \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $x_0 \in D = B(\mathbf{0}; r)$; tal que: $(I_D - f)(x_0) = \mathbf{0}$, o sea, $f(x_0) = x_0$.

■

2. El Teorema del puerco espín:

Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con $\mathbf{0} \in \Omega$; $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}} - \{\mathbf{0}\}$, continua; n ***impar****. Entonces, existen: $x_0 \in \partial\Omega$ y $\lambda_0 \neq 0$, tales que, $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.*

Demostración. *Como $\partial\Omega$ es compacto, f se puede extender, continuamente, así que no hay pérdida de generalidad al suponer f continua en $\overline{\Omega}$. (Ver [4], página 6).*

Como **n** ***es impar****, al aplicar 2.10 se obtiene:*

$$d(-I, \Omega, \mathbf{0}) = -1.$$

Respecto a $d(f, \Omega, \mathbf{0})$ tenemos dos casos:

Caso 1: *$d(f,\Omega,\mathbf{0}) \neq -1$. Entonces, definimos $h : [0,1] \to \overline{\Omega}$, por*

$$h(t,x) = (1-t)f(x) - tx.$$

Tenemos, entonces, que: h es continua; $h(0,x) = f(x)$; $h(1,x) = -x$.

*Afirmamos que h **no** puede ser una homotopía admisible (respecto a $\mathbf{0}$) entre f y $-I$, pues en caso contrario, debería tenerse, según (d3), que: $d(f,\Omega,\mathbf{0}) = d(-I,\Omega,\mathbf{0})$ (absurdo).*

Luego, existen: $t_0 \in [0,1]$, $x_0 \in \partial\Omega$, tales que, $h(t_0,x_0) = \mathbf{0}$.

O sea,

$$(1-t_0)f(x_0) - t_0 x_0 = \mathbf{0}.$$

En seguida vemos que $t_0 \in (0,1)$, ya que $t_0 = 0$ implica $f(x_0) = \mathbf{0}$, (absurdo) y $t_0 = 1$ nos lleva a que $-x_0 = \mathbf{0}$ (absurdo). De manera que obtenemos:

$$f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0} x_0,$$

y así, se cumple lo afirmado, con $\lambda_0 = \dfrac{t_0}{1-t_0}$.

Caso 2: *$d(f,\Omega,\mathbf{0}) = -1$.*

Sea $\tilde{h} : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\tilde{h}(t,x) = (1-t)f(x) + tx.$$

Se sigue que: $\tilde{h}$ es continua; $\tilde{h}(0,x) = f(x)$; $\tilde{h}(1,x) = x$.

*Pero esta $\tilde{h}$ **no** puede ser una homotopía admisible (respecto a $\mathbf{0}$) entre f e I, pues,*

$$d(f,\Omega,\mathbf{0}) = -1 \neq 1 = d(I,\Omega,\mathbf{0}).$$

Esto significa que: existen $t_0 \in [0,1]$ y $x_0 \in \partial\Omega$, tales que:

$$(1-t_0)f(x_0) + t_0 x_0 = \mathbf{0}.$$

Como en el caso 1, se tiene que $t_0 \in (0,1)$, *y se llega a:*

$$f(x_0) = \frac{t_0}{t_0 - 1} x_0.$$

De modo que se cumple lo afirmado, con

$$\lambda_0 = \frac{t_0}{t_0 - 1}$$

Nota 3.2. *En particular, si* $n = 3$, *el teorema quiere decir, que un puerco espín no puede ser peinado, sin dejarle "copete".*

3. Teorema de la esfera cabelluda (Poincaré-Brouwer)

Si m ***es par, todo campo continuo de vectores, tangentes a la esfera*** S^m***, posee, al menos, una singularidad.***

Demostración. *Sea* $v : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, *continua; debemos probar que existe* $x_0 \in S^m$, *tal que:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$$

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbf{v}(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$, *para todo* $x \in S^m$.

Apliquemos el ***teorema del puerco espín,*** *con* $\Omega = B(\mathbf{0}; 1) \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\partial\Omega = S^m = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}.$$

Sabemos que, entonces, existen: $x_0 \in S^m$ *y* $\lambda_0 \neq 0$, *tales que,* $v(x_0) = \lambda_0 x_0$. *Pero*

$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x_0}), x_0 \rangle = 0$, *donde,* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto interno usual de* $\mathbb{R}^{m+1}$.

Luego, $\langle \lambda_\mathbf{0} \mathbf{x_0}, x_0 \rangle = 0$. *O sea,* $\lambda_0 |x_0|^2 = 0$. *Es decir* $\lambda_0 = 0$ *(contradicción).*

En consecuencia, debe existir, al menos, un $x_0 \in S^m$, *tal que* $v(x_0) = \mathbf{0}$.

$\blacksquare$

Nota 3.3. *El que m sea par es esencial. Por ejemplo, en el caso de $S^{\mathbf{1}}$, la fórmula $v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$, define un campo continuo de vectores, tangentes a S^1, tal que v no posee singularidades.*

■

En el teorema anterior está la explicación del por qué la mayoria de las cabezas tiene un punto, ***en forma de remolino****, del cual irradian todos los cabellos.*

4. Teorema de Borsuk.

Ya vimos que cuando deseamos demostrar, por medio de la ***Teoría del Grado****, que la ecuación $f(x) = y$, tiene, al menos, una solución de Ω, basta verificar que $d(f, \Omega, y) \neq 0$.*

Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es ***simétrico*** *(con respecto al origen $\mathbf{0}$) si $\Omega = -\Omega$; $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, es llamada* ***impar*** *si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

Teorema 3.1. ***(Borsuk)*** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *abierto, acotado y simétrico, con* $\mathbf{0} \in \Omega$. *Sea, también,* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, ***impar***, *con* $\mathbf{0} \notin f(\partial\Omega)$. *Entonces:*

$$\mathbf{d(f, \Omega, 0)\ es\ impar}.$$

Demostración. *Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que* $f \in \overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$, *y que* $J_{\tilde{f}}(\mathbf{0}) \neq 0$.

En efecto:

Primero, aproximamos f *por* $g_1 \in \overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$, *luego, consideramos* g_2, *tal que,* $g_2(x) = \frac{1}{2}[g_1(x) - g_1(-x)]$ *(o sea, la parte* ***impar*** *de* g.*)*

Finalmente, tomamos $\tilde{f} = g_2 - \delta I$, *donde,* δ *no es un valor propio de* $g_2'(\mathbf{0})$.

Así, si δ *y* $|g_1 - f|_0$ *son* ***suficientemente pequeños***, *la* $\tilde{f}$ *estará "cercana a* f*" y reunirá los requisitos de estar en* $\overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$, *ser impar, con* $\mathbf{0} \notin \tilde{f}(\partial\Omega)$, $J_{\tilde{f}}(\mathbf{0}) \neq 0$*; además de cumplir que:*

$$\mathbf{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = d(\tilde{f}, \Omega, \mathbf{0}).$$

Por ejemplo, de $\tilde{f} = g_2 - \delta I$ *se deduce que* $\tilde{f}'(\mathbf{0}) = g_2'(\mathbf{0}) - \delta I$, *y entonces, como* δ *no es valor propio de* $g_2'(\mathbf{0})$, *resulta que no existe* $x \neq \mathbf{0}$, *tal que* $\tilde{f}'(\mathbf{0})x = \mathbf{0}$*; luego,* $\tilde{f}'(\mathbf{0})$ *es inyectiva y en consecuencia,* $J_{\tilde{f}}(\mathbf{0}) \neq 0$.

También, si $|\tilde{f} - f|_0 < \dfrac{\alpha}{3}$, *donde,* $\alpha = \rho(\mathbf{0}, f(\partial\Omega)) > 0$, *ya sabemos que*

$$d(f, \Omega, \mathbf{0}) = d(\tilde{f}, \Omega, \mathbf{0}).$$

De paso, $|\tilde{f} - f|_0 < \dfrac{\alpha}{3}$ *se consigue, tomando* δ *suficientemente pequeño y* g_1 *"muy cercano" a* f. *Las otras condiciones de* $\tilde{f}$, *también son sencillas de verificar. Así pues, asumamos que* $f \in \overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$ *y que* $J_f(\mathbf{0}) \neq 0$.

Para probar el teorema de Borsuk basta, entonces, hallar $g \in \overline{\mathcal{C}}^{\,1}(\Omega)$, ***impar, suficientemente cercana a f***, *tal que:*

$$\mathbf{0} \notin \mathbf{g(S_g)} \tag{3.4}$$

Ya que en tal caso,

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,\mathbf{0}) &= d(g,\Omega,\mathbf{0}) \\ &= sig\ J_g(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{0}\neq x\in g^{-1}\{\mathbf{0}\}} sig\ J_g(x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde, ***la sumatoria en 3.5*** *da como resultado un* ***número par****, debido a que:*

$$g(x)=\mathbf{0} \text{ si, y sólo si, } g(-x)=\mathbf{0}$$

Y, además, $J_g(\bullet)$ *es una función* ***par****. (notemos también que hemos usado el hecho de que por ser* g *impar se tiene* $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$*).*

De manera que, del segundo miembro de 3.5, se concluye que:

$$d(f,\Omega,\mathbf{0}) \text{ es impar.}$$

■

Nota 3.4. *Tal función* g *es definida mediante un proceso inductivo. (Ver [4], páginas 21 y 22).*

Corolario 3.1. *Sea* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$*, abierto, acotada y simétrico, con* $\mathbf{0}\in\Omega$*.*

Sea $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$*, tal que:* $\mathbf{0}\notin f(\partial\Omega)$ *y* $f(-x)\neq\lambda f(x)$ *en* $\partial\Omega$*, para todo* $\lambda\geq 1$*. Entonces,* $d(f,\Omega,\mathbf{0})$ *es* ***impar****.*

Demostración. *Consideremos* $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$*, dada por*

$$h(t,x)=f(x)-tf(-x).$$

Tenemos que h *es continua,* $h(0,x)=f(x)$*,* $h(1,x)=f(x)-f(-x)$*.*

LLamemos g *a la función* $g:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$*, definida por*

$$g(x)=f(x)-f(-x).$$

Afirmamos que h *es una homotopía admisible (respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* f *y* g*. (además,* g *es* ***impar*** *y* $\mathbf{0}\notin g(\partial\Omega)$*).*

Nos faltaría ver que $\mathbf{0} \notin h(t, \partial\Omega)$, *para todo* $t \in [0,1]$.

Ahora, si existiesen: $\mathbf{t_0} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *y* $\mathbf{x_0} \in \partial\Omega$, *tales que,* $h(t_0, x_0) = \mathbf{0}$, *tendríamos:*

$$f(x_0) - t_0 f(-x_0) = \mathbf{0}.$$

Pero entonces, $t_0 \neq 0$, *pues si no resultaría* $f(x_0) = \mathbf{0}$ *(contradicción). Así que,* $0 < t_0 \leq 1$ *y*

$$f(-x_0) = \frac{1}{t_0} f(x_0);$$

de modo que tomando $\lambda = \dfrac{1}{t_0} \geq 1$, *estamos contrariando una propiedad de* f.

Por lo tanto, h *sí es una homotopía admisible (respecto a* $\mathbf{0}$*) y, según (d3), se cumple:*

$$d(f, \Omega, \mathbf{0}) = d(g, \Omega, \mathbf{0}),$$

Pero, $d(g, \Omega, \mathbf{0})$ *es* ***impar***, *en virtud del Teorema de Borsuk.*

■

Corolario 3.2. *(Teorema de Borsuk-Ulam)*

Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *abierto, acotado, simétrico, con* $\mathbf{0} \in \Omega$;

$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$, *continua.*

Supongamos también, que $m < n$.

Entonces, para algún $\mathbf{x_0} \in \partial\Omega$, *se cumple:*

$$f(x_0) = f(-x_0).$$

Demostración. *Supongamos, al contrario, que:*

$$g(x) = f(x) - f(-x) \neq \mathbf{0}, \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega.$$

Tenemos que

$$\begin{gathered} g : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ g(x) = f(x) - f(-x). \end{gathered}$$

Sea $\overline{g}$, *extensión continua de* g *a* $\overline{\Omega}$.

Es decir: $\overline{g} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *continua, tal que* $\overline{g}_{|\partial\Omega} = g$.

Tomemos $\overline{\overline{g}}$ *igual a la parte* ***impar*** *de* $\overline{g}$.

O sea, $\overline{\overline{g}}(x) = \frac{1}{2}[\overline{g}(x) - \overline{g}(-x)]$.

Sea $\alpha = \rho(\mathbf{0}, \overline{\overline{g}}(\partial\Omega))$.

Este $\alpha > 0$*, pues para* $x_0 \in \partial\Omega$*, se tiene*

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{g}}(x_0) = \tfrac{1}{2}[\overline{g}(x_0) - \overline{g}(-x_0)] &= \frac{1}{2}[\overline{g}(x_0) - \overline{g}(-x_0)] \\
&= \frac{1}{2}[g(x_0) - g(-x_0)] \\
&= \frac{1}{2}[f(x_0) - f(-x_0) - f(-x_0) + f(x_0)] \\
&= f(x_0) - f(-x_0) \\
&= g(x_0) \neq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

De modo que:

$$\alpha = \inf_{x \in \partial\Omega} |\mathbf{0} - \overline{\overline{g}}(x)| = \inf_{x \in \partial\Omega} |-g(x)| > 0,$$

en virtud de 3.6 y la compacidad de $\partial\Omega$.

Entonces, para $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}; \alpha)$ *se tiene:*

$$d(\overline{\overline{g}}, \Omega, \mathbf{y}) = d(\overline{\overline{g}}, \Omega, \mathbf{0}), \tag{3.7}$$

(ver 2.1). Pero $d(\overline{\overline{g}}, \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$*, según el Teorema de Borsuk.*

Así, de 3.7, concluímos que:

$$d(\overline{\overline{g}}, \Omega, y) \neq 0,$$

pero esto significa (ver inmediatamente antes de la nota 1.2) que:

$$\overline{\overline{g}}^{-1}\{y\} \neq \emptyset.$$

De manera que, para cada $y \in B(\mathbf{0};\alpha)$*, existe* $x \in \Omega$*, tal que:*

$$\overline{\overline{g}}(x) = y,$$

O sea, la bola ***n-dimensional****,* $B(\mathbf{0};\alpha)$*, está contenida en* $\overline{\overline{g}}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m$*, lo cual es absurdo.*

Así, lo supuesto para g *es falso, y, por consiguiente, existe* $\mathbf{x_0} \in \partial\Omega$*, tal que* $g(x_0) = 0$*, es decir,* $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{f}(-\mathbf{x_0})$*.*

■

Nota 3.5. *El Teorema de Borsuk-Ulam tiene una interpretación* ***meteorológica****: si se supone que la temperatura* T *y la presión* P *son funciones continuas, sobre la superficie de la tierra, ambas determinan una aplicación*

$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

El Teorema afirma que, entonces, existe, por lo menos, un par de punto ***antípodas****, con las mismas condiciones de presión y temperatura, respectivamente .*

■

5. Aplicaciones sobreyectivas.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, continua. Veamos cómo una cierta* ***condición de crecimiento*** *sobre* f*, implica que* $\mathbf{f}(\mathbb{R}^\mathbf{n}) = \mathbb{R}^\mathbf{n}$*. Supongamos que*

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{|x|} \to +\infty \text{ cuando } |x| \to +\infty.$$

($\langle f(x), x\rangle$ *significa el* ***producto interno usual*** *de los vectores* $f(x)$ *y* x*).*

Sean: $y \in \mathbb{R}^n$*;* $r > 0$ *(a ser escogido apropiadamente);*

$$h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^n$$

$$h(t,x) = tx + (1-t)f(x) - y$$

Tenemos que: h es continua; $\mathbf{h(0,x)=f(x)-y}$; $\mathbf{h(1,x)=x-y}$.

Afirmamos que, para r suficientemente grande y $x\in\partial B(\mathbf{0};r)$ se cumple que:

$$h(t,x)\neq\mathbf{0},\ \textit{cualquiera que sea}\ t\in[0,1].$$

En efecto, para $|x|=r$, tenemos:

$$\begin{aligned}\langle h(t,x),x\rangle &= \langle tx+(1-t)f(x)-y,x\rangle\\ &= tr^2+(1-t)\langle f(x),x\rangle-\langle y,x\rangle\\ &= tr^2+(1-t)r\frac{\langle f(x),x\rangle}{|x|}-\langle y,x\rangle\\ &\geq tr^2+(1-t)r\frac{\langle f(x),x\rangle}{|x|}-r|y|,\end{aligned}$$

donde, hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle|\leq|x||y|$. Luego,

$$\langle h(t,x),x\rangle\geq r\left[\mathbf{tr}+(\mathbf{1}-\mathbf{t})\frac{\langle\mathbf{f(x)},\mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{x}|}-|\mathbf{y}|\right]>\mathbf{0},$$

para todo $t\in[0,1]$, si tomamos $r>|y|$, suficientemente grande.

En consecuencia, $h(t,x)\neq\mathbf{0}$.

De manera que, denotando por $f-y$ e $I-y$, respectivamente, las funciones definidas por:

$$\begin{array}{lcl} f-y:\overline{B}(\mathbf{0};r)\to\mathbb{R}^n & ; & I-y:\overline{B}(\mathbf{0};r)\to\mathbb{R}^n,\\ (f-y)(x)=f(x)-y & & (I-y)(x)=x-y,\end{array}$$

podemos decir que: h es una ***homotopía admisible*** *(respecto a $\mathbf{0}$) entre $f-y$ e $I-y$.*

Entonces, aplicando (d3) se obtiene:

$$d(f-y,B(\mathbf{0};r),\mathbf{0})=d(I-y,B(\mathbf{0};r),\mathbf{0})\tag{3.8}$$

Pero ahora, definimos

$$\overline{h} : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0}; r) \to \mathbb{R}^n,$$

$$\overline{h}(t, x) = x - ty$$

Así, $\overline{h}$ *es continua;* $\overline{\mathbf{h}}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$; $\overline{\mathbf{h}}(\mathbf{1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Además, para $|x| = r$*, se tiene que* $\overline{h}(t, x) = x - ty \neq \mathbf{0}$*, pues, en caso contrario, tendríamos:* $x = ty$*; luego,* $r = |x| = t|y| \leq |y|$*,*
y estamos tomando $r > |y|$*.*

Resulta, entonces, que $\overline{h}$ *es una homotopía admisible (respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* $I - y$ *e* I*.*

Por consiguiente, si usamos (d3) se llega a:

$$d(I - y, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = d(I, B(\mathbf{0}; r), \mathbf{0}) = 1, \tag{3.9}$$

donde, hemos usado (d1) para la última igualdad. Así que, 3.8 y 3.9 nos permiten concluir que $\mathbf{d}(\mathbf{f} - \mathbf{y}, \mathbf{B}(\mathbf{0}; \mathbf{r}), \mathbf{0}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

De modo que $(\mathbf{f} - \mathbf{y})^{-\mathbf{1}}\{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$*. Lo cual significa que existe* $x \in B(\mathbf{0}; r)$*, tal que* $(f - y)(x) = \mathbf{0}$*, vale decir, tal que* $f(x) - y = \mathbf{0}$.

O sea, $y \in f(\mathbb{R}^n)$*.*

Como y *es cualquiera, concluímos que* $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

■

6. *Sean:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, abierto y acotado;* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$; $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*,*
tales que, $|g(x)| < |f(x)|$ *en* $\partial\Omega$*.*
Entonces, $d(f + g, \Omega, \mathbf{0}) = (f, \Omega, \mathbf{0})$*.*

Solución: Sea $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$*, dado por:*

$$h(t, x) = t(f(x) + g(x)) + (1 - t)f(x).$$

Así, h es continua; $h(o,x) = f(x)$; $\quad h(1,x) = f(x) + g(x)$.

Veamos que $\mathbf{0} \neq h(t, \partial\Omega)$, *para todo* $t \in [0,1]$.

En efecto, si existieran $\mathbf{x_0} \in \partial\Omega$ *y* $\mathbf{t_0} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, *tales que,*

$$t_0(f(x_0) + g(x_0)) + (1 - t_0)f(x_0) = \mathbf{0},$$

resultaría $\quad t_0 g(x_0) + f(x_0) = \mathbf{0}$.

$$\therefore \quad t_0|g(x_0)| = |-f(x_0)| = |f(x_0)| \tag{3.10}$$

Por otro lado, como por hipótesis $|g(x_0)| < |f(x_0)|$, *concluímos que*

$$|f(x_0)| > 0 \quad y\ que \quad \frac{|g(x_0)|}{|f(x_0)|} < 1.$$

Pero como,

$$t_0 \frac{|g(x_0)|}{|f(x_0)|} = 1, \quad (según\ 3.10),$$

se sigue que $t_0 > 1$ *(contradicción).*

Luego, h es una ***homotopía admisible*** *(*respecto *a* $\mathbf{0}$*)*
entre f *y* $f + g$
Así que, usando (d3) se llega a:

$$d(f + g, \Omega, \mathbf{0}) = d(f, \Omega, \mathbf{0}).$$

Observación 3.1. *La condición* $|g(x)| < |f(x)|$ *en* $\partial\Omega$, *implica que*

$$\mathbf{0} \neq f(\partial\Omega)$$

y que $\mathbf{0} \neq (f + g)(\partial\Omega)$.

7. *Demostrar que el sistema*

$$\begin{cases} 2x + y + \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución en $\Omega = B(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^2$*, donde,* $r > \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Solución: Sean:

$$\Omega = B(\mathbf{0}; r), \quad \textit{con } r \textit{ a ser escogido adecuadamente;}$$

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{dada por: } f(x,y) = (2x + y, x - 2y);$$

$$g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{definida por: } g(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x+y)).$$

Notemos que f *y* g *son continuas.*

Además, $|g(x,y)| = 1$ *y* $|f(x,y)| = \sqrt{5x^2 + 5y^2}$.

Luego, para $(x,y) \in \partial\Omega$*, resulta:*

$$|g(x,y)| = 1 \quad y \quad |f(x,y)| = \sqrt{5}r.$$

De modo que, si $\sqrt{5}r > 1$*, es decir,* $r > \dfrac{1}{\sqrt{5}}$*, se tiene:*

$$|g(x,y)| < |f(x,y)|, \quad \textit{en } \partial\Omega.$$

Así, por el ejercicio (6), se concluye que:

$$d(f + g, \Omega, \mathbf{0}) = d(f, \Omega, \mathbf{0}). \tag{3.11}$$

Como $f^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{(0,0)\}$*, y*

$$J_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

Tenemos, usando 2.10, que:

$$d(f, \Omega, \mathbf{0}) = -1$$

Empleando este resultado en 3.11, llegamos a que:

$$d(f+g,\Omega,\mathbf{0}) = -1 \neq 0.$$

Así que, $(f+g)^{-1}\{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$.

Por lo tanto, existe $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}) \in \Omega$ *tal que* $f(x_0,y_0)+g(x_0,y_0) = (0,0)$, *es decir,*

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + \operatorname{sen}(x_0+y_0) = 0 \\ x_0 - 2y_0 + \cos(x_0+y_0) = 0 \end{cases}$$

8. *Sean:* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por:*

$$f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y);$$

$$a = (1,0); \quad \Omega = B((0,0);2).$$

Calcular: $d(f,\Omega,a)$.

Solución: En primer lugar, es rutinario verificar que si $(x_0,y_0) \in \partial\Omega$, *entonces,* $f(x_0,y_0) \neq a$. *Ahora, hallemos* $f^{-1}\{(1,0)\}$.

Ello nos lleva a resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ -y^3 + 3x^2y = 0 \end{cases}$$

Se obtienen las soluciones:

$$(1,0), \quad (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad y \quad (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}). \tag{3.12}$$

Como

$$\begin{aligned} J_f(x,y) &= \begin{vmatrix} 3x^2-3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2+3y^2 \end{vmatrix} \\ &= (3x^2+3y^2)^2 \end{aligned}$$

(después de desarrollar el determinante y simplificar), tenemos que:

$J_f(x, y) > 0$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$.

En consecuencia,

$$sigJ_f(x, y) = 1, \ si \ (x, y) \neq (0, 0) \tag{3.13}$$

Así, tomando en cuenta 3.12, 3.13 y 2.10, llegamos a:

$$d(f, B(\mathbf{0}; 2), (1, 0)) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

9. *Sea* $f : \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\} \to \mathbb{R}^m$, *con* $m < n$; *continua e impar. Probar que* f *tiene un cero.*

Solución: Sea $\Omega = B(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^n$. *Por el corolario 3.2, tenemos que: existe* $x_0 \in \partial\Omega$, *tal que:*

$$f(x_0) = f(-x_0).$$

Pero como f *es impar, resulta:*

$$f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$$

$\therefore f(x_0) = 0$, *como queríamos probar.*

10. *Sean:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *abierto y acotado;* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Supongamos, además, que existe $x_0 \in \Omega$ *tal que* f *satisface la siguiente condición de frontera:*

" Si $f(x) - x_0 = \lambda(x - x_0)$, *para algún* $x \in \partial\Omega$, *entonces,* $\lambda \leq 1$*".*

Probar que tal f *posee un* ***punto fijo.***

Solución: Veamos lo que ocurre con $d(I - f + x_0, \Omega, x_0)$, *suponiendo que*

$$\mathbf{x_0} \notin (\mathbf{I} - \mathbf{f} + \mathbf{x_0},)(\partial\Omega),$$

ya que en caso de existir $x \in \partial\Omega$ *tal que,* $(I - f + x_0)(x) = x_0$,
o sea, $x - f(x) + x_0 = x_0$, *resulta* $f(x) = x$, *y no tenemos más nada*

que probar.

También, si fuese $d(I - f + x_0, \Omega, x_0) \neq 0$ *se cumplíria:*

$$(I - f + x_0)^{-1}\{x_0\} \neq \emptyset,$$

es decir, existe $x \in \Omega$ *tal que:* $(I - f + x_0)(x) = x_0 \ \therefore f(x) = x$.

Supongamos entonces, que:

$$d(I - f + x_0, \Omega, x_0) = 0 \tag{3.14}$$

Ahora, definamos:

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$

$$h(t,x) = tx + (1-t)(x - f(x) + x_0)$$

Resulta que, h *es continua;* $\mathbf{h(0,x) = x - f(x) + x_0; h(1,x) = x}$.

Si, además, se cumpliera que:

$$x_0 \neq h(t,x), \text{ para todo } \ t \in [0,1] \ \text{ y para todo } x \in \partial\Omega, \tag{3.15}$$

tendríamos que h *sería una* ***homotopía admisible*** *(respecto a* x_0*) entre* $I - f + x_0$ *e* I*, lo cual, según (d3), nos llevaría a:*

$$d(I - f + x_0, \Omega, x_0) = \mathbf{d(I, \Omega, x_0) = 1},$$

en contradicción con 3.14. Luego, 3.15 no se cumple, y $x_0 = h(t_0, x_1)$*, para algún* $t_0 \in [0,1]$ *y para algún* $x_1 \in \partial\Omega$*. O sea,*

$$x_0 = t_0 x_1 + (1 - t_0)(x_1 - f(x_1) + x_0)$$

Luego,

$$x_0 = t_0 x_1 + x_1 - f(x_1) + x_0 - t_0 x_1 + t_0 f(x_1) - t_0 x_0,$$

o sea, $(1 - t_0)(-f(x_1) + x_0) = x_0 - x_1$, *es decir,*

$$(1-t_0)(f(x_1)-x_0) = x_1 - x_0 \tag{3.16}$$

Vemos que $t_0 \neq 1$, pues, en caso contrario, tendríamos: $x_1 = x_0$ (absurdo, ya que $x_1 \in \partial\Omega \quad y \quad x_0 \in \Omega$).

De modo que obtenemos (de 3.16):

$$f(x_1) - x_0 = \frac{1}{1-t_0}(x_1 - x_0).$$

Pero entonces, de acuerdo a "la condición de frontera", debe ser $\dfrac{1}{1-t_0} \leq 1$, lo cual obliga a que $t_0 = 0$. Y esto último, en virtud de 3.16, nos permite concluir que:

$$f(x_1) = x_1$$

$\blacksquare$

11. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, función de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, con $J_f(x) \neq 0$, en $\mathbb{R}^n$, y además*

$$|f(x)| \to +\infty, \text{ cuando } |x| \to +\infty.$$

Probar que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

*Solución: El plan consiste en demostrar que $f(\mathbb{R}^n)$ es **abierto** y **cerrado, en** $\mathbb{R}^n$. Luego, como $\mathbb{R}^n$ es conexo, concluiremos que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

*Empecemos por deducir que f es, **localmente inyectiva**.*

*En efecto, como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y $J_f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, usando el **teorema de la función inversa**, resulta la **inyectividad (local) de f**.*

*Ahora, veremos que f es una **aplicación abierta**, o sea, envía abiertos en abiertos. En particular, resultará que $\mathbf{f}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$ **es abierto en** $\mathbb{R}^\mathbf{n}$.*

Demostremos que dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una bola $B(x_0;r)$ tal que $f(B(x_0;r))$ contiene una bola con centro $f(x_0)$.

Pasando a $\mathbb{R}^n - x_0$ y a $\overline{f}(x) = f(x+x_0) - f(x_0)$, para $x \in \mathbb{R}^n - x_0$, si es necesario, podemos asumir que

$$x_0 = \mathbf{0} \qquad y \qquad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Elijamos un $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, tal que $f_{|_{B(\mathbf{0};r)}}$ es inyectiva.

Definamos

$$h : [0,1] \times \overline{B}(\mathbf{0};r) \to \mathbb{R}^n,$$

$$h(t,x) = f\left(\frac{1}{1+t}x\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right)$$

Tenemos que: h es continua;

$$\mathbf{h}(\mathbf{0},\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad h(1,x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) - f\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

*(Notemos que $\mathbf{h}(\mathbf{1},\bullet)$ es una función **impar**).*

Por otro lado, de existir $t_0 \in [0,1]$ y $\mathbf{x_0} \in \partial\mathbf{B}(\mathbf{0};\mathbf{r})$, tales que:

$$h(t_0,x_0) = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

se tendría:

$$f\left(\frac{1}{1+t_0}x_0\right) = f\left(-\frac{t_0}{1+t_0}x_0\right),$$

lo cual dado que $f_{|_{B(\mathbf{0};r)}}$ es inyectiva, implica que:

$$\frac{1}{1+t_0}x_0 = -\frac{t_0}{1+t_0}x_0,$$

o sea, $x_0 = 0$ (absurdo).

*Luego, 3.17 no puede darse, y h es una **homotopía admisible** (respecto a $\mathbf{0}$) entre f y la función impar $h(1,\bullet)$.*

Así que, en virtud de (d3) y el Teorema de Borsuk, resulta:

$$d(f, B(\mathbf{0};r), y) = d(h(1,\bullet), B(\mathbf{0};r), \mathbf{0}) \neq 0, \tag{3.18}$$

donde, y es cualquiera en $B(\mathbf{0};\alpha)$, con $\alpha = \rho\ (\mathbf{0}, h(1,\bullet)(\partial B(\mathbf{0};r))$

(recordar 2.1 y que $\mathbf{0} \notin h(t,\bullet)(\partial B(\mathbf{0};r))$ y que $\partial B(\mathbf{0};r)$ es compacto)

Entonces, de 3.18 se sigue: $f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$, para todo $y \in B(\mathbf{0};\alpha)$.

Es decir, dado $y \in B(\mathbf{0};\alpha)$, existe $x \in B(\mathbf{0};r)$ tal que, $f(x) = y$.

En otras palabras,

$$B(\mathbf{0};\alpha) \subset f(B(\mathbf{0};r)).$$

Lo cual significa que f es una aplicación ***abierta****.*

A continuación, probemos que $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrado ***en*** $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Sea

$$y_0 \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.19}$$

Entonces, existe (y_n), sucesión en $f(\mathbb{R}^n)$, tal que, $\mathbf{y_n} \to \mathbf{y_0}$.

Tenemos que: para cada n, existe $x_n \in \mathbb{R}^n$, con $y_n = f(x_n)$.

Resulta que (x_n) es una sucesión acotada, pues en caso contrario, sería $|f(x_n)| = |y_n| \to +\infty$ (absurdo, pues (y_n), al ser convergente, es acotada).

Así, (x_n) posee una subsucesión (x_{n_k}) convergente, digamos,

$$x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}^n.$$

Como f es continua, resulta:

$$f(x_{n_k}) \to f(x).$$

Pero, también, $y_{n_k} \to y_0$

Es decir, $y_{n_k} \to f(x)$.

Luego, $y_0 = f(x)$.

O sea,

$$\mathbf{y_0} \in \mathbf{f}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}). \tag{3.20}$$

De 3.19 y 3.20 resulta:

$$\overline{f(\mathbb{R}^n)} = f(\mathbb{R}^n)$$

■

12. *Sean:* $\Omega = (-3, 6)$; $n = 1$;

$f : [-3, 6] \to \mathbb{R}$, $\qquad g : [-3, 6] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 6x \qquad g(x) = \begin{cases} -9x & -3 \leq x \leq 0 \\ -3x & 0 \leq x \leq 3 \\ 3x - 18 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Calcular $d(g, (-3, 6), 16)$.

Solución: Gráficamente, la situación es:

$g \notin \overline{\mathcal{C}}^1((-3,6))$

$g(\partial\Omega) = g\{-3,6\} = \{27,0\}$

$\alpha = \rho(16,\{27,0\}) = 9$

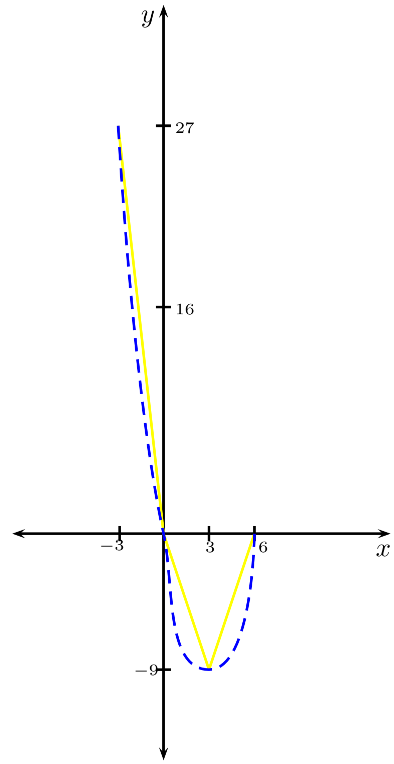
$f \in \overline{\mathcal{C}}^1((-3,6))$

$|f-g|_0 = \frac{9}{4} = \frac{\alpha}{\mathbf{4}} < \frac{\alpha}{\mathbf{3}}$

$\therefore d(g,(-3,6),16) = d(f,(-3,6),16)$

(Ver lo dicho al final del capítulo 2).

Ahora, usando 2.10, resulta:



$$d(f,(-3,6),16) = \sum_{x\in f^{-1}\{16\}} sigJ_f(x) = sigJ_f(-2) = -1$$

■

Apéndice

En esta parte final de la presente monografía haremos referencia, someramente, a algunos casos no contemplados en nuestra incursión a la Teoría del Grado.

Por ejemplo, ¿cómo se trata el caso en el que Ω *no es acotado?.*

Recordemos que en el caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, acotado, lo importante era que obteníamos, como consecuencia, que* $f^{-1}\{y\}$ *era un subconjunto de* Ω*, compacto (no olvidemos tampoco que* $y \notin f(\partial\Omega)$ *). Ahora, en el caso:* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, abierto, posiblemente no acotado, obtendremos que* $f^{-1}\{y\}$ *será compacto,* ***si*** f ***no crece demasiado rápido.*** *Más precisamente, asumimos que:*

$$f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); \qquad \sup_{\overline{\Omega}} |x - f(x)| < +\infty; \qquad y \notin f(\partial\Omega)$$

Entonces, $f^{-1}\{y\}$ *es* ***compacto*** *y* $d(f, \Omega \cap \Omega_0, y)$ *es el mismo entero, para todo* $\Omega_{\mathbf{0}} \supset f^{-1}\{y\}$*,* ***abierto y acotado.*** *Así, tenemos la siguiente extensión de la definición de grado ya conocida:*

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* ***abierto****,*

sea $\tilde{\mathcal{C}}(\overline{\Omega})$ *el conjunto de las funciones* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$*, continuas, tales que,*

$$\sup_{\overline{\Omega}} |x - f(x)| < +\infty.$$

Sea

$$\tilde{M} = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \textit{abierto;} \quad f \in \tilde{C}(\overline{\Omega}), \quad y \notin f(\partial\ \Omega)\}$$

Definimos: $\tilde{d} : \tilde{M} \to \mathbb{Z}$*, por*

$$\tilde{d}(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \cap \Omega_0, y),$$

donde, $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ *es cualquier abierto, acotado, que contiene a* $f^{-1}\{y\}$*.*

Ejemplo 3.1. *Sea* $n = 1$*;* $\Omega = (1, +\infty)$*;*

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x - 2$$

Tenemos que $f^{-1}\{0\} = \{2\}$ *y* $\partial\Omega = \{1\}$*. Entonces,*

$$\tilde{d}(f, (1, +\infty), 0) = d(f, (1, +\infty) \cap \Omega_0, 0),$$

donde, Ω_0 *es un abierto, acotado, que contiene a* $\{2\}$*.*

Llamemos $\Omega' = (1, +\infty) \cap \Omega_0$*. Resulta que* $\tilde{d}(f, \Omega', \mathbf{0}) = sig f'(2) = 1$*. Luego,* $\tilde{d}(f, \Omega, 0) = 1$*.*

$\blacksquare$

Al intentar extender las ideas de la Teoría del Grado al caso de funciones definidas en espacios de dimensión infinita, una serie de sorpresas comienzan a aparecer. Por ejemplo.

Sea $f : \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \to \overline{B}(\mathbf{0}, 1)$*, continua, donde,* $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$ *es la bola unitaria, cerrada, de algún espacio de Banach de dimensión infinita. ¿ Tiene* f *un punto fijo? A continuación veremos que, en general, la respuesta es* ***no****.*

Sea ℓ_2*, el espacio de Hilbert de las sucesiones* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$*, de números reales, para los cuales* $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i^2$ *converge.*

La norma en ℓ^2 *es dada por:*

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i^2}.$$

Definimos $T : \overline{B}(\mathbf{0}; 1) \to \overline{B}(\mathbf{0}; 1)$*, donde,* $\overline{B}(\mathbf{0}; 1) = \{\varepsilon \in \ell_2 : \|\varepsilon\| \leq 1\}$*,*

$$T(\varepsilon) = (\sqrt{1 - \|\varepsilon\|^2}, \ \ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots).$$

T *es continua y la imagen de* T *está contenida en* $\partial B(\mathbf{0}; 1)$*.*
Esta t no tiene punto fijo.

En efecto:

Supongamos que existe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in \overline{B}(\mathbf{0}; 1)$*, tal que* $T(\varepsilon) = \varepsilon$*. Entonces:*

$$\sqrt{1 - \|\varepsilon\|^2} = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4; \quad \ldots \qquad (*)$$

Como $\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_1^2 < +\infty.,$

se deduce que, $\varepsilon_1 = 0$ *y* $\varepsilon = \mathbf{0}$*. Pero esto contradice la primera igualdad en* $(*)$*. Así que,* T *no posee punto fijo. De paso, este ejemplo tiene dos consecuencias importantes.*

Una, que existe una ***retracción continua*** *de* $\overline{B}(\mathbf{0}; 1)$ *sobre su frontera.*

Veamos, dado $x \in \overline{B}(\mathbf{0}; 1)$*, como* $T(x) \neq x$*, la recta que une a* x *con* $T(x)$ *intersecta a* $\partial B(\mathbf{0}; 1)$ *en dos puntos,* $T(x)$ *y* $R(x)$*. La aplicación que envía a* x *en* $R(x)$ *es continua, lleva a* $\overline{B}(0; 1)$ *sobre su frontera, y* $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$*, para todo* $x \in \partial B(\mathbf{0}; 1)$*.*

Así que, $\mathbb{R}$ *es* ***la retracción*** *requerida. La otra consecuencia del ejemplo citado es: que no tiene mucha utilidad tener una Teoría del grado (en el caso de dimensión infinita) para* ***todas*** *las funciones continuas.*

Por ejemplo, sean $f, g : \partial B(\mathbf{0}; 1) \to \partial B(\mathbf{0}; 1)$*, continuas,*
donde, $B(\mathbf{0}; 1)$ *es la bola unitaria en* ℓ_2*.*

Consideremos:

$$H : [0, 1] \times \partial B(\mathbf{0}; 1) \to \partial B(\mathbf{0}; 1)$$

$$H(t, x) = R(\ t(f(x) + (1 - t)g(x)\ ),$$

donde, R *es la citada retracción que acabamos de presentar.*

Entonces, H *es continua,* $H(0, x) = g(x)$*, H(1,x)=f(x).*

Como $\mathbf{0} \neq H(t, x)$*, para todo* $t \in [0, 1]$ *y para todo* $x \in \partial B(\mathbf{0}; 1)$ *resulta que* H *es una homotopía admisible (respecto a* $\mathbf{0}$*) entre* f *y* g*. De modo que, de existir una Teoría del Grado en la cual valga la propiedad de invariancia homotópica (d3), resultaría que: "Todas las aplicaciones continuas tendrían el* *mismo grado", y esto no haría muy útil tal teoría.*

La dificultad reside en el hecho que el conjunto de las aplicaciones continuas, en espacios de dimensión infinita, es muy grande.

Ahora bien, en muchos de los problemas en ecuaciones diferenciales surgen aplicaciones, entre espacios de Banach, que tienen otras propiedades, además de la continuidad, por ejemplo, ***la compacidad****, y para ellas sí se puede construir una teoría del grado que sea útil. Precisemos:*

Sean: X *e* Y, *espacios de Banach;* $D \subset X$,
$T : D \to Y$ *es* ***compacta****, si*

a.- *es continua.*

b.- *para cada* $\mathbf{B} \subset D$ *acotado, se tiene que* $\overline{T(B)}$ *es* ***compacto****.*
Ahora bien, si $\Omega \subset X$ *es abierto, acotado y* $T : \overline{\Omega} \to X$ *es una aplicación compacta, entonces, dada* $\varepsilon > 0$, *existen: un subespacio* $F \subset X$, *con* $\dim F < +\infty$, *y una aplicación* ***compacta****.* $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to F$, *tal que:* $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \varepsilon$, *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

Esto permite presentar, la, así llamada, ***Teoría del Grado Topológico de Leray-Schauder.*** *Este grado será definida para* ***perturbaciones compactas de la identidad****, o sea, para aplicaciones* $\varphi = I - T$, *donde,* $T : \overline{\Omega} \to X$ *es una aplicación compacta, con* $\Omega \subset X$, *abierto, acotado, y* X *un espacio de Banach.*

Definición 3.1. *Sea* $T : \overline{\Omega} \to X$, *compacta, tal que* $T(\overline{\Omega})$ *está contenida en* $\mathbf{F} \subset X$, ***de dimensión finita****; sean:* $\varphi = I - T$; $p \in F$, *con* $p \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Entonces, definimos:*

$$\tilde{d}(\varphi, \Omega, p) = d(\varphi_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, p),$$

donde, el grado (en el lado derecho) es el grado de Brouwer, que ya conocemos. Se prueba que $\tilde{d}$ *no depende de* F, *o sea, que* $\tilde{d}$ *está bien definido (Ver [8]). Las propiedades del Grado de Leray-Schauder se deduden en forma análoga a como fueron deducidas las propiedades del grado de Brouwer.*

Bibliografía

[**1**] *Lars V. Alfors, Complex Analysis, International student edition, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. Tokyo, 1953.*

[**2**] *A. Artur A Hauser. Jr. Variable Compleja, Fondo educativo Interamericano, S.A. 1973.*

[**3**] *Chinn-Steenrod. Primeros Conceptos de Topología, Editorial Alhambra, S.A. 1975.*

[**4**] *Klaus Deimling, Non linear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.*

[**5**] *Chaim Samuel Höning, Aplicações da Topologis à Análise, Rio de Janeiro, 1976.*

[**6**] *Elon Lages Lima, Curso de Análise, Vol 2, Projeto Euclides, Rio de Janeiro.*

[**7**] *Schwartz J.T, Non linear Functional Analysis, New York. Gordon and Breach, 1969.*

[**8**] *Nirenberg L., Topics in Non Linear Functional Analysis, Courant Institute Math., Sci. Lecture Notes, 1974.*

[**9**] *American Mathematical Monthly, vol. 85 (1978), página 521-524. Milnor, John - Analytic proof of the ¨ hairy ball theorem ¨ and the Brouwer fixed point theorem.*

[**10**] *Elon Lages Lima,Espaços métricos, Projeto Euclides, Rio de Janeiro. 1977.*