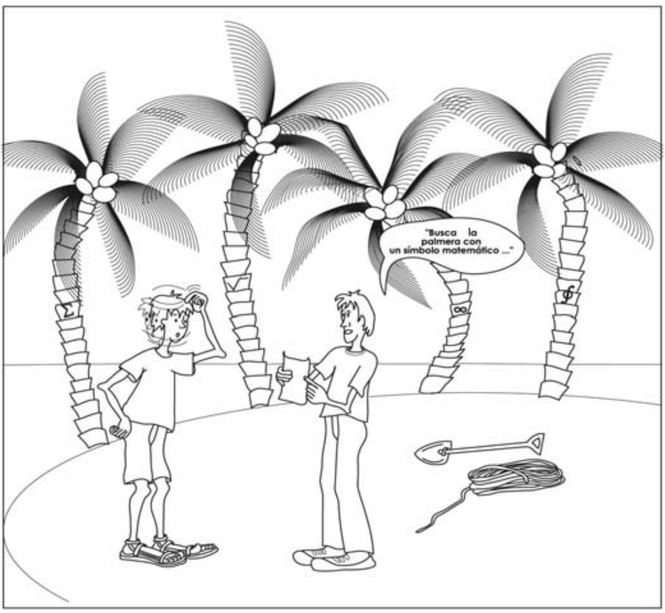
Magia y Encanto de las Matemáticas



Jesús Alfonso Pérez Sánchez

Magia y Encanto de la Matemática

Jesús Pérez Sánchez

Dedicatoria

Dedicado a dos grandes maestros:

Juan Carlos Garbiso Valenzuela y D'Jairo Guedes de Figueiredo.

Agradecimientos

A Marali Carolina Duque Albiac, por las ilustraciones.

A mis colegas: Cristina Trevisán, María Luisa Colasante, José Rodriguez, Ernesto Zamora, Iván Spinetti, por sus observaciones y correcciones a la versión preliminar de los relatos.

Contenido

Introducción

En el presente trabajo encontraremos relatos que envuelven un poco de Matemática Elemental. La mayoría no son originales. Unos pocos están basados en experiencias en el aula de clases; otros, en conversaciones con compañeros de la docencia y, también los hay, apoyados en gratos recuerdos de mis primeras incursiones en el prodigioso jardín de la Matemática.

Obviamente, lo ideal es ir a la fuente original (libros y revistas indicados al final); pero en caso de que ello no sea posible, espero que los capítulos siguientes entusiasmen al lector a incursionar más en este maravilloso mundo de la Matemática.

Las presentes notas llegan con más de un año de atraso. Ellas debieron estar listas en el año 2000 (Año mundial de La Matemática), pero... más vale tarde que nunca.

En todo caso, las observaciones y sugerencias serán bienvenidas.

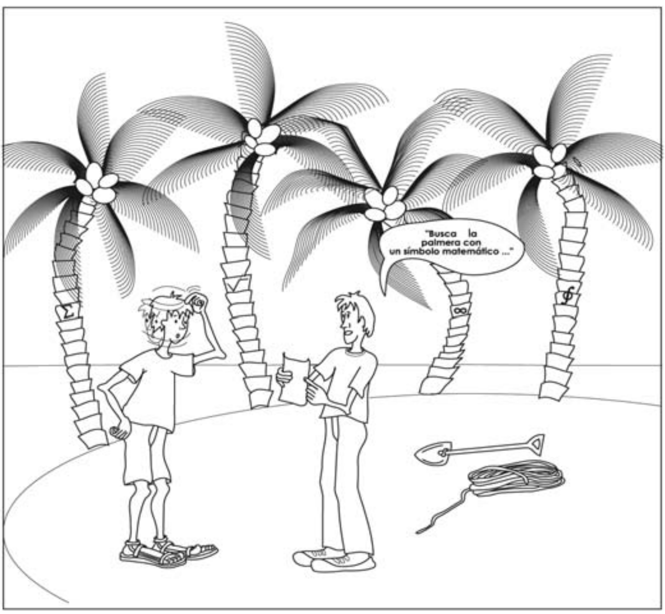
Jesús Alfonso Pérez Sánchez

e-mail: jesusp@ula.ve

Capítulo 1

Matemati-Tesoros

1.1 El tesoro de la Isla



Dos jóvenes hermanos hallaron, en el baúl de los recuerdos de su abuelo, el mapa de un tesoro.

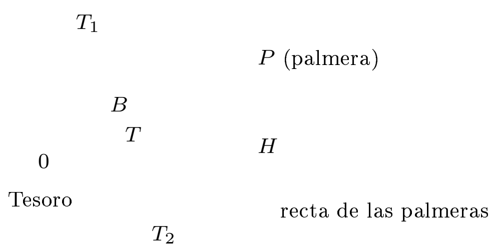
La información era bastante clara. Había que encontrar una determinada isla, cuyas coordenadas aparecían nítidamente. Luego de llegar a una vasta planicie en dicha ínsula, se toparían con una enorme pista arenosa, de forma perfectamente circular. Fuera del círculo se podía observar una larga fila de palmeras, correctamente alineadas. Para dar con el tesoro era suficiente proceder como sigue:

"Ubicar la palmera que tiene dibujada, en su tronco, una figura geométrica. Desde su pie, trazar sendas rectas tangentes a la pista circular (llamemos T_1 y T_2 a los dos puntos de tangencia). Marcar, también, el diámetro (de la pista) perpendicular a "la recta de las palmeras" (designemos dicho diámetro por l). El tesoro se encontraría, bajo el punto de intersección de l con el segmento $\overline{T_1T_2}$."

Los jóvenes llegaron muy animados al lugar apropiado, llevando cuerdas y demás herramientas necesarias. Ahí estaban: la hermosa planicie, la gran pista circular y la larga hilera de lindas palmeras. Pero ... ¡Oh sorpresa! Todas las palmeras presentaban figuras geométricas en sus gruesos troncos. En una aparecía un pentágono regular, en otra, la espiral de Arquímedes, más allá un dibujo ilustrativo del Teorema de Pitágoras, etc, etc. Aquel hecho estropeaba todos los planes, pues el punto de partida se mostraba clave para la realización del trabajo. Sin ese punto de referencia inicial, el trabajo a realizar se veía inmenso, si no imposible.

Así que, no les quedó más remedio que retornar sin haber cumplido su objetivo.

Sin embargo, si aquellos dos jóvenes tan sólo hubieran escogido una cualquiera de las palmeras, hubiesen llegado al tesoro, pues, como veremos a continuación, el punto donde se debía excavar, es **independiente** del punto de partida que se escoja en " la recta de las palmeras".



Llamemos O al centro de la circunferencia; r a su radio y H al pie de la perpendicular (por O) a la recta de las palmeras.

Seleccionemos una palmera (representada por P) cualquiera.

Designemos con B, a la intersección de $\overline{OP}$ con $\overline{T_1T_2}$.

Resulta que los triángulos rectángulos OBT_1 y OT_1P, son **semejantes** (¿por qué?).

Luego:

$$\frac{|\overline{OT_1}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OT_1}|}.$$

O sea:

$$r^2 = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OP}|. \tag{1}$$

Análogamente, los triángulos rectángulos OBT y OHP, son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{|\overline{OT}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OH}|}.$$

Lo cual significa que:

$$|\overline{OT}| \cdot |\overline{OH}| = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OP}| \tag{2}$$

Así que, de (1) y (2) obtenemos:

$$|\overline{OT}| = \frac{r^2}{|\overline{OH}|}.$$

Conclusión: El punto T obtenido, no depende del P, en "la recta de las palmeras".

Nota: ver en la parte (d) del Apéndice, un relato de corte similar.

1.2 Puntos Mágicos

En un vetusto documento, se hallaron las siguientes instrucciones: "Partiendo de la intersección del **Camino del Rey** con el **Camino de la Reina**, sígase hacia el Norte por el primero y búsquese un pino y, después, un arce. Regrésese a la intersección. Hacia el Oeste, por el Camino de la Reina, hay un olmo y hacia el Este, en ese mismo camino, hay un abeto. El punto en el cual la recta determinada por el olmo y el pino corta a la recta determinada por el arce y el abeto es **uno de los dos puntos mágicos**. El otro **punto mágico** es la intersección de la recta determinada por el abeto y el pino con la recta determinada por el olmo y el arce. El tesoro está enterrado donde la recta que une los dos puntos mágicos corta al Camino de la Reina".

Enseguida se comenta que una patrulla halló el olmo a 4 $Km.$, el abeto a 2 $Km.$ y el pino a 3 $Km.$ (todas estas distancias medidas a partir de la intersección). Del arce ... ninguna traza.

No obstante, mediante las indicaciones, la patrulla logró hallar el tesoro. ¿Cómo fue esto posible? Uno de los patrulleros habló de cuán afortunados habían sido por haber encontrado el pino. El jefe de la patrulla sonrió y dijo: "Tampoco necesitábamos el pino". ¡Demostremos que estaba en lo cierto!

Elaboremos un mapa y consideremos en él, un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo eje de ordenadas es el Camino del Rey, en tanto que el eje de las abscisas lo constituye el Camino de la Reina. Luego, el olmo, o_l viene representado por el $(-4, 0)$; el abeto, a_b, queda representado por el $(2, 0)$.

Designemos con $(0, p)$ y $(0, a)$, las representaciones del pino (p_i)

y del arce (a_r), respectivamente.

C. Rey

a_r

2do punto mágico

1er punto mágico

P_i

Tesoro

0_1

a_b

C. Reina

Así, tenemos:

Recta olmo-pino:

$$y = \frac{p}{4}(x+4).$$

Recta arce-abeto:

$$y = -\frac{a}{2}(x-2).$$

Formamos el sistema $\begin{cases} y = \frac{p}{4}(x+4) \\ y = -\frac{a}{2}(x-2) \end{cases}$, cuya solución es el primer punto mágico:

$$\left(\frac{4a-4p}{p+2a}, \frac{3pa}{p+2a}\right) \tag{1}$$

Recta abeto-pino:

$$y = -\frac{p}{2}(x-2).$$

Recta olmo-arce:

$$y = \frac{a}{4}(x+4).$$

De manera que el segundo punto mágico es la solución del sistema

$$\begin{cases} y &= -\dfrac{p}{2}(x-2) \\ y &= \dfrac{a}{4}(x+4) \end{cases},$$

o sea, el punto

$$\left(\frac{4p-4a}{2p+a}, \frac{3pa}{2p+a}\right) \tag{2}$$

Usando (1) y (2), hallamos **la recta de los puntos mágicos**:

$$y - \frac{3pa}{p+2a} = \frac{\dfrac{3pa}{2p+a} - \dfrac{3pa}{p+2a}}{\dfrac{4p-4a}{2p+a} - \dfrac{4a-4p}{p+2a}}\left(x - \frac{4a-4p}{p+2a}\right). \tag{3}$$

Antes de continuar, veamos que

$$\frac{4p-4a}{2p+a} - \frac{4a-4p}{p+2a} \neq 0.$$

En efecto, si fuera

$$\frac{4p-4a}{2p+a} = \frac{4a-4p}{p+2a},$$

obtendríamos:

$$4(p-a)(p+2a) = 4(a-p)(2p+a).$$

Como $a \neq p$, resulta:

$$p + 2a = -2p - a,$$

o sea, $p = -a$. (Absurdo)

Por último, hacemos $y = 0$, en (3). Después de simplificar, el despeje de x, nos da:

$$x = \frac{8p + 16a}{p + 2a} = 8.$$

Concluimos entonces, que para hallar el tesoro no se necesitaban los valores de p y de a.

Capítulo 2

Matemati-Fantasías

He aquí una versión más, de un conocido relato:

2.1 "La princesa que estudiaba Geometría"

Cuéntase que, antiguamente, había un riquísimo y poderoso rey, el cual vivía en un hermoso palacio, famoso por la belleza y esplendor de sus jardines.

El rey tenía tres hijas. A fin de conocer sobre ellas, el príncipe del reino vecino se acercó hasta aquel grandioso castillo. Ya en conversación con el rey, le manifiesta su deseo de saber las edades de sus hijas.

El rey le responde por medio de un enigma:

"El producto de sus edades es 36 y su suma, casualmente, es igual al número de jardines de este castillo". El príncipe debía resolver el acertijo, ya que así mostraría inteligencia y podría aspirar, a su debido tiempo, a la mano de alguna de las princesas.

Ni corto ni perezoso averiguó el número de jardines del palacio, después, reflexionó un rato y regresó donde el rey para informarle que le faltaban datos.

El rey le dijo: "Tienes razón. Se me pasó por alto decirte que mi hija mayor está muy entusiasmada estudiando Geometría ". Resultó que, con esta información el príncipe determinó las edades de las hijas del rey. ¿Cómo lo hizo?. Veamos:

El príncipe hizo un listado de las distintas maneras en las que 36 puede descomponerse como producto de tres números naturales (al lado colocó la suma respectiva de dichos factores):

1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	**13**
2	2	9	**13**
2	3	6	11
3	3	4	10

Ahora, le faltaba tomar en cuenta el número de jardines del palacio. Si éstos eran 38, 21, 16, 14, 11 ó 10, ¡asunto resuelto! Pero recordemos que el príncipe tuvo que ir en busca de más información. Ello se debió a que el castillo tenía ... 13 jardines. La exclamación: "Mi hija mayor está muy entusiasmada estudiando Geometría", descarta el caso

$$1,\ 6,\ 6.$$

Así, las edades de las princesas son:

$$2,\ 2,\ \text{y}\ \ 9\ \text{años}.$$

2.2 La Topología en auxilio de un celoso califa

Esta es una vieja historia acerca de un califa persa que propuso un problema topológico para elegir el marido de su bella hija. Ésta tenía numerosos pretendientes y el califa decidió escoger al que resolviese dos problemas.

El primer problema se refería a la siguiente figura:

1 1

2 2

3 3

Se trataba de conectar **los mismos números** mediante líneas que **no se cruzasen entre sí, ni cruzasen a ninguna otra línea de la figura**.

Quien no superase este escollo quedaba fuera, y ni siquiera podía hablar a la hija del califa. Pero el pretendiente que podría casarse con la hija del califa tenía que vencer un segundo obstáculo. Era un problema análogo al primero. Sólo que, hubo un cambio importante en la figura. Ahora era:

1	3
2	2
3	1

El primer problema se presentaba bastante fácil. Una solución podía ser la siguiente:

1	1
2	2
3	3

En cuanto al segundo ... el panorama se observaba más complicado. Entre los pretendientes que pasaron a la segunda ronda se comentaba que el problema era imposible de resolver y que el suspicaz y astuto califa lo que quería era prolongar el celibato de su hermosa hija. ¿Tenían razón?

Veamos:

Tracemos una línea del 1 al 1, y, otra del 2 al 2.

Hemos remarcado una curva cerrada, C, **simple**, encerrando la región sombreada.

Notemos que el 3 de la izquierda está en el **interior** de la región sombreada, mientrás que el 3 de la derecha queda fuera de dicha región.

C

1 3

2 2

3 1

Es en este momento cuando entra en escena un célebre teorema topólogico (teorema de la aduana) que nos permite concluir que para "**conectar**" el 3 del **interior** de la región sombreada con el 3 del **exterior** de dicha región, necesariamente hay que cruzar **la frontera** (la curva C). De manera que, el segundo problema no tiene solución.

Podemos, entonces, decir que, gracias al teorema de la aduana, el califa se salió con la suya y por un tiempo más ... ¡su hija continuaría soltera!

Capítulo 3

Con el profesor Beremís

3.1 Un profesor en apuros ...

Aquella semana el profesor Beremís estaba extrañando la tardanza de sus alumnos en entregar la solución de la acostumbrada tarea de Matemática. Él la había propuesto en vísperas de un viaje a un Congreso de Enseñanza de la Geometría y ahora, ansiaba conocer las respuestas de sus dedicados pupilos. Finalmente, un tanto retrasados, éstos se manifestaron y era notorio que sus rostros no reflejaban la alegría habitual.

Al averiguar sobre la causa de ello, el profesor Beremís se enteró de que no habían podido resolver cierto problema (parecía que faltaba un dato). Claro que el profesor se sintió en un aprieto. Él era muy esmerado en la elaboración de los ejercicios a proponer y, si bien, aquellos días había estado bastante atareado y no verificó todos los detalles de los problemas, estaba seguro de haber proporcionado todos los elementos necesarios para su solución.

Sin más preámbulo, quiso saber cuál era la dificultad. Se trataba de lo siguiente:

Dada la parábola de la figura, hallar la intersección de la recta r (tangente a la curva, en P) con el eje OX.

El argumento del alumnado era que, sólo con la información contenida en la figura, no era posible encontrar la ecuación de la parábola y, por ende, tampoco se podía obtener la ecuación de r.

Atentamente, el profesor escuchó la explicación:

y r

P

1 2 3 4 x

"La ecuación general de la parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con a, b y c, constantes a ser determinadas usando la información contenida en la figura. Seguros estamos de que $a < 0$. Además, como la cónica pasa por el origen de coordenadas, resulta $c = 0$. Luego, la ecuación de la parábola toma la forma

$$y = ax^2 + bx.$$

También, como el punto (4,0) está en la curva, se cumple:

$$0 = 16a + 4b, \quad \text{o sea,} \quad b = -4a.$$

De ahí que, sería importante obtener **otra** igualdad (la cual involucre a dichas constantes) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y, entonces, al resolverlo, obtener los valores de a y b. Para ello, usamos otra pista indicada en el dibujo: la abscisa del vértice de la parábola es igual a 2.

Como la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, es $-\dfrac{b}{2a}$, en nuestro caso, resulta:

$$-\frac{b}{2a} = 2,$$

lo cual no es otra cosa que $b = -4a$. Así, no aparece una **nueva** relación entre a y b, y la máxima conclusión a la que llegamos es:

La ecuación de la parábola queda como

$$y = ax^2 - 4ax,$$

con $a < 0$, **desconocida**. El profesor Beremís percibió que sus alumnos tenían razón: con la información suministrada no era posible hallar el valor de a. Entonces, con su entusiasmo característico, les propuso aprovechar el momento para repasar el concepto de recta tangente. Enseguida comenzó:

Sea r, la recta (no vertical) de pendiente m y que pasa por el punto $P = (x_1, y_1)$, perteneciente a la parábola

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$.

Supongamos que (x_1, y_1) no coincide con el vértice de la parábola (o sea, $m \neq 0$). La ecuación de r es:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{1}$$

con

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c. \tag{2}$$

Nos proponemos hallar m, de modo que la recta r tenga (x_1, y_1) como **único** punto en común con la parábola.

Esa recta r es denominada recta tangente a la parábola en el punto (x_1, y_1).

Cabe señalar que, usando el concepto de derivada, se obtiene una definición de recta tangente, válida para una curva cualquiera, no sólo para parábolas.

Por lo pronto, tenemos el sistema:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{4}$$

cuya única solución deberá ser el punto (x_1, y_1). Despejando y en (4), sustituyendo en (3), y usando (2), llegamos (después de agrupar y factorizar) a:

$$(x - x_1)[a(x + x_1) + b - m] = 0. \tag{5}$$

Por lo tanto, lo que anhelamos lo podemos expresar, ahora, así:

La única solución de (5) debe ser:

$$x = x_1.$$

Entonces, es necesario que sea

$$m = 2ax_1 + b. \qquad \text{(¿por qué?)}$$

De manera que la ecuación de r es:

$$y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1). \tag{6}$$

Ahora, para resolver el problema de la tarea, debemos hallar **el valor de** x en (6), correspondiente a $y = 0$. Llamémoslo x_0.
Así, de (6) se sigue:

$$x_0 = -\frac{y_1}{2ax_1 + b} + x_1.$$

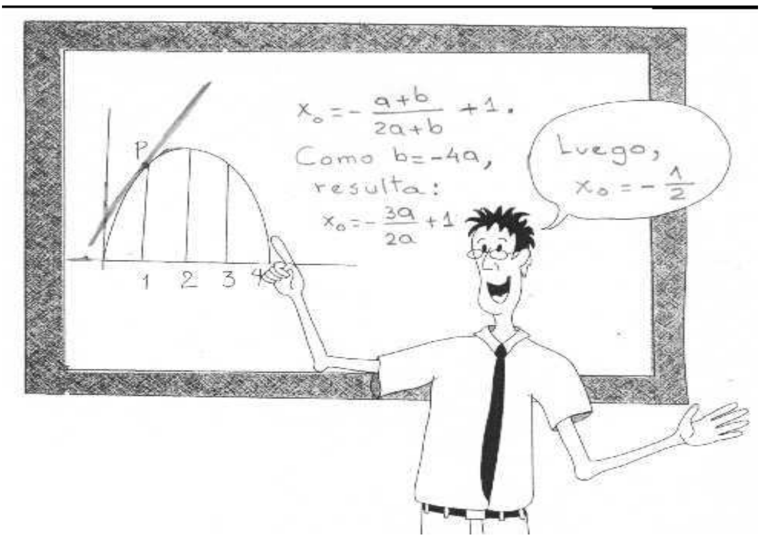
(Recordar que $2ax_1 + b = m \neq 0$).
Además, en nuestro caso particular $x_1 = 1$ e $y_1 = ax_1^2 + bx_1 = a + b$.
Luego,

$$x_0 = -\frac{a + b}{2a + b} + 1. \tag{7}$$

En este preciso momento, al profesor Beremís le brillaron los ojos y su expresión fue de mucha alegría, pues se dió cuenta de que podía resolver el problema de la tarea, sin necesidad de conocer el valor de a.
En efecto, como $b = -4a$, sustituyendo en (7), se consigue

$$x_0 = -\frac{a - 4a}{2a - 4a} + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Como corolario, cada rostro mostró una sonrisa. ¡No era para menos!



Ahora, veamos algunos de los problemas-reto que el profesor Beremís presentaba a sus alumnos más aventajados.

3.2 Problemas-Reto del Profesor Beremís.

R 1 El problema de la escalera:

En un estrecho callejón, de anchura desconocida, es colocada una escalera, con su pie en un punto P entre las paredes. Si la apoyamos sobre la pared de la derecha, la escalera forma un ángulo de $45°$ con el suelo. Apoyándola sobre la otra pared, el ángulo que se forma ahora es de $75°$, como indica la figura. Además, ha sido medida la altura del punto R (Llamémosla h). Hallar el ancho del

R

callejón.

h D Q

$75°$ $45°$

A P C

?

(Solución en el apartado (b), Apéndice).

R 2 En un triángulo rectángulo se tiene que la circunferencia inscrita toca a la hipotenusa en un punto tal, que dicho lado queda dividido en segmentos de longitud m y n (en centímetros), respectivamente.
Sabiendo que $m \cdot n = 60$ y que el perímetro del triángulo es 40 cm. Hallar los lados del triángulo.

Solución, parte (e) , Apéndice.

m

n

R 3 En la figura al lado se cumple:

M, punto medio de la cuerda $\overline{AB}$;

O centro de la circunferencia;

$\measuredangle\ AOT = 15°$.

Hallar $\measuredangle\ UOB$.

P R

A T M U B

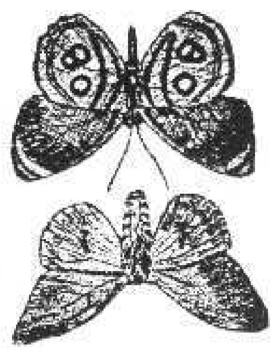
O

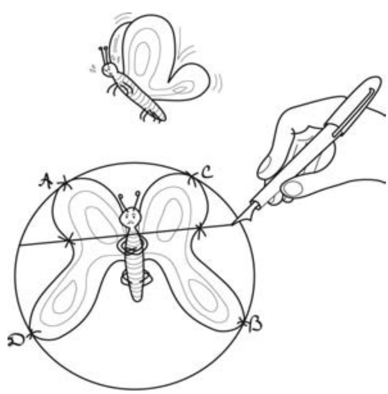
Q S

Clave: mariposa *

Solución: Ver (f), en el Apéndice.

* Es bueno señalar que el profesor Beremís ya había tratado el tema: "mariposas matemáticas". Había hablado de ellas como todo un naturalista. En particular, las definía como aquellas que al volar llevan la Matemática para el cielo. En cierto momento,





aprovechaba para "descubrir" el "Teorema de la Mariposa ", al cual se refiere la clave dada para resolver el reto.

Solución: Ver parte (a) del Apéndice.

R 4 Los tres alumnos distraídos:

Daniel, Diego y Dionisio se reunieron para resolver su tarea de Álgebra y uno de los problemas quedó reducido a encontrar las raíces de cierto polinomio **mónico**, de tercer grado, es decir, un polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Pero resulta que cada quién halla un polinomio diferente.

El hallado por Daniel sólo tiene correcto el coeficiente a y las raíces resultantes fueron: -1, -2 y 6. Por otro lado, el polinomio de Diego, tiene como raíces los números -1, -2 y 0, pero se equivocó en los valores de a y c. No así, en el valor de b.

Por último, Dionisio acertó en el valor de c, erró en el valor de a y en el de b. Las raíces que obtuvo fueron: 5, 6 y 0. ¿Cuáles son las soluciones correctas del problema?

Solución: Ver parte (g) del Apéndice.

R 5 La Tierra y un balón de fútbol

Imaginemos que el globo terrestre está ceñido, a lo largo del ecuador, por un aro y que, análogamente, está ceñido, también, un balón de fútbol, a lo largo de un círculo mayor.

Supongamos que el perímetro de cada aro aumenta en 1 metro. Luego, los aros se separarán de los cuerpos que ceñían y se formará cierto **espacio** entre ellos. ¿En cuál de los dos casos este **espacio** será mayor?

(Solución en la parte (h) del Apéndice).

3.3 De paseo con la Matemática

Llegó el período de vacaciones y el profesor Beremís decidió pasar unos días fuera de su querida ciudad y se fue a visitar a su sobrino Juan. Iba motivado, entre otras cosas, por el talento matemático del muchacho y por la belleza de aquella región (algunos de sus habitantes afirmaban que parecía diseñada por el propio Walt Disney).

Después del alegre encuentro, el profesor descansó y, al día siguiente, iniciaron un paseo por aquel hermoso y apacible pueblo. Juan estaba muy entusiasmado y seguro de no haber olvidado algún detalle para aquella entretenida jornada: su gorra, su cinta métrica de bolsillo, la merienda, el agua, etc.

Ya llevaban unos cien metros de recorrido cuando quedaron frente a un letrero: "Finca Conticinio". Enseguida divisaron un corral que encerraba algunos animales: caballos, gallinas, vacas. Entonces, el profesor Beremís comentó: "En este momento viene a mi memoria el siguiente problemita: en un encierro hay caballos y gallinas; se cuentan 35 cabezas y 110 patas, en total. ¿Cuántos animales de cada clase tiene el encierro citado?"

- Mire tío, para resolverlo yo tengo mi estilo:

Imagino que **todos** los animales del encierro se apoyan en **dos** patas solamente. Entonces... se debió haber contado 70 patas. Se tiene, así, una diferencia de 40 patas. Eso quiere decir que hay ... 20 caballos ... y, en consecuencia, 15 gallinas.

Un poco más adelante, el profesor, discretamente, mientras Juan hablaba con algunos amigos, anotó en su libreta:

$$x \;:\; \text{n}^\circ \text{ de gallinas}$$

$$y \;:\; \text{n}^\circ \text{ de caballos}$$

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=35 \\ 2x+4y=110 \end{array}\right. \quad \therefore \quad \begin{array}{r} 2x+2y=70 \\ \underline{2x+4y=110} \\ 2y=40 \end{array} \quad \therefore \quad y=20$$

$$\therefore \quad x=15$$

Continuando el paseo, al cabo de algunos minutos, consiguieron un grupo de alegres muchachos jugando metras (canicas). Por cierto que éstas eran numerosas y de varios colores.

A sabiendas de que la Combinatoria era una de las preferidas de su sobrino, el profesor le planteó lo siguiente: Suponga que usted tiene 85 metras, en una caja, y hay: 20 rojas, 30 azules, 20 verdes y, de las 15 restantes, algunas son amarillas y otras son blancas. ¿Cuál es el número **mínimo** de metras, que deben ser retiradas de la caja, sin verles el color, para que estemos completamente seguros de que entre ellas existen, **por lo menos**, 15 metras del mismo color?

- ¡Que bueno, tío! Me agrada bastante el tema. Para hallar la respuesta, uso un método basado en "El principio de los nidos de las palomas": pienso en **cuatro** nidos y considero "**el peor de los casos**". Es decir, supongo que fueron retiradas las 15 metras que son amarillas o blancas (ellas son colocadas en un mismo nido) y asumo también, que ya salieron 14 metras de cada uno de los otros colores (colocadas en sus respectivos nidos). Entonces, es claro que retirando (¡sin ver el color!)

$$15 + 3 \cdot 14 + \mathbf{1} \qquad\qquad (58 \text{ en total})$$

metras, está garantizado que, por lo menos, 15 son del mismo color.

Aprobada satisfactoriamente la solución de Juan, prosiguieron la caminata, hasta llegar a la orilla de un bello río y decidieron parar y disfrutar del hermoso paisaje. Todo era armonía: la corriente de agua cristalina, la agradable brisa, la paz ... entonces, la voz del muchacho resonó en el ambiente: "Tío, yo puedo encontrar, aproximadamente, el ancho del río, en esta parte al frente nuestro, donde las orillas son paralelas.

Vea ... me coloco de pie, digamos en el punto A, mirando para el punto B, en la orilla opuesta, tal que $\overline{AB}$ sea perpendicular a los márgenes del río. Luego, con mucha calma voy moviendo la visera de mi gorra, hasta que quedan alineados: uno de mis ojos (O), digamos el derecho, la punta de la visera (P) y el punto B.

A continuación, giro según un ángulo de 90° y localizo el punto C, en esta orilla del río, alineado con O y P' (punta de la visera). Ahora, sólo necesito usar la cinta métrica para obtener la longitud de $\overline{AC}$, o sea, el ancho del río.

La justificación es proporcionada por la congruencia de los triángulos OAB y OAC."

O

P

P'

B

A

C

Caminaron un poco más, en silencio. El profesor pensaba en Juan. Sin duda era un muchacho extraordinario, un pequeño poeta-matemático.

Sin percatarse, llegaron a una colina; desde allí se divisaba gran parte del pueblo.

- Observe Tío, hacia el Este. Ese es mi colegio. ¿Ves sus campos deportivos? Por cierto ... el proximo mes comenzarán las competencias deportivas. Hay una de ellas que me atrae bastante. Pronto empezaré a entrenar, así estaré en mejores condiciones físicas, porque, por lo demás, ya tengo un "**método**" para triunfar. Veamos: se trata de recorrer, en el menor tiempo posible, la distancia de un punto A a un punto B, tocando el muro de la cancha, antes de llegar a la meta. Para mayor claridad consideremos la siguiente figura:

120 m

C D muro

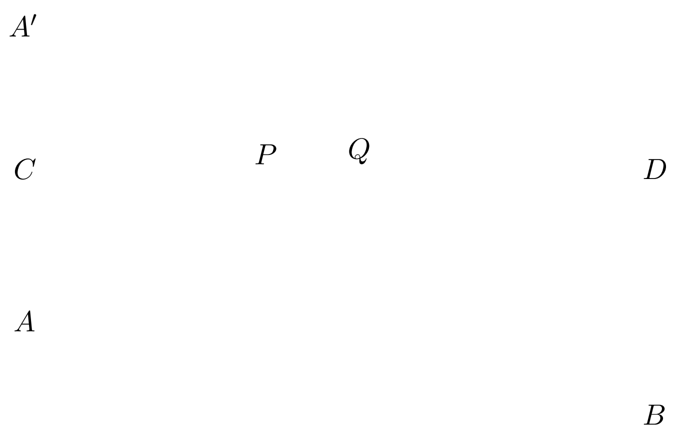
30 m

50 m

A (salida)

B (meta)

Para escoger el "mejor" punto de contacto, en el muro, procedo así: Considero el punto A', **simétrico** de A, respecto al muro CD.



Sea P, el punto de intersección de $\overline{A'B}$ con $\overline{CD}$. Mostraré a continuación que dicho punto P debe ser el elegido para hacer contacto en el muro.

En efecto, notemos que la distancia de A hasta P, es la misma que la de A' a P. Así, el recorrido total de A hasta B, no es otro que la longitud de $\overline{A'B}$. Ahora bien, si escogemos otro punto en el muro, digamos Q, análogamente, concluiremos que la distancia recorrida es la longitud de $\overline{A'Q}$ más la de $\overline{QB}$, y, esta suma es **mayor** que la longitud de $\overline{A'B}$.

Para encontrar la distancia de P a C, utilizo el hecho de que los triángulos $A'CP$ y PDB son semejantes.

A'

30

C x P $120 - x$ D

30

A

50

B

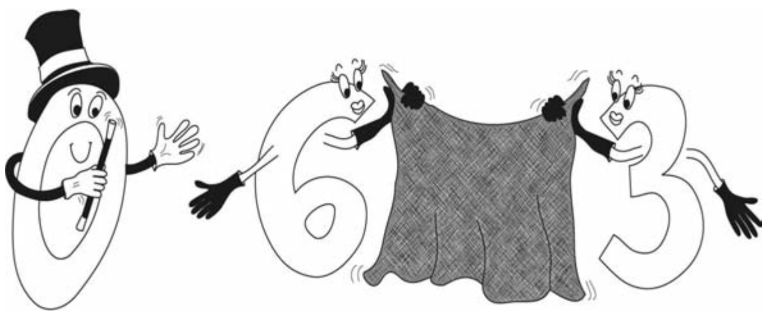
$$\frac{30}{50} = \frac{x}{120 - x}.$$

Luego, $x = 45$ m

¡El profesor Beremís expresaba tanta felicidad! Hasta aquí, aquella entretenida travesía lo regocijaba tanto como el crepúsculo, el cual indicaba que ya era hora de emprender el regreso.

Capítulo 4

La magia de los Sistemas de Numeración



4.1 Sistemas de Numeración

Los símbolos que se usan para representar los números se llaman **numerales**.

A un determinado conjunto de símbolos usados para representar números se lo denomina **sistema de numeración**. La gracia está en que usando sólo unos pocos símbolos podemos representar muchos números diferentes. ¿Cómo? Pues.. apelando a diferentes combinaciones de los símbolos y tomando en cuenta el orden de escritura de los símbolos.

Nuestro sistema de numeración (el hindú-arábigo) tiene diez símbolos fundamentales:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Estos símbolos se llaman **dígitos**.

Combinando estos diez símbolos fundamentales podemos escribir numerales de números muy grandes o muy pequeños, gracias a que asignamos diferentes valores a un dígito, según el lugar que ocupa en un numeral (**valor posicional**).

Así, 5 es el numeral para un conjunto de cinco objetos, pero cada 5 en el numeral 555 tiene un valor diferente. Cada lugar tiene un valor de 10 veces el del lugar a su derecha:

$$555 = 5 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 + 5 \times 1 \ ,$$

o sea, $555 = \mathbf{5} \times 10^2 + \mathbf{5} \times 10^1 + \mathbf{5} \times 10^0.$

Recordemos que el sistema de numeración hindú-arábigo también es llamado **decimal** o de base diez.

Pero éste no es el único sistema que se utiliza. En efecto, el sistema numérico usado internamente por los computadores es el **sistema de base 2**, llamado, también, **binario**.

En este sistema son usados apenas el 1 y el 0; veamos algunos ejemplos: Como $15 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$, tenemos, que en la base 2, el numeral 15 es representado por **1111**.

Análogamente, el 7 es representado como 111, en el sistema binario, pues $7 = \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$.

Inmediatamente podemos verificar que los numerales decimales 2, 10, 23, son representados, en el sistema binario como **10, 1010, 10111,** respectivamente.

Similarmente, como

$$25 = \mathbf{2} \times 3^2 + \mathbf{2} \times 3^1 + \mathbf{1} \times 3^0 \ ,$$

tenemos que el numeral decimal 25 es expresado como **221**, en la base 3.

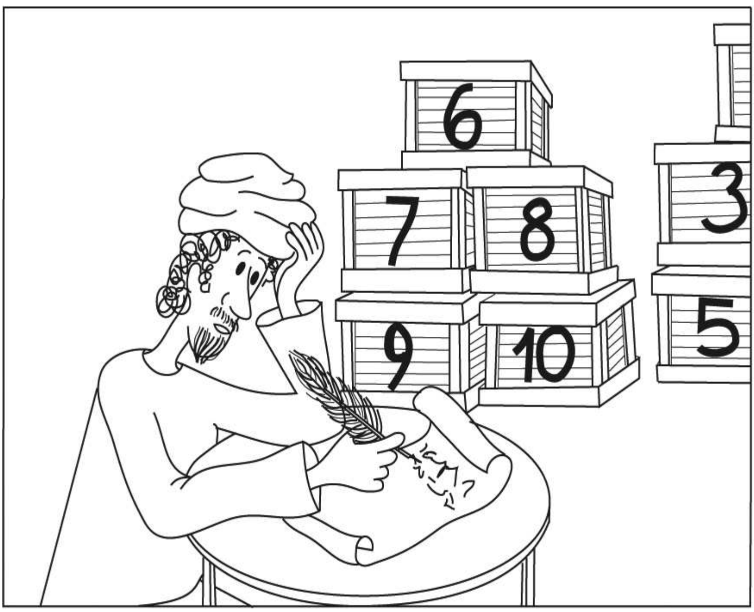
Veamos, ahora, un relato con muchos números.

4.2 El problema de los 1000 dinares

Quizás muchos no sepan que Malba Tahan, famoso por su libro "El hombre que calculaba ", era un excelente profesor de Matemática, brasileño, cuyo verdadero nombre era Julio César de Mello e Souza

(1895-1974). Fué autor de más de un centenar de libros de Literatura Oriental, Didáctica y Matemática. Era, también, un verdadero maestro en el arte de contar historias. Precisamente, la que sigue es una de ellas, aparecida en su libro " Novas Lendas Orientais". Su título:

"El problema de los 1000 dinares".



A Beremís, protagonista de "El hombre que calculaba", le fué presentado el siguiente reto aritmético.

Distribuidas 1000 monedas de 1 dinar, en 10 cajas de madera- todas del mismo tamaño-numeradas y debidamente selladas, tales que:

i) la numeración de cada caja, del 1 al 10, fué hecha en orden **estrictamente creciente** en relación a su contenido de monedas.

ii) Era posible realizar cualquier pago (**entero**) de 1 a 1000 dinares, **sin necesidad de abrir caja alguna**.

El desafío consistía en determinar la cantidad de monedas encerrada en cada caja, mediante un razonamiento matemático.
El joven calculista, después de meditar y coordinar sus ideas comenzó la solución del problema:
La caja número 1, necesariamente guardaba sólo 1 dinar, pues de lo contrario, no sería posible pagar una deuda de esa cuantía, respetando las condiciones (i) y (ii). Por su parte, la segunda caja debía contener solamente 2 dinares, para poder efectuar el pago de una deuda de un par de dinares, lo cual no sería posible si encerrara 3 ó más dinares, siempre respetando las exigencias (i) y (ii).
Análogamente, el contenido de la caja 3 era de 4 dinares. (Notemos que según el contenido de las dos primeras cajas, se podía ejecutar un pago de 1, 2 ó 3 dinares). En fin, Beremís, continua su argumentación hasta quedar establecida la siguiente distribución de las monedas en las cajas numeradas del 1 al 9:

Cajas:	9na	8va	$\cdots$	3ra	2da	1ra
Monedas:	2^8	2^7	$\cdots$	2^2	2^1	2^0

En cuanto a la décima caja, concluye que debe contener:

$$1000 - (2^8 + 2^7 + \cdots 2^2 + 2^1 + 2^0) = 489 \text{ monedas.}$$

Esa fué la solución dada por Beremís. Por ejemplo, para realizar un pago de 352 dinares, consideramos las cajas numeradas con el 9, el 7 y el 6.

Si hay que pagar 123 dinares, usamos la caja 7, la 6, la 5, la 4, la 2 y la 1.

¿Que comó se llega a ello?

Bueno, el lector ya ha notado que en el fondo del asunto está ... el sistema binario.

En efecto, el numeral decimal 352, en notación binaria es el **101100000**, pues,

$$\begin{aligned} 352 &= \mathbf{1} \times 2^8 + \mathbf{0} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{0} \times 2^4 \\ &\qquad + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0. \end{aligned}$$

Por eso fué que sólo seleccionamos las cajas numeradas con el 9, el 7 y el 6.

El lector puede verificar la respuesta en el caso de los 123 dinares.

Como 511, en notación binaria, es el **111111111**, para ejecutar un pago de esa cuantía, hay que elegir todas las cajas, de la primera a la novena.

Para cancelar una deuda de x dinares $\quad$ (x entero) con $511 < x \leq 1000$, escogemos la caja número 10 y, para lo faltante,

$x-489$, tomamos las cajas (entre las nueve primeras) respectivas, según sea la expresión del número $x-489$, en notación binaria. Como una nota curiosa tenemos que una deuda estrictamente comprendida entre 490 y 512 dinares, puede ser pagada de dos maneras, según se use, o no, la caja número 10.
Por ejemplo, la suma de 500 dinares puede ser cubierta así:

- reuniendo los contenidos de las cajas 10, 4, 2 y 1, pues:

$$500 = 489 + \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0.$$

- Como 500, expresado en notación binaria, es el **111110100**, podemos, también, emplear las cajas 9, 8, 7,6,5 y 3.

4.3 En busca del número perdido

En la siguiente tabla, el orden de las casillas es como sigue:

1ª	2ª	3ª
4ª	5ª	6ª
7ª	8ª	9ª

Ahora bien, en la **primera** casilla se coloca la expresión de un número n, **en la base** n; en la **segunda** casilla, la expresión de dicho número n, **en la base** $n-1$; y así, sucesivamente. De esa manera hemos llenado las ocho primeras casillas.

10	11	12
13	14	15
21	23	?

¿Cuál es el número faltante?

Solución: ver parte (c), Apéndice.

4.4 Tablas Mágicas

¿Qué pensaríamos de alguien que nos presente las tablas de la figura y nos dice que adivinará el número que elijamos (con tal que le indiquemos en cuáles tablas aparece dicho número) y, además acierta en su adivinación?

Simplemente, ¡que tiene una excelente memoria!

1	5	17	11	21
9	3	29	19	7
15	25	23	13	27
31				

T_1

2	23	6	27	10
11	22	31	15	26
14	30	18	3	19
7				

T_2

4	23	6	29	12
13	5	28	15	30
21	7	22	20	31
14				

T_3

8	14	28	11	30
13	9	26	10	24
15	27	12	25	29
31				

T_4

16	24	26	30	25
31	22	17	28	19
27	29	23	18	20
21				

T_5

Pero ... ello no es necesariamente cierto, puesto que detrás de este juego de adivinación está ... **¡el sistema binario!**

En efecto, expresando los números dados, en el sistema binario, podemos constatar que los números de la $i-$ésima tabla presentan, todos, el 1 en la $i-$ésima cifra (de derecha a izquierda), donde: i =1, 2, 3, 4, 5.

Así, por ejemplo, tomemos en la primera tabla, el 5, el 17 y el 11. Como $5 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$, su expresión en el sistema binario es: **101**.

En tanto que

$$17 = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$$

Así que, 17, expresado en el sistema binario es el **10001**.

Análogamente, **1011** es el número 11 expresado en la base 2, pues

$$11 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0.$$

Notemos que el 5 no figura en la segunda tabla, pues su segunda cifra (en notación binaria) es 0. Por su lado, el 17 vuelve a aparecer en la quinta tabla, pues su quinta cifra (en el sistema binario) es 1.

Ahora, pongamos por caso, que el número elegido está en la Tabla 1, en la Tabla 3 y en la Tabla 5 (y sólo en esas tablas), se tiene que dicho número, en notación binaria, es el **10101**. Es decir, se trata del numeral decimal: $\mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$, o sea, el 21.

Y a fin de cuentas, si observamos los números que encabezan cada tabla, con la información exigida es inmediato el hallazgo del número elegido (¿Cómo?).

Capítulo 5

Un cuento con mucha “Lógica”

Malba Tahan (El hombre que contaba historias) en su libro “A Matemática na Lenda e na Historia”, nos presenta un bello relato (el cual reseñaré) sobre un sastre que quería saber lo que era “La Lógica”.

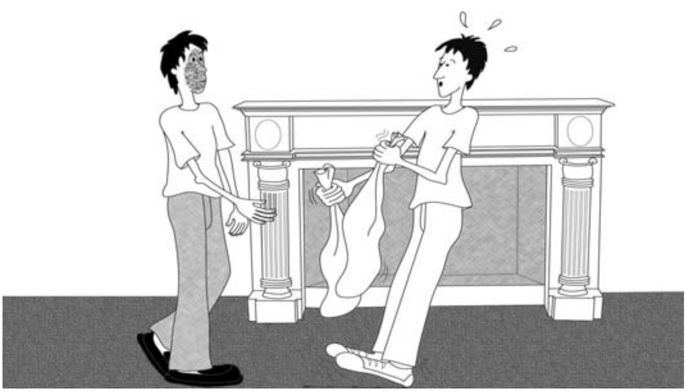
Aquel sencillo y honesto trabajador acudió a un vecino y viejo amigo, ilustre matemático, profesor, para que le aclarara sobre aquello que oía tanto, cuando sus clientes esperaban ser atendidos en su taller: que si esto no era lógico, que si la actitud de aquella autoridad no tenía ninguna lógica, etc. Era lógica por aquí y lógica por allá.

Al final, ¿qué era eso de La lógica?

Una vez planteada su inquietud, el sastre oyó algunas explicaciones: unas envolvían el nombre de Aristóteles; otras hablaban sobre el arte de orientar el pensamiento dentro de las normas exactas de la verdad convencional; también escuchó acerca de "la ciencia del razonamiento".

A pesar de todas esas aclaraciones, el profesor percibió, en el rostro de su amigo, las huellas de la insatisfacción. Entonces, decide contarle una historia que había oído hacía algún tiempo; eso sí, solicitándole mucha atención a cada detalle del siguiente relato:

"Hace muchos, muchos años, en un lejano reino vivía un hombre muy rico, cuya casa era una hermosa mansión, con la chimenea más bella de toda la comarca. Cierto día, dos ladrones deciden asaltar aquel palacio y entran por la chimenea. Al salir de ésta, uno de ellos estaba con la cara sucia, toda tiznada, mientras que el otro tenía su cara enteramente limpia. Enseguida avistaron una pila con bastante agua y jabón ".



- Mi pregunta es, querido amigo, ¿cuál de los ladrones se fue a lavar la cara en la pila? ¿El ladrón de la cara limpia o el ladrón de la cara sucia?

El sastre, sin titubear, respondió:

- ¡Está claro! Obviamente, el ladrón de la cara sucia.

- ¡Pues no! está usted muy engañado, dijo el profesor. Su respuesta no tiene soporte lógico. Veamos:
  El ladrón de la cara sucia viendo al compañero de la cara limpia, creyó que su cara también estaba limpia y no trató de lavarla. Mientras que, el otro, el ladrón de la cara limpia, al ver la cara sucia de su colega, quedó seguro, segurísimo, de que su cara también estaba sucia y corrió hacia la pila para lavarse la cara, ¿entendió?
  El sastre, risueño, respondió:

- Entendí perfectamente, Señor profesor. El ladrón de la cara limpia fue a lavarse la cara, pensando que la tenía sucia; el otro, de la cara sucia, pensó que su cara estaba limpia y no se dirigió hacia la pila de agua.

- Exactamente, completó el matemático. La Lógica consiste en eso. Hicimos un raciocinio sobre los dos asaltantes y, basados en ese razonamiento, descubrimos la verdad.
  El ladrón de la cara limpia fué, presuroso, a lavarse la cara. El otro, de la cara sucia, permaneció tranquilo observando.

Fue La lógica la que nos llevó a descubrir la verdad.

El sastre, ahora, quedó satisfecho y agradeció a su amigo por la sencilla y esclarecedora historia.

Sí, reconoció que fue precipitado al responder y no había aplicado "La Lógica".

Pero ... viéndolo bien ... con bastante frecuencia nos comportamos como lo hizo el sastre. Veamos un ejemplo.

Supongamos que nos solicitan seleccionar la afirmación falsa (si la hay) entre las siguientes:

(a) $e^{\pi i}$ es un número entero. (e, π, i son los famosos números que nos encontramos en cursos de Análisis).

(b) $2^5 \times \ 9^2 = 2592$.

(c) $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ es un número impar (para todo $n \geq 1$).

(d) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ es un número natural.

En cuanto a la afirmación (a), es cuestión de recordar la relación de Euler: $e^{\pi i} + 1 = 0$, para concluir que es verdadera.

En relación a la (b), enseguida verificamos que:

$$2^5 \times \ 9^2 = 32 \times 81 = 2592,$$

luego, también es cierta y ... curiosa... pues bastaba bajar los exponentes.

Con respecto a la (c), podemos verificar, rápidamente, los primeros casos: para $n = 1$, tenemos $1! = 1$ (impar); para $n = 2$, queda: $1! + 2! = 1 + 2 = 3$ (impar); para $n = 3$, resulta: $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$ (impar) ... Luego, percibimos, que la prueba de que (c) es verdadero se hace por inducción matemática. Pero ... lo afirmado en (d) ... ¡claro que tiene que ser falso! No nos parece que después de la presencia de esas raíces cuadradas, bajo las raíces cúbicas, el resultado final sea un número natural. Así que, esa suma de raíces cúbicas lo que nos proporciona, con certeza, es un número irracional. Mas ... veremos que se trata, de verdad, de un número natural.

En efecto: Sea $\alpha = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

¿Qué podemos decir de α?

Respuesta: α es un número real. De eso no queda duda. Pero, deseamos precisar más.

Podemos verificar que: $\alpha^3 - 6\alpha - 40 = 0$. O sea, α es raíz del polinomio $p(x) = x^3 - 6x - 40$.

Por otro lado, factorizando (aplicando la Regla de Ruffini) obtenemos:

$$p(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 10).$$

También, notemos que el polinomio $x^2 + 4x + 10$, no tiene raíces reales (su discriminante es -24).

Luego, 4 es la **única** raíz real de $p(x)$.

Como vimos α es real y raíz de $p(x)$. Entonces, $\alpha = 4$.

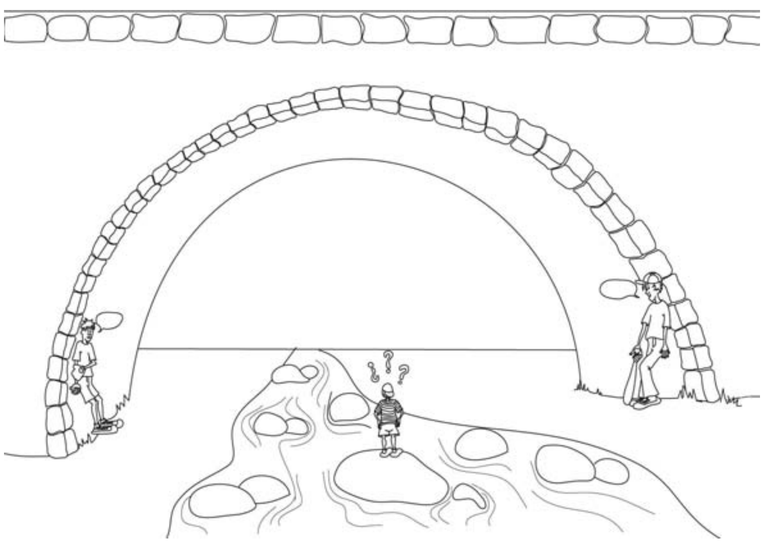
Conclusión: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

Así que (d) también es verdadera.

Capítulo 6

Dulces Recuerdos

6.1 Susurros bajo el puente



En el Norte de la Ciudad de Mérida (Venezuela) existe un lindo parque llamado "La Isla". En él podemos observar un hermoso puente sobre el río Milla. Hace algunas décadas, sin las actuales construcciones y barrios circundantes, la zona del citado parque era el lugar de esparcimiento de los muchachos de la Hoyada de Milla y regiones cercanas. Allí jugábamos fútbol, béisbol y nos bañábamos en las (otrora) cristalinas aguas del río Milla. Pero, además, había un entretenimiento, practicado sobre todo por los grandes, y que me dejaba la sensación de algo misterioso, a la vez que atrayente y divertido.

El entretenimiento consistía en lo siguiente: dos de los muchachos más altos, se colocaban de pié, en puntos estratégicos, separados algunos metros, frente a frente, bajo uno de los arcos del puente. Entonces comenzaban a hablar entre ellos, en voz susurrada; se percibía que la comunicación funcionaba, pero, aparte de aquellos dos, nadie más escuchaba lo que decían.

¿Cuál era la explicación de aquel enigma?

Una década más tarde, en un magnífico libro de Geometría, hallaría la aclaración del misterio.

El fundamento del juego está en la **propiedad reflectora de la elipse**, la cual estudiaremos en un momento. Esa misma propiedad explica el funcionamiento de diversos aparatos de emisión de rayos, usados en tratamientos médicos, como por ejemplo, el de radioterapia, cuyos rayos deben destruir los tejidos enfermos, sin afectar los tejidos sanos que se encuentran alrededor.

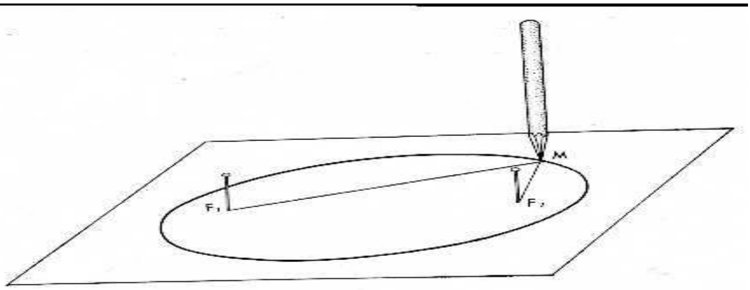
Recordemos que una elipse $*$ es una figura plana formada por aquellos puntos, tales que la suma de sus distancias a otros dos (fijos), llamados focos, es constante.

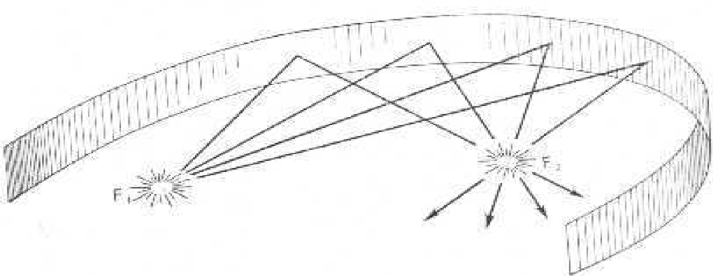
P

A' F' F A

0

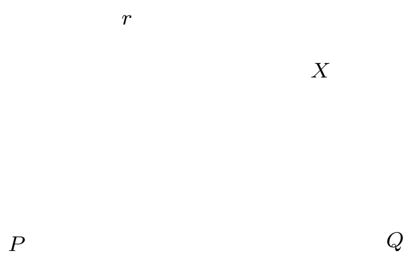
$*$ también llamada curva del jardinero.





Propiedad Reflectora de la Elipse

Sea E una elipse con focos P y Q. Tomemos un punto X en E. Entonces, la Recta r, tangente a E en X, forma ángulos iguales con los "rayos focales" $\overline{PX}$ y $\overline{QX}$.



Demostración: :

Consideremos dos leyes físicas sobre la reflexión. La primera dice que el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión, en un plano, son iguales. La otra ley establece que la reflexión en cada punto de una superficie se comporta como si fuese en el plano tangente a la superficie, en el respectivo punto.

Recordemos que, análogamente como en la circunferencia, una recta es tangente a la elipse si, y sólo si, tiene con ésta un solo punto en común.

Denotaremos la distancia entre dos puntos, R y S, por: $d(R,S)$.

Así, la elipse E es el lugar geométrico de los puntos X que satisfacen:

$$d(X, P) + d(X, Q) = K \quad \text{(constante)}.$$

Luego, un punto A no estará en la elipse, si, y sólo si,

$$d(A, P) + d(A, Q) \neq K.$$

De manera que una recta r será tangente a la elipse E en un punto X, si y sólo si, intersecta E en X y cualquiera que sea el punto A en r, $A \neq X$, se tenga:

$$d(A, P) + d(A, Q) \neq d(X, P) + d(X, Q).$$

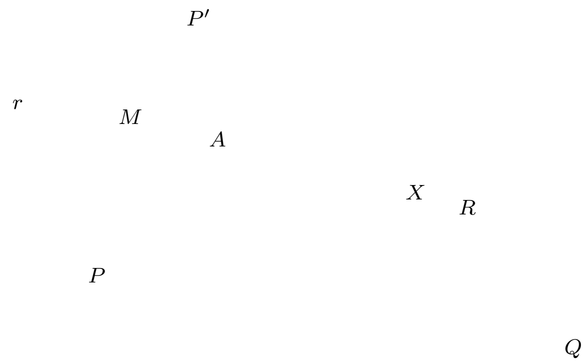
Sea, entonces, un punto X en la elipse E. Tomemos la recta r que es **bisectriz** de un **ángulo adyacente** al ángulo PXQ.

r X

P Q

Si probamos que r es tangente a E, en X, habremos demostrado la propiedad reflectora, debido a la unicidad de la tangente a la elipse por uno de sus puntos. (Notar que el ángulo entre $\overline{PX}$ y r es igual al ángulo entre $\overline{QX}$ y r) (1)

Tomemos, entonces, un punto A, en r, $A \neq X$. Sea P', el simétrico de P, respecto a r. La recta r es, entonces, la mediatriz de $\overline{PP'}$. Sea M el punto medio de $\overline{PP'}$.



Es inmediato que:

Los triángulos rectángulos XMP' y XMP son congruentes. En particular, los ángulos $P'XM$ y PXM son iguales. Esto, junto con (1) nos lleva a que:

Los ángulos $P'XM$ y RXQ son iguales.

Luego, P', X y Q están alineados.

Así:

$$K = d(X, P) + d(X, Q) = d(X, P') + d(X, Q) = d(P'Q).$$

De modo que:

$$K = \underbrace{d(P', Q) < d(P', A) + d(A, Q)}_{\text{(desigualdad del triángulo)}} = d(P, A) + d(A, Q).$$

Por lo tanto,

$$d(A, P) + d(A, Q) > K.$$

O sea, A **no** está en la elipse.

De manera que, X es el **único** punto de r que pertenece a la elipse.

Esto prueba que r es la recta tangente, en X, a la elipse.

Así, queda demostrada la propiedad reflectora de la elipse.

Está garantizado, entonces, que todo sonido emitido en uno de los focos se dirigirá, después de reflejarse en una pared “elíptica”, exactamente para el otro foco. Además, como la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos es constante, **todas** las ondas sonoras emitidas en uno de los focos, al reflejarse y llegar al segundo foco, habrán recorrido la misma distancia y, por eso, llegarán al mismo tiempo. Esto, sin duda, proporciona una ampliación natural del sonido. ¡Esa era la revelación del secreto!

¡Qué importante era esa bella forma del arco del puente!

6.2 Mi “maestro” de Matemática

Es con gran afecto, admiración y respeto que recuerdo a aquel gran maestro que nos abrió la puerta por donde entró la luz de los números y la Geometría. Tuvimos la suerte de tenerlo, por varios años, como nuestro profesor de Matemática, en el “Liceo Libertador” de Mérida. Se trata del profesor Juan Carlos Garbiso Valenzuela (cariñosamente conocido como el “Ché Garbiso”), admirable personalidad, de sólida formación humanística, excelente pedagogo y notable conferencista.

Como parte de su eximia labor docente estaba el hecho de que nos facilitaba libros que no los encontrábamos en nuestra Biblioteca y que él había traído de su querida Buenos Aires. Particularmente, recuerdo uno de Geometría Analítica (Cabrera-Medici), pues en él había un tema fascinante:

La localización por el sonido.

Si en puntos cualesquiera, A, B y C, se anotan los instantes t_A, t_B y t_C en que los observadores situados en esos puntos oyen la señal emitida por una fuente sonora S, en cierto instante t_0, resulta que, llamando v a la velocidad del sonido y teniendo en cuenta que éste se propaga, prácticamente, con movimiento uniforme,

$$|\overline{SA}| = v(t_A - t_0); \quad |\overline{SB}| = v(t_B - t_0) \ \text{ y } \ |\overline{SC}| = v(t_C - t_0).$$

Luego,

$$||\overline{SA}| - |\overline{SB}|| = |vt_A - vt_0 - vt_B + vt_0| = |v(t_A - t_B)|.$$

Como v, t_A y t_B son constantes, resulta que $||\overline{SA}| - |\overline{SB}||$ es constante.

Es decir, S pertenece a la hipérbola de focos A y B, con una distancia entre sus vértices igual a $|v(t_A - t_B)|$.

En forma similar, se llega a que S pertenece a la hipérbola de focos B y C, cuya distancia entre sus vértices es $|v(t_B - t_C)|$.

Así, examinando los puntos de intersección de las hipérbolas citadas se consigue la ubicación de S.

Ahí están los fundamentos físicos y geométricos utilizados para determinar la posición S de un cañón oculto, registrando los tiempos t_A, t_B y t_C en que se oye, en las estaciones A, B y C, el disparo efectuado en el instante t_0, o la posición de un barco S, registrando en él el tiempo en que se oyen las señales radiotelegráficas emitidas por las estaciones A, B y C, y buscando los puntos de intersección de las hipérbolas antes mencionadas.

S

$V(t_A - t)$ $V(t_C - t)$

A $V(t_A - t_B)$ B $V(t_B - t_C)$ C

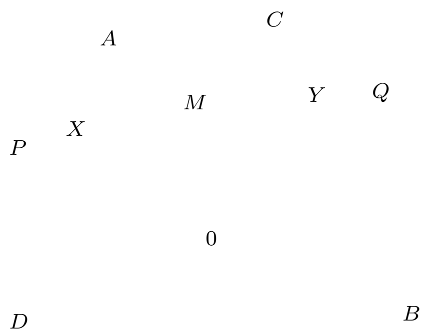
Como vimos, ¡éste ha sido el capítulo de la nostalgia!

Nota: No es indispensable que A, B y C estén alineados.

Apéndice

a) Teorema de la Mariposa

A través del punto medio M, de una cuerda $\overline{PQ}$, en una circunferencia dada, son trazadas otras cuerdas: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ intersectan $\overline{PQ}$, en X e Y respectivamente. Entonces: M es el punto medio de $\overline{XY}$.

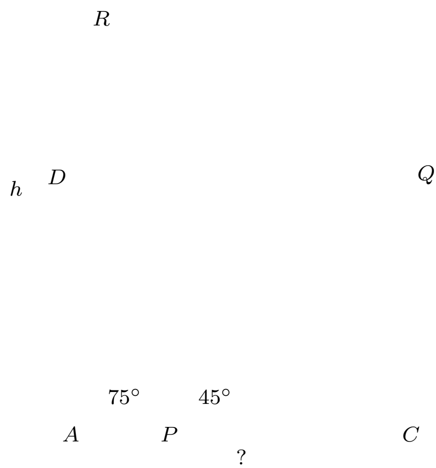


Demostración: : Ver [3].

b)

R 1 El problema de la escalera.

Solución:



Sea la longitud de la escalera igual a m.

Tenemos que

$$\sphericalangle\ RPQ = 60°. \tag{1}$$

Como $RP = PQ = m$, el $\triangle RPQ$ es isósceles. Esto, junto con (1), implica que el $\triangle RPQ$ es equilátero.

Entonces, como $\sphericalangle\ DRP = 15°$, resulta que $\sphericalangle\ DRQ = 75°$ (D es la proyección ortogonal de Q sobre $\overline{AR}$).

Luego, al comparar los triángulos rectángulos: QDR y PAR, obtenemos que ellos son congruentes (Sus hipotenusas tienen longitud m y $\sphericalangle\ DRQ = \sphericalangle\ APR = 75°$).

En particular, $DQ = RA = h$.

Pero $DQ = AC$.

Conclusión: el ancho del callejón es h.

c) ¿Cuál es el número faltante?

10	11	12
13	14	15
21	23	?

(recorrido de la tabla)

$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$

$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$

$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$

Solución:

Focalicemos nuestra atención en el cambio ocurrido al pasar de la sexta casilla a la siguiente. Vamos a aprovechar, entonces, que 15 es la expresión de n en la base $n-5$, mientras que 21 lo es en la base $n-6$.

O sea:

$$\begin{aligned} n &= \mathbf{1}(n-5)^1 + \mathbf{5}(n-5)^0 \\ n &= \mathbf{2}(n-6)^1 + \mathbf{1}(n-6)^0 \end{aligned}$$

Al igualar los segundos miembros obtenemos:

$$n - 5 + 5 = 2n - 12 + 1.$$

Luego, $n = 11$.

Así que, la tabla indica la expresión del 11 en la base 11, la expresión del 11 en la base 10,.., la expresión del 11 en la base 3.

Como

$$11 = \mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{0} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^0 \quad ,$$

el número buscado es el 102.

d) En este apartado quiero reseñar una historia del capítulo 1, del libro: Um, dois, três ... infinito, cuyo autor es George Gamow (la traducción al Portugués es de Waltensir Dutra, perteneciente a la colección Biblioteca de Cultura Científica de Zahar Editores, Rio Janeiro, 1962).

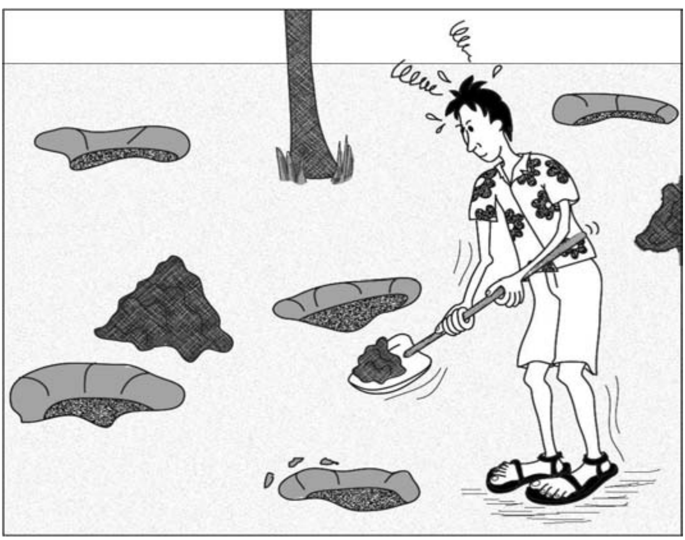
Una vez un joven aventurero encontró entre los papeles de su bisabuelo un pedazo de pergamino en el cual se revelaba la localización de un tesoro oculto.
En las instrucciones se decía cómo llegar a cierta isla desierta.
Luego se hablaba de la existencia, allí, de un gran campo abierto en la costa sur, donde se podían avistar un roble y un pino, solitarios. También, se encontraría una vieja horca, en la cual eran colgados, antiguamente, los traidores.

Para hallar el tesoro, se debía proceder así:
“Partiendo de la horca, caminar en dirección al roble, contando los pasos. En el roble, girar a la derecha 90 y dar el mismo número de pasos. Colocar, entonces, una marca en el suelo. Regresar a la horca y caminar hasta el pino, contando los pasos. En el pino, rotar a la izquierda, un ángulo recto, y dar el mismo número de pasos, colocando, al final del recorrido, otra marca en el suelo.

Cavar en el punto medio del segmento determinado por las dos marcas. Ahí está el tesoro".

Sí, las instrucciones eran bastante claras. El joven alquiló un navío y muy contento se dirigió hacia la isla del tesoro. Allí encontró el campo, el roble, el pino, pero ... la horca había desaparecido. Ni trazos de ella.

Primero fue la sensación de tristeza, luego, de desespero y rabia. Comenzó a cavar por todo el campo, pero sus esfuerzos fueron inútiles, la isla era muy grande. Total ... regresó con las manos vacías. Sin embargo, nuestro joven pudo haber localizado el tesoro ... utilizando un poco de Matemática (Solución: en la parte (i) de este Apéndice)



e)

R 2 (Solución)

C

P

N O

A M B

Llamemos N, M y P a los puntos de contacto (de la circunferencia inscrita) con los lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
Como las tangentes a una circunferencia, desde un punto exterior al círculo encerrado, tienen la misma longitud, resulta:

$$CN = CP = m\ ,\quad PB = MB = n\ ,\quad AN = AM.$$

Además, el cuadrilátero $AMON$ es un rectángulo (¿por qué?).
Entonces, por la última igualdad, $AMON$ es un cuadrado (cuyo lado es el radio r de la circunferencia inscrita del triángulo rectángulo BAC).
Luego, tenemos la figura:

$m+n$

$m+r$

$r+n$

Por el Teorema de Pitágoras,

$$(m+r)^2 + (r+n)^2 = (m+n)^2.$$

O sea,

$$r(m+n+r) = mn. \qquad (2)$$

Sabemos que: $m \cdot n = 60$ y $m+n+r = 20$.

Así que, (2) se convierte en:

$$20r = 60\ ,$$

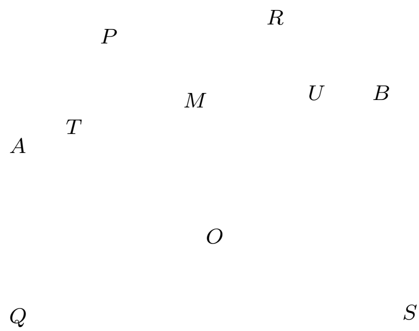
lo cual da $r = 3$.

Por lo tanto, obtenemos: $\begin{cases} m+n = 17 \\ m \cdot n = 60. \end{cases}$

Resolviendo el sistema, llegamos a que $m = 5$; $n = 12$ ó $m = 12$; $n = 5$. De modo que los lados del $\triangle BAC$ miden: $8cm$, 15 cm y 17 cm

f)

R 3 (Solución)



Por el **teorema de la mariposa** (ver (a), en este Apéndice), resulta que M es el punto medio de $\overline{TU}$.

Como, además, M es el punto medio de $\overline{AB}$, concluimos que: $\overline{AT}$ y $\overline{UB}$ tienen la misma longitud.

Por otro lado, los triángulos rectángulos OMT y OMU son congruentes (¿Por qué?).

En particular, $\overline{OT}$ y $\overline{OU}$ tienen igual longitud.

Además, $OA = OB =$ radio de la circunferencia.

En resumen, los triángulos AOT y UOB son congruentes (criterio del Lado-Lado-Lado).

Así, $\measuredangle\, UOB = \measuredangle\, AOT = 15°$.

g)

R 4 (Solución).

En este problema son claves las **relaciones de Girard**.

Girard Albert fué un matemático Holandés (1595-1634). En su obra **Invention nouvelle en Algébre**, Amsterdam, 1629, enuncia, sin demostrarlo, el teorema fundamental del Algebra y, entre otras cosas, establece las relaciones entre las raíces y los coeficientes de la ecuación $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es el polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$.
Llamando $r_1, r_2, \ldots, r_n$ a las raíces de la ecuación $p(x) = 0$, **las relaciones de Girard**, dicen que:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \cdots + r_{n-1} r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_1 r_2 r_3 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Observación 1 : estas relaciones pueden obtenerse, usando la identidad

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n) \; .$$

En el caso concreto de los distraídos amigos, tenemos:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = -a \tag{3}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = b \tag{4}$$

$$r_1 r_2 r_3 = -c \tag{5}$$

Para hallar a, emplearemos la solución obtenida por Daniel.

Según (3), obtenemos:

$$(-1) + (-2) + 6 = -a.$$

Luego, $a = -3$.

De acuerdo a (4) y la respuesta de Diego, se sigue:

$$(-1)(-2) + (-1)0 + (-2)0 = b.$$

Así, $b = 2$.

Finalmente, (5) y las raíces halladas por Dionisio, nos dan:

$$5 \times 6 \times 0 = -c.$$

De manera que, $c = 0$.

Por lo tanto, se tiene que:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

O sea, $p(x) = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-2)(x-1)$.

Por lo tanto, las soluciones del problema son: 0, 2, 1.

h) La Tierra y el balón de fútbol. (Solución)

Dejándonos guiar por nuestra intuición, simplemente afirmaríamos: "¡Es obvio que entre el balón de fútbol y su nuevo aro habrá mayor separación que entre la tierra y su, respectivo, nuevo aro!" En efecto, si pensamos en el perímetro del Ecuador terrestre (aproximadamente 40.000 kilómetros), un solo metro resulta tan insignificante, que su añadidura pasará completamente desapercibida; en cambio, un metro, agregado a la longitud del ecuador del balón, será muy perceptible. Sin embargo, veamos el siguiente análisis: consideremos dos circunferencias **concéntricas**, de radios R y r, respectivamente, tales que $R > r$ y la longitud de la circunferencia de radio R es igual a **1** más la longitud de la circunferencia de radio r

O sea,

$$2\pi R = \mathbf{1} + 2\pi r \tag{6}$$

r

R

De (6) obtenemos,

$$R - r = \frac{1}{2\pi}. \tag{7}$$

Pero (7) significa que, **en cada caso**, la **holgura** (separación) entre los aros respectivos, es la misma: $\frac{1}{2\pi}$.

¡Sorprendente resultado!

i) Sobre la historia (d), en este Apéndice.

Solución.

Vamos a ver que la ubicación del tesoro es **independiente** de la posición de la horca. Así que, asumiendo una colocación cualquiera para esta última y siguiendo las instrucciones, se llegará al sitio en el cual hay que excavar.

M_1

T (*tesoro*)

H (*horca*) M_2

A R (*roble*) M B P (*pino*) C

Sean A, M, B y C, las proyecciones ortogonales (sobre la recta determinada por R y P) de M_1, T, H y M_2, respectivamente. Resulta que $\overline{AM_1}$, $\overline{MT}$ y $\overline{CM_2}$ son paralelos entre sí (¿por qué?). Así que, usando el **Teorema de Tales** concluimos que: como T

es el punto medio de $\overline{M_1M_2}$, entonces M es el punto medio de $\overline{AC}$. (8)

Por otro lado, notemos que

$\sphericalangle\ BPH + \sphericalangle\ M_2PC = 90°$.

Luego, los ángulos BHP y M_2PC son congruentes. En consecuencia, los triángulos rectángulos: HBP y PCM_2, son congruentes (¿por qué?).

En particular,

$$PC = HB\ . \tag{9}$$

Análogamente, al comparar los triángulos rectángulos:

RBH y RAM_1, obtenemos que ellos son congruentes.

Así,

$$HB = AR\ . \tag{10}$$

De (9) y (10) deducimos que

$$AR = PC.$$

De modo que, usando esta última igualdad y (8), concluimos que M es el punto medio de $\overline{RP}$.

En otras palabras, T **está en la mediatriz de** $\overline{RP}$.

Sólo nos falta averiguar la distancia de T a M.

Sean:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{k} & : & \text{la longitud de } \overline{M_2C}, \\ \text{d} & : & \text{la distancia de } R \text{ a } P, \\ \text{h} & : & \text{la distancia de } T \text{ a } M \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Llamemos:

$$\begin{array}{lcl} \text{Q} & : & \text{a la proyección ortogonal de } T \text{ sobre} \overline{AM_1} \\ \text{W} & : & \text{a la proyección ortogonal de } M_2 \text{ sobre} \overline{MT} \end{array}$$

De la congruencia citada, de los triángulos HBP y PCM_2, se sigue que:

$$\text{la distancia de } B \text{ a } P \text{ es } k \qquad (12)$$

En forma similar, como los triángulos rectángulos RBH y RAM_1 son congruentes, se tiene:

$$\text{longitud de } \overline{AM_1} = \text{ longitud de } \overline{RB} \qquad (13)$$

Además, los triángulos rectángulos: TQM_1 y M_2WT, también, son congruentes (¿por qué?). Esto, junto con (11), nos lleva a:

$$\text{la longitud de } \overline{QM_1} = \text{ longitud de } \overline{WT} = h - k$$

M_1

Q T

W H M_2

A R M B P C
$(roble)$

Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} \text{Longitud de } \overline{AM_1} &= \text{Longitud de } \overline{AQ} + \text{Longitud de } \overline{QM_1} \\ &= h + h - k = 2h - k. \end{aligned}$$

De manera que, usando (13), llegamos a:

$$\text{Longitud de } \overline{RB} = 2h - k. \tag{14}$$

Pero de (11) y (12), se sigue:

$$\begin{aligned} \text{Longitud de } \overline{RB} &= \text{Longitud de} \overline{RP} - \text{Longitud de } \overline{BP} \\ &= d - k. \end{aligned} \tag{15}$$

Luego, de (14) y (15), conseguimos:

$$2h - k = d - k\ .$$

O sea, $h = \dfrac{d}{2}$.

Conclusión: para hallar el tesoro se debe excavar en un punto T que está en la mediatriz de $\overline{RP}$, hacia el Norte, a una distancia igual a la mitad de la longitud de $\overline{RP}$.

Observación 2 Notar que la ubicación de T sólo depende de las posiciones de R y P.
Otra de las características del problema planteado es que él puede enfocarse, también, vectorialmente o con los recursos de la Geometría Analítica. Inclusive, se puede usar la teoría de los números complejos (ver[18]).

Bibliografía

[1] Alejandra Vallejo-Nágera. ¿Odias las Matemáticas?. Ediciones Martínez Roca.

[2] Carlo Frabetti. El Libro del genio matemático. Ediciones Martínez Roca.

[3] Coxeter-Greitzer. Geometry Revisited. The Mathematical Assocciation of America.

[4] E.S. Cabrera - H.J. Medici. Geometría Analítica Librería del Colegio. Buenos Aires.

[5] Johnson, Glenn, Norton y García. Explorando la Matemática. Tomos I y II. McGraw-Hill Book Company.

[6] Jurgensen, Donnelly, Dolciani. Geometría Moderna. Estructura y Méto do. Publicaciones Cultural, S.A.

[7] Malha Tahan. A Matemática na Lenda e na Historia.

[8] Malha Tahan . As maravilhas da Matemática.

[9] Malha Tahan. Novas Lendas Orientais.

[10] Moise - Downs. Geometría Moderna. Addison - Wesley Iberoamericana.

[11] Mathematical Association of América. Concursos de Matemáticas: Geometría. Algebra; Teoría de Números; Trigonometría; Temas diversos. Euler Editorial .

[12] Sociedad Brasileira de Matemática. Revista do Professor de Matemática. Números: 6, 8, 11, 14, 21, 35, 36.

[13] Theoni Pappas. El encanto de la Matemática.

[14] Theoni Pappas. La Magia de la Matemática. Zugarto Ediciones.

[15] Thomas - Finney. Cálculo (Varias Variables). Addison Wesley Longman.

[16] Th. Caronnet. Exercises de Geométrie. Librairie Vuibert.

[17] Vera Francisco. Matemática. Edit. Kapelusz.

[18] George Gamow. um, dois, três... infinito. Zahar Editores. Rio de Janeiro.

[19] Sherman K. Stein. Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill.

[20] Revista Ciencia e Ingeniería. N° 8. Publicación de la Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. Mérida. Venezuela.

[21] Biblioteca de Trabajo Venezolana. N° 55. Juegos Matemáticos.

[22] Larson - Hostetler - Edwars. Cálculo. Volumen 2. McGraw-Hill.

Unidad de Publicaciones del Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Mérida - Venezuela
2003