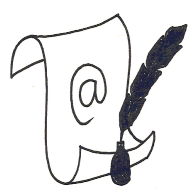
SERIES CONVERGENTES

Fernando Mejías

SERIES CONVERGENTES

Para mis hermanas y hermanos



El manuscrito fue procesado utilizando LaTeX2$_\varepsilon$, es decir, básicamente LaTeX con algunos "macros" especiales de $\mathcal{AMS}$-LaTeX. La fuente principal del texto es New Baskerville, una variante moderna (y ligeramente menos estilizada) de la clásica Baskerville, pero para resaltar la naturaleza clásica del material de las traducciones se usa una combinación de Bookman Old Style y *Book Antigua*. Las fuentes matemáticas principales son *Math Time Professional II* ("lite") de Publish or Perish, Inc.
Cualquier crítica, comentario, sugerencia y/o reporte de errores (de imprenta o de contenido) será apreciado y puede ser enviado al autor vía correo electrónico a la siguiente dirección: fmejias@ula.ve

PREFACIO

Este libro fue concebido originalmente como un (pequeño) manual auxiliar sobre series para estudiantes de Cálculo; posteriormente la idea fue evolucionando y ampliando las perspectivas para ofrecer al lector una visión general sobre el tema y sus relaciones con otros en Análisis.

El libro se inicia con un capítulo introductorio (aunque no prescindible) sobre sucesiones para pasar inmediatamente al estudio de las series propiamente dichas, primero hacia series numéricas y luego series de funciones.

En cada capítulo se presentan los conceptos y resultados fundamentales ilustrados con ejemplos de casos particulares. Los teoremas y los ejemplos están enumerados en forma consecutiva. Para enfatizar la diferencia teórica, el final de la demostración de cada teorema se indica con el "símbolo" ▮, mientras que para los ejemplos se usa un "cuadrado vacío" □.

Como parte integral del estudio se presentan conjuntos de problemas que permiten al lector poner a prueba la asimilación de cada uno de los contenidos. Casi todos los problemas y los ejemplos son tomados de los excelentes libros *Calculus* (volumen 1) por T. Apostol y *Calculus* por M. Spivak, lo cual de alguna forma indica el nivel de dificultad. Algunos problemas están divididos en partes, en algunos casos éstas se señalan con números y en otros con letras del alfabeto latino para indicar que los primeros ponen a prueba la "destreza operatoria" mientras que los segundos son de naturaleza teórica, probablemente de interés para estudiantes de Matemáticas que se preparan para cursar estudios de Análisis Real. En todo caso esta nomenclatura no debe interpretarse como un indicador del nivel de dificultad de los problemas, para lo cual presentamos un sistema de indicaciones con uno y dos asteriscos. En general, el instructor debe hacer una selección adecuada para sus estudiantes. Al final se encuentran las soluciones de algunos de los problemas.

Otro aspecto que se debe mencionar es la incorporación de algunas notas históricas que complementan las traducciones de trabajos originales sobre series de Isaac Newton, Leonhard Euler y Neils Henrik Abel. El estudio de este material es altamente recomendado, no solamente por su valor técnico, sino porque ayuda a formar una idea acerca de la evolución del concepto de serie desde los primeros trabajos; después de todo, muchas de las más elaboradas teorías y técnicas matemáticas de la actualidad tienen sus raíces en las obras de estos tres científicos. Estas lecturas están complementadas con una *Reseña Bibliográfica* que pretende servir de guía al estudiante para profundizar en los temas tratados, buscar problemas y ejercicios adicionales y explorar algunas de las aplicaciones del tema en otras áreas de las Matemáticas.

Para concluir, quiero reconocer el aporte de todas las personas e instituciones que han colaborado para la producción de este libro. Los profesores Roy Quintero, Edgar Rosales y Wilfredo Zuleta del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" leyeron una de las primeras versiones e hicieron varias recomendaciones valiosas; algunas conversaciones con los profesores Armando Montilla y José Romano, así como con otros amigos también han servido de apoyo y estímulo, y ayudado a mejorar la presentación. Nárviz Mejías ayudó a corregir numerosos errores de imprenta. La mayor parte de soluciones a los problemas "de cálculo" que aparecen al final del libro son obra de mi hija Ixhel quien los resolvió cuando estudiaba el tema en un curso de Cálculo (la tarea mía en este particular ha sido principalmente agregar el componente didáctico, es decir, resumir las soluciones originales suprimiendo la mayor parte de los detalles). La Comisión de Desarrollo del Pregrado de la Universidad de Los Andes ha contribuido gentilmente para que el conjunto de notas se convierta en un libro. Finalmente, después de indicar que, por supuesto, todos los errores e imperfecciones que aún quedan son mi responsabilidad, deseo expresar a todos mi agradecimiento sincero.

Universidad de Los Andes
Núcleo Universitario "Rafael Rangel"
Trujillo, Jueves, 21 de Abril de 2011

FERNANDO MEJÍAS

TABLA DE CONTENIDO

SERIES CONVERGENTES

Las series divergentes son un invento del demonio, y es vergonzoso basar sobre ellas cualquier demostración.

NIELS HENRIK ABEL

CAPÍTULO 1

SUCESIONES INFINITAS

Es digno de ser meditado el hecho de que, cada vez que es posible, el hombre elimina apresuradamente el infinito… La matemática moderna exhibe una considerable variedad de infinitos… Desde luego, todos son inintuibles y jalonean el creciente alejamiento entre el mundo sensible y el mundo matemático.

ERNESTO SÁBATO

El objetivo primordial de este libro es establecer formalmente la noción de "suma infinita" (es decir, una suma con infinitos términos) y explorar sus propiedades; para lograr esta meta, debemos dar un paso preliminar que consiste en arreglar los supuestos infinitos términos, poniéndolos en forma ordenada, algo así como $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Éste es el punto al que se dedica el presente capítulo.

Aproximación de Funciones por Polinomios

En algunos casos resulta muy difícil o tal vez imposible determinar el valor $f(x)$ de una función dada en un punto x y por tanto es deseable disponer de un mecanismo que permita hacer una estimación de tal valor. Uno de esos mecanismos es aproximar la función f por un polinomio, ya que sus imágenes son fáciles de calcular. Una forma de abordar esta tarea es particularmente sencilla cuando la función f posee derivadas de orden n en un intervalo $\mathcal{I}$ que contenga a un punto a, en este caso tenemos el *polinomio de Taylor de grado n y centrado en a para f* definido para todo $x \in \mathcal{I}$ por

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

El nombre de este polinomio fue establecido en honor al matemático inglés Brook Taylor quien contribuyó al progreso y la difusión de las ideas originales del Cálculo de acuerdo a la escuela de Isaac Newton.

En general existe una diferencia o *resto* $R_{n,a}(x)$ entre $f(x)$ y $P_{n,a}(x)$:

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Así, lo buena o mala que pueda ser la aproximación de $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$ depende de lo pequeño que resulte ser $R_{n,a}(x)$.

Desarrollando el polinomio de Taylor para las funciones sen, cos, exp, log y arctg tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n,a}(x),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n,0}(x),\\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x),\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_{n,1}(x),\\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{n,0}(x).
\end{aligned}$$

Un teorema clásico en Análisis provee formas de estimar $R_{n,a}(x)$ a partir de información sobre f.

TEOREMA 1 (TEOREMA DE TAYLOR) *Sea f una función tal que las derivadas $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre un intervalo $[a, x]$ y $R_{n,a}(x)$ está definido por*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a}(x).$$

Entonces

(1) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi)^n (x-a)$ *para algún* $\xi \in (a, x)$.

(2) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *para algún* $\xi \in (a, x)$.

Además, si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a, x]$, entonces

(3) $R_{n,a}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x-\xi)^n \, dx.$

La ecuación (1) es conocida como la forma de Cauchy para el resto, mientras que la ecuación (2) se denomina la forma de Lagrange y la ecuación (3) es la forma integral.

En muchos casos resulta que $R_{n,a}(x)$ es razonablemente pequeño para valores grandes de n y la idea general es que la aproximación tiende a mejorar en la medida en que el grado del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ aumenta. Aunque este fenómeno no ocurre siempre, dentro de este esquema de ideas surge la pregunta ¿cuál será la mejor aproximación posible? y una respuesta ingenua e interesante sería si podemos plantear una "suma infinita" de la forma

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

Por ejemplo en la lista de igualdades presentadas arriba, si asumimos que en todos los casos el resto tiende a 0 cuando n es muy grande, entonces obtendríamos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,\\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.
\end{aligned}$$

De ser ciertas estas fórmulas, entonces tenemos algunas igualdades muy interesantes, asignando algunos valores especiales a x, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
0 &= \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots,\\
0 &= 1 - \frac{\pi^2}{2^2 2!} + \frac{\pi^4}{2^4 4!} - \frac{\pi^6}{2^6 6!} + \cdots,\\
e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,\\
\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,\\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.
\end{aligned}$$

Aunque estas ideas resultan plausibles y sobre todo muy atractivas, todas tienen un gran defecto y es que la adición de números reales es una operación binaria, es decir podemos sumar solamente dos números reales a la vez y por un proceso de inducción podemos definir la suma de una colección *finita* de números, pero por esa vía no podemos llegar a definir y trabajar con "sumas infinitas". Y es que la noción no es tan sencilla como pudiera parecer en una primera mirada. Consideremos por ejemplo la "suma infinita"

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

donde los términos son sucesivamente 1 y -1. Si una suma infinita ha de tener sentido uno esperaría que se cumpla la "ley asociativa", es decir que si uno agrupa unos sumandos esto no debe alterar el valor del resultado. Pero observemos que tenemos:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1,$$

mientras que por otro lado

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$$

lo cual resulta ser contradictorio, y por tanto debe ser evitado. El resto de este pequeño libro es una exposición del desarrollo de la teoría de "sumas infinitas" de la forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

pero para ello debemos primeramente enfocar nuestra atención hacia la colección infinita misma de elementos que queremos "sumar".

Sucesiones

Una **sucesión (infinita)** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido es un subconjunto de $\mathbf{R}$. La convención usual indica que una sucesión a se debe denotar por $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ y que el valor de a en un número $n \in \mathbf{N}$ (el *término n-ésimo*) por $a(n)$, pero la tradición ha llevado a hacer casi universal otra notación, en la que escribimos a_n en lugar de $a(n)$ y la sucesión misma se denota por $\{a_n\}$.

Por supuesto, es posible considerar sucesiones finitas, para lo cual es suficiente hacer una ligera modificación a la definición anterior, sin embargo este concepto no tiene mucha importancia pues lo interesante de una sucesión $\{a_n\}$ es su comportamiento para valores muy grandes de n. Por este motivo tenemos que la representación gráfica usual de funciones resulta poco interesante cuando se trata de sucesiones pues no ilustra lo que ocurre a la mayor parte de los términos.

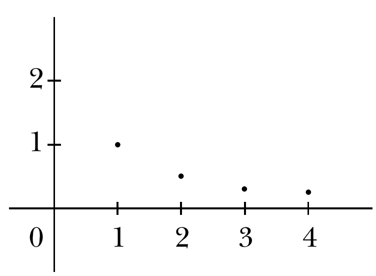


FIGURA 1.1 (a)

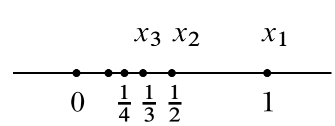


FIGURA 1.1 (b)

Por ejemplo, en la Figura 1 (a) se muestra la representación gráfica usual de la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = 1/n$. Para mejorar esta situación se ha diseñado un sistema de representación gráfica que se aplica exclusivamente a estas funciones y que suele ser más ilustrativo (Figura 1(b)).

La sucesión $\{x_n\}$ tiene un comportamiento interesante para valores grandes de n: el hecho de que sus términos tienden a acumularse en torno a un punto dado (específicamente al 0). En general decimos que una sucesión $\{a_n\}$ **converge hacia el límite** λ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo n, si $n \geq N$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$ (también decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **convergente**, Figura 2). En este caso escribimos $a_n \to l$ cuando $n \to \infty$ o simplemente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Si $\{a_n\}$ no converge, decimos que **diverge** o que es **divergente**. Notemos que si la sucesión $\{a_n\}$ diverge significa que para todo número real l existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo número natural N existe un $n \geq N$ tal que $|a_n - l| \geq \varepsilon$.

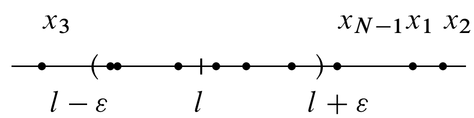


FIGURA 2.

A continuación presentamos un resultado que establece la unicidad del límite de una sucesión convergente, un hecho que es bastante evidente y sirve como un ensayo para el uso del concepto de convergencia.

TEOREMA 2 *Si la sucesión $\{a_n\}$ converge hacia l y también converge hacia m, entonces $l = m$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $l \neq m$ y consideremos $\varepsilon = |l - m|/2$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ tenemos que existe un $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que para todo n, si $n \geq N_1$ se cumple que

$$|a_n - l| < \frac{|l - m|}{2}.$$

Análogamente, existe un número natural N_2 tal que para todo n, si $n \geq N_2$ se cumple que

$$|a_n - m| < \frac{|l - m|}{2}.$$

Luego, si tomamos $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ tenemos

$$|l - m| = |l - a_n + a_n - m| \leq |a_n - l| + |a_n - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|,$$

lo cual es una contradicción. ∎

EJEMPLO 3 Si $x_n = 1/n$ para todo n, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Este resultado es una consecuencia de la propiedad arquimediana de los números reales (ver Problema 20) que establece que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por tanto tenemos que para todo número natural n, si $n \geq N$ se cumple que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \square$$

EJEMPLO 4 Supongamos que $y_n = (-1)^{n+1}$ para todo n, entonces $\{y_n\}$ diverge. Notemos que si $l > 1$ podemos tomar $\varepsilon = l - 1$ y entonces resulta que para todo n se cumple $|y_n - l| \geq \varepsilon$. Análogamente si $l < -1$, es suficiente tomar $\varepsilon = -1-l$. Si $-1 < l < 1$ entonces podemos considerar $\varepsilon = \min(1-l, l+1)$. Si $l = -1$ basta tomar $\varepsilon = 1$ para ver que $|y_{2n+1} + 1| > \varepsilon$. Finalmente, si $l = 1$, entonces con $\varepsilon = 1$ tenemos $|y_{2n} - 1| > \varepsilon$. $\square$

A continuación presentamos otro ejemplo acerca de una sucesión divergente pero cuyo comportamiento es totalmente distinto al de la sucesión descrita en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Supongamos que $z_n = n$ para todo n, entonces $\{z_n\}$ diverge y escribimos $z_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Como en el caso de límites de funciones en un punto, existe un teorema sobre el "álgebra de límites de sucesiones" que facilita la tarea de hacer cálculos. La semejanza entre estos resultados no es casual, en efecto la demostración es prácticamente la misma, sobre todo si utilizamos el siguiente lema tomado de *Calculus* por Spivak (referencia [1] de la *Reseña Bibliográfica*, p. 101).

LEMA *(1) Si*

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

(2) Si

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

entonces

$$|xy - x_0 y_0| < \varepsilon.$$

(3) Si $y_0 \neq 0$ *y*

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ *y*

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Ahora tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6 *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes tales que* $a_n \to l$ *y* $b_n \to m$ *cuando* $n \to \infty$. *Entonces las sucesiones* $\{a_n + b_n\}$ *y* $\{a_n \cdot b_n\}$ *también convergen y*

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m$,

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m$.

Además si $m \neq 0$, *entonces la sucesión* $\{a_n/b_n\}$ *también converge y tenemos*

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{l}{m}$.

DEMOSTRACIÓN (1) Para cualquier $\varepsilon > 0$ existen dos números naturales N_1 y N_2 tales que para todo n

$$\text{si } n \geq N_1, \text{ entonces } |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{y si } n \geq N_2, \text{ entonces } |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces si $N = \max(N_1, N_2)$ y $n \geq N$, tenemos que

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego, por el Lema (1) tenemos que

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon.$$

(2) Dado $\varepsilon > 0$ existen dos números naturales N_1 y N_2 tales que para todo n

$$\text{si } n \geq N_1, \text{ entonces } |a_n - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$
$$\text{y si } n \geq N_2, \text{ entonces } |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Entonces si $N = \max(N_1, N_2)$ y $n \geq N$, tenemos por el Lema (2)

$$|a_n - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}\right) \qquad \text{y} \qquad |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Luego, el Lema (2) implica que

$$|a_n b_n - lm| < \varepsilon.$$

(3) Es suficiente demostrar que la sucesión $\{1/b_n\}$ converge hacia $1/m$; pero existe un detalle que conviene aclarar: el hecho de que $b_n \to m \neq 0$ cuando $n \to \infty$ no garantiza que $1/b_n$ esté definido para todo n, en efecto, es fácil dar un ejemplo donde este fenómeno se presente. Sin embargo, resulta que si $b_n \to m \neq 0$ entonces existe solamente una cantidad finita de valores de n para los cuales $b_n = 0$ (esta es una consecuencia de la primera parte del Lema (3)).

Por tanto b_n puede ser nulo solamente para algunos de los números $1, 2, \ldots, N-1$. En este caso podemos trabajar con una nueva sucesión c_n la cual converge hacia m y $c_n \neq 0$ para todo n definida así $c_n = b_{N-1+n}$. Comúnmente este procedimiento se considera como algo puramente formal y se trabaja directamente con la sucesión $\{b_n\}$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo n

$$\text{si } n \geq N, \text{ entonces } |b_n - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon|m|^2}{2}\right).$$

Entonces, por el Lema (3) queda que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

La diferencia de comportamiento entre las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ de los Ejemplos 4 y 5 ilustra un punto sutil que determina una característica muy importante de las sucesiones convergentes. Notemos que el conjunto de términos de la sucesión $\{z_n\}$ *no* está acotado, es decir no es posible encontrar dos números $a, b \in \mathbf{R}$, tales que $z_n \in (a, b)$ para todos los números n, mientras que el conjunto de términos de la sucesión $\{y_n\}$ si está acotado. En este último caso decimos que la sucesión está **acotada** y, resulta evidente que todas las sucesiones convergentes están acotadas, en efecto esta proposición se formaliza en el siguiente teorema.

TEOREMA 7 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\{a_n\}$ está acotada.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $a_n \to l$ cuando $n \to \infty$. Entonces tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de sucesión convergente tenemos que existe un número natural N tal que, para todo n, si $n \geq N$, entonces

$$|a_n - l| < 1,$$

luego

$$-1 < a_n - l < 1,$$

es decir

$$l - 1 < a_n < l + 1.$$

Por tanto, para todo $n \geq N$ tenemos que $a_n \in (l-1, \lambda+1)$. Por otro lado, el resto de los términos de la sucesión, a saber $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, constituyen una cantidad finita, entonces existe una intervalo abierto (u, v) que los contiene a todos. Finalmente, si consideramos $a = \min(u, l-1)$ y $b = \max(v, l+1)$ tenemos que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ están contenidos en el intervalo abierto (a, b). ▮

En algunos casos tenemos que el conjunto de los términos de una sucesión $\{a_n\}$ está acotado superiormente, entonces decimos que la sucesión está **acotada superiormente** y si tal conjunto está acotado inferiormente decimos que la sucesión está **acotada inferiormente**. Por tanto, una sucesión está acotada si y sólo si está acotada tanto superior como inferiormente.

Notemos que el Teorema 7 es equivalente a la siguiente proposición: *si una sucesión $\{a_n\}$ no está acotada, entonces la sucesión es divergente.*

Concluimos esta sección con un resultado muy importante que depende de la completitud del sistema de los números reales y para el cual necesitamos unas definiciones sobre ciertas características especiales de algunas sucesiones. Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para todo n (Figura 3). Análogamente decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para todo n.

Algunas veces no se necesitan condiciones tan estrictas y decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **no creciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n; mientras que la sucesión $\{a_n\}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n. Finalmente, decimos que una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si $\{a_n\}$ es o bien no creciente o bien no decreciente.

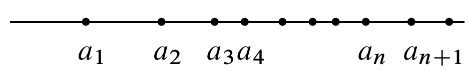


FIGURA 3.

TEOREMA 8 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*

DEMOSTRACIÓN Sea A el conjunto formado por todos los a_n. Por hipótesis tenemos que A está acotado superiormente y como $A \neq \emptyset$, existe un $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\alpha = \sup A$.

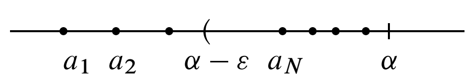


FIGURA 4.

Dado $\varepsilon > 0$ existe un $x \in A$ tal que $\alpha - x < \varepsilon$, es decir existe un N tal que $\alpha - a_N < \varepsilon$ (Figura 4).

Por otro lado tenemos que si $n \geq N$ entonces $a_n \geq a_N$, de donde

$$\alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon,$$

o sea, $a_n \to \alpha$ cuando $n \to \infty$. ▮

Subsucesiones

Algunas veces conviene realizar el análisis de una sucesión examinando el comportamiento de una o varias colecciones infinitas de sus términos. Por ejemplo, consideremos la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_n = (-1)^{n+1}$, tenemos dos colecciones infinitas de términos notables

$$\{1, 1, 1, \ldots\} \qquad \text{y} \qquad \{-1, -1, -1, \ldots\}.$$

Evidentemente, si consideramos cada una de estas colecciones como sucesiones tenemos que ambas convergen, la primera hacia 1 y la segunda hacia -1 y de la unicidad del límite deducimos que la sucesión $\{y_n\}$ es divergente.

En el examen anterior hemos considerado una colección infinita de términos de una sucesión dada como una sucesión en sí misma y las dos colecciones así formadas son llamadas “subsucesiones”. Formalmente, una **subsucesión** de una sucesión $\{a_n\}$ es la composición de $\{a_n\}$ con una sucesión creciente de números naturales $\{k_n\}$, y la denotamos por $\{a_{k_n}\}$. La discusión inicial de esta sección queda formalmente establecida con el siguiente lema (cuya demostración es casi obvia a partir de la observación de que $k_n \geq n$).

LEMA 9 *Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente hacia l y $\{a_{k_n}\}$ es una subsucesión, entonces la subsucesión también converge hacia l.*

Una propiedad muy interesante de las sucesiones queda plasmada en el siguiente resultado.

LEMA 10 *Toda sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión la cual es o bien no creciente o bien no decreciente.*

Este lema se combina con el Teorema 8 para producir uno de los resultados teóricos más importantes sobre sucesiones.

COROLARIO 11 (TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS) *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Sucesiones de Cauchy

Si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge hacia el límite l, intuitivamente, esto nos indica que los puntos a se encuentran muy cerca del punto l cuando n toma valores arbitrariamente grandes, en cuyo caso, los diferentes términos a_n y a_m se encuentran muy cerca entre sí cuando n y m son números muy grandes, porque

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m|.$$

Análogamente, resulta razonable pensar que si los términos a_n y a_m de una sucesión dada se encuentran muy próximos entre sí para valores muy grandes de n y m, entonces la sucesión es convergente. Motivados por esta observación establecemos la siguiente definición que proporciona un instrumento muy eficaz para el estudio de las sucesiones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todos n y m, si $n, m \geq N$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

TEOREMA 12 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $a_n \to l$ cuando $n \to \infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $N \in \mathbf{N}$ tales que si $n \geq N$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon/2$. Luego, si $n, m \geq N$ entonces

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, si $n, m \geq N$ tenemos

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Como hemos sugerido arriba, el recíproco del Teorema 12 también es cierto.

TEOREMA 13 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{a_n\}$ converge.*

DEMOSTRACIÓN Para empezar notemos que toda sucesión de Cauchy está acotada (este hecho se puede probar siguiendo el esquema de la demostración del Teorema 7). Ahora, de acuerdo con el Teorema de Bolzano-Weierstrass $\{a_n\}$ tiene una subsucesión $\{a_{k_n}\}$ la cual converge hacia un límite l.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un N_1 tal que para todos n y m, si $n, m \geq N_1$, entonces

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

También tenemos que existe un N_2 tal que para todo n si $k_n \geq N_2$ entonces

$$|a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ (recordemos que $k_n \geq n$) tenemos

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |\alpha_{k_n} - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto tenemos

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. ▮

Sucesiones y Continuidad

Esta sección está dedicada al estudio de la continuidad de funciones mediante el uso de sucesiones. La idea central consiste en demostrar qué condiciones de continuidad de una función f garantizan la posibilidad de intercambiar la función con límites de sucesiones convergentes (Figura 5), así

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

El resultado presentado a continuación establece condiciones necesarias para que se cumpla tal igualdad y además demuestra que el problema puede ser abordado en sentido inverso, es decir que la posibilidad de intercambiar la función con límites proporciona información sobre la continuidad de la función.

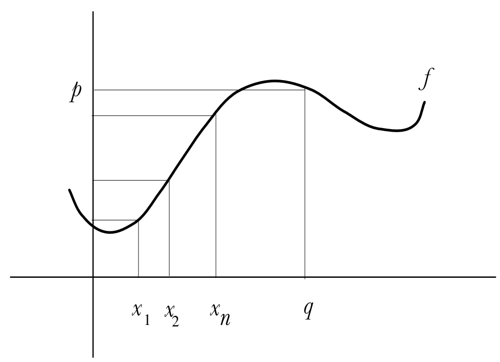


FIGURA 5.

TEOREMA 14 *Sean p un punto de un intervalo abierto $\mathcal{I}$ y f una función definida en todos los puntos de $\mathcal{I}$ (excepto quizá en p) tal que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = q.$$

Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión con términos en $\mathcal{I}$ que converge hacia p, con $a_n \neq p$ para todo n. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = q.$$

Recíprocamente, si esta proposición es cierta para toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface las condiciones anteriores, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x) = q.$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\lim_{x\to p} f(x) = q$. Entonces, dado un número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \mathcal{I}$, si $0 < |x-p| < \delta$ entonces

$$|f(x) - q| < \varepsilon.$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión con términos en $\mathcal{I} - \{p\}$ la cual converge hacia p, entonces existe un número natural N tal que para todo n, si $n \geq N$, entonces

$$0 < |a_n - p| < \delta.$$

Luego

$$|f(a_n) - q| < \varepsilon.$$

Por tanto, $f(a_n) \to q$ cuando $n \to \infty$.

Supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = q$ para toda sucesión $\{a_n\}$ con términos en $\mathcal{I}-\{p\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. Si no fuese $\lim_{x\to p} f(x) = q$, existiría un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existiría un x con $0 < |x-p| < \delta$ y $|f(x) - q| \geq \varepsilon$. En particular, para cada n existiría un x_n tal que $0 < |x_n - p| < 1/n$ pero $|f(x_n) - q| \geq \varepsilon$. Así, la sucesión $\{x_n\}$ sería convergente hacia p, pero la sucesión $\{f(x_n)\}$ no sería convergente hacia q. ∎

Una consecuencia inmediata del Teorema 14 es el siguiente resultado.

COROLARIO 15 *Sean A un subconjunto de $\mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$ una función y p un punto de A. Entonces f es continua en p si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(p).$$

La igualdad establecida por el Corolario 15 constituye una herramienta invaluable para efectos de cálculo de límites, junto con el Teorema 6 y las siguientes igualdades forman toda la maquinaria necesaria para resolver casi todos los problemas de este libro (que conciernen a límites, claro está).

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, && \text{si } \alpha > 0,\\
&\lim_{n\to\infty} x^n = 0, && \text{si } |x| < 1,\\
&\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1, &&\\
&\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, && \text{para todo } \alpha \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Tres Ejemplos Notables

Esta sección presenta tres ejemplos de aplicaciones del concepto de convergencia en la exploración de algunos problemas. La primera de tales aplicaciones es un resultado que se usa para la exploración de la estructura del conjunto de los números reales, el cual es conocido como *el teorema de los intervalos encajados* (de Cantor, en honor al matemático George Cantor, Figura 6).

FIGURA 6. Retrato de George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.

EJEMPLO 16 Dada una sucesión de intervalos cerrados $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$,..., los cuales se encuentran encajados, es decir

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \qquad \text{para todo } n,$$

entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$

o sea, existe un número x tal que $x \in I_n$ para todo n (Figura 7).

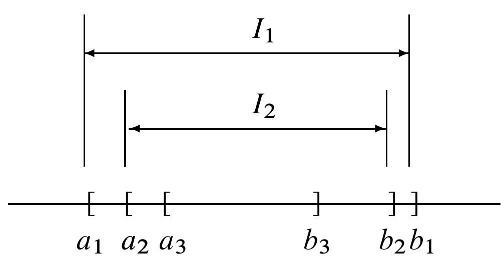


FIGURA 7.

La demostración del teorema se realiza partiendo de la observación que la hipótesis $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n es equivalente a decir que la sucesión $\{a_n\}$ es no decreciente y que la sucesión $\{b_n\}$ es no creciente y, puesto que ambas están acotadas, tenemos que existen α y β tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{y} \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Además tenemos que $\alpha, \beta \in [a_n, b_n]$ para todo n, entonces podemos tomar x cualquier punto de $[\alpha, \beta]$. Nótese que es posible que el intervalo $[\alpha, \beta]$ conste solamente de un punto, en efecto este es el caso si se considera la hipótesis adicional $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

En este contexto, el nombre de Cantor se asocia también con un objeto matemático de naturaleza muy singular, el cual se construye de la siguiente forma: sean

$$\begin{aligned}
K_0 &= [0, 1] \\
K_1 &= K_0 \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \\
K_2 &= K_1 \setminus \left[\left(\tfrac{1}{3^2}, \tfrac{2}{3^2}\right) \cup \left(\tfrac{7}{3^2}, \tfrac{8}{3^2}\right)\right], \\
K_3 &= K_2 \setminus \left[\left(\tfrac{1}{3^3}, \tfrac{2}{3^3}\right) \cup \left(\tfrac{7}{3^3}, \tfrac{8}{3^3}\right) \cup \left(\tfrac{19}{3^3}, \tfrac{20}{3^3}\right) \cup \left(\tfrac{25}{3^3}, \tfrac{25}{3^3}\right)\right] \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Observemos que K_1 resulta de extraer del intervalo $[0, 1]$ el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, resultando que $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$; análogamente K_2 se puede representar como la unión de 2^2 intervalos cerrados y, en general K_n como la unión de 2^n intervalos cerrados (Figura 8).

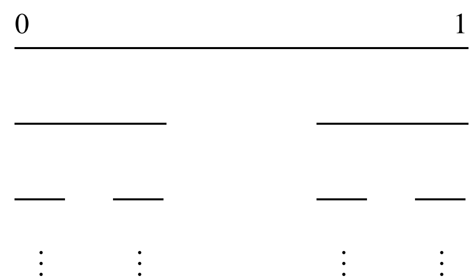


FIGURA 8.

Notemos además que $0 \in K_n$ para todo n, entonces *el conjunto de Cantor* C se define por:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

Evidentemente el conjunto de Cantor contiene muchos más elementos que 0 (en efecto una colección infinita, ver Problema 19) y, para probarlo es suficiente aplicar el teorema de los intervalos encajados a subconjuntos de los K_n convenientemente elegidos.

Notemos que la conclusión del teorema de los intervalos encajados no se obtiene si la hipótesis de que los intervalos I_n sean cerrados se reemplaza por la suposición de que son abiertos. Por ejemplo, si $I_n = (0, 1/n)$

para todo n, tenemos que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo n y

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset. \square$$

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación del concepto de convergencia para probar la existencia de soluciones de cierto tipo de ecuaciones especiales y se conoce como (un) *teorema de punto fijo.* Para establecer el resultado necesitamos una definición preliminar: dada una función f, un "punto fijo" para f es un número α tal que $f(\alpha) = \alpha$.

EJEMPLO 17 Supongamos que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua y creciente sobre $[0, 1]$. Entonces para todo $x \in [0, 1]$ la sucesión

$$x, \ f(x), \ f(f(x)), \ f(f(f(x))), \ \ldots$$

converge hacia un punto fijo de f. La idea geométrica en el fondo del argumento está ilustrada en la Figura 9.

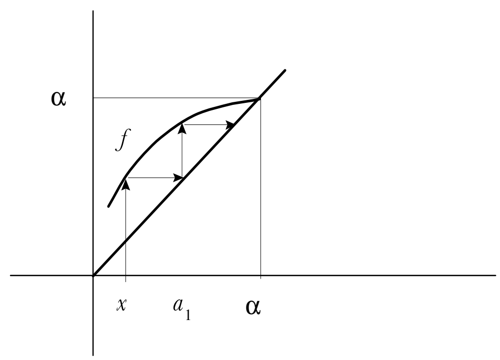


FIGURA 9.

De forma anecdótica el matemático Littlewood cuenta como un gráfico similar a éste le sugirió la idea para resolver un problema y de allí su opinión de que en algunos casos solamente una figura es suficiente como solución a un problema (ver la página 135).

En primer lugar coloquemos etiquetas a la sucesión así: $a_0 = x$ y

$$a_{n+1} = f(a_n), \qquad \text{para todo } n \geq 0,$$

es decir

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= f(a_n) \\
&= f(f(a_{n-1})) \\
&= f(f(f(a_{n-2}))) \\
&\ \vdots \\
&= \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n+1 \text{ veces}}(a_0).
\end{aligned}$$

Supongamos que $f(x) > x$, es decir $a_1 > a_0$. Como f es creciente tenemos que

$$f(f(x)) > f(x),$$

o sea

$$a_2 > a_1.$$

En general tenemos que

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como el recorrido de f está contenido en $[0, 1]$, resulta que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, y es por tanto convergente. Sea $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, entonces por el Corolario 15 tenemos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(\alpha),$$

es decir, α es un punto fijo para f. Para el caso en que $f(x) < x$ se procede en forma análoga. $\square$

Nuestro último ejemplo consiste en la aplicación de sucesiones convergentes para hallar raíces de una función, utilizando las rectas tangentes a su gráfica, el procedimiento fue desarrollado por Newton y es conocido como *el método de las tangentes de Newton.*

EJEMPLO 18 Sean $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable y x_0 un número real. Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Es fácil verificar que el punto de intersección de esta recta con el eje horizontal es $(x_1, 0)$ donde

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{si } f'(x_0) \neq 0.$$

Ahora consideremos la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1, f(x_1))$, cuya ecuación es

$$y_2(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Análogamente, si suponemos que $f'(x_1) \neq 0$, tenemos que el punto de intersección entre esta recta y el eje horizontal es un punto $(x_2, 0)$, donde

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

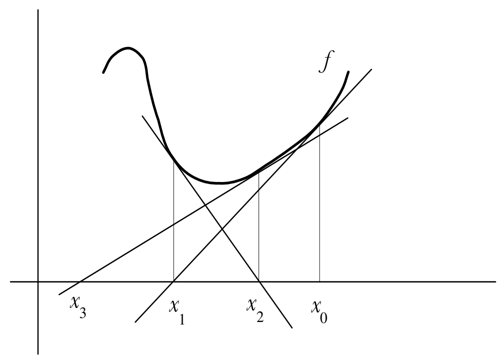


FIGURA 10.

En general, obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $(x_{n+1}, 0)$ es el punto de intersección entre la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_n, f(x_n))$ y el eje horizontal (Figura 10), y si $f'(x_n) \neq 0$ tenemos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Resulta que bajo las hipótesis $f', f'' > 0$ y $f(x_0) > 0$ se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión no creciente la cual converge a un punto α con $f(\alpha) = 0$.

Utilizando el método de Newton para $f(x) = x^2 - 2$ y $x_0 = 1,4$ con los primeros cuatro términos de la sucesión $\{x_n\}$ obtenemos aproximación muy buena de $\sqrt{2}$, así

$$\begin{aligned} x_0 &= 1,4 \\ x_1 &= 1,4142857 \\ x_2 &= 1,4142136 \\ x_3 &= 1,4142136. \ \square \end{aligned}$$

PROBLEMAS

1 Para cada una de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$ hallar una expresión para el término general a_n.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots.$

(2) $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \ldots.$

(3) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \ldots.$

(4) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots.$

(5) $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, 0, \ldots.$ *Indicación:* Puede definirse a_n por partes según si n es par o impar, pero una solución más elegante se puede obtener observando el comportamiento de la sucesión definida por $\operatorname{sen}(n\theta)$ para cierto valor de θ.

2 En cada uno de los siguientes casos decidir si la sucesión dada es convergente o no. En caso de que la respuesta sea afirmativa calcular el límite respectivo.

(1) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}.$

(2) $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}.$

(3) $a_n = \dfrac{n}{2^n}.$

(4) $a_n = \dfrac{n}{3^n}.$

(5) $a_n = 1 + (-1)^n.$

(6) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}.$

(7) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}.$

(8) $a_n = 2^{1/n}.$

(9) $a_n = n^{(-1)^n}.$

(10) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos(n!)}{n+1}.$

(11) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2^n}{(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}.$

(12) $a_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}.$

(13) $a_n = n\alpha^n$, con $|\alpha| < 1.$

(14) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}.$

(15) $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\operatorname{sen}(n^n)}{n+1}.$

(16) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b \geq 0.$

(17) $\quad a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n!}.$

(18) $\quad a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

(19) $\quad a_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}.$

(20) $\quad a_n = \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}.$

3 Cada una de las sucesiones presentadas a continuación converge hacia el límite ℓ indicado. Verificar este hecho obteniendo en cada caso un valor de N, para un $\varepsilon > 0$ dado, de tal forma que para todo n, si $n \geq N$, entonces $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

(1) $\quad a_n = \dfrac{1}{n}, \ell = 0.$

(2) $\quad a_n = \dfrac{n}{2n+1}, \ell = 1/2.$

(3) $\quad a_n = \dfrac{1}{n!}, \ell = 0.$

(4) $\quad a_n = (-1)^n \left(\dfrac{9}{10}\right)^n, \ell = 0.$

(5) $\quad a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right), \ell = 0.$

4 Probablemente las sucesiones más simples son las constantes. A continuación discutimos esta proposición y establecemos las candidatas a ser sus más fuertes competidoras.

(a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente de números enteros. Demostrar que existe un número natural N tal que a_n es constante para todo $n \geq N$.

(b) Determinar todas las subsucesiones convergentes de la sucesión $\{(-1)^{n+1}\}$.

5 (a) Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente y que existe un número natural N tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \geq N$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$.

(b) Demostrar que si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son dos sucesiones convergentes y que existe un número natural N tal que $x_n \geq y_n$ para todo $n \geq N$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(c) Demostrar mediante un ejemplo que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente y existe un número natural N tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq N$ *no* se sigue necesariamente que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$.

6 Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}$, tal que para cada número natural k, exista una subsucesión de $\{a_n\}$ la cual sea convergente hacia k.

***7** Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}$, tal que para cada número real α, exista una subsucesión de $\{a_n\}$ la cual sea convergente hacia α.

8 Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son tres sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ y que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \ell$. Demostrar que $\{y_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \ell.$$

9 Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \ell.$$

10 Existen casos en que es necesario (o conveniente) determinar que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente cuyos términos pertenecen a un conjunto, se tiene necesariamente que el límite también pertenece a dicho conjunto. En este problema se discuten dos casos concretos.

(a) Demostrar que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente hacia p y todos sus términos están en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $p \in [a, b]$.

(b) Demostrar que la parte (a) no necesariamente es cierta si el intervalo $[a, b]$ se reemplaza por (a, b).

11 Este problema plantea el estudio de una sucesión muy interesante y que constituye una bonita aplicación del Corolario 15. Para empezar notemos que si $0 < a < 2$, entonces $0 < \sqrt{2a} < 2$.

(a) Demostrar que la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

es creciente y acotada superiormente y, por tanto, convergente.

(b) Hallar el límite. *Indicación:* observe que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2\ell}$.

12 Existe una sucesión $\{a_n\}$ "definida por recurrencia" que despierta admiración general

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Así los primeros diez términos de la sucesión son

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55.$$

La sucesión $\{a_n\}$ es conocida como la *sucesión de Fibonacci* en honor al italiano Fibonacci, también conocido como Leonardo de Pisa quien la descubrió en el estudio de un problema relacionado con la cría de conejos (para los detalles consultar el Problema 2-20 de la referencia [1] de la *Reseña Bibliográfica*). Posteriormente se ha encontrado que los números de Fibonacci aparecen en muchos contextos de fenómenos naturales. Demostrar que para todo n se cumple la siguiente igualdad

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

13 El nombre del matemático suizo Leonhard Euler se encuentra asociado a un par de números muy interesantes. En primer lugar el número e que puede definirse como

$$e = \log^{-1}(1),$$

donde log denota la función logaritmo (natural), es decir

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Es un hecho notable que además el número de Euler se puede expresar como el límite de una sucesión particularmente notable, a saber

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Algunos autores prefieren tomar la ecuación anterior como definición de e, después de probar que la sucesión en cuestión es no decreciente y acotada superiormente (otra definición puede tomarse en consideración después de realizar un estudio sobre series).

Ciertamente no resulta exagerado plantear que el número e es uno de los números más importantes del Cálculo y de las Matemáticas en general y entre sus múltiples propiedades se destaca el hecho de que es un número irracional (más aún, es un número trascendente, es decir no se puede obtener por el proceso de resolver ecuaciones algebraicas). Por otro lado está otro número asociado al nombre de Euler, que no desempeña un papel tan crucial en Cálculo y ni siquiera se ha determinado si es racional o no. Tal número es conocido como *la constante γ de Euler* y está definido en términos de sucesiones como se indica a continuación.

(a) Demostrar que para todo número natural n se tiene que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

Indicación: use la definición de log indicada arriba y aplique algunas propiedades elementales de la integral.

(b) Usar la parte (a) para demostrar que si

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

entonces a_n es convergente (probando que $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente). La constante γ de Euler está definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

14 Como en el problema anterior, en éste explotamos algunas propiedades de la integral aplicadas a la función log para establecer unos hechos notables acerca de alguna sucesión especial que involucra en su definición al factorial de un número (que suele ser muy complicada de manipular por lo difícil que es estimar el valor de $n!$ cuando n es muy grande).

(a) Demostrar que si f es creciente sobre $[0, \infty)$ entonces

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2) + \cdots + f(n).$$

Indicación: hacer una representación gráfica (y recuerde que toda función creciente es integrable).

(b) Ahora considere el caso particular $f = \log$ para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n},$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Lo cual a veces se expresa así

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \qquad \text{para } n \text{ grande.}$$

15 El Corolario 15 establece, en términos generales, que funciones continuas llevan sucesiones convergentes a sucesiones convergentes. En este problema se estudia la relación entre la continuidad de funciones y las sucesiones de Cauchy.

(a) Dar un ejemplo de un conjunto de números reales X, una función $f : X \to \mathbf{R}$ continua sobre X y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ con términos en X, tales que $\{f(x_n)\}$ no sea una sucesión de Cauchy.

La situación descrita en la parte (a) se puede mejorar considerablemente introduciendo un refinamiento al concepto de continuidad: Decimos que la función $f : X \to \mathbf{R}$ es **uniformemente**

continua sobre X si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in X$

$$\text{si } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Notemos que si f es uniformemente continua sobre X entonces f es continua sobre X, pero que la proposición recíproca no siempre es cierta.

(b) Demostrar que si $f : X \to \mathbf{R}$ es una función uniformemente continua sobre X, entonces para toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ con términos en X se cumple que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.

16 (a) Demostrar que si la sucesión $\{a_n\}$ converge hacia ℓ entonces $\{|a_n|\}$ converge hacia $|\ell|$. *Indicación:* se puede dar una solución elemental utilizando la desigualdad triangular pero otra prueba muy elegante puede construirse usando el Corolario 15.

(b) Demostrar mediante un ejemplo que la convergencia de $\{|a_n|\}$ no implica la convergencia de $\{a_n\}$.

***17** Sea $\mathfrak{M}$ la colección de todas las sucesiones de números reales $\{a_n\}$ acotadas. Si $\alpha = \{a_n\}, \beta = \{b_n\} \in \mathfrak{M}$, definir la función d por

$$d(\alpha, \beta) = \sup\big\{ |a_n - b_n| : n \in n \big\}.$$

Demostrar que la función d satisface las siguientes propiedades para todos $\alpha = \{a_n\}, \beta = \{b_n\}, \gamma = \{c_n\} \in \mathfrak{M}$.

(a) (Positividad) $d(\alpha, \beta) \geq 0$. Además, $d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$.

(b) (Simetría) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.

(c) (Desigualdad triangular) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$.

Este problema suele interpretarse diciendo que la función d define una *distancia* (o *métrica*) en el mundo $\mathfrak{M}$ de las sucesiones acotadas, que es en consecuencia un ejemplo de un *espacio métrico.*

18 Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ para todo n y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Demostrar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{1/n}$ y

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{1/n} = \ell.$$

19 Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada y consideremos la sucesión definida por

$$x_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

(a) Demostrar que $\{x_n\}$ converge. El límite $\lim_{n\to\infty} x_n$ se denomina **límite superior** de $\{a_n\}$ y es denotado por $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ o $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Análogamente se define el *límite inferior* y se denota por $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ o $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

(b) Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(c) Demostrar que $\{a_n\}$ converge si y sólo si

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

En este caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

En términos elementales el proceso de "contar" consiste en asignar a cada elemento de un conjunto una etiqueta que corresponde a un número natural. En el siguiente problema se describe algunas aplicaciones generales de este concepto, pero primero establecemos cierto marco formal. Un conjunto $A \neq \emptyset$ es **finito** si existen un número natural N y una función biyectiva $a : \{1, 2, \ldots, N\} \to A$; en este caso decimos que A posee N elementos (por convenio tenemos que $\emptyset$ es finito con 0 elementos). Decimos que un conjunto es **infinito** si no es finito. Un conjunto A es **infinito numerable** (o **contable**) si existe una función biyectiva $a : \mathbf{N} \to A$, es decir, sus elementos se pueden representar como una sucesión $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Decimos que A es *numerable* si es finito o infinito numerable. El ejemplo típico de un conjunto no numerable $\mathbf{R}$; otro caso notable es el conjunto de Cantor C (Ejemplo 16).

20 En este problema examinamos la numerabilidad de ciertos conjuntos importantes. Nuestro estudio se inicia con el caso más emblemático de conjuntos numerables.

(a) Demostrar que el conjunto $\mathbf{N}$ de los numeros naturales es numerable.

(b) Demostrar que el conjunto $\mathbf{Z}$ de los numeros naturales es numerable. *Indicación:* establecer una definición formal para la sucesión $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.

(c) Utilizar un artificio similar al de la parte (b) para demostrar que la unión de dos conjuntos numerables también es numerable.

(d) Demostrar el hecho más sorprendente de que el conjunto $\mathbf{Q}$ de los numeros racionales es numerable. Notemos que de aquí se deduce que la colección $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ de los números irracionales no es numerable. *Indicación:* utilizar el siguiente diagrama sin preocuparse por los elementos repetidos y luego utilizar la parte (c)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

(e) Imitando la parte (d), demostrar que si $A_1, A_2, \ldots$ son conjuntos numerables, entonces $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ es un conjunto numerable.

21 Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(PA1) El conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales no está acotado.

(PA2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$.

(PA3) Para todo $x \in \mathbf{R}$ y para todo $k > 0$ existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $nk > x$.

Frecuentemente la proposición PA3 es conocida como la propiedad arquimediana de los números reales en honor al sabio griego Arquímedes quien la formuló en términos geométricos: la distancia entre dos puntos cualesquiera de una recta puede medirse con una regla cualquiera mediante una cantidad finita de pasos.

CAPÍTULO

2

SERIES INFINITAS

. . . Sostener el infinito en la palma de la mano
y la eternidad en una hora.

WILLIAM BLAKE

La idea central de este libro es explorar la posibilidad de desarrollar una "suma infinita", es decir, dada una sucesión $\{a_n\}$ queremos asignarle un significado preciso a la expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

y luego comparar las propiedades de estas "sumas infinitas" con las sumas ordinarias. La forma en que se resuelve este problema es definir una nueva sucesión que consiste en ir sumando ciertas porciones finitas de la sucesión $\{a_n\}$ y luego examinar la convergencia de la nueva sucesión.

Sumas Infinitas

Dada la sucesión $\{a_n\}$, consideramos la *sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Entonces decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **sumable** si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente, en cuyo caso escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Permitiendo un cierto abuso del lenguaje decimos que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** (o que es **convergente**) si la sucesión $\{a_n\}$ es sumable, en caso contrario decimos que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge** o que es **divergente**

Prácticamente todo el desarrollo de este texto es una investigación de diversos métodos para decidir si una serie dada es convergente o divergente. Antes de iniciar tal estudio vamos a considerar un par de ejemplos que en el juego de las series son como un par de caballos en un juego de ajedrez.

EJEMPLO 1 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. La veracidad de esta proposición queda ilustrada por el siguiente diagrama, el cual sugiere que la sucesión de sumas parciales de $\{1/n\}$ no está acotada

$$1 + \underset{\geq \frac{1}{2}}{\boxed{\tfrac{1}{2}}} + \underset{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}{\boxed{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}}} + \underset{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}{\boxed{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}}} + \underset{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}{\boxed{\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\cdots+\tfrac{1}{16}}} + \cdots.$$

Con frecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es denominada la *serie armónica*.

El siguiente ejemplo establece ante todo un "principio" que con frecuencia vamos a olvidar (más aún, que con frecuencia vamos a contradecir) el hecho de que dos series tengan términos generales muy similares no significa que ambas se comporten igual con respecto a la convergencia.

EJEMPLO 2 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. En efecto, observemos que la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de $\{1/n^2\}$ es creciente. Si definimos la sucesión $\{x_n\}$ por

$$x_n = \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt,$$

tenemos que

$$s_n \leq 1 + x_n \qquad \text{para todo } n.$$

Pero además notemos que

$$x_n = -\frac{1}{3t^3}\bigg|_1^n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3}.$$

Así que $\{x_n\}$ es no decreciente y $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/3$. Entonces $x_n \leq 1/3$ para todo n, luego

$$s_n \leq \frac{1}{3} \qquad \text{para todo } n,$$

es decir $\{s_n\}$ está acotada superiormente y, de acuerdo al Teorema 1-8, es convergente.

Observemos que si tenemos que estudiar una suma infinita de la forma

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots,$$

podemos simplemente considerar las sumas parciales $\{S_n\}$ de la sucesión $\{A_n\}$ definida por $A_n = a_{k+n-1}$. Es evidente que la convergencia de $\{S_n\}$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (aunque los límites pueden ser diferentes). En general, cuando no está en consideración el límite hacia el cual converge la serie no prestamos mayor atención al valor que determina su primer término y para resaltar este hecho a veces escribimos $\sum a_n$ en lugar de $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ para algún k (lo cual es, ciertamente, un abuso de notación establecido sobre un abuso aceptado previamente).

Una manera simple de generar series convergentes se obtiene mediante una aplicación directa del Teorema 1-6. Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen y c es una constante, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ también convergen y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Como en el párrafo anterior, cualquier resultado sobre convergencia de sucesiones puede ser convenientemente adaptado para establecer condiciones sobre la convergencia de series. Por ejemplo, si $\{s_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$, entonces una *condición necesaria y suficiente* para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es que $\{s_n\}$ sea una sucesión de Cauchy (ver Teoremas 1-12 y 1-13). Es decir que para valores muy grandes de n y m tenemos que $|s_n - s_m|$ es muy pequeño, o que $\lim_{n,m\to\infty} (s_n - s_m) = 0$; pero

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_m \\ &= a_{m+1} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos el siguiente resultado conocido a veces como la condición de Cauchy.

TEOREMA 3 (CRITERIO DE CAUCHY) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si*

$$\lim_{n,m\to\infty} (a_{m+1} + \cdots + a_n) = 0.$$

Tomando $m + 1 = n$ en el criterio de Cauchy obtenemos el siguiente teorema que puede ser más útil en la práctica que tal criterio.

TEOREMA 4 (CONCICIÓN DEL RESTO) *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Otra prueba de este teorema se desarrolla escribiendo $a_n = s_n - s_{n-1}$, luego si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge hacia α tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \alpha - \alpha = 0.$$

FIGURA 1. Retrato de Agustin–Louis Cauchy.

Nótese que el Teorema 4 es una *condición necesaria* para la convergencia de una serie, más no es una *condición suficiente*, es decir el hecho de que se cumpla que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no garantiza que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente (ver el Ejemplo 1).

Una aplicación elemental de la condición del resto está dada en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ diverge. Una demostración alternativa de esta proposición se obtiene observando que la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales respectiva tiene una subsucesión que converge a 0 y otra que converge a 1, en efecto

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el juego de las series, la condición del resto puede parecer un inocente peón de muy poca utilidad, que algunas veces puede sorprender cuando corona y aparece como en el siguiente ejemplo que nos ahorrará problemas cuando en el futuro una herramienta poderosa simplemente nos falle.

EJEMPLO 6 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge. Según el Problema 1-13(a) tenemos

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n},$$

de donde

$$e < \frac{e^n n!}{n^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

Por tanto la sucesión $\{e^n n!/n^n\}$ no converge a 0.

Como podemos observar el análisis de unas pocas series relativamente sencillas requiere el uso de diferentes técnicas para determinar la convergencia o divergencia de las mismas. Afortunadamente, existe una gran cantidad de resultados teóricos que constituyen herramientas muy eficientes para explorar muchos problemas. En el resto del capítulo examinaremos algunos casos con hipótesis específicas que van a ser muy útiles en el trabajo sucesivo. En las siguientes dos secciones vamos a examinar dos casos especiales que, siguiendo la analogía con el juego del ajedrez, constituyen algo así como dos torres en el escenario de las series. En la última sección la hipótesis especial que se asume es sobre el signo de los términos de la serie.

Series Telescópicas

En esta sección consideramos cierto tipo de series cuyos "sumandos" a_n tienen una forma especial $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. Entonces si $\{s_n\}$ denota la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$, tenemos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1}. \end{aligned}$$

La igualdad $a_n = b_n - b_{n+1}$ se denomina *propiedad telescópica* e implica que la sucesión $\{s_n\}$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ también converge. Así tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 7 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que*

$$a_n = b_n - b_{n+1} \qquad \textit{para todo } n.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

EJEMPLO 8 Tenemos la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

es decir, la serie indicada converge y tiene por límite 1. La demostración de esta proposición es una aplicación directa del Teorema 7. Algunas veces suele ocurrir que la serie tiene un disfraz que no permite apreciar de inmediato que se trata de una serie telescópica, por ejemplo si uno tiene que determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$$

es convergente o no, conviene observar que

$$\frac{1}{n+n^2} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

EJEMPLO 9 Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Aplicando el método de descomposición en fracciones simples queda

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)},$$

lo cual no parece indicar que la serie de nuestro problema es telescópica. Sin embargo una pequeña manipulación algebraica produce

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}.$$

Como las series $\sum \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ y $\sum \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$ son telescópicas tenemos que la serie $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge y

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &\quad + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)\\ &\quad + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es otro ejercicio para poner a prueba la destreza en manipulaciones algebraicas.

EJEMPLO 10 La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left((1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right)}{(\log n^n)\ \log(n+1)^{n+1}}$$

converge hacia $\log_2 \sqrt{e}$ (nótese que el primer término de la serie es con $n = 2$ para que la fracción correspondiente tenga sentido).
Para comprobar que ésta es efectivamente una serie telescópica tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\log\left((1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right)}{(\log n^n)\ \log(n+1)^{n+1}} &= \frac{\log(1+\frac{1}{n})^n}{(\log n^n)\ \log(n+1)^{n+1}}\\ &\quad + \frac{\log(1+n)}{(\log n^n)\ \log(n+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n\log n}\right)\\ &= \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left((1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right)}{(\log n^n)\ \log(n+1)^{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2\log 2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log n}\\ &= \frac{1}{2\log 2}\\ &= \log_2\sqrt{e}.\end{aligned}$$

En algunos casos el disfraz que se coloca para ocultar que se trata de una serie telescópica pueder ser un poco más elegante que los indicados arriba. Por ejemplo, consideremos el siguiente caso.

EJEMPLO 11 Sean f y g dos funciones tales que f es continua, $g' = f$ sobre el intervalo $[0, +\infty)$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existe. Comprobaremos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

es convergente.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = g(n+1) - g(n) \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}(g(n)-g(n+1)) = \lim_{n\to\infty} g(n) - g(1).$$

Series Geométricas

En esta sección abordamos el estudio de una serie cuyos sumandos son los términos de una *sucesión geométrica de razón* r:

$$1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n, \ldots .$$

En este caso la simplicidad del patrón de la sucesión $\{r^n\}$ permite encontrar fácilmente una fórmula para determinar el término general de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$. Observemos que

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,$$

por tanto

$$rs_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}.$$

Estas dos expresiones pueden acomodarse de tal forma que con un pequeño trabajo algebraico permite cancelar la mayoría de los términos en los segundos miembros de las igualdades:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \\ rs_n &= \phantom{1 + {}} r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}. \end{aligned}$$

De donde

$$(1-r)s_n = 1 - r^{n+1}.$$

Entonces si $r \neq 1$, tenemos

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Así, la convergencia o divergencia de la **serie geométrica** $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ depende de la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} r^n$. Notemos que este límite existe solamente si $|r| < 1$, en cuyo caso nos queda

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r}.$$

En conclusión tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 12 *La serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge si y sólo si* $|r| < 1$, *en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

EJEMPLO 13 Para $r = 1/2$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 2 - 1 = 1,$$

o, tal vez con una apariencia un poco más sugestiva:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \cdots = 1.$$

Esta igualdad tiene un significado histórico particularmente interesante. En el siglo V antes de nuestra era, el filósofo griego Zenón de Elea (495–435 a.C.) formuló un acertijo que se ha conocido tradicionalmente como *la paradoja de Zenón.* El planteamiento del filósofo, puesto en términos modernos, es el siguiente: supongamos que un corredor debe recorrer un camino rectilíneo de longitud ℓ con una rapidez constante v, por tanto el tiempo t transcurrido en completar el recorrido es $t = \ell/v$. Ahora notemos que al cabo de un período de tiempo $t/2$ el corredor habrá recorrido la mitad de la trayectoria, faltando la otra mitad. Análogamente, al cabo de un período de tiempo $t/4$ adicional, habrá recorrido la mitad del trayecto que faltaba anteriormente y le queda la mitad de éste por recorrer. Continuando de esta manera, razonaba Zenón, siempre que el corredor recorra la mitad del tramo que resta en la parte anterior le faltará la mitad del camino por recorrer y como esto ocurre indefinidamente, entonces el tiempo total invertido por el corredor será infinito. La falacia en la última parte del razonamiento de Zenón queda al descubierto por la siguiente igualdad:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \frac{t}{2^3} + \frac{t}{2^4} + \cdots = t.$$

Una Nota Histórica

La noción de “infinito” ha sido históricamente una de las más complejas tanto en Matemáticas como en Física y, especialmente en Filosofía. Algunos pensadores de la antigua Grecia consideraron problemas relacionados con este concepto, en particular Arquímedes, quien obtuvo algunas fórmulas no triviales para áreas de ciertas figuras planas, en las cuales usó la idea de cantidad “infinitamente grande” (y cantidad “infinitamente pequeña”). Algunos de esos trabajos vieron nuevamente luz con la llegada del Renacimiento cuando las obras de los autores clásicos fueron estudiadas después del largo olvido de la Edad Media.

La noción de infinito recibió un nuevo impulso, como por ejemplo con el pensamiento de Giordano Bruno, especialmente en su obra *Sobre el Infinito y los Infinitos Mundos*. En matemáticas, los problemas tratados por Johannes Kepler, Pierre de Fermat y Blaise Pascal sirvieron de base para la invención del método de fluxiones y el método de fluxiones inversas de Newton o el cálculo diferencial y el cálculo integral como los llamaba Gottfried Wilhelm Leibniz.

Newton y Leibniz encontraron en las series infinitas una herramienta fundamental que les permitía tratar una gran cantidad de problemas geométricos y mecánicos. A partir de sus trabajos las matemáticas alcanzaron un desarrollo sin precedentes y se amplió enormemente su campo de aplicación. Muchos matemáticos de la época se distinguieron por sus aportes en este sentido, ocupando Euler un lugar especial.

Después de esta etapa tan fructífera llegó una época de evaluación crítica de las técnicas utilizadas, especialmente aquellas relacionadas con la noción de límite y de serie infinita. Con respecto a la segunda, se observaron algunas contradicciones que implicaban trabajar con ciertas series (divergentes). Un ejemplo particularmente famoso, que ya hemos mencionado es el de la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Aplicando la ley asociativa para la suma se obtienen las igualdades

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1,$$

y

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

La situación se hace más crítica si se trata de aplicar la fórmula obtenida para la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Todo el panorama fue aclarado y corregido gracias a los aportes de toda una generación de matemáticos que establecieron el rigor estricto como norma para tratar con los resultados. Entre todos estos grandes científicos sobresalen los nombres de Agustin-Louis Cauchy, Karl Friedrich Gauss, Niels Henrik Abel y Bernard Riemann.

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos decidir si la serie dada es convergente o no, argumentando la respuesta.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-3}}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{3^{n+1} n(n+1)}$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{10^n}$, donde $|\alpha| < 10$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{5^{n+1}}$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

2 Demostrar que si la serie $\sum a_n$ converge y la serie $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

3 Dar un ejemplo de dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergentes tales que la serie $\sum (a_n + b_n)$ converge. Dar también un ejemplo de dos series divergentes cuya suma sea divergente.

4 Una noción especial de convergencia de series es nombrada en honor al matemático italiano Ernesto Cesàro. Decimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **Cesàro convergente** si la sucesión

$$\left\{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right\}$$

converge. El Problema 1-9 demuestra que toda serie convergente es Cesàro convergente. Dar un ejemplo para demostrar que el recíproco no es cierto.

****5** Sea $\ell^2(\mathbf{R})$ la colección de todas las sucesiones de números reales $\{a_n\}$, tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge. Definimos la función Δ por

$$\Delta(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2},$$

para todos $\alpha = \{a_n\}, \beta = \{b_n\} \in \ell^2(\mathbf{R})$. Demostrar que la función Δ satisface las siguientes propiedades para todos $\alpha = \{a_n\}, \beta = \{b_n\}, \gamma = \{c_n\} \in \ell^2(\mathbf{R})$.

(a) (Positividad) $\Delta(\alpha, \beta) \geq 0$. Además, $\Delta(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$.

(b) (Simetría) $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\beta, \alpha)$.

(c) (Desigualdad triangular) $\Delta(\alpha, \beta) \leq \Delta(\alpha, \gamma) + \Delta(\gamma, \beta)$. *Indicación:* Utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2}.$$

El lector probablemente ha notado la semejanza entre éste y el Problema 1-14. Usando la misma terminología que en aquél, tenemos que la función Δ define una distancia (o métrica) en el mundo $\ell^2(\mathbf{R})$, y que éste es otro ejemplo de un espacio métrico.

El espacio $\ell^2(\mathbf{R})$ tiene un subconjunto muy notable $\mathfrak{H}$, que se denomina el *cubo de Hilbert* en honor al matemático alemán David Hilbert (Figura 2), considerado una de las figuras matemáticas más importantes e influyentes de todas las épocas.

FIGURA 2. Retrato de David Hilbert.

El cubo de Hilbert está formado por las sucesiones de $\ell^2(\mathbf{R})$ que tienen la siguiente forma

$$\{1,0,0,0,\dots\},\quad \{0,1,0,0,\dots\},\quad \{0,0,1,0,\dots\},\dots .$$

Observemos que si $\alpha,\beta\in\mathfrak{H}$, con $\alpha\neq\beta$, entonces la distancia $\Delta(\alpha,\beta)=\sqrt{2}$.

**6 Demostrar la *desigualdad de Minkowski:* si $p\geq 1$ y si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones tales que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ y $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p$ convergen, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}.$$

La desigualdad de Minkowski permite desarrollar una generalización del Problema 5(c) (el cual corresponde al caso $p=2$). A pesar de que las desigualdades que involucran series pueden tener un aspecto intimidante, en este caso el resultado es una consecuencia directa de una desigualdad similar que involucra sumas finitas que es la desigualdad de Minkowski original:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_n|^p\right)^{1/p},$$

y esta última desigualdad es a su vez una consecuencia de la *desigualdad de Hölder* (que viene a ser una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz): sea $p>1$ y $q>1$, tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k\cdot y_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Uno de los problemas fundamentales en matemáticas es el de "medir" algunos conjuntos. La *longitud* de intervalos en $\mathbf{R}$, el *área* de rectángulos en el plano $\mathbf{R}^2$ (producto cartesiano de dos intervalos) y el *volumen* de paralelepípedos en el espacio $\mathbf{R}^3$ (producto cartesiano de tres intervalos) son ejemplos de tales medidas; recordemos que si $[a,b]$ es un intervalo, entonces su longitud es $\ell=b-a$ (en el caso trivial $[a,a]=\{a\}$ tenemos $(a,a)=\emptyset$ y $\ell=0$). Para empezar se puede atacar el problema fácil de "medir" algunos conjuntos muy pequeños. Decimos que un conjunto $X\subset\mathbf{R}$ **es de medida 0** (o que **tiene medida 0** si para todo $\varepsilon>0$ existe una colección de intervalos cerrados $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots$ tales que

$$X\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n < \varepsilon.$$

Evidentemente el conjunto **R** de los números reales no tiene medida cero. El siguiente problema no es en realidad difícil y el asterisco indica más bien que es exótico en el contexto de este libro

***7** El objetivo de este problema es hallar algunos conjuntos notables que son de medida 0.

(a) Demostrar que si X es finito, entonces X es de medida 0.

(b) Demostrar que si X es numerable, entonces X es de medida 0 (en particular **N**, **Z** y **Q** son conjuntos de medida 0). *Indicación:* Para dada $x_n \in X$ aplicar la definición tomando ε multiplicado por un factor que dependa de n de tal forma que al sumar los términos sobre n resulte una serie geométrica cuya suma sea ε.

(c) Demostrar que si $X_1, X_2, \ldots$ es una colección numerable de conjuntos de medida 0, entonces $X = \cup_n X_n$ es de medida 0 (en combinación con la parte (b) tenemos que el conjunto $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ de los números irracionales no tiene medida 0). *Indicación:* Imitar la solución de la parte (b).

(d) Demostrar que el conjunto de Cantor tiene medida 0. *Indicación:* Demostrar que la "medida" del complemento $[0, 1] \setminus C$ del conjunto de Cantor mide 1 y usar el hecho de que

$$\text{medida de } C + \text{medida de } [0, 1] \setminus C = \text{medida de } [0, 1].$$

(e) Generalizar el concepto de conjundo de medida 0 para subconjuntos del plano $\mathbf{R}^2$ partiendo del área de rectángulos.

(f) Análogamente al caso anterior, generalizar el concepto de conjunto de medida 0 para subconjuntos del espacio $\mathbf{R}^3$ partiendo del volumen de paralelepípedos.

CAPÍTULO

3

SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

... los matemáticos de comienzos del siglo XIX, cansados de este formalismo desenfrenado y sin fundamento, trajeron de nuevo al Análisis por el camino del rigor. Una vez precisada la noción de serie convergente, se hizo patente la necesidad de criterios sencillos que permitiesen demostrar la convergencia de series e integrales por comparación con series o integrales conocidas...

NICOLAS BOURBAKI

Resulta evidente que es imposible tener un mecanismo único para decidir si una serie dada es convergente o no, así que la estrategia más conveniente es clasificar las series según algunas propiedades generales de sus términos y determinar si al hacer tal agrupación se puede establecer algún criterio. Esta idea, de alguna forma, ha sido aplicada en el Capítulo 2 al considerar las series telescópicas y las series geométricas; ahora pasamos a establecer otra clasificación que sorprendentemente proporciona una abundante gama de resultados básicamente considerando que todos los términos de la serie tengan el mismo signo.

Criterio de Acotación

Algo muy importante (que de momento no estamos en condiciones de probar) es el hecho de que para una sucesión cualquiera $\{a_n\}$, la convergencia de la serie $\sum |a_n|$ implica la convergencia de $\sum a_n$. Como una anticipación a este resultado, en este capítulo concentramos la atención sobre aquellas series cuyos términos son no negativos para desarrollar estrategias que se aplicarán posteriormente en situaciones de mayor generalidad. Resulta evidente que en este caso la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es no decreciente pues

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \geq 0, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \geq s_1, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \geq s_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}. \end{aligned}$$

Entonces la hipótesis adicional de que la sucesión $\{s_n\}$ sea acotada es una condición necesaria y suficiente para deducir su convergencia (ver Teorema 1-8). Tenemos pues el siguiente resultado.

TEOREMA 1 (CRITERIO DE ACOTACIÓN) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no negativos. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo su sucesión de sumas parciales está acotada.*

El criterio de acotación es un instrumento muy versátil y será utilizado para establecer otros resultados que se presentan a continuación.

Criterio de Comparación

Los comentarios que aparecen en la sección anterior sugieren la estrategia que vamos a emplear a continuación. Así pues buscaremos condiciones que aseguren que la correspondiente sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ esté acotada superiormente. Una de las formas más simples de asegurar esto es suponer que para cada n se cumple

$$a_n \leq b_n,$$

donde $\sum b_n$ es convergente. En tal caso tenemos que si $\{t_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\{b_n\}$, entonces

$$t_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

de donde obtenemos

$$s_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

lo que deseamos comprobar. Así, formalizando un poco el argumento anterior tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2 (CRITERIO DE COMPARACIÓN) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n, b_n \geq 0$ para todo n. Si*

$$a_n \leq b_n \qquad \text{para todo } n$$

y la serie $\sum b_n$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$, las sucesiones de sumas parciales de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, respectivamente. Puesto que $a_n \le b_n$ para todo n, tenemos que

$$s_n \le t_n \qquad \text{para todo } n.$$

Además la serie $\sum b_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{t_n\}$ está acotada superiormente, luego la sucesión $\{s_n\}$ está acotada superiormente y es, por tanto, convergente. ∎

Notemos que en la demostración anterior podemos refinar un poco más un detalle: como $b_n \ge 0$ para todo n, tenemos que la sucesión $\{t_n\}$ es no decreciente y en consecuencia

$$t_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

es decir, $\sum b_n$ es una cota superior para $\{t_n\}$ y en consecuencia lo es para $\{s_n\}$; de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ahora recordemos que el hecho de que una serie $\sum a_n$ sea convergente no depende del valor de una cantidad finita de términos y en consecuencia las hipótesis del Teorema 1 pueden hacerse un poco más flexibles: podemos asumir que existen dos números naturales M y N tales que

$$0 \le a_n \qquad \text{para todo } n \ge M$$

y

$$a_n \le b_n \qquad \text{para todo } n \ge N,$$

Más aún, podemos tomar $K = \max(M, N)$ y asumir la hipótesis

$$0 \le a_n \le b_n \qquad \text{para todo } n \ge K.$$

Otro comentario oportuno y, de hecho, muy importante en este momento es que el Teorema 1 es lógicamente equivalente a la proposición siguiente: *si* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son dos sucesiones tales que* $0 \le a_n \le b_n$ *para todo* n *y si la serie* $\sum a_n$ *diverge, entonces la serie* $\sum b_n$ *es divergente.*

Las dificultades asociadas a la aplicación del Teorema 2 consisten precisamente en encontrar la serie adecuada que sirva para establecer la comparación. Esto sugiere que es conveniente elaborar un "banco de series" donde se van depositando en cuentas separadas las series convergentes y las divergentes, luego la idea es usar el conocimiento particular que uno tenga de las funciones involucradas y, por peligroso que parezca el juego, juzgar por las apariencias, como en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n\theta|}{n^2}$ converge. Efectivamente, tenemos $|\operatorname{sen} n\theta| \le 1$ para todo n, de donde

$$\frac{|\operatorname{sen} n\theta|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces obtenemos el resultado buscado al notar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. □

Un enfoque ligeramente distinto viene dado por el siguiente ejemplo y es una ilustración del comentario anterior acerca de lo peligroso de juzgar por las apariencias.

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge. En este caso no debemos guiarnos por una supuesta semejanza con la serie del Ejemplo 3; más bien debemos enfocarnos en la semejanza entre la serie de nuestro problema y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ basados en otra propiedad de la función sen que conduce a una semejanza que va mucho más allá de una simple apariencia tipográfica. Notemos que

$$\operatorname{sen} x \leq x \qquad \text{para todo } x \geq 0,$$

de donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{para todo } n. \ \square$$

Algunas cosas realmente frustrantes ocurren si uno trata de seguir un patrón a ciegas. Consideremos el siguiente "ejemplo".

EJEMPLO 5 Si queremos investigar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, probablemente uno quiera seguir la idea del Ejemplo 4, obteniendo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n,$$

pero resulta que "la serie mayorante" en este caso es divergente y no es posible aplicar el Teorema 2. Desafortunadamente en este momento no disponemos de una herramienta para tratar este problema y su solución debe posponerse por cierto tiempo. □

El siguiente ejemplo está ubicado aquí para recuperarnos de la mala experiencia del anterior.

EJEMPLO 6 Ahora demostramos que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ diverge. Probablemente uno no esté muy dispuesto a admitir una semejanza entre ésta y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pero en efecto tenemos que

$$\log x \leq x \qquad \text{para todo } x > 0.$$

En particular

$$\log n \leq n \qquad \text{para todo } n \geq 1,$$

de donde

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n} \qquad \text{para todo } n \geq 2.$$

Entonces la divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Ejemplo 2-1) implica que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ diverge. □

Ahora utilizamos este ejemplo para aumentar considerablemente nuestro saldo en la cuenta de las series divergentes.

EJEMPLO 7 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s}$ diverge si $s > 1$. Basta con demostrar que para n suficientemente grande se cumple la desigualdad siguiente

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{(\log n)^s}.$$

Esta desigualdad es consecuencia del hecho de que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(\log n)^s} = +\infty.$$

En efecto, si k es un número natural cualquiera, aplicando la Regla de L'Hôpital obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\log x)^k} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^k} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{k!} = +\infty.$$

Para un número real arbitrario s consideremos un entero k tal que $s \leq k$, entonces

$$(\log x)^s \leq (\log x)^k,$$

de donde

$$\frac{1}{(\log x)^k} \leq \frac{1}{(\log x)^s},$$

y, por tanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\log x)^k}\leq\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\log x)^s}.\ \square$$

Estos ejemplos tal vez hayan traido a la memoria del lector que en su momento comentamos que las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ son como dos caballitos de batalla en el juego del ajedrez para el estudio de las series. En este orden de ideas el siguiente ejemplo es una confirmación de esa afirmación.

EJEMPLO 8 Consideremos la serie

$$(*)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

para diferentes valores de s, analizando caso por caso.
Caso 1. Si $s<0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^s}=\lim_{n\to\infty}n^{-s}=+\infty,$$

luego la serie $(*)$ diverge por la condición del resto.
Caso 2. Análogamente, si $s=0$ la condición del resto implica que la serie $(*)$ diverge pues

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^0}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

Caso 3. Si $0<s\leq 1$ tenemos que $n^s\leq n$ para todo n, luego

$$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n^s}\qquad\text{para todo } n$$

y en consecuencia la serie $(*)$ diverge.
Caso 4. Si $s\geq 2$ tenemos que $n^s\geq n$ para todo n, luego

$$\frac{1}{n^s}\leq\frac{1}{n^2}\qquad\text{para todo } n$$

y por tanto la serie $(*)$ converge.
Caso 5. Unos cuantos intentos deben ser suficientes para convencer al lector que nuestra suerte se agota aquí y que para $1<s<2$ no estamos en condiciones de asegurar nada con respecto a la convergencia o divergencia de la serie $(*)$. $\square$

Algunos problemas están diseñados con un toque de malicia y pueden hacer que el lector navegue perdido en aguas desconocidas por cierto tiempo; un caso típico es el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Demostrar que la serie

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$$

es convergente.

Un estudiante desprevenido podría dedicarse por un tiempo a calcular la antiderivada $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ para luego aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y tener una fórmula más simple (?) del término general a_n de la serie $(**)$. En lugar de proceder de esta forma utilizamos una herramienta más refinada que nos permite tener una estimación de la integral $\displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ sin necesidad de determinar su valor exacto. El (Primer) Teorema del Valor Medio para Integrales establece que *si f es una función continua sobre $[a,b]$, entonces existe un $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Aplicando este resultado para $f(x) = \sqrt{x}/(1+x^2)$, $a = 0$ y $b = 1/n$, queda que existe un $\xi \in [0, 1/n]$ tal que

$$\begin{aligned}\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx &= \frac{\sqrt{\xi}}{1+\xi^2}\cdot\left(\frac{1}{n}-0\right)\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\xi}}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

Notemos que f es creciente sobre $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, por tanto para valores muy pequeños de n tenemos

$$\frac{\sqrt{\xi}}{1+\xi^2} \le \frac{\sqrt{n}}{1+n^2},$$

de donde

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\xi}}{1+\xi^2} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}(1+n^2)}.$$

Así nuestra tarea se resume a aplicar el criterio de comparación donde $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(1+n^2)}$. Notemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n}(1+n^2)} \le \frac{1}{n^2} \qquad \text{para todo } n,$$

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n^2)}$ converge y en consecuencia la serie $(**)$ también es convergente.

Existe al menos otra forma de resolver este problema que algunos encuentran más atractiva (por lo menos es más corta). Notemos que para todo x se cumple que $1 + x^2 \ge 1$, por tanto

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \le \sqrt{x}.$$

Entonces
$$\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \le \int_0^{1/n} \sqrt{x}\,dx.$$
Pero
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$
así que la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ implica que la serie $(**)$ es convergente. □

El siguiente ejemplo está un poco fuera del esquema de los anteriores pero constituye una bonita ilustración del valor teórico (e histórico) del criterio de comparación y, más general, del concepto de serie en general. A pesar de lo que uno pudiera pensar, la obra *Elementos de Geometría* de Euclides no trata solamente de la disciplina de la Geometría, sino que en efecto, en ella encontramos algunos resultados importantes sobre Aritmética y Teoría de Números. Uno de estos famosos teoremas establece que *la colección de los números primos es infinita*. Recordemos que un número natural $p > 1$ es **primo** si es divisible sólo por 1 y por p; por ejemplo los siguientes números son primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, \ldots.$$

Esta colección ha representado siempre una suerte de misterio y muchos matemáticos han concentrado sus esfuerzos en descubrir sus secretos. El teorema de Euclides aparece como la Proposición IX–20 de los *Elementos*, y ha sido demostrada en varias oportunidades de diferentes formas. Aunque muchos de los teoremas que aparecen en los *Elementos* habían sido demostrados antes del trabajo de Euclides, casi todo el mundo coincide con que la demostración de este teorema es de su propia cosecha (ver la referencia [13] de la *Reseña Bibliográfica*, p. 92). En el siguiente ejemplo se asume conocido el hecho de que todo número natural se puede expresar en forma única de la forma como el producto de números primos.

EJEMPLO 10 *Demostración de Euler del teorema de Euclides sobre la infinitud de la colección de los números primos.*

Supongamos que la colección de los números primos es:
$$p_1, p_2, \ldots, p_N,$$
entonces todo número natural $n > 1$ se puede escribir de la forma
$$n = {p_1}^{\alpha_1}\, {p_2}^{\alpha_2} \cdots {p_N}^{\alpha_N},$$
donde los α_k son números enteros no negativos. Si
$$\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\},$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{{p_1}^j} \right) \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{{p_2}^j} \right) \cdots \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{{p_N}^j} \right).$$

Para cada uno de los factores que aparecen en el segundo miembro de la desigualdad tenemos:

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{{p_i}^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{{p_i}^j} = \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Entonces para todo número natural n tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_N}{p_N - 1},$$

lo cual contradice el hecho de que la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Otro resultado importante de Euler (que requiere otras herramientas fuera del contexto de este libro) es el hecho de que la serie

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \cdots$$

es divergente. □

A la luz de los Ejemplos 9 y 10 puede surgir la idea de que la aplicación del criterio de comparación puede ser muy artificiosa y, efectivamente existen muchos casos en que eso es cierto. La dificultad principal consiste en que, como hemos señalado, no disponemos de una vía segura para estimar el grado de semejanza entre dos series dadas. A continuación presentamos un resultado, que no es exactamente una aplicación del criterio de comparación, sin embargo si es la ilustración de una comparación muy elaborada. La demostración de dicho resultado sigue prácticamente la misma línea de razonamiento que la demostración de que la serie armónica es divergente, pero la motivación para tal resultado es otra historia (al igual que su nombre).

TEOREMA 11 (TEOREMA DE CONDENSACIÓN DE CAUCHY) *Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.*

DEMOSTRACIÓN Notemos que $a_n \geq 0$ para todo n, pues $\{a_n\}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (ya que la serie $\sum a_n$ converge). Así tenemos

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots,$$

lo cual justifica el siguiente diagrama

$$\underbrace{\boxed{a_1 + a_2}}_{\geq a_2} + \underbrace{\boxed{a_3 + a_4}}_{\geq 2a_4} + \underbrace{\boxed{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}}_{\geq 4a_8} + \underbrace{\boxed{a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16}}}_{\geq 8a_{16}} + \cdots .$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \leq \sum_{n=1}^{2^k} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 12 Como sugieren la demostración del teorema anterior y nuestro argumento sobre la divergencia de la serie armónica, ésta es una consecuencia inmediata del teorema de condensación de Cauchy. En efecto, si la serie armónica fuese convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

sería convergente. $\square$

El siguiente ejemplo puede ser considerado a esta altura, y con toda justicia, un abuso de poder.

EJEMPLO 13 Cauchy tenemos que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ implica la convergencia de la siguiente serie (geométrica):

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Para reafirmar la idea de que este ejemplo es tal vez innecesario observemos que a partir de él podemos probar (usando el criterio de comparación) que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge para todo r con $0 \leq r < 1/2$. $\square$

Criterio de Comparación por Paso al Límite

Al inicio de este capítulo presentamos una forma de comparar los términos de dos series, de tal manera que se puede obtener información sobre una a partir de la otra. A pesar de la abundancia de ejemplos que sugieren la eficacia de este método, tuvimos la oportunidad de encontrar un caso, a saber, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n)$, para el cual el método no funcionó a pesar de la semejanza con la serie armónica. El objetivo de esta sección es examinar el significado de la palabra “semejanza” y lograr obtener resultados positivos sobre nuestro problema.

Evidentemente, estamos interesados en la semejanza entre las dos series más allá del parecido tipográfico y de la relación $\operatorname{sen}(1/n) \leq 1/n$. En efecto, usando nuestra experiencia previa en Cálculo, podemos considerar el hecho de que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Utilizando una técnica rutinaria de trabajo con límites, podemos escribir $n = 1/x$ y notar que si $n \to \infty$ entonces $x \to 0$, por tanto tenemos la siguiente igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{(1/n)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Y entonces podemos utilizar esta relación para plantear que si n toma valores muy grandes, entonces $\operatorname{sen}(1/n)$ es, en algún sentido, prácticamente igual a $1/n$, y por tanto la serie $\sum \operatorname{sen}(1/n)$ tendrá características similares a las de la serie armónica, es decir es divergente.

Esta forma de argumentar la semejanza entre dos series puede ser más fácil de manejar que el criterio de comparación. Por ejemplo, imaginemos que queremos decidir si la serie $\sum \operatorname{sen}(10/n)$ es convergente o no. Resulta que al inicio, intentar usar el criterio de comparación resultaría poco prometedor pues no tenemos forma cierta de determinar que se cumple la desigualdad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{10}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

la cual, de paso, tampoco garantiza nada de cualquier manera. Sin embargo uno podría notar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{10}{n}\right) \leq \frac{10}{n}$$

y tomar en cuenta que la serie $\sum 10/n$ también es divergente. Pero de esta nueva falla de argumentos podemos obtener una herramienta útil, observando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(10/n)}{(1/n)} = \frac{1}{10} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(10/n)}{(10/n)} = \frac{1}{10}.$$

Así tendríamos que la divergencia de la serie $\sum 10/n$ garantizaría la divergencia de $\sum \operatorname{sen}(10/n)$, sin importar que los términos no son tan aproximadamente iguales cuando n es muy grande.

TEOREMA 14 (CRITERIO DE COMPARACIÓN POR PASO AL LÍMITE) *Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones tales que $a_n, b_n > 0$ para todo n. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0,$$

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que la serie $\sum b_n$ converge. Puesto que $\ell \neq 0$, tenemos que $\ell > 0$, entonces tomando $\varepsilon = \ell$ en la definición de límite tenemos que existe un número N, tal que para todo n, si $n \geq N$, entonces

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \ell,$$

de donde

$$-\ell < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \ell,$$

es decir

$$\frac{a_n}{b_n} < 2\ell.$$

Por tanto, para $n \geq N$ tenemos que

$$a_n \leq 2\ell b_n.$$

Luego, por el criterio de comparación tenemos que la serie $\sum a_n$ converge.

Puesto que $\ell > 0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = 1/\ell \neq 0$, y entonces tenemos que la convergencia de la serie $\sum a_n$ implica la convergencia de $\sum b_n$. ▮

Notemos que existe un caso especial en el que la hipótesis sobre el límite en el teorema anterior puede ser ligeramente debilitada. Si suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ tenemos que la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

A continuación empleamos el Teorema 14 para analizar desde otra perspectiva un resultado ya conocido.

EJEMPLO 15 En el Ejemplo 2-7 se demostró que $\sum 1/(n+n^2)$ es una serie telescópica convergente. El trabajo realizado para demostrar la convergencia se reduce considerablemente si utilizamos el criterio de comparación por paso al límite con la serie $\sum 1/n^2$. Así tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+n^2} = 1. \ \square$$

En los tres ejemplos que siguen a continuación analizamos casos especiales en los que el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ (aunque el primero pudiera considerarse más bien como un contraejemplo, mientras que el segundo puede ser definitivamente un imperdonable abuso de poder, salvo por el hecho de que sugiere la generalización presentada en el tercero).

EJEMPLO 16 Si intentamos aplicar el criterio de comparación por paso al límite con la serie armónica para evaluar la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0,$$

y no podemos arribar a una conclusión definitiva. □

EJEMPLO 17 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente. En este caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

La última igualdad es casi como un artículo de fe en matemáticas, una función exponencial con base > 1 siempre supera a cualquier potencia. Si el lector desea asumir una actitud más crítica con respecto a este punto, consideremos el límite similar pero sustituyendo "la variable" n por x, asumiendo que ésta última sugiere continuidad (más aún, derivabilidad) y podemos utilizar algunos de los recursos del Cálculo elemental (la Regla de L'Hôpital):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x \log 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2^x \log^2 2} = 0. \square$$

EJEMPLO 18 Para todo $k \geq 1$ tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ es convergente. En este caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^k}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k+2}}{2^n} = 0. \square$$

Criterio del Cociente

Continuamos nuestra exploración en el terreno de las series de términos no negativos, desarrollando un par de técnicas de gran versatilidad en lo que a sus aplicaciones se refiere y de mucha importancia en el plano teórico. Estas dos piezas vienen a constituir algo así como dos torres en el juego de ajedrez para las series; la primera de ellas es una especie de comparación de la serie $\sum a_n$ consigo misma, en el sentido de que investigaremos la proporción entre términos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}$ mediante el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

La idea es que si este límite existe y tiene valor ℓ entonces la serie $\sum a_n$ es convergente o divergente según ℓ sea mayor o menor que 1, respectivamente. Por ejemplo, si $\ell < 1$, entonces para n suficientemente grande los términos a_n y a_{n+1} pueden ser comparados en cierta forma, de hecho casi ordenados, hallando un número α tal que $a_{n+1} \leq \alpha a_n$, de donde se deriva cierto control sobre la sucesión de sumas parciales y entonces podemos aplicar el criterio de comparación.

En el caso en que $\ell > 1$, un razonamiento análogo permite establecer la relación $a_{n+1} \geq \alpha a_n$, y trabajando con ella obtenemos la divergencia de $\sum a_n$. En resumen tenemos el siguiente teorema que es conocido por algunos autores como el criterio de D'Alembert, en honor al matemático, físico, filósofo y enciclopedista francés Jean Le Rond D'Alembert (Figura 1).

FIGURA 1. Retrato de Jean Le Rond D'Alembert.

TEOREMA 19 (CRITERIO DEL COCIENTE) *Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Entonces si $\ell < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, mientras que si* $\ell > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\ell < 1$ y sea α un número cualquiera tal que $\ell < \alpha < 1$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell,$$

aplicando la definición de límite para $\varepsilon = \alpha - \ell > 0$ tenemos que existe un número natural N, tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| < \alpha - \ell.$$

Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \alpha - \ell = \alpha \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Es decir

$$a_{n+1} \leq \alpha a_n \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Así que

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq \alpha a_n, \\ a_{N+2} &\leq \alpha a_{N+1} \leq \alpha^2 a_n, \\ a_{N+3} &\leq \alpha a_{N+2} \leq \alpha^3 a_n, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq \alpha^k a_n. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha < 1$ tenemos que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ converge. Entonces, por el criterio de comparación resulta que la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

converge y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ahora supongamos que $\ell > 1$. Si α es un número con $1 < \alpha < \ell$, con un argumento análogo al anterior tenemos que existe un número N, tal que

$$a_{n+1} \geq \alpha a_n \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces

$$a_n \leq \alpha^k a_n \leq a_{N+k} \qquad \text{para todo } k \geq 0.$$

Esto implica que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a 0, por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. ∎

Para continuar un esquema que ya hemos usado varias veces, analicemos un caso en el cual el teorema no tiene aplicación. Tal vez puede resultar un poco curioso, pero las series que vamos a usar no son extrañas en absoluto y, tal vez, este sea un argumento más para considerarlas nuestros caballos en este juego (por lo menos siempre se puede esperar una sorpresa de su parte).

EJEMPLO 20 Tanto para $\sum 1/n$ como para $\sum 1/n^2$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \square$$

Uno podría sentirse tentado a abusar de nuevo del poder y aplicar el criterio del cociente para comprobar de nuevo que la serie geométrica $\sum r^n$ converge si $0 < r < 1$ y aunque todo parece funcionar perfectamente estaríamos cometiendo un grave error desde el punto de vista lógico, pues el conocimiento de la serie geométrica fue un punto crucial en la demostración del Teorema 19.

Por razones obvias, el criterio del cociente resulta ser una de las herramientas preferidas para tratar problemas que involucran $n!$, como en el caso siguiente.

EJEMPLO 21 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ converge, en efecto, si $a_n = 1/n!$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0. \square$$

Una combinación muy simpática de potencias y expresiones que involucran $n!$ aparece en el siguiente ejemplo que nos enseña una forma curiosa de calcular un cierto límite.

EJEMPLO 22 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge. Si escribimos $a_n = r^n/n!$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{r^n}{n!}} = \frac{r^{n+1} n!}{r^{n+1}(n+1)!} = \frac{r}{n+1}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0. \square$$

Desarrollando un esquema parecido tenemos

EJEMPLO 23 Un caso similar se presenta con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, la cual converge si $0 \leq r < 1$. En este caso, si $a_n = nr^n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) r = r.$$

Entonces, para $0 \leq r < 1$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0. \ \square$$

Otras combinaciones interesantes de potencias con $n!$ se presentan a continuación.

EJEMPLO 24 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Escribimos $a_n = n!/n^n$ y obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. $\square$

La serie del ejemplo anterior puede ser ligeramente modificada involucrando factores de la forma r^n y obteniendo resultados interesantes, como en los dos ejemplos que siguen.

EJEMPLO 25 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge. En este caso escribimos $a_n = 2^n n!/n^n$ y obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}} = \frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1. \square$$

EJEMPLO 26 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ diverge. Ahora escribimos $a_n = 3^n n!/n^n$ y como en el ejemplo anterior nos queda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1. \square$$

Los Ejemplos 25 y 26 pueden resumirse diciendo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n n!}{n^n}$$

converge si $0 \le r < e$ y diverge si $r > e$. En el caso $r = e$ nos encontramos con el frustrante hecho de que si $a_n = e^n n!/n^n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Afortunadamente, este problema ya lo hemos resuelto (ver Ejemplo 2-6).

Ciertamente la mayor parte de los casos en los que el criterio del cociente no ofrece respuesta es cuando tenemos una serie $\sum a_n$ para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$, pero las cosas pueden ser mucho peor como se plantea en el siguiente caso (que se trata de una serie muy artificiosa).

EJEMPLO 27 Consideremos la serie

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots.$$

Notemos que si a_n denota el término general de esta serie, entonces tenemos que la sucesión de cocientes a_{n+1}/a_n tiene la forma

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots\right\},$$

la cual, evidentemente, tiene dos subsucesiones que convergen a límites diferentes y por tanto tenemos, simplemente, que el criterio del cociente no es aplicable. $\square$

Criterio de la Raíz

En la sección anterior estudiamos ejemplos de series $\sum a_n$ para las cuales el criterio del cociente no ofrece respuesta alguna bien sea porque tenemos $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ o porque el límite no existe. Sin embargo, existe una herramienta teórica estrechamente vinculada al criterio del cociente, que en algunos casos puede mejorar la situación considerablemente. La fortaleza del vínculo entre este resultado y el criterio del cociente queda clara con la demostración misma, sin embargo, los ejemplos y la discusión que siguen al teorema establecen en forma explícita la naturaleza y los alcances de tal vínculo.

TEOREMA 28 (CRITERIO DE LA RAÍZ) *Supongamos que $a_n \geq 0$ para todo n y que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Entonces si $r < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mientras que si $r > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $r < 1$ y sea α un número cualquiera tal que $r < \alpha < 1$. Entonces existe un número natural N, tal que si $n \geq N$,

$$|{a_n}^{1/n} - r| < \alpha - r,$$

de donde

$$0 \leq {a_n}^{1/n} \leq \alpha \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Es decir

$$0 \leq a_n \leq \alpha^n \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

luego, por el criterio de comparación y utilizando el hecho de que la serie geométrica $\sum \alpha^n$ converge, tenemos que la serie $\sum a_n$ también converge.

Si suponemos que $r > 1$, tenemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $a_n > 1$ y por tanto la sucesión $\{a_n\}$ no tiende a 0, de donde se deriva que la serie $\sum {a_n}^{1/n}$ diverge. ∎

Un contraejemplo importante lo constituye la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. Tal como planteamos en el Ejemplo 16 el criterio de comparación por paso a límite (aplicado con la serie $\sum 1/n$) no aporta información. Resulta que ni el criterio del cociente ni el criterio de la raíz resuelven el problema.

EJEMPLO 29 Si $a_n = 1/(n \log n)$, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n \log n}{(n+1)\log(n+1)} \qquad \text{y} \qquad {a_n}^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}(\log n)^{1/n}}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n} = 1. \ \square$$

Como es natural, el primer punto a investigar sobre este teorema es lo que ocurre si $r = 1$. Nuestra experiencia nos permite suponer que en este caso el teorema no decide en absoluto.

EJEMPLO 30 Tanto para $\sum 1/n$ como para $\sum 1/n^2$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1. \ \square$$

Ahora experimentemos aplicando el criterio de la raíz a la serie presentada en el Ejemplo 27, es decir

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots .$$

Si a_n denota el término general, entonces la sucesión $a_n{}^{1/n}$ es de la forma

$$\left\{\tfrac{1}{2}, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2}, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2/3}, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2}, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3/5}, \ldots\right\},$$

y sabemos que $n/(2n-1) \to 1/2$, luego

$$a_n{}^{1/n} \to \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

y entonces, de acuerdo al criterio de la raíz la serie dada es convergente.

Puede resultar natural considerar al criterio de la raíz como la primera herramienta a utilizar cuando el término general de la serie $\sum a_n$ involucra potencias de exponente n (de nuevo, juzgado simplemente por las apariencias, recordando el riesgo que ello siempre implica).

EJEMPLO 31 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ converge. Si $a_n = e^{-n^2}$, entonces

$$a_n{}^{1/n} = \left(e^{-n^2}\right)^{1/n} = e^{-n} = \frac{1}{e^n}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$$

En este caso también obtenemos un resultado positivo al aplicar el criterio del cociente pues

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} = \frac{1}{e^{2n+1}},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 0. \square$$

Análogamente tenemos el siguiente caso.

EJEMPLO 32 La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$ converge. Si $a_n = (n^{1/n}-1)^n$, entonces

$$a_n{}^{1/n} = \Big((n^{1/n}-1)^n\Big)^{1/n} = n^{1/n} - 1.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n}-1) = 0. \square$$

Para reforzar la idea de que hay que tener cuidado al juzgar por la mera apariencia del término general tenemos el siguiente ejemplo, aunque esta vez la usamos en un sentido más positivo.

EJEMPLO 33 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ converge. En este caso la presencia de $n!$ en el término general de la serie puede conducirnos a pensar que aplicar el criterio de la raíz no es una idea muy prometedora pues involucraría hacer consideraciones acerca de $\sqrt[n]{n!}$ para valores grandes de n. Precisamente en este punto podemos usar el Problema 1-13(b) donde se establece que

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \qquad \text{para } n \text{ grande.}$$

Luego

$$\sqrt[n]{\frac{100^n}{n!}} = \frac{100}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{100}{\frac{n}{e}} = \frac{100e}{n}.$$

Entonces si $a_n = 100^n/n!$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100e}{n} = 0. \square$$

Probablemente (y con toda razón) el lector piense que en este caso resulta mucho más fácil y conveniente utilizar el criterio del cociente (ver el Ejemplo 22) y, efectivamente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{100^n}{n!}} = \frac{100^{n+1}\, n!}{100^n\,(n+1)!} = \frac{100}{n+1},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0.$$

No resulta casual que en el ejemplo anterior (como tampoco en el Ejemplo 31) hayamos obtenido que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} {a_n}^{1/n}.$$

En realidad este fenómeno es uno de los vínculos más poderosos entre los dos criterios asegurando que siempre que el criterio del cociente proporciona información sobre una serie, entonces también lo hace el criterio de la raíz (aunque no funciona a la inversa como ya pudimos observar) y por este motivo muchas personas prefieren siempre intentar en primer lugar con el criterio del cociente. En el fondo de todo este asunto se encuentra un resultado sobre sucesiones que presentamos a continuación (ver el Problema 1-18).

TEOREMA 34 *Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \ell.$$

Entonces la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

DEMOSTRACIÓN Dado $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para todo $n \geq N$, tenemos que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Es decir

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

entonces

$$(\ell - \varepsilon)^k < \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} < (\ell + \varepsilon)^k.$$

De donde

$$\left| \sqrt[k]{\frac{a_{n+k}}{a_n}} - \ell \right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

Pero

$$\sqrt[n+k]{a_{n+k}} = \sqrt[n+k]{\frac{a_{n+k}}{a_n}} \cdot \sqrt[n+k]{a_n}.$$

Ahora, puesto que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n+k]{a_n} = 1$, se sigue que existe un M tal que

$$\left| \sqrt[n+k]{a_{n+k}} - \ell \right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } k \geq M. \ \blacksquare$$

Un caso muy curioso para el estudio de la relación entre el criterio del cociente y el criterio de la raíz es el que presentamos a continuación.

EJEMPLO 35 La serie

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

converge. Una forma sencilla de verificar este hecho es considerando $a_n = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n$, entonces, de acuerdo al Problema 1-2(16) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado uno puede describir el término general de la serie de la siguiente forma

$$b_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (\frac{1}{3})^{n/2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces podemos verificar fácilmente que

$$b_n{}^{1/n} = \begin{cases} \sqrt{2}/2 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \sqrt{3}/3 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto tenemos que la sucesión $\{b_n{}^{1/n}\}$ no converge y, en consecuencia, el criterio de la raíz no es aplicable. Por supuesto, con este enfoque tampoco es aplicable el criterio del cociente. La explicación definitiva a este fenómeno viene dada por el Problema 6. □

Criterio de la Integral

En esta sección estudiamos una variante del criterio de comparación con la particularidad de que utilizamos como patrón de comparación una serie muy especial y que ya hemos usado en un caso particular; en efecto, en el Ejemplo 2-2 se demostró la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ demostrando la convergencia de la sucesión $\left\{\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt\right\}$. En ese caso comprobamos la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt,$$

lo cual es equivalente a la convergencia de la serie

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt + \int_2^3 \frac{1}{t^2}\,dt + \int_3^4 \frac{1}{t^2}\,dt + \cdots.$$

Ahora vamos a considerar una versión general de este caso y comprobar que bajo ciertas condiciones la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es equivalente a la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f$, donde f es una función tal que $f(n) = a_n$ para todo n (Figura 2). Formalmente tenemos el siguiente resultado.

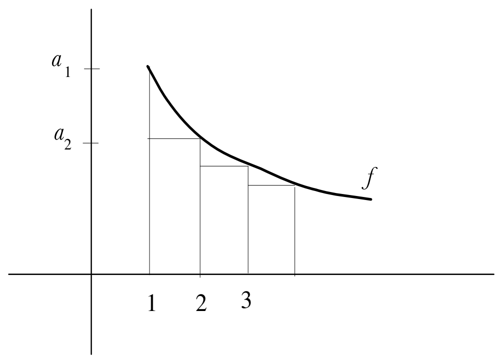


FIGURA 2.

TEOREMA 36 (CRITERIO DE LA INTEGRAL) *Supongamos que $a_n \geq 0$ para todo n y que $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo n. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si el límite*

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$$

existe.

Dada una función cualquiera $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ decimos que la **integral impropia**

$$\int_a^{\infty} f$$

es **convergente** si el límite

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f$$

existe, en cuyo caso escribimos

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f.$$

En caso contrario decimos que la integral impropia **diverge**. En forma análoga podemos establecer la definición de las integrales impropias $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

DEMOSTRACIÓN Como mencionamos arriba, la existencia del límite

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A f$$

es equivalente a la convergencia de la serie

$$\int_1^2 f + \int_2^3 f + \int_3^4 f + \cdots .$$

Por hipótesis tenemos que

$$f(n+1) \leq f(n) \qquad \text{para todo } n,$$

luego

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n) \qquad \text{para todo } n,$$

es decir

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq a_n \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces por el criterio de comparación tenemos que la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f$ implica la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ y por tanto la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y *vice versa*. ▮

Tal vez a estas alturas es innecesario notar que no importa cual es la etiqueta que coloquemos al primer término de una serie para estudiar su convergencia y por tanto en aplicaciones del criterio de la integral no es imprescindible que la integral impropia a considerar sea de la forma $\int_1^\infty f$ y puede bien ser una integral de la forma $\int_a^\infty f$, siendo a un número positivo cualquiera. Esta idea es aplicada en el siguiente ejemplo, para la cual hicimos intentos fallidos de aplicar los criterios de comparación por paso al límite (Ejemplo 16), del cociente y de la raíz (Ejemplo 29).

EJEMPLO 37 La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ diverge. Para demostrar este hecho consideremos la función f definida sobre $[2,+\infty)$ por

$$f(x) = \frac{1}{x\log x}.$$

Es claro que f es decreciente; por ejemplo, es fácil verificar que

$$f'(x) = -\frac{1 + \log x}{x^2 \log^2 x} < 0 \qquad \text{para todo } x > 2.$$

Además

$$\int_2^A f = \int_2^A \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log A) - \log(\log 2).$$

Entonces la integral impropia

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx$$

es divergente. □

En el ejemplo anterior, para la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, se utilizó la antiderivada

$$\int \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log x) + C.$$

Este resultado se obtiene aplicando el método de sustitución sencilla, escribiendo $u = \log x$. Con la misma sustitución se obtienen las antiderivadas

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{\log^2 x}{2} + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{1}{\log^2 x}\, dx = -\frac{1}{3 \log^3 x} + C,$$

las cuales utilizaremos en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 38 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ diverge. Consideramos la función f definida sobre $[1, +\infty)$ por

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

En este caso tenemos

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Entonces f es decreciente sobre $[e, +\infty)$. Por otro lado

$$\int_3^A \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{\log^2 A}{2} - \frac{\log^2 3}{2}.$$

Entonces la integral impropia

$$\int_3^\infty \frac{\log x}{x}\, dx$$

diverge. □

EJEMPLO 39 La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ converge. Consideramos la función $f : [2, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}.$$

En este caso tenemos

$$f'(x) = -\frac{2 + \log x}{x^2 \log^3 x}.$$

Entonces f es decreciente sobre $[2, +\infty)$. Además

$$\int_2^A \frac{1}{x \log^2 x}\, dx = \frac{1}{3 \log^3 2} - \frac{1}{3 \log^3 A}.$$

Entonces la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x}\, dx$$

converge. $\square$

También utilizando el método de sustitución sencilla obtenemos

$$\int x e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Así tenemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 40 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ converge. Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ la función definida por

$$f(x) = x e^{-x^2}.$$

En este caso tenemos $f'(x) = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$ y por tanto f es decreciente sobre $[1, +\infty)$. Además

$$\int_2^A x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-A^2}).$$

Entonces la integral impropia converge y

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{A \to \infty} (\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-A^2}) = \frac{1}{2e}. \square$$

A continuación utilizamos de nuevo el criterio de la integral para resolver un problema que ya hemos tratado. En el Ejemplo 8 consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ demostramos que la serie diverge para $s \leq 1$ y converge para $s \geq 2$, pero no obtuvimos ninguna conclusión para $1 < s < 2$.

EJEMPLO 41 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge para todos $s > 1$ y diverge si $s \leq 1$. Esta conclusión es una consecuencia inmediata del criterio de la integral pues

$$\int_1^A \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}\left(1 - \dfrac{1}{A^{s-1}}\right), & \text{si } s \neq 1, \\ \log A, & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Entonces la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ converge si $s > 1$ y diverge si $s \leq 1$.

Este resultado sirve de base para definir una de las funciones más notables del Cálculo Avanzado: para todo $s > 1$ se define la *función zeta de Riemann* ζ por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Uno de los resultados más famosos asociado con la función zeta de Riemann es la siguiente igualdad establecida por Euler:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \square$$

El último ejemplo de esta sección constituye un caso muy instructivo porque arroja luz sobre una de las integrales impropias más notables en Análisis (y también de forma muy especial en Teoría de Probabilidades):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Como es “bien sabido”, la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

no tiene solución en términos elementales, así que no podemos proceder como en los ejemplos anteriores para explorar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$.

EJEMPLO 42 En el Ejemplo 3-30 utilizamos tanto el criterio del cociente como el criterio de la raíz para demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ converge. Notando que si $f(x) = e^{-x^2}$ sobre $[1, +\infty)$ se cumple que

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0 \quad \text{para todo } x \in [1, +\infty),$$

así que f es decreciente sobre $[1, +\infty)$. Entonces tenemos que la integral impropia $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ también converge. Puesto que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

deducimos que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ es convergente. Luego, utilizamos el hecho de que la función f es par y concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Así pues la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ implica que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ es convergente.

Algunas personas prefieren plantear la situación en el sentido inverso para lo cual se necesita determinar la convergencia de la integral impropia por otra vía. Existen varias formas de resolver este problema, algunos de los cuales no sólo determinan la convergencia sino que permiten determinar el valor exacto de la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Alguna vez el Lord Kelvin dijo que "un matemático es aquel para quien esta igualdad es tan evidente como para cualquiera el hecho de que dos mas dos es cuatro". $\square$

El Criterio de Raabe y el Criterio de Gauss

A este nivel de nuestro juego trabajamos con los peones centrales en este tablero de ajedrez, que rara vez coronan, pero cuando lo hacen son determinantes para el final del juego. En esta sección estudiamos dos criterios que no tienen muchas aplicaciones, pero en algunos casos son los últimos recursos disponibles. El primero de estos resultados es nombrado en honor al analista suizo Josef Ludwing Raabe, mientras que el segundo tiene su denominación en honor al "Príncipe de los Matemáticos" (Figura 3). Para empezar establecemos el siguiente resultado que servirá de base para la prueba de los resultados principales.

LEMA 43 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos y*

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n}.$$

Si existe un número $r > 0$ y un número natural N tales que $c_n \geq r$ para todo $n \geq N$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por otro lado, si $c_n \leq 0$ para todo $n \geq N$ y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n} \geq r$ para todo $n \geq N$. Es decir

$$b_k - \frac{b_{k+1}a_{k+1}}{a_k} \geq r \qquad \text{para todo } k \geq N.$$

Entonces

$$a_k r \leq a_k b_k - a_{k+1}b_{k+1} \qquad \text{para todo } k \geq N,$$

de donde

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \frac{a_n b_n}{r} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Es decir, la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$ está acotada y por tanto, la serie $\sum a_n$ converge.

Ahora supongamos que $c_n \leq 0$, es decir

$$b_n \leq \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

En particular

$$b_n \leq \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

de donde

$$\frac{1}{b_{n+1}} \leq \frac{1}{a_n b_n} a_{n+1} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces, por el criterio de comparación, la divergencia de la serie $\sum 1/b_n$ implica la divergencia de la $\sum a_{n+1}$ y, en consecuencia, la de la serie $\sum a_n$. ∎

TEOREMA 44 (CRITERIO DE RAABE) *Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que existen un $r > 0$ y un número natural N tales que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} \qquad \textit{para todo } n \geq N,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge. Si*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \textit{para todo}\, n \geq N,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{r}{n}$ para todo $n \geq N$ y que $b_{n+1} = n$. Entonces

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n} = n - 1 - \frac{n a_{n+1}}{a_n}.$$

luego, por hipótesis tenemos

$$c_n \geq n - 1 + n\left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right) = r \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces, por el Lema 3.41 tenemos que la serie $\sum a_n$ converge.

Ahora supongamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces, tomando nuevamente $b_{n+1} = n$, tenemos que para todo $n \geq N$ se cumple

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n} = n - 1 - \frac{n a_{n+1}}{a_n} \leq n - 1 - n\left(\frac{1}{n} - 1\right) = 0.$$

Puesto que la serie $\sum 1/n$ es divergente, según el Lema 41 la serie $\sum a_n$ diverge. ∎

EJEMPLO 45 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

diverge. Si escribimos

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!},$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Notemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, así que el criterio del cociente no es aplicable. Por otro lado tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{2n+1}{2(n+1)} - 1 = -\frac{1}{2(n+1)} \geq -\frac{1}{n},$$

entonces de acuerdo al criterio de Raabe obtenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

diverge. □

TEOREMA 46 (CRITERIO DE GAUSS) *Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que existen dos números $s, M > 0$ y un número natural N tales que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{x_n}{n^s} \qquad \textit{para todo } n \geq N,$$

donde $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $|x_n| \leq M$ para todo n. Entonces si $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y si $\alpha \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\alpha > 1$, entonces para todo $n \geq N$ tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{x_n}{n^s} \leq 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{M}{n^s} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \alpha + \frac{M}{n^{s-1}}\right).$$

Podemos encontrar k suficientemente grande tal que si $n \geq k$ entonces $n^{s-1}(\alpha - 1) \geq M$. Es decir

$$1 - \alpha + \frac{M}{n^{s-1}} \leq 1 - \alpha + \frac{M}{k^{s-1}} \leq 0.$$

Por tanto, si $n \geq \max(N, k)$ y si $r = \alpha - 1 - M/k^{s-1}$, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{r}{n}.$$

Entonces, por el criterio de Raabe tenemos que $\sum a_n$ converge.

Si $\alpha > 1$ tenemos que para todo $n \geq N$ se cumple

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{x_n}{n^s} > 1 - \frac{\alpha}{n} \geq 1 - \frac{1}{n},$$

entonces de acuerdo al criterio de Raabe la serie $\sum a_n$ diverge.

Finalmente, supongamos que $\alpha = 1$. Tomando $b_{n+1} = n \log n$ (ver el Ejemplo 5) obtenemos que para todo $n \geq N$ se cumple

$$\begin{aligned} c_n &= b_n - \frac{b_{n+1} a_{n+1}}{a_n} \\ &= (n-1)\log(n-1) - \frac{n \log n \, a_{n+1}}{a_n} \\ &= (n-1)\log(n-1) - n \log n \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n^s}\right) \\ &= (n-1)\log(n-1) - n \log n + \log n \left(1 - \frac{x_n}{n^s}\right). \end{aligned}$$

Como $|x_n| \leq M$ existe un k tal que

$$c_n \leq (n-1)\log(n-1) - n \log n < 0 \qquad \text{para todo } n \geq \max(N, k).$$

Entonces, como la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge, el Lema 41 implica que $\sum a_n$ diverge. ∎

FIGURA 3. Retrato de Karl Friedrich Gauss.

EJEMPLO 47 Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Si

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)},$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

así que si consideramos $\alpha = 1/2$, $x_n = n/2(n+1)$, $M = 1$ y $s = 2$, entonces del criterio de Gauss se deduce que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

diverge. □

Teorema de Abel y Pringsheim

Para concluir esta fase de nuestro juego trabajamos con otro peón que difícilmente corona y por tanto es poco estimado, pero que en algunas oportunidades se convierte en una herramienta muy poderosa. El resultado fue demostrado por Abel y luego quedó prácticamente olvidado, hasta que fue redescubierto por el matemático alemán Alfred Pringsheim. Escasamente uno encuentra en la literatura algún nombre para el teorema y en muy pocas ocasiones suele usarse el nombre de uno u otro matemático; una de las referencias más inusuales la hace el matemático inglés Godfrey Harold Hardy quien lo denomina *teorema de Abel o Pringsheim* (ver la referencia [3] en la *Reseña Bibliográfica*, p. 350). Probablemente la poca aplicabilidad del teorema de Abel-Pringsheim está relacionada con el hecho de que establece una condición necesaria para la convergencia.

TEOREMA 48 (TEOREMA DE ABEL Y PRINGSHEIM) *Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente tal que $a_n \geq 0$ para todo n. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN De acuerdo con la condición de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple

$$a_m + \cdots + a_n < \varepsilon.$$

Si consideramos $n \geq m \geq N$ tenemos $a_i \leq a_n$ para $m \leq i \leq n$. Luego

$$a_m + \cdots + a_n \geq \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{n-m \text{ términos}} \geq (n-m)\, a_n,$$

de donde

$$(n-m)\, a_n < \varepsilon, \quad \text{para } n \geq m \geq N.$$

Por otro lado tenemos que $\lim_{n\to\infty} n/(n-m) = 1$, así que si escribimos

$$n\, a_n = \frac{n}{n-m} \cdot (n-m)\, a_n,$$

deducimos que para n suficientemente grande se cumple que

$$n\, a_n < \varepsilon,$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0. \quad \blacksquare$$

Notemos que en particular tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, pues en caso contrario, de acuerdo con el teorema de Abel-Pringsheim se cumpliría

$$\lim_{n\to\infty} n\, \frac{1}{n} = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Otra aplicación del teorema de Abel-Pringsheim es la igualdad siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} n\, r^n = 0, \quad \text{para } 0 < r < 1,$$

pues en este caso la serie (geométrica) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente.

Notemos también que el recíproco del teorema de Abel-Pringsheim no es cierto (ver el Problema 4).

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos decidir si la serie dada es convergente o no, argumentando la respuesta.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+|\cos n\theta|}{n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1}$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n}$, $s > 1$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)!}$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$.

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n-2)(3n-1)}$.

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-1}\,\log(4n+1)}{n(n+1)}$.

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\alpha^n}$, con $|a_n| < \alpha$.

(14) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sen}^2(n\pi/3)}{3^n}$.

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{\alpha^n}$, con $s > 1$ y $\alpha > 1$.

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$.

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

(20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n + 1}$.

(21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\log n)$.

(22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$.

(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n \operatorname{sen}(1/n)}{n}$.

(24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$.

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n}$.

(26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} e^{-x^2}\, dx$.

(27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{1/n} e^{-x^2}\, dx$.

2 Demostrar que si $a_n > 0$ para todo n y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

3 Demostrar que si $a_n \geq 0$ para todo n y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ diverge.

4 Utilizar la serie

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots$$

para demostrar que el recíproco del teorema de Abel-Pringsheim no es cierto.

5 Demostrar que la hipótesis de que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente es imprescindible en el teorema de Abel-Pringsheim. *Indicación:* comprobar que la serie siguiente es divergente

$$1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2} + \tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10^2} + \cdots .$$

(En general $a_n = 1/n$ si n es el cuadrado de un número natural y $a_n = 1/n^2$ en cualquier otro caso.)

***6** Demostrar el "criterio delicado de la raíz": Sea $\{a_n\}$ la sucesión tal que $a_n \geq 0$ para todo n. Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y si Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. El criterio no decide si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

***7** Usando como referencia el problema anterior, establecer y demostrar el "criterio delicado del cociente".

8 En cada uno de los siguientes casos decidir si la integral impropia dada es convergente o no, argumentando la respuesta.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx.$

9 Hallar un valor de la constante C para que la siguiente integral sea convergente

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx.$$

10 Hallar un valor de la constante C para que la siguiente integral sea convergente

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2C} - \frac{C}{x+1} \right) dx.$$

CAPÍTULO

4

CONVERGENCIA ABSOLUTA

Las primeras lecturas matemáticas de Leibniz fueron principalmente sobre geometría, pero él tuvo otros intereses... Uno de los frutos de su estudio de problemas sobre cuadraturas fue el "Tetragonismo Aritmético", en el cual halló que el área de un círculo es cuatro veces la serie infinita $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. *Estas consideraciones formales y aritméticas se iban a combinar ahora en una forma interesante con la geometría...*

CARL B. BOYER

Lo extenso del Capítulo 3, que trata de series de términos no negativos, está justificado por un comentario que aparece al inicio del mismo (sobre un hecho que aún no hemos probado) y que ahora repetimos: para una sucesión $\{a_n\}$ cualquiera, la convergencia de la serie $\sum |a_n|$ implica la convergencia de $\sum a_n$. Sin embargo, como es de esperar no todo puede resumirse a series de términos positivos, entre otros motivos porque el recíproco de esta proposición no es cierto.

Criterio de Leibniz

Ahora ha llegado el momento de ampliar el panorama considerando series cuyos términos no necesariamente tienen el mismo signo. En primer lugar tenemos la situación obvia en la que todos los términos de la serie $\sum a_n$ son no positivos y basta considerar la serie $\sum(-a_n)$. Así pues, los casos realmente interesantes surgen cuando álgunos términos de la serie son positivos y otros negativos. En realidad, puesto de esa forma el problema pasa a ser entonces muy complejo, y es conveniente enfocarse primero en una localidad sencilla dentro de este escenario. En primer lugar consideramos series de la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

o $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, donde $a_n \geq 0$ para todo n. Una serie de este tipo se denomina **alternada**. Un teorema de Leibniz garantiza la convergencia de una serie alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ bajo algunas hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$.

TEOREMA 1 (CRITERIO DE LEIBNIZ) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión no creciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. Si $\{s_{2n}\}$ y $\{s_{2n+1}\}$ son las subsucesiones de $\{s_n\}$ formadas por los términos de índice par e índice impar respectivamente, tenemos que $\{s_{2n}\}$ es no decreciente y $\{s_{2n+1}\}$ es no creciente. En efecto tenemos

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}.$$

Pero por hipótesis $\{a_n\}$ es no creciente, entonces $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$, de donde

$$s_{2n+2} \geq s_{2n}.$$

Análogamente tenemos

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \geq s_{2n+1}.$$

En general tenemos que

$$s_{2k} \leq s_{2j+1}, \qquad \text{para todo } k \text{ y } j.$$

De tal manera que la sucesión $\{s_{2n}\}$ está acotada superiormente (por ejemplo s_1 es una cota superior) y es por tanto convergente. Similarmente tenemos que $\{s_{2n+1}\}$ también converge. Sean

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \qquad \text{y} \qquad \beta = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Entonces

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

es decir $\alpha = \beta$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha = \beta. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Probablemente el ejemplo más clásico de aplicación del criterio de Leibniz es la serie "armónica alternada":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

la cual es convergente.

FIGURA 1. Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz.

Notemos que la serie $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ es divergente.

Es interesante el hecho que se han desarrollado diversas técnicas para explotar detalles de esta serie en particular. Por ejemplo, existen varias pruebas de la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2. \square$$

Muy similares al ejemplo anterior tenemos los siguientes.

EJEMPLO 3 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, es convergente. Si escribimos $a_n = 1/\sqrt{n}$ tenemos que $\{a_n\}$ es decreciente y obviamente $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces por el criterio de Leibniz la serie dada converge. $\square$

EJEMPLO 4 Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$. En este caso escribimos $a_n = 1 - \cos 1/n$. Para demostrar que esta sucesión es decreciente tomemos

$f(x) = 1 - \cos 1/x$ para $x > 0$. Luego para x suficientemente grande tenemos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$

es decir, f es decreciente. Además $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \cos 1/n) = 0$, entonces el criterio de Leibniz implica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ converge. □

EJEMPLO 5 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log n)\right)$ converge. Si definimos la función f por $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log x)$ para $x > 0$, tenemos

$$f'(x) = -\frac{1}{x(1+\log^2 x)} < 0 \qquad \text{para todo } x > 0.$$

Entonces la sucesión $\{\pi/2 - \operatorname{arctg}(\log n)\}$ es decreciente. Por otro lado tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log n)\right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(\log n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Entonces, por el criterio de Leibniz tenemos que la serie dada es convergente. □

Convergencia Absoluta

En un par de ocasiones hemos mencionado que la convergencia de la serie $\sum |a_n|$ implica la convergencia de $\sum a_n$, ahora llegó el momento de probar tal afirmación, pero antes notemos el hecho de que la proposición recíproca no es cierta (ver el Ejemplo 2), motivo por el cual se establece una terminología que permite diferenciar lo distintos casos: si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, decimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **converge absolutamente**. Por otro lado, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge, decimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es **condicionalmente convergente**. Así tenemos el resultado tantas veces anunciado.

TEOREMA 6 *Si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge, entonces la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *también converge y*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

DEMOSTRACIÓN Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de $\{a_n\}$ y $\{|a_n|\}$ respectivamente. Por hipótesis tenemos que $\{t_n\}$ converge, entonces de acuerdo al criterio de Cauchy tenemos

$$\lim_{n,m\to\infty}(t_n - t_m) = 0,$$

es decir

$$\lim_{n,m\to\infty}(|a_{m+1}| + \cdots + |a_n|) = 0.$$

Por la desigualdad triangular obtenemos que

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty}(s_n - s_m) &= \lim_{n,m\to\infty}(a_{m+1} + \cdots + a_n)\\ &\leq \lim_{n,m\to\infty}(|a_{m+1}| + \cdots + |a_n|) = 0,\end{aligned}$$

luego, la serie $\sum a_n$ es convergente y

$$\left|\lim_{n\to\infty} s_n\right| \leq \lim_{n\to\infty} t_n,$$

es decir

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^s}$ converge absolutamente para todo θ y para todo $s > 1$. En efecto, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^s} \leq \frac{1}{n^s},$$

entonces por el criterio de comparación y el Ejemplo 3-39 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n\theta)|}{n^s}$$

converge. $\square$

Una forma de analizar una serie $\sum a_n$ es considerar dos nuevas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ formadas por los términos no negativos la primera y por los no positivos la segunda. Formalmente, dada la sucesión $\{a_n\}$ definimos las sucesiones $\{a_n^+\}$ y $\{a_n^-\}$ por

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{si } a_n \leq 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{si } a_n \geq 0 \\ a_n, & \text{si } a_n \leq 0. \end{cases}$$

Entonces
$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad \text{y} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$
La convergencia de las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ está ligada a la convergencia de $\sum a_n$ por el siguiente teorema.

TEOREMA 8 *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen ambas.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge (por el Teorema 6) y
$$\sum a_n^+ = \frac{1}{2}\sum(a_n + |a_n|) = \frac{1}{2}\left(\sum a_n + \sum |a_n|\right),$$
es por tanto convergente. Análogamente tenemos que
$$\sum a_n^- = \frac{1}{2}\left(\sum a_n - \sum |a_n|\right)$$
también converge.

Ahora supongamos que $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^+$ convergen. Entonces
$$\sum |a_n| = \frac{1}{2}\sum(a_n^+ - a_n^-) = \frac{1}{2}\left(\sum a_n^+ - \sum a_n^-\right)$$
converge. ∎

Reordenación de Series

En esta sección exploramos más profundamente la fuerza del concepto de convergencia absoluta. Dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}$ producimos una nueva sucesión $\{b_n\}$ reordenando los términos de la primera y luego comparamos las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$.

En este esquema encontramos dos resultados notables. En primer lugar resulta que si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, cualquier reordenación también lo es, mientras que si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente podemos encontrar una gran variedad de reordenaciones que convergen hacia límites arbitrarios. Antes de establecer estos teoremas formalmente debemos definir con rigor la noción de reordenación y para ello empezamos por reordenar los números naturales: una **permutación** es una función biyectiva $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$; es decir para cada $k \in \mathbf{N}$ existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $\sigma(n) = k$ y si $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ entonces $\sigma(n) \neq \sigma(m)$.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión cualquiera entonces una **reordenación** de $\{a_n\}$ es una sucesión $\{b_n\}$ de la forma
$$b_n = a_{\sigma(n)},$$

siendo σ una permutación (es decir $b = a \circ \sigma$).

TE

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie absolutamente convergente y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es una reordenación cualquiera de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también converge absolutamente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

DEMOSTRACIÓN Sean σ una permutación y $b_n = a_{\sigma(n)}$ una reordenación de $\{a_n\}$. Si $\{T_n\}$ denota la sucesión de sumas parciales de $\{|b_n|\}$ tenemos que

$$T_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad \text{para todo } k.$$

Entonces por el criterio de acotación tenemos que $\sum |b_n|$ converge, es decir, la serie $\sum b_n$ converge absolutamente.

Denotemos por $\{s_n\}$, $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de $\{a_n\}$, $\{|a_n|\}$ y $\{b_n\}$, respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que

$$\left| s_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left| S_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $M \in \mathbf{N}$ tal que

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(M)\}.$$

Entonces para todo $n \geq M$ se cumple

$$\left| t_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \left| t_n - s_n + s_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq |t_n - s_n| + \left| s_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|,$$

luego

$$\left| t_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq |t_n - s_n| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además tenemos

$$|t_n - s_n| = \left| \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{N} a_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^{N} a_j \right| = \left| \sum_{j=N+1}^{n} a_j \right|$$

de donde

$$|t_n - s_n| \leq \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| = \left| \sum_{j=1}^{N} |a_j| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces tenemos que para todo n, si $n \geq M$ se cumple

$$\left| t_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon,$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Una versión un poco más débil del teorema anterior fue demostrada por el famoso especialista en Análisis y Teoría de Números de origen alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet en el año 1837, aunque el resultado en sí era conocido con anterioridad, particularmente por Cauchy (ver el libro de Hardy [3], p. 347).

TEOREMA 10 (TEOREMA DE REORDENACIÓN DE DIRICHLET) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de términos no negativos convergente y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es una reordenación cualquiera de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también converge absolutamente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

FIGURA 2. Retrato de Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Ahora supongamos que $\sum a_n$ es una serie condicionalmente convergente y x un número cualquiera. A continuación presentamos la estrategia de juego elaborada por Riemann que consiste en rodear a x con términos de la serie, de tal forma que construyamos una reordenación $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ con $\sum b_n = x$.

Sabemos que $\sum a_n^+$ diverge, entonces x no puede ser cota superior de las sumas parciales de $\{a_n^+\}$, entonces hallamos el primer término de $\{a_n^+\}$ tal que la correspondiente suma parcial sobrepasa a x. Análogamente usamos el hecho de que $\sum a_n^-$ diverge para hallar el primer término de $\{a_n^-\}$ tal que al sumar la correspondiente suma parcial al agregarlo a la suma anterior resulte un número menor que x, y seguidamente se repite el procedimiento con $\{a_n^+\}$.

FIGURA 3. Retrato de Bernard Riemann.

De esta manera logramos atrapar a x. El siguiente teorema de Riemann establece formalmente esta discusión.

TEOREMA 11 (TEOREMA DE REORDENACIÓN DE RIEMANN) *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie condicionalmente convergente y* x *un número real cualquiera. Entonces existe una reordenación* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x.$$

DEMOSTRACIÓN Como $\sum a_n$ es condicionalmente convergente tenemos que las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son ambas divergentes (Teorema 7). Sea n_1 el número de términos de $\{a_n^+\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ > x, \qquad \text{pero} \qquad \sum_{n=1}^{p} a_n^+ < x \qquad \text{si } p < n_1.$$

Sea m_1 el número de términos de $\{a_n^-\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- < x, \qquad \text{pero} \qquad \sum_{n=1}^{p} a_n^- < x \qquad \text{si } p < m_1.$$

Prosiguiendo de esta forma obtenemos $\{b_n\}$, la reordenación de $\{a_n\}$ siguiente:

$$a_1^+, a_2^+, \ldots, a_{n_1}^+, a_1^-, a_2^-, \ldots, a_{m_1}^-, a_{n_1+1}^+,$$
$$a_{n_1+2}^+, \ldots, a_{n_2}^+, a_{m_1+1}^-, a_{m_2+2}^-, \ldots.$$

La diferencia entre la suma parcial de $\{b_n\}$ y x es siempre a lo sumo un a_n^+ o $|a_n^-|$. Pero la convergencia de $\sum a_n$ implica que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que las sumas parciales de $\{b_n\}$ se hacen arbitrariamente cercanas a x, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x. \quad \blacksquare$$

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos decidir si la serie dada converge absolutamente o no, argumentando la respuesta.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{n}^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right).$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right).$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\log n)\right).$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right].$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^{100}}{2^{n}}\right).$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\log(1+1/n)}.$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,\log^{2}(1+n)}.$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^{37}}{(n+1)!}.$

2 Demostrar que si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

***3** (a) Demostrar que si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente y $\{b_n\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ también converge absolutamente.

(b) Demostrar mediante un ejemplo que la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es imprescindible.

4 Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge.

CAPÍTULO

TEOREMA DE ABEL

5

Toda la obra de Abel lleva impreso el sello de una genialidad y fuerza de pensamiento que es inusual y a veces asombrosa, aunque no tomara en cuenta la juventud del autor. Se puede decir que era capaz de penetrar todos los obstáculos hasta llegar al fondo de los problemas, con una fuerza que parecía irresistible; Él atacaba los problemas con una energía extraordinaria. . .

AUGUST L. CRELLE

En este corto capítulo estudiamos dos teoremas relacionados con la convergencia de series de la forma $\sum a_n b_n$ (como en el caso de las series alternadas). Los dos resultados se basan sobre una bonita y aparentemente inocente fórmula demostrada por Abel en 1826.

Fórmula de Abel

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, consideremos $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. Por definición tenemos

$$a_1 b_1 = s_1 b_1$$

y

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 &= s_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= s_1 b_1 - a_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 \\ &= s_1 b_1 - s_1 b_2 + s_2 b_2 \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 b_2. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 + a_3b_3 \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 - a_1b_3 - a_2b_3 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 - (a_1 + a_2)b_3 + (a_1 + a_2 + a_3)b_3 \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 - s_2b_3 + s_3b_3 \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3b_3. \end{aligned}$$

Continuando de esta forma obtenemos en general

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n.$$

TEOREMA 1 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y denotemos por $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. Entonces, para todo n se cumple la igualdad*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_nb_n.$$

DEMOSTRACIÓN La demostración consiste en un cálculo simple:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_nb_n &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots \\ &\qquad + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n \\ &= s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + (s_3 - s_2)b_3 + \cdots \\ &\qquad + (s_{n-1} - s_{n-2})b_{n-1} + (s_n - s_{n-1})b_n \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \ \blacksquare \end{aligned}$$

La ecuación $(*)$ es conocida como *la fórmula de sumación parcial de Abel*, denominación sugerida por la semejanza con la fórmula de integración por partes, sobre todo si las sumas se interpretan como integrales y las diferencias como "diferenciales" y escribimos

$$\sum_{k=1}^{n} b_ka_k = s_nb_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_{k+1} - b_k).$$

En realidad la semejanza es mucho más profunda que un simple parecido tipográfico y, en efecto, la fórmula de Abel puede utilizarse para demostrar algunas identidades sobre integrales. Una discusión muy interesante sobre este particular, asociando la fórmula de Abel con sumas de Riemann, se encuentra en el Problema 19-35 de *Calculus* por M. Spivak.

En realidad, la forma en que se utiliza la fórmula de Abel, tanto en el caso de integrales como el de series, es mediante el siguiente resultado.

LEMA 2 (LEMA DE ABEL) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones, tal que $\{b_n\}$ es no creciente y $b_n \geq 0$ para todo n. Supongamos que existen m y M tales que*

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

para todo n. Entonces

$$b_k\, m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k\, M$$

para todo $k \leq n$.

DEMOSTRACIÓN Notemos que

$$\begin{aligned} mb_1 &= mb_1 - mb_2 + mb_2 - \cdots - mb_{n-1} + mb_{n-1} - mb_n + mb_n \\ &= m(b_1 - b_2) + m(b_2 - b_3) + \cdots + m(b_{n-1} - b_n) + mb_n \end{aligned}$$

y, similarmente

$$Mb_1 = M(b_1 - b_2) + M(b_2 - b_3) + \cdots + M(b_{n-1} - b_n) + Mb_n.$$

Si $\{s_n\}$ denota la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$, por hipótesis tenemos que

$$m \leq s_j \leq M \qquad \text{para todo } j.$$

Puesto que $\{b_n\}$ es no creciente se cumple que $b_{j-1} - b_j \geq 0$ para todo j. Luego

$$m(b_{j-1} - b_j) \leq s_j(b_{j-1} - b_j) \leq M(b_{j-1} - b_j) \qquad \text{para todo } j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} m\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j-1} - b_j) + mb_n &\leq \sum_{j=1}^{n-1} s_j(b_{j-1} - b_j) + s_n b_n \\ &\leq M\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j-1} - b_j) + Mb_n, \end{aligned}$$

es decir

$$mb_1 \leq \sum_{j=1}^{n-1} s_j(b_{j-1} - b_j) + s_n b_n \leq Mb_1.$$

Usando la fórmula de Abel tenemos que

$$mb_1 \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq Mb_1.$$

Finalmente, dado el número natural k, aplicamos este resultado a las sucesiones $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ y $\{b_k, b_{k+1}, \ldots\}$, obteniendo

$$mb_k \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq Mb_k. \quad \blacksquare$$

Criterio de Dirichlet

A continuación presentamos una consecuencia del Lema de Abel que fue demostrada por Dirichlet.

TEOREMA 3 (CRITERIO DE DIRICHLET) *Sean $\{a_n\}$ una sucesión cuyas sumas parciales están acotadas y $\{b_n\}$ una sucesión no creciente con $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

para todo n. Entonces, por el lema de Abel tenemos

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M$$

para todo $k \leq n$.

Puesto que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces

$$\lim_{k,n\to\infty} (a_k b_k + \cdots + a_n b_n) = 0,$$

y por el criterio de Cauchy tenemos que $\sum a_n b_n$ converge. ∎

EJEMPLO 4 Un corolario del teorema de Dirichlet es el criterio de Leibniz. En efecto, consideremos la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n,$$

donde $\{b_n\}$ es una sucesión no creciente que converge hacia 0. Entonces si $a_n = (-1)^{n+1}$, tenemos que la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$ es $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$, y está acotada. Entonces $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge. □

EJEMPLO 5 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$ es condicionalmente convergente.

Primero notemos que la sucesión $\{|\operatorname{sen}(n\pi/2)/n|\}$ es

$$\left\{1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2n+1}, 0, \ldots\right\}$$

y por tanto la serie $\sum |\operatorname{sen}(n\pi/2)/n|$ diverge.

Por otro lado tenemos que si $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$, entonces la sucesión de sumas parciales $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots\}$ es obviamente acotada y puesto que $b_n = 1/n$ es no creciente y tiende a 0, por el criterio de Dirichlet tenemos que $\sum \operatorname{sen}(n\pi/2)/n$ converge. □

Criterio de Abel

Concluimos este capítulo con un corolario del criterio de Dirichlet, el cual fue demostrado por Abel en 1826 (y cuya prueba original debe haber sido algo diferente).

TEOREMA 6 (CRITERIO DE ABEL) *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge y que* $\{b_n\}$ *es una sucesión la cual es o bien no creciente o bien no decreciente cuyas sumas parciales están acotadas. Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que la sucesión $\{b_n\}$ es no decreciente. Como las sumas parciales de $\{b_n\}$ están acotadas, tenemos que también $\{b_n\}$ está acotada y, por tanto, converge hacia un límite b. Consideremos la sucesión dada por $\beta_n = b - b_n$. Entonces $\{\beta_n\}$ es no creciente y converge hacia 0. Por otro lado, la convergencia de $\sum a_n$ implica que sus sumas parciales están acotadas, entonces por el criterio de Dirichlet tenemos que $\sum a_n \beta_n$ converge. Pero

$$a_n \beta_n = a_n(b - b_n) = a_n b - a_n b_n,$$

de donde

$$a_n b_n = a_n b - a_n \beta_n.$$

Entonces la convergencia de $\sum a_n$ y $\sum a_n \beta_n$ implican que $\sum a_n b_n$ converge.

Si la sucesión $\{b_n\}$ es no creciente podemos proceder de forma análoga, pero usando $\beta_n = b_n - b$. ∎

CAPÍTULO

6

PRODUCTO DE SERIES

... aplicamos las operaciones del análisis a series infinitas de la misma manera que lo hacemos con series finitas y me parece que esto no podemos considerarlo como demostración propiamente dicha. Por ejemplo, si queremos multiplicar dos series.

NIELS HENRIK ABEL

Como establecimos al inicio de nuestro estudio, para series convergentes se cumple la "propiedad aditiva", es decir si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes entonces también $\sum (a_n + b_n)$ es convergente y

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Ahora estamos interesados en investigar la posibilidad de obtener una fórmula razonable que involucre el producto $\sum a_n \cdot \sum b_n$. Para empezar uno podría pensar en la igualdad

$$(*) \qquad \sum a_n b_n = \sum a_n \cdot \sum b_n.$$

Un resultado en ese sentido fue descubierto por Cauchy, pero su demostración completa es debida a Abel.

Producto de Cauchy

Si consideramos la igualdad $(*)$, inmediatamente resulta evidente que en la expresión del primer miembro falta mucha información, pues uno esperaría que una fórmula razonable que involucre al producto $\sum a_n \cdot \sum b_n$ lleve implícita de alguna manera cierta variante de la "ley distributiva", algo así como:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= (a_1 + a_2 + \cdots) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots) \\
&= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \cdots \\
&= a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + \cdots \\
&\quad + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_2b_4 + \cdots \\
&\quad\quad + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_3b_4 + \cdots \\
&\quad\quad + \cdots \\
&\quad\quad + a_nb_1 + a_nb_2 + a_nb_3 + a_nb_4 + \cdots \\
&\quad\quad + \cdots .
\end{aligned}$$

Aunque no resulta del todo claro si todos los términos pueden ser acomodados para formar una sucesión, en este esquema sugiere que si $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$, entonces la serie $\sum c_n$ debe involucrar de alguna manera *todos* los productos de la forma $a_i b_j$. Observando el siguiente diagrama contentivo de tales productos

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

podemos encontrar una forma de acomodarlos, tratando de no involucrar al principio los puntos suspensivos de cada horizontal. Existe una forma muy ingeniosa de hacer tal acomodo con la cual obtenemos algunos resultados interesantes. La idea principal es considerar los términos c_n como la suma de los elementos de las diagonales señaladas en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

es decir

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ c_3 &= a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \\ c_4 &= a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1. \end{aligned}$$

En general tenemos

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdot + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ definida así se denomina el **producto de Cauchy** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Por supuesto, nuestro objetivo es determinar condiciones que garanticen la convergencia de $\sum c_n$ y que se cumpla la igualdad $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$. Resulta más o menos natural que alguna hipótesis de convergencia absoluta sea requerida pues $\{c_n\}$ es en el fondo una reordenación particular de la sucesión de los productos $a_i b_j$. En efecto, tenemos que la convergencia condicional de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ni siquiera garantizan la convergencia de $\sum c_n$.

EJEMPLO 1 Si $a_n = b_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ para todo n, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son condicionalmente convergentes mientras que su producto de Cauchy diverge.

La convergencia de $\sum a_n$ es una aplicación del criterio de Leibniz mientras que la divergencia de $\sum |a_n|$ se obtiene comparando con la serie armónica (ver el Ejemplo 4-3).

Ahora

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^{n-k+2} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$k(n-k+1) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4},$$

luego

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k+2)}}.$$

Entonces

$$|c_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+2)}}\right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

para todo n. Luego $\{c_n\}$ no tiende a 0 cuando $n \to \infty$ y por la condición del resto $\sum c_n$ diverge. $\square$

TEOREMA 2 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces su producto de Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge y*

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

DEMOSTRACIÓN Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{C_n\}$ las sumas parciales de $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ respectivamente. Además consideremos $\beta_n = b_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{j=1}^{n} c_j \\
&= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \cdots + (a_1b_n + \cdots + a_nb_1) \\
&= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 \\
&= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 \\
&= a_1\left(\beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) + a_2\left(\beta_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) + \cdots + a_n\left(\beta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) \\
&= a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1 + (a_1 + \cdots + a_n)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \\
&= a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1 + A_n\sum_{n=1}^{\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, tenemos que dado $\varepsilon >$ 0 existe un N tal que

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} |\beta_n + \cdots + \beta_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}$$

para todo $n \geq N$ (nótese que podemos asumir que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| > 0$ ya que el otro caso es una trivialidad).

Por otro lado, según la condición de Cauchy tenemos

$$\lim_{n,m\to\infty} (|a_n| + \cdots + |a_m|) = 0. \tag{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} |a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| &\leq |a_1\beta_n + \cdots + a_{n-N-1}\beta_{N+1}| \\ &\quad + |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| (\beta_n + \cdots + \beta_{N+1}) \\ &\quad + |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot (\beta_n + \cdots + \beta_{N+1}) \\ &\quad + |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1|. \end{aligned}$$

Entonces por la desigualdad (1) obtenemos

$$|a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1|.$$

Como $\{\beta_n\}$ es convergente, existe un $\beta \in \mathbf{R}$ tal que $\beta = \sup\{|\beta_n| : n \in \mathbf{N}\}$. Luego

$$\begin{aligned} |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| &\leq |a_{n-N}|\,|\beta_n| + \cdots + |a_n|\,|\beta_1| \\ &\leq (|a_{n-N}| + \cdots + |a_n|)\,\beta. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (2) implica que para N suficientemente grande se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n-N}\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| = 0. \tag{3}$$

Luego, de la igualdad (3) deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pero como ε es arbitrario concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1| = 0.$$

Finalmente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left(A_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad \blacksquare$$

Teorema de Abel para el Producto

Esta corta sección está dedicada a ilustrar algunas condiciones que garantizan el cumplimiento de igualdades como $(*)$. El primero de los resultados impone convergencia absoluta a las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ para garantizar que cualquier reordenación del producto de Cauchy converge hacia $\sum a_n \cdot \sum b_n$.

TEOREMA 3 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergen absolutamente y* $\{\varphi_n\}$ *es una reordenación cualquiera de la sucesión de productos* $a_i b_j$, *con* $1 \leq i, j$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ *converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Por otro lado, si en el Teorema 2 sustituimos la hipótesis de convergencia absoluta de $\sum a_n$ por la de convergencia de $\sum a_n$ y agregamos la hipótesis de convergencia del producto de Cauchy se cumple la igualdad $(*)$, pero la prueba de este hecho requiere una técnica que estudiaremos en el próximo capítulo, por lo cual enunciamos a continuación el resultado y posponemos su demostración hasta el momento oportuno (el resultado mismo era conocido por Cauchy, pero la primera demostracción fue aportada por Abel, en efecto la discusión de este problema fue presentada por Abel como la motivación en su memoria *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$ (ver introducción y el teorema VI de este artículo en el Capítulo 10).

TEOREMA 4 (TEOREMA DE CAUCHY-ABEL) *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series convergentes y supongamos que su producto de Cauchy* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *también converge, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

CAPÍTULO

7

SERIES DE FUNCIONES

Newton a partir de 1665, Gregory a partir de la publicación de Mercator de 1668, y Leibniz a partir más o menos de 1673, se consagran fundamentalmente al estudio del tema de moda, las series de potencias.

NICOLAS BOURBAKI

Ahora volvemos al problema inicial que ha estimulado nuestro estudio de las series. En el Capítulo 1 planteamos que si f es una función con derivada de orden n sobre un intervalo abierto que contiene algún punto a, escribimos

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

donde $P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ respresenta el polinomio de Taylor de grado n centrado en a para f y $R_{n,a}(x)$ el resto. La inquietud planteada en aquel entonces era: si logramos demostrar que para un valor de x se cumple

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0,$$

entonces ¿tiene sentido plantear la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n?$$

Nuestro principal inconveniente en ese momento era el de establecer de manera rigurosa el significado de una *suma infinita.* Ahora ya tenemos una buena idea de la solución de tal problema y nos interesa determinar la validez de ecuaciones como las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,\\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.
\end{aligned}
$$

La dificultad que se nos plantea actualmente es que cada una de estas ecuaciones representa una serie para cada valor de x, es decir que debemos estudiar la convergencia de "series de funciones". Naturalmente, para que esta noción adquiera verdadero rigor, debemos establecer en primer lugar el significado de la convergencia de una "sucesión de funciones" y luego "las series de funciones" en términos de sucesiones de sumas parciales como en el caso de las series numéricas.

Sucesiones de Funciones

Sea A un conjunto de números reales y supongamos que para cada número natural n existe una función f_n definida sobre A. A la colección de todas estas funciones la denotamos por $\{f_n\}$ y la denominamos **sucesión de funciones** sobre A. Notemos que para cada $x \in A$ tenemos la sucesión (de números) $\{f_n(x)\}$ (Figura 1).

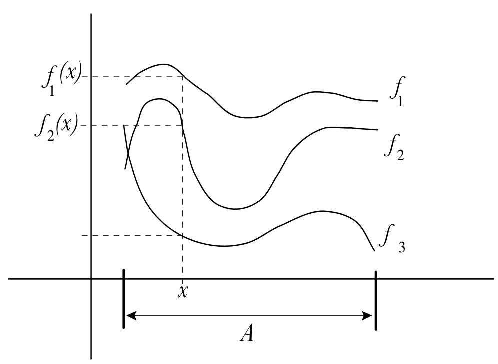


FIGURA 1.

Es posible que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ sobre A sea convergente para algunos puntos de A y sea divergente para otros. En nuestro estudio son de especial interés aquellas sucesiones de funciones $\{f_n\}$ para las cuales se cumple que $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in A$, en este caso podemos definir una función f sobre A por la igualdad

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

En el proceso de investigar las sucesiones de funciones, en primer lugar debemos determinar qué propiedades de las funciones f_n hereda la función f. Resulta que en general la situación es bastante desalentadora, como ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida sobre el intervalo $[0, 1]$ por $f_n(x) = x^n$.

Tenemos que para cada $x \in [0, 1]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Como puede notarse, cada una de las funciones f_n es continua sobre $[0, 1]$ mientras que la función f no es continua en $x = 1$, es decir f no hereda la continuidad de las funciones f_n (Figura 2). □

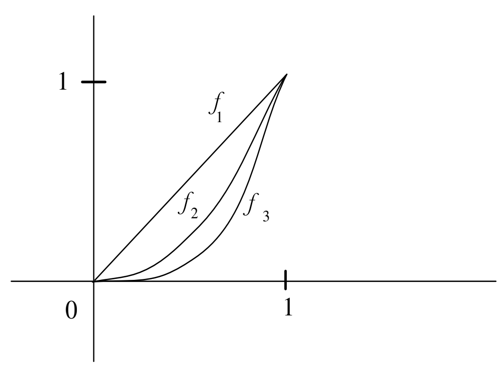


FIGURA 2.

Ahora consideremos un ejemplo similar en el que la función f no hereda algo sobre la integral de las funciones f_n.

EJEMPLO 2 Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida sobre el intervalo $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right], \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En este caso tenemos que para cada $x \in [0,1]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x) = 0$ (Figura 3), por tanto

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

mientras que para cada n se cumple

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{1/2^{n+1}} f_n(x)\,dx + \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} f_n(x)\,dx + \int_{1/2^n}^1 f_n(x)\,dx \\ &= \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} 2^{n+1}\,dx \\ &= 2^{n+1}\int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

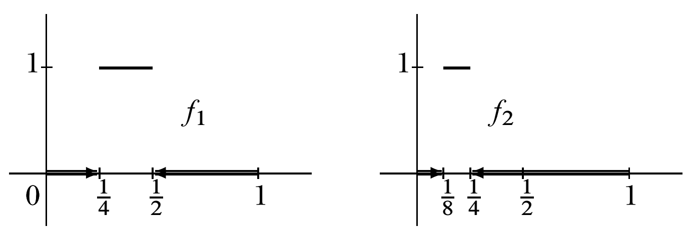


Figura 7.3(a) **Figura 7.3(b)**

Es decir, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ para todo n, así que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \ \square$$

El hecho de que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

no es originado por la discontinuidad de las funciones f_n, en efecto podemos conseguir una sucesión de funciones continuas sobre $[0,1]$ con características similares.

EJEMPLO 3 Consideremos $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida sobre el intervalo $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x & \text{si } x \in \left[0, 1/2^{n+1}\right], \\ 2^{n+1}(2-x) & \text{si } x \in \left[1/2^{n+1}, 1/2^n\right], \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Entonces para todo $x \in [0,1]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f = 0$ (Figura 4), así que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Por otro lado, para cada n tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$$

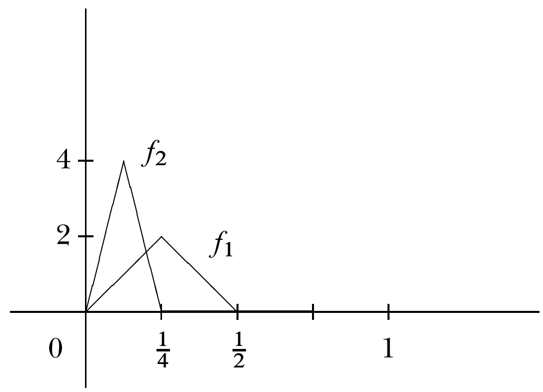


FIGURA 4.

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \ \square$$

Para la derivada tenemos una situación similar: podemos encontrar una sucesión de funciones derivables sobre un intervalo abierto tal que para cada x la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia un punto $f(x)$ y la función f no es derivable en alguno de los puntos del intervalo o que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x),$$

para algún x.

EJEMPLO 4 Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida sobre $\mathbf{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

Entonces

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R} \text{ y para todo } n.$$

Luego
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R}.$$
Además
$$f_n'(x) = \cos(nx) \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R} \text{ y para todo } n,$$
y por tanto la sucesión $\{f_n'(x)\}$ no converge hacia $f(x)$ para algunos valores de x, por ejemplo si $x = 2\pi$, tenemos $f_n'(x) = \cos(2n\pi) = 1$. Inclusive podemos hallar algunos valores de x para los cuales la sucesión $\{f_n'(x)\}$ no converge, por ejemplo para $x = \pi/2$. $\square$

Antes de pasar a plantear la posibilidad de definir "series de funciones" debemos encontrar una forma de mejorar la noción de convergencia y poder así manipular los límites con mayor grado de libertad.

Convergencia Uniforme

Pasemos ahora a estudiar la posibilidad de obtener algunos resultados positivos en el sentido de que dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, tal que cada una de las funciones tenga una determinada propiedad sobre un conjunto A, entonces (si existe) la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, también f satisface esa propiedad.

Para establecer ese tipo de resultados es necesario estudiar con mayor profundidad la función límite f. Si para todo $x \in A$ tenemos
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$
significa que para todo $x \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \geq N.$$
Notemos que el número n al que se refiere en este comentario depende tanto de ε como del punto x y puede ocurrir que dado un $\varepsilon > 0$ para dos números $x \neq y$, los correspondientes valores de n sean diferentes, lo cual significa de alguna manera que una de las dos sucesiones numéricas $\{f_n(x)\}$ y $\{f_n(y)\}$ se está acercando momentáneamente más rápido a su límite que la otra.

Un escenario completamente distinto al que encontramos en los Ejemplos 1, 2 y 3 surge cuando imponemos la condición de que el valor de n no dependa del punto x. Decimos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente** (o es **uniformemente convergente**) hacia la función f sobre un conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } x \in A \text{ y } n \geq N,$$
y utilizamos la siguiente notación
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Si tenemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

para cada $x \in A$, decimos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente** (o es **puntualmente convergente**) hacia la función f.

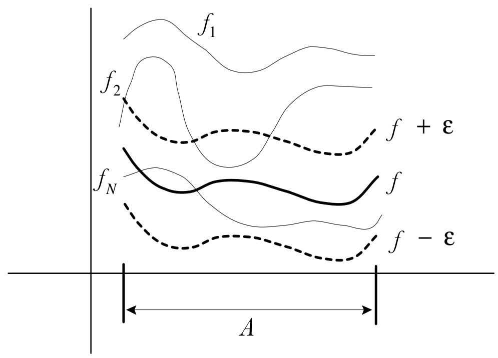


FIGURA 5.

Evidentemente, la convergencia uniforme de una sucesión de funciones implica la convergencia puntual, pero la proposición recíproca no es cierta.

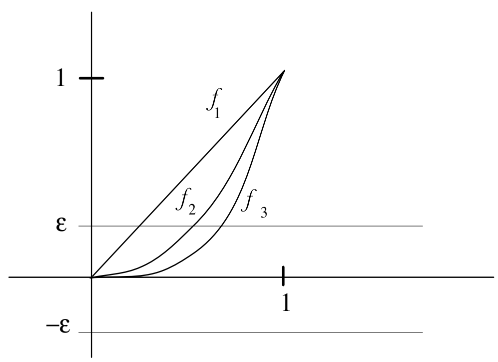


FIGURA 6.

En algunos libros de Cálculo se usaba la notación $f_n \rightrightarrows f$ para indicar que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, mientras que $f_n \to f$ denotaba convergencia puntual. En este libro, como en todos los textos modernos, no usaremos la primera en absoluto y siempre se indicará con palabras el tipo de convergencia.

EJEMPLO 5 Si $\{f_n\}$ es la sucesión de funciones definida en el Ejemplo 1, es decir

$$f_n(x) = x^n$$

para todo $x \in [0, 1]$, entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente, pero no uniformemente sobre $[0, 1]$ hacia la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \square$$

Análogamente tenemos el siguiente caso.

EJEMPLO 6 Si $\{f_n\}$ es la sucesión de funciones definida en el Ejemplo 2, es decir

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right], \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente, pero no uniformemente sobre $[0, 1]$ hacia la función $f = 0$.

De la misma forma tenemos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en el Ejemplo 3 converge puntualmente, pero no uniformemente sobre $[0, 1]$ hacia la función $f = 0$. $\square$

El siguiente teorema demuestra que las dificultades encontradas con respecto a la continuidad de la función límite desaparecen cuando consideramos la hipótesis de convergencia uniforme.

TEOREMA 7 *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente hacia la función f sobre un conjunto A. Si cada una de las funciones f_n es continua sobre A, entonces f es continua sobre A.*

DEMOSTRACIÓN Sea x un punto cualquiera de A y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f tenemos que existe un número natural N tal que

$$|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

para todo $y \in A$ y para todo $n \geq N$. En particular tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

para todo $n \geq N$. Ahora cada f_n es continua en x, en particular para $n = N$ tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que para todo h, si $|h| < \delta$ (con $x + h \in A$) entonces

$$|f_n(x + h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Ahora, aplicando la desigualdad (1) para $y = x + h$ y $n = N$ tenemos que

$$(4) \qquad |f_N(x+h) - f(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, usando las desigualdades (1), (3) y (4), tenemos que para todo h si $x + h \in A$ con $|h| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f(x) + f_N(x+h) - f_N(x+h) \\
&\quad + f_N(x) - f_N(x)| \\
&\leq |f_N(x+h) - f(x+h)| + |f_N(x+h) - f_N(x)| \\
&\quad + |f_N(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(5) \qquad \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x). \quad \blacksquare$$

Con respecto a la relación entre la convergencia de sucesiones de funciones y la integración, la convergencia uniforme también es una condición suficiente para obtener resultados positivos.

TEOREMA 8 *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables sobre $[a, b]$ que converge uniformemente hacia una función f la cual es integrable sobre $[a, b]$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

DEMOSTRACIÓN Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f tenemos que existe un número natural N tal que para todo n, si $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Notemos que la convergencia uniforme es una condición suficiente pero no una condición necesaria para la igualdad (6). En efecto, si consideramos $\{f_n\}$ y f definidas sobre [0, 1] como en el Ejemplo 1, es decir

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{y} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

La ecuación (6) suele expresarse de una forma muy sugestiva, tomando en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx.$$

Inclusive, puede ser mucho más sugestivo escribirla de la siguiente forma

$$(6') \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n,$$

pues resalta el hecho de que la convergencia es uniforme. En todo caso, la igualdad en sí es interpretada como un "intercambio" entre los procesos de integración y límite. Una consideración análoga puede hacerse para la ecuación (5), donde la convergencia uniforme garantiza un "intercambio" entre dos procesos de límite, puesto que tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x+h) = f(x+h)$ entonces tenemos

$$(5') \qquad \lim_{h\to 0} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x+h)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{h\to 0} f_n(x+h)\right].$$

Después de las dos victorias que representan los Teoremas 7 y 8, tenemos que enfrentarnos al hecho de que la relación entre la convergencia uniforme y la derivabilidad es decepcionante. En efecto el Ejemplo 4 muestra que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R}$$

converge uniformemente hacia la función $f = 0$, sin embargo no se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Un resultado parcial en este sentido viene dado por el siguiente teorema.

TEOREMA 9 *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones derivables sobre $[a, b]$, tal que las derivadas f_n' son integrables sobre $[a, b]$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia f y $\{f_n'\}$ converge uniformemente hacia alguna función continua g, entonces f es derivable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n'(x).$$

DEMOSTRACIÓN Si $x \in [a, b]$ es un punto cualquiera, entonces por el Teorema 8 tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^x g(x)\,dx &= \int_a^x \left[\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\right] dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(x)\,dx\end{aligned}$$

Por el Segundo Teorema Fundamental de Cálculo y la convergencia puntual de $\{f_n\}$ hacia f tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

Luego, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo (el cual es aplicable porque g es continua) resulta que $f'(x) = g(x)$ y por tanto

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \quad \blacksquare \tag{7}$$

Como en los casos anteriores, la ecuación (7) puede escribirse ilustrando un "intercambio" entre el proceso de derivación y el de límites, así:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'. \tag{7'}$$

Claro está, la aplicabilidad de los teoremas anteriores depende de la disponibilidad de alguna condición suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Los dos resultados que se presentan a continuación suelen ser útiles en la práctica.

LEMA 10 *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ que converge puntualmente hacia la función constante $f = 0$. Si $f_n \geq 0$ para todo n y si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es no creciente para cada $x \in [a, b]$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformente sobre $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\{f_n\}$ no converge uniformente hacia $f = 0$ sobre $[a, b]$. Entonces existen un $\varepsilon > 0$ y un número natural n tal que

$$f_n(x) \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Así podemos elegir una colección de puntos $x_1, x_2, \ldots \in [a, b]$ y números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ tales que

$$f_{n_j}(x_j) \geq \varepsilon. \tag{8}$$

La sucesión $\{x_j\}$ está acotada y por tanto contiene una subsucesión $\{x_{h_j}\}$ que converge hacia algún punto $\alpha \in [a, b]$. Para simplificar la notación, podemos asumir que la subsucesión es $\{x_j\}$ (lo cual equivale a descartar de la sucesión original los términos que no pertenecen a la subsucesión y luego cambiar las etiquetas). Puesto que la sucesión $\{f_n(\alpha)\}$ converge a 0, existe un número natural N tal que

$$f_n(\alpha) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Como f_n es continua, el Corolario 1-15 indica que para j suficientemente grande se cumple

$$f_n(x_j) < \varepsilon.$$

Podemos elegir j de tal forma que $n_j > N$ y por tanto

$$f_{n_j}(x_j) \leq f_n(x_j) < \varepsilon,$$

lo cual contradice la desigualdad (8). ∎

La condición de que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es no creciente para cada $x \in [a, b]$ que aparece en el Lema 10, se expresa diciendo simplemente que la sucesión $\{f_n\}$ es no creciente. El teorema que presentamos a continuación fue demostrado por el analista italiano Ulisse Dini.

TEOREMA 11 (TEOREMA DE DINI) *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión no creciente de funciones continuas sobre $[a, b]$ que converge puntualmente hacia una función continua f. Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida sobre $[a, b]$ por

$$f_n(x) = f_n(x) - f(x).$$

Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función $f = 0$ sobre $[a, b]$. Además, para todo n y para todo $x \in [a, b]$ tenemos

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = f_n(x) - f(x) - f_{n+1}(x) + f(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0.$$

Entonces, la sucesión $\{f_n\}$ es no creciente sobre $[a, b]$, por tanto, de acuerdo al Lema 10, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[a, b]$. ∎

Para evaluar la importancia de la hipótesis de continuidad de la función f en el Teorema de Dini, tomemos $\{f_n\}$ y f sobre $[0, 1]$ como en el Ejemplo 1, es decir

$$f(x) = x^n \qquad \text{y} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Análogamente definiendo $\{f_n\}$ y f por

$$f(x) = x^n \text{ y } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in [0, 1),$$

vemos la importancia de que el intervalo sobre el cual están definidas las funciones sea cerrado. Existe otro detalle sobre este particular: también es importante el hecho de que el intervalo $[0, 1]$ es acotado. En efecto, si $\{f_n\}$ está definida sobre el intervalo $[0, +\infty)$ por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

para todo n, entonces tenemos que se cumplen las otras hipótesis del teorema de Dini pero la convergencia hacia $f = 0$ no es uniforme sobre $[0, +\infty)$.

A continuación estudiamos una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme.

TEOREMA 12 *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto A. Si f es una función definida sobre A y $\{\delta_n\}$ está dada por*

$$\delta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}.$$

Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f sobre A si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que

$$\delta_n < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Pero $\delta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, entonces por definición tenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Entonces para todo $x \in A$ y para todo $n \geq N$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

es decir $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f sobre A.

Para probar la proposición recíproca, supongamos que tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Por definición de supremo de un conjunto tenemos que $\varepsilon/2$ es una cota superior para $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$ y por tanto

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir

$$\delta_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \quad \blacksquare$$

El Teorema 12 es particularmente útil cuando $A = [a, b]$ y las funciones involucradas son continuas sobre $[a, b]$, en cuyo caso tenemos que sup $=$ max y uno puede utilizar algunas de las herramientas del Cálculo elemental para estimar la sucesión definida por

$$\delta_n = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Como es natural, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida sobre un conjunto A, podemos considerar la "sucesión de sumas parciales"

$$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots,$$

es decir, la sucesión de funciones $\{S_n\}$ sobre A definida por

$$S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x).$$

Decimos que *la serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** sobre A si la sucesión $\{S_n\}$ converge uniformemente sobre A. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge puntualmente** si la sucesión $\{S_n\}$ converge puntualmente.

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 7, 8 y 9, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 13 *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones sobre el intervalo* $[a, b]$.

(1) Si f_n *es continua para todo* n *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformente hacia una función* f *sobre* $[a, b]$, *entonces* f *es continua sobre* $[a, b]$.

(2) Si cada una de las funciones f_n *es integrable sobre* $[a, b]$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformente hacia una función* f *integrable sobre* $[a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

(3) Si cada una de las funciones f_n *es derivable sobre* $[a, b]$, *con* f_n' *integrable sobre* $[a, b]$. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge puntualmente hacia* f *y si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge*

uniformemente hacia alguna función continua sobre $[a, b]$, *entonces* f *es derivable y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

FIGURA 7. Retrato de Karl Theodor Weierstrass.

Ahora para poder desarrollar todo el potencial del teorema anterior necesitamos una condición suficiente para la convergencia uniforme de series. El siguiente resultado constituye un recurso fundamental para casi todo nuestro trabajo; el resultado mismo lleva una etiqueta poco común, ligada al nombre del matemático de origen alemán Karl Theodor Whilhelm Weierstrass (Figura 7).

TEOREMA 14 (EL CRITERIO M DE WEIERSTRASS) *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones definidas sobre* A *y supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *es serie numérica tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \textit{para todo } x \in A.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge absolutamente para todo* $x \in A$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente a la función* f *definida por*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

DEMOSTRACIÓN Para cada $x \in A$ tenemos que

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

y la serie $\sum M_n$ converge, entonces de acuerdo al criterio de comparación tenemos que la serie $\sum f_n(x)$ converge absolutamente. Por otro lado, la convergencia de la serie $\sum M_n$ implica que dado $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

Entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_N(x)]| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente sobre A a la función $f(x) = \sum f_n(x)$. ▮

Series de Potencias

Ahora disponiendo del concepto de convergencia para series de funciones enfocamos nuestra atención de nuevo al problema de determinar las condiciones bajo las cuales se verifica la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

En realidad vamos a considerar el problema más general (en principio, pero al final de cuentas no tan general) de determinar las condiciones bajo las cuales se cumple la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

para cierta sucesión de números $\{a_n\}$.

Una **serie de potencias** sobre un conjunto A centrada en $a \in A$ es una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sobre A, donde

$$f_n(x) = a_n\,(x-a)^n \qquad \text{para todo } n,$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión numérica y escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \tag{9}$$

entendida como

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-a)^n.$$

FIGURA 8. Retrato de Brook Taylor.

En particular la serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.$$

se denomina la **serie de Taylor** para f centrada en a (y es, por supuesto, una versión infinita del polinomio de Taylor).

Para simplificar la notación consideraremos una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n. \tag{10}$$

Al proceder de esta forma no estamos perdiendo generalidad pues la serie $\sum a_n\,(x-a)^n$ converge sobre el intervalo abierto (b,c) si y sólo si la serie $\sum a_n\,x^n$ converge sobre el intervalo $(b+a, c+a)$.
Si $\alpha_n = a_n\,x^n$ tenemos

$$|\alpha_n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}\,|x|,$$

entonces de acuerdo con el criterio de la raíz, la serie $\sum a_n\,x^n$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|^{1/n} < 1$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\,|x| = |x| \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1.$$

Observemos que si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, entonces $\sum a_n\,x^n$ converge para cualquier $x \in \mathbf{R}$. Mientras que si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, entonces $\sum a_n\,x^n$

converge solamente cuando $x = 0$. Por otro lado, si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$, entonces $\sum a_n x^n$ converge para todo x con $|x| < \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$.

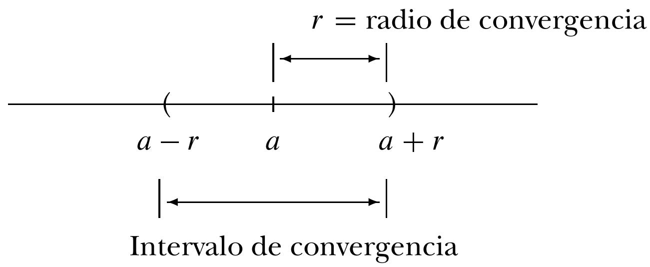


FIGURA 9.

Motivados por esta observación si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$ denominamos **radio de convergencia** de la serie $\sum a_n x^n$ al número

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

y al intervalo abierto $(-r, r)$ lo llamamos el **intervalo de convergencia** (Figura 9). Para facilitar los cálculos adoptamos los siguientes convenios: si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, entonces $r = +\infty$ y el intervalo de convergencia es $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$; si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, entonces $r = 0$ y el intervalo de convergencia se reduce a $\{0\}$.

EJEMPLO 15 Consideremos la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$. Si $a_n = (-1)^n/n$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 1.$$

Entonces $r = 1$ y el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ es $(-1, 1)$. $\square$

EJEMPLO 16 Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, si

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},$$

luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(-1)^n(2n+3)!} = -\frac{1}{2n+3}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 0.$$

Por el Teorema 3-33 tenemos $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^n = 0$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$$

tiene radio de convergencia $r = +\infty$. □

EJEMPLO 17 Para la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$, la condición del resto nos indica que tenemos $r = 0$, es decir la serie converge solamente cuando $x = 0$. Este resultado se confirma con los siguientes cálculos: si $a_n = n!$ tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^n = 0$. □

Con el fin de poder manipular las series de potencias en la práctica debemos determinar bajo qué condiciones la convergencia es uniforme y así poder aplicar el Teorema 14 y, en última instancia tenemos que abrir paso al criterio M de Weierstrass.

Supongamos que la serie $\sum a_n x^n$ converge sobre $(-r, r)$ y que $x_0 \in (-r, r)$, $x_0 \neq 0$, es decir $0 < |x_0| < r$, entonces

$$|a_n|\cdot|x^n| \leq |a_n|\cdot|{x_0}^n| \qquad \text{para todo } n$$

y como $\sum |a_n\,{x_0}^n|$ converge, tenemos que $|a_n\,{x_0}^n| \to 0$ y por tanto la sucesión $\{|a_n\,{x_0}^n|\}$ está acotada. Si tomamos $|x| \leq a < |x_0|$, queda

$$\begin{aligned}|a_n x^n| &= |a_n|\cdot|x^n| \\ &\leq |a_n|\cdot|a^n| \\ &= |a_n|\cdot|{x_0}^n|\cdot\left|\frac{a}{x_0}\right|^n \\ &\leq M\,\left|\frac{a}{x_0}\right|^n.\end{aligned}$$

luego, si $M_n = M|a/x_0|^n$, el criterio M de Weierstrass garantiza que la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente sobre el intervalo cerrado $[-a, a]$.

TEOREMA 18 *Supongamos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_0}^n$ *converge y sea* a *un número con* $0 < a < |x_0|$. *Entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *converge uniforme y absolutamente sobre* $[-a, a]$. *Por otro lado, lo mismo es cierto para las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

y si la función f *está definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

entonces f *es derivable sobre el intervalo* $(-|x_0|, |x_0|)$ *y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}.$$

Además f *es integrable sobre cualquier intervalo cerrado* $[b, c]$ *contenido en el intervalo abierto* $(-|x_0|, |x_0|)$ *y*

$$\int_b^c f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, (b^{n+1} - c^{n+1}).$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que la serie $\sum a_n\, {x_0}^n$ converge, la condición del resto implica que la sucesión $\{a_n\, {x_0}^n\}$ converge hacia 0 y, por tanto, está acotada, es decir existe un M tal que

$$|a_n\, {x_0}^n| \leq M \qquad \text{para todo } n.$$

Sea a un número cualquiera con $0 < a \leq |x_0|$, así

$$\begin{aligned} |a_n\, x^n| &= |a_n| \cdot |x^n| \\ &\leq |a_n| \cdot |a^n| \\ &= |a_n| \cdot |{x_0}^n| \cdot \left|\frac{a}{x_0}\right|^n \\ &\leq M \left|\frac{a}{x_0}\right|^n. \end{aligned}$$

Escribiendo $M_n = M|a/x_0|^n$ nos queda

$$|a_n\, x^n| \leq M_n.$$

Como $a < |x_0|$ tenemos que la serie geométrica $\sum |a/x_0|^n$ converge y por tanto también $\sum M_n$. Entonces por el criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum a_n\, x^n$ converge uniformemente sobre $[-a, a]$.

Notemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|\alpha|} n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n = \frac{M}{|a|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n$$

converge (por el criterio del cociente) entonces, aplicando nuevamente el criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \, x^{n-1}$ converge uniformemente sobre $[-a, a]$. Entonces por el Teorema 13 tenemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \, x^{n-1} \qquad \text{para todo } x \in [-a, a].$$

Como a es arbitrario, tenemos que la igualdad se cumple sobre el intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$.

Ahora observemos que

$$\sum \frac{|a| M}{n+1} \left| \frac{a}{x_0} \right|^n = |a| M \sum \frac{n}{n(n+1)} \left| \frac{a}{x_0} \right|^n$$

converge, aplicando el criterio de comparación con la serie $\sum n |a/x_0|^n$. Luego, por el criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum \frac{a_n}{n+1} \, x^{n+1}$ converge uniformemente sobre $[-a, a]$. Entonces por el Teorema 13 tenemos que para todos b y c, con $-a \leq b \leq c \leq a$ se cumple

$$\begin{aligned}
\int_b^c f(x)\, dx &= \int_b^c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x^n \, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_b^c a_n \, x^n \, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_b^c x^n \, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(c^{n+1} - b^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Como a es arbitrario, tenemos que la igualdad se cumple para cualesquiera $b, c \in (-|x_0|, |x_0|)$. ∎

EJEMPLO 19 Para ilustrar la utilidad del teorema anterior consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ para $|x| < 1$. Podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Entonces por el Teorema 18 para cualquier $b \in (-1, 1)$ tenemos

$$\int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \, dx = \int_0^b \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b$$

Pero

$$\int (-x^2)^n \, dx = (-1)^n \int x^2 n \, dx = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

entonces

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \ \square$$

EJEMPLO 20 Análogamente, si consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ para $1 < x < 2$. Podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Entonces por el Teorema 18 para cualquier $b \in (0, 2)$

$$\int_1^b \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \, dx = \int_1^b \frac{1}{1+x} = \log b$$

Pero

$$\int (-x)^n \, dx = (-1)^n \int x^n \, dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

entonces

$$\log x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Algunos prefieren escribir esta última igualdad de la siguiente forma:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{para } x \in (-1, 1). \ \square$$

El siguiente ejemplo es un intento adicional para no dejar lugar a dudas sobre la importancia de las series de potencias.

EJEMPLO 21 La antiderivada $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$ no tiene solución en términos elementales, sin embargo podemos calcular la integral definida $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$ con cualquier grado de precisión deseado.

Consideremos la función f definida sobre $\mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sabemos que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Luego para $b > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x)\, dx &= \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^b x^{2n}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{b^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \ \square \end{aligned}$$

Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ sobre un intervalo abierto $\mathcal{I}$. Entonces por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}, \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}, \\ f'''(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-2)(n-3)\, a_n\, x^{n-3}, \\ &\ \ \vdots \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}, \end{aligned}$$

luego

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{para todo } n,$$

es decir
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{I}.$$

TEOREMA 22 *Supongamos que*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$
sobre un intervalo abierto $\mathcal{I}$, *entonces*
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \textit{para todo } n.$$
Es decir, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *es la serie de Taylor de* f *sobre el intervalo* $\mathcal{I}$.

Debemos notar que el Teorema 22 plantea que si una función f puede ser desarrollada como una serie de potencias, entonces ésta es la serie de Taylor de f, pero no asegura que la serie de Taylor de una función f sea convergente hacia f, lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 23 Sea f la función definida sobre **R** por
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Entonces
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\, e^{1/h^2}} \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{e^{\nu^2}} && \text{(donde } \nu = 1/h\text{)} \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\nu\, e^{\nu^2}} && \text{(por la regla de L'Hôpital)} \\ &= 0. \end{aligned}$$
Luego
$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{2h^{-3}e^{-1/h^2}}{h} \\ &= 2\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4\, e^{1/h^2}} \\ &= 2\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2}{e^{\nu^2}} && \text{(donde } \nu = 1/h\text{)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Procediendo de esta forma tenemos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$, por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \qquad \text{para todo } x.$$

Pero $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ y tenemos así que la serie de Taylor de f converge hacia $f(x)$ solamente cuando $x = 0$. $\square$

Con algunas hipótesis adicionales sobre la función f y sus derivadas se obtiene que la serie de Taylor de f converge hacia f, como en el siguiente resultado descubierto por el matemático ruso Sergei Bernstein.

TEOREMA 24 (TEOREMA DE BERNSTEIN) *Sea f una función tal que $f^{(n)} \geq 0$ para todo $n \geq 0$ sobre un intervalo $[a, a + r]$. Entonces*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

DEMOSTRACIÓN Podemos asumir que $a = 0$ y $x > 0$. Utilizando la forma integral del resto (Teorema 1-1) tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^n + R_n(x), \tag{11}$$

donde

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \, dt. \tag{12}$$

para todo $x \in [0, r]$. Notemos que la ecuación (10) implica que para $x = r$

$$R_n(r) \leq f(r). \tag{13}$$

Mediante el "cambio de variable" $u = (x - t)/x$ con $t \in [0, 1]$ resulta

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(x - xu)}{n!} (xu)^n x \, du \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) n! \, du. \end{aligned}$$

Sea f_n la función definida sobre $(0, r]$ por

$$f_n(x) = \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) n! \, du.$$

Por hipótesis tenemos que $f^{(n)}$ es no decreciente sobre $[0, r]$ para todo $n \geq 0$, entonces, puesto que $0 \leq u \leq 1$, tenemos

$$f^{(n+1)}(x - xu) \leq f^{(n+1)}(r(1 - u)),$$

de donde

$$f_n(x) \leq f_n(r),$$

es decir,

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(r)}{r^{n+1}}.$$

Entonces

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} R_n(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r), \tag{14}$$

por la desigualdad (13). Luego

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$ convergen sobre un intervalo abierto $(-r, r)$. Claro está sobre cualquier intervalo cerrado contenido en $(-r, r)$ la convergencia de cada una de las series es absoluta, entonces si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, es decir $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, entonces por el Teorema 6-2 tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n. \qquad \text{para todo } x \in (-r, r). \tag{15}$$

Teorema del Límite de Abel

Concluimos este capítulo con el estudio de un teorema de Abel que constituye uno de los más grandes clásicos de la teoría de series de potencias.

Consideramos la igualdad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \text{para } -1 < x < 1.$$

tenemos que el primer miembro de esta igualdad tiene sentido para $x = -1$, aunque no es ese el caso para el segundo miembro, pues la serie es divergente. Resulta que existen casos donde la situación es un poco mejor. Recordemos el Ejemplo 20, en que se establece la siguiente igualdad:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{para } x \in (-1, 1).$$

Si en el primer miembro de la igualdad consideramos $x = -1$ obtenemos $\log 2$ y en el segundo miembro obtenemos la serie armónica alternada

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es convergente. El teorema de Abel demuestra también que para $x = 1$ se cumple la igualdad, es decir

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

TEOREMA 25 (TEOREMA DEL LÍMITE DE ABEL) *Supongamos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *converge para un* $r > 0$. *Si*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \textit{para } -r < x < r,$$

entonces existe el límite $\lim_{x \to r-} f(x)$ *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{x \to r-} f(x).$$

DEMOSTRACIÓN Para simplificar la notación supongamos que $r = 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente. Por la condición de Cauchy tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe un n tal que

$$|\alpha_m + \cdots + a_n| < \varepsilon \qquad \text{para todos } n, m \geq N.$$

Notemos que $1 \geq x \geq x^2 \geq x^3 \geq \cdots \geq 0$ pues $x \in [0, 1]$. Entonces por el Lema de Abel (Lema 5-2) tenemos

$$|a_m x^m + \cdots + a_n x^n| \leq |a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon. \qquad \text{para todos } n, m \geq N.$$

Entonces para todo $m \geq N$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \left(a_0 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}\right) \right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in [0, 1],$$

es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente sobre $[0, 1]$. Dado que cada $a_n x^n$ es continua sobre $[0, 1]$ por el Teorema 18 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{x \to r-} f(x). \quad \blacksquare$$

El desarrollo teórico alrededor del Teorema de Abel ha sido tan importante que se ha establecido la siguiente definición: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Abel** (o que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es **Abel convergente**) si

$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ existe. El Teorema 25 demuestra que toda serie convergente (en el sentido usual) también es Abel covergente, pero el recíproco no es cierto, como ilustra el ejemplo siguiente que no es más que una formalización parcial de la discusión al inicio de esta sección.

EJEMPLO 26 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es Abel convergente pero no convergente. En efecto si $a_n = (-1)^n$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n &= \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \\
&= \lim_{x \to 1-} \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{1}{2}. \ \square
\end{aligned}$$

A pesar de que el recíproco del teorema de Abel es falso, ciertos resultados parciales se pueden obtener considerando hipótesis adicionales para $\{a_n\}$. El matemático austríaco Alfred Tauber obtuvo el siguiente resultado en ese sentido. Varios recíprocos parciales del Teorema de Abel han sido demostrados y son conocidos en general como *teoremas tauberianos.*

TEOREMA 27 (TEOREMA DE TAUBER) *Supongamos que f está definida sobre el intervalo $(-1, 1)$ por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Supongamos además que $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$ y que $\lim_{x \to 1-} f(x) = \ell$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell.$$

DEMOSTRACIÓN Sea a_n la sucesión definida por

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} k|a_k|}{n},$$

entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N_1 tal que para todo $n \geq N_1$

$$a_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, entonces existe un número N_2 tal que para todo $n \geq N_2$

$$na_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $x_n = 1 - 1/n$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

Por tanto, existe un número natural N_3 tal que para todo $n \geq N_3$ tenemos:

$$|f(x_n) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, para $x \in (-1, 1)$ tenemos

$$s_n - \ell = f(x) - \ell + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, x^k.$$

Si $x \in (0, 1)$ entonces

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$

para cada k. Luego si $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ y $x \in (0, 1)$ tenemos

$$|s_n - \ell| \leq |f(x) - \ell| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|\,a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}.$$

Para $x = x_n$ obtenemos

$$|s_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

A continuación usamos el Teorema de Abel para completar nuestro estudio del producto de Cauchy (recordemos que, como comentamos en el Capítulo 6, este resultado era conocido por Cauchy, pero la primera demostración fue dada por Abel y es presentado en la introducción de uno de sus famosos trabajos sobre series que presentamos en el Capítulo 10).

TEOREMA 6-4 *Supongamos que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *y su producto de Cauchy* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *convergen, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

DEMOSTRACIÓN Por hipótesis tenemos que las series de potencias $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces por el Teorema de Abel tenemos

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Para todo $|x| < 1$, por la igualdad (15), tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n.$$

Entonces existe el límite $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n$, o sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es Abel convergente. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n \\
&= \lim_{x\to 1-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n \right) \\
&= \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \cdot \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para concluir esta sección establecemos sin demostración otro teorema tauberiano ligeramente más fuerte que el Teorema 27. Como compensación (o tal vez una justificación) por la ausencia de la prueba presentamos una anécdota del autor del teorema que ilustra el contexto de su descubrimiento con indicaciones sobre la forma de pensar de los matemáticos activos.

TEOREMA 28 (TEOREMA DE LITTLEWOOD) *Supongamos que f está definida sobre el intervalo* $(-1, 1)$ *por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Supongamos además que existe un número $k > 0$ tal que $na_n < k$ para todo n y que $\lim_{x\to 1-} f(x) = \ell$, *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell.$$

El resultado fue publicado en un artículo titulado *El recíproco del Teorema de Abel*. Un facsímil de la primera página del manuscrito bajo el título de *El Teorema de Abel* aparece en la página 92 de la referencia [12] de la *Reseña Bibliográfica* y, por supuesto, del mismo material se deriva la narración siguiente.

Littlewood, un reconocido analista del siglo XX se convirtió en miembro del cuerpo docente de la Universidad de Cambridge en Octubre de 1910 e inmediatamente se dedicó al examen de lo que el denominaba "el teorema de Abel–Tauber", desarrollando una prueba completa en el primer semestre de 1910. Este problema le había sido propuesto por Hardy quien había demostrado una versión más débil (conocida posteriormente como "el teorema de Cesàro–Tauber") pero aparentemente Littlewood no había prestado mucha atención al asunto en ese momento.

En su investigación, Littlewood consideró en primer lugar el teorema de Cesàro–Tauber encontrando una vía de solución para el problema más fuerte dependiendo de un resultado sobre funciones derivables y del cual se enteró después que había sido descubierto mucho tiempo atrás por Hadamard. En su narración de los hechos, Littlewood presenta una reflexión sobre este fenómeno, que si bien puede resultar controversial es una buena ilustración de su carácter y probablemente de la forma de actuar de la mayoría de los verdaderos matemáticos: "Por supuesto, una buena política que con frecuencia he practicado es empezar el trabajo sin indagar mucho en la literatura existente".

Un día estaba jugando con algunas ideas sobre el problema (teorema de Hadamard–Littlewood) su salón fue objeto de una jornada de limpieza general, así que salió a dar un paseo de dos horas bajo una fuerte lluvia de primavera y a lo largo del camino su mente se encontró de repente bajo una fuerte lluvia de ideas, en general muy confusas. En su forma final Littlewood presentó el teorema en términos geométricos y sostiene que en éste y otros casos similares eso es suficiente (como la Figura 1-9 en la discusión del teorema de punto fijo, Ejemplo 1-17). Así que se detuvo en un pequeño puente donde visualizó la solución al problema. Después de unos angustiosos 40 minutos en su puesto de trabajo se dedicó a verificar las ideas. Sobre la importancia de esta experiencia dijo: "Recordando esa época me parece que marca el arribo a un juicio y un gusto razonablemente seguros y el final de mi 'educación'. Poco después inicié mi colaboración de 35 años con Hardy".

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos decidir si la sucesión dada converge o no, y en caso de ser convergente decidir si la convergencia es uniforme o no.

(1) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ sobre $[0, 1]$.

(2) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ sobre $(1, +\infty)$.

(3) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ sobre $[-1, 1]$.

(4) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ sobre $[0, 1]$.

(5) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ sobre $[0, +\infty)$.

(6) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ sobre $[1, +\infty)$.

(7) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ sobre $\mathbf{R}$.

2 Demostrar las siguientes igualdades (sin preocuparse por el conjunto donde se cumple la igualdad).

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4\, x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log\frac{1}{1-x}$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}\, x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$

3 En cada uno de los siguientes casos hallar el valor de la suma indicada.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}.$

****4** Analizar la convergencia de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k}$ sobre $\mathbf{R}$. La definición de f_n es muy singular y no es de sorprender que la función límite sea a su vez muy especial, comúnmente denominada la *función de Dirichlet*, es muy importante para los estudiantes de Análisis Matemático elemental. *Indicación:* Si $x = p/q$ con $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, entonces existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $N!x \in \mathbf{Z}$.

****5** Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ sobre $\mathbf{R}$. *Indicación:* Abel presentó en una de sus memorias esta serie como parte de una crítica a algunas proposiciones establecidas por Cauchy.

CAPÍTULO

8

LA SERIE BINÓMICA

Los dos años que siguieron a la graduación de Newton en Cambridge –1665 y 1666– fueron años de epidemia de peste y, cuando la universidad se cerraba, Newton pasaba el tiempo en su hogar. Su madre había enviudado y regresado a Woolsthorpe. Aquí descubrió Newton su mina de oro: la matemática. . .

JACOB BRONOWSKI

Una de las vetas principales que Newton encontró es el relacionado a la generalización de la fórmula para la potencia de un binomio, considerando casos en que el exponente no es necesariamente un número natural, encontrando que el desarrollo correspondiente se puede escribir como una suma infinita.

Teorema del Binomio

En el dominio del Álgebra elemental encontramos la fórmula para el cálculo de la potencia de un binomio. Para todos los enteros $0 \leq k \leq n$, definimos los **coeficientes binomiales**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nótese que asumimos que $0! = 1$, por lo que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Es fácil verificar que las siguientes igualdades se cumplen para todo k y todo n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}, \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}. \tag{2}$$

La segunda ecuación sugiere el mecanismo mediante el cual se construye el *triángulo de Pascal*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

Con esta notación tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1 (TEOREMA DEL BINOMIO) *Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{$*$}$$

para todo número natural n.

DEMOSTRACIÓN Hacemos la demostración por el método de inducción matemática. Para $n = 1$ tenemos las igualdades obvias

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b.$$

Supongamos que la ecuación $(*)$ es válida para $n = h$, es decir

$$(a+b)^h = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} a^{h-k} b^k \tag{3}$$

Ahora debemos probar que la ecuación $(*)$ se cumple para $n = h+1$, es decir debemos probar que

$$(a+b)^{h+1} = \sum_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} a^{h+1-k} b^k. \tag{4}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^{h+1} &= (a+b)(a+b)^h \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^k \\ &= (a+b)\left[\binom{h}{0}a^h + \binom{h}{1}a^{h-1}b + \cdots + \binom{h}{h}b^h\right] \\ &= \binom{h}{0}\alpha^{h+1} + \binom{h}{1}a^h b + \binom{h}{2}a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h}{h}ab^h \\ &\qquad + \binom{h}{0}a^h b + \binom{h}{1}a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h}{h-1}ab^h \\ &\qquad\qquad + \binom{h}{h}b^{h+1},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}(a+b)^{h+1} &= \binom{h}{0}a^{h+1} + \left[\binom{h}{0} + \binom{h}{1}\right]a^h b^2 \\ &\quad + \left[\binom{h}{1} + \binom{h}{2}\right]a^{h-1}b^2 + \cdots + \left[\binom{h}{h-1} + \binom{h}{h}\right]ab^h \\ &\quad + \binom{h}{h}b^{h+1}.\end{aligned}$$

Ahora aplicando la ecuación (2) y el hecho de que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo n obtenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^{h+1} &= \binom{h+1}{0}a^{h+1} + \binom{h+1}{1}a^h b \\ &\quad + \binom{h+1}{2}a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h+1}{h}ab^h + \binom{h+1}{h+1}b^{h+1}.\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación $(*)$ es válida para todo número natural n. ∎

Con frecuencia la ecuación $(*)$ es descrita como "el binomio de Newton", aunque lo que él hizo fue algo mucho más profundo al considerar la posibilidad de extender la fórmula para valores no enteros de n. En tal caso, los coeficientes binomiales, como han sido definidos arriba, carecen de sentido, pero podemos utilizar la ecuación (1) para definir estos coeficientes de una forma más general. Observemos que utilizando esta forma, el teorema del binomio puede escribirse así

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n}b^n.$$

Para simplificar un poco la notación podemos escribir $x = b/a$ y entonces la ecuación anterior toma la apariencia más clásica:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n}x^n.$$

Entonces, para cualquier número real α y para cada número natural k definimos el coeficiente binomial $\binom{\alpha}{k}$ por

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

y queremos verificar que se cumplen las igualdades siguientes

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\\ &= 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots .\end{aligned}$$

De esta forma, el logro de Newton en términos modernos está dado por el siguiente teorema.

TEOREMA 2 (LA SERIE BINÓMICA) *Si α es un número real cualquiera, entonces*

$$(**)\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

para todo x con $|x| < 1$.

En la siguiente sección presentamos tres demostraciones del Teorema 2 con argumentos y técnicas diferentes entre sí y con un sólo punto en común: el hecho de que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge para todo $|x| < 1$; lo cual se prueba usando el criterio del cociente. En efecto, si escribimos $a_n = \binom{\alpha}{n}x^n$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\\ &= \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}\\ &= \frac{\alpha-n}{n+1}x.\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\,x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\,|x| = |x|.$$

Por tanto $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge si $|x|<1$. En particular

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| = 0, \tag{5}$$

PRUEBA DE LA SERIE BINÓMICA

A continuación presentamos tres demostraciones de la serie binómica. En la primera, la herramienta fundamental es usar tanto la forma de Cauchy como la forma de Lagrange del resto para demostrar que éste tiende a 0. En la segunda se usa de manera indirecta la forma integral con el mismo fin. En la tercera, más elegante que las otras, se utilizan algunas técnicas elementales de ecuaciones diferenciales.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Notemos que si f está definida por $f(x)=(1+x)^\alpha$, entonces para todo k tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha\,(1+x)^{\alpha-1},\\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)\,(1+x)^{\alpha-2},\\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,(1+x)^{\alpha-3},\\
&\ \ \vdots\\
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\,(1+x)^{\alpha-k}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de grado n centrado en 0 para f viene dado por

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\,x^k.
\end{aligned}$$

Supongamos que $0\le x<1$, entonces la forma de Lagrange del resto (Teorema 1-1) es:

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}\,x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1},$$

siendo ξ un punto cualquiera en el intervalo $(0, x)$. Luego, puesto que $(1+\xi)^{\alpha-n-1} \leq 1$, tenemos

$$|R_n(x)| = \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1} \right| \leq \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right|.$$

Entonces por la ecuación (5) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Ahora supongamos que $-1 < x < 0$. Entonces la forma del resto de Cauchy es

$$R_n(x) = (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\, x(x+\xi)^{\alpha-1} \left(\frac{x-\xi}{x+\xi}\right)^n,$$

para algún $\xi \in (x, 0)$. Si $M = \max(1, (1+x)^{\alpha-1})$, resulta que

$$(x+\xi)^{\alpha-1} \leq 1 \qquad \text{si } \alpha \geq 1,$$

y

$$(x+\xi)^{\alpha-1} < (1+x)^{\alpha-1} \leq M \qquad \text{si } \alpha < 1.$$

Entonces

$$|x(x+\xi)^{\alpha-1}| \leq |x|M,$$

es decir

(6) $$|x(x+\xi)^{\alpha-1}| \leq M.$$

Además $\xi \geq x\xi$, luego

$$x + x\xi \leq x - \xi < 0,$$

luego

$$0 < \frac{x-\xi}{x} \leq 1 + \xi \qquad \text{pues } x < 0.$$

De donde

(7) $$0 < \frac{(x-\xi)/x}{1+\xi} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi}{1+\xi} \leq 1 \qquad \text{pues } 1+\xi > 0.$$

Así

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|(n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\, x(x+\xi)^{\alpha-1}\left(\frac{x-\xi}{x+\xi}\right)^n\right| \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\, x^{n+1}(x+\xi)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi}{x+\xi}\right)^n\right| \\ &= \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n} x^n\, x(x+\xi)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi}{x+\xi}\right)^n\right|. \end{aligned}$$

Entonces por las desigualdades (6) y (7) obtenemos

$$|R_n(x)| \leq |\alpha M| \cdot \left| \binom{\alpha - 1}{n} x^n \right|.$$

Aplicando de nuevo la ecuación (5) deducimos

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0. \quad \blacksquare$$

La siguiente prueba de la serie binómica tiene una apariencia un poco más oscura que la anterior. Utilizando la forma integral del resto a través del teorema de Bernstein se comprueba que el resto tiende a 0.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Sean $\alpha > 0$ y φ la función definida para $0 < x < 1$ por

$$\varphi(x) = (1 - x)^{-\alpha}.$$

Luego, para todo n tenemos

$$\varphi^{(n)}(x) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)(1 - x)^{-\alpha - n}.$$

De donde

$$\varphi^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \text{para todo } n \geq 0 \text{ y todo } x < 1.$$

Entonces por el teorema de Bernstein (Teorema 7-24) tenemos que φ se puede desarrollar en serie de potencias sobre $[-1, 1)$ y por tanto tiene desarrollo en serie de potencias alrededor de 0, es decir, la serie

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

converge sobre $(-1, 1)$.

Pero

$$\varphi^{(n)}(0) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (c + n - 1) = (-1)^n \, n! \binom{-\alpha}{n}.$$

Entonces

$$(1 - x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\alpha}{n} x^n, \qquad \text{para todo } x \in [0, 1).$$

Es fácil verificar que esta ecuación también es cierta para $\alpha < 0$ (reemplazando α por $-\alpha$ y x por $-x$). $\blacksquare$

Finalmente tenemos la otra prueba de la serie binómica.

TERCERA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Sea f la función definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, para todo x con $|x| < 1$. Entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \binom{\alpha}{n} x^n + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \right] x^n.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
n \binom{\alpha}{n} x^n + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} &= n \, \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \\
&\quad + (n+1) \, \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(\alpha-n+n)}{n!} \\
&= \alpha \, \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} = \alpha \binom{\alpha}{n}.
\end{aligned}$$

Entonces nos queda que para todo x, si $|x| < 1$ se cumple

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x).$$

Sea ψ la función definida sobre $(-1, 1)$ por

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}.$$

Luego

$$\psi'(x) = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0$$

sobre $(-1, 1)$. Entonces, por el teorema del valor medio existe una constante C, tal que $\psi(x) = C$ para todo $x \in (-1, 1)$. Es decir

$$f(x) = C(1+x)^{\alpha}.$$

Para determinar el valor de C tomemos $x = 0$, entonces

$$C = f(0) = 1,$$

Luego $f(x) = (1 + x)^\alpha$ sobre $(-1, 1)$, es decir,

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \quad \blacksquare$$

Dos Cartas de Newton

El resto de este capítulo trata de la lectura de dos cartas de Newton dirigidas a Leibniz en las que el científico inglés informa sobre sus progresos en el estudio de las series infinitas, especialmente sobre la serie binómica. Los documentos son de gran importancia tanto por razones técnicas, como por razones históricas. Sobre la primera misiva, las secciones previas deben aclarar algo, y para aportar algunos elementos sobre la segunda, presentamos a continuación información sobre el contexto histórico.

Newton obtuvo el grado de Bachelor of Arts en el Trinity College de la Universidad de Cambridge en 1664 y al año siguiente brotó una epidemia de peste en Inglaterra que duró aproximadamente dos años. Por este motivo Newton se trasladó a su casa materna en Woolsthorpe donde tuvo una época muy productiva, generalmente conocidos como los *Anni mirabilis*; durante la mayor parte de este tiempo la universidad estuvo cerrada y Newton fue a su casa de Woolsthorpe, donde se dedicó a sus investigaciones privadas. En un recuento que hizo muchos años más tarde escribió:

> A principios del año 1665 encontré el Método de aproximación por series y la Regla para reducir cualquier dignidad de cualquier Binomio a una de tales series. En Mayo del mismo año hallé el método de Tangentes de Gregory y Slusiyus, y en Noviembre obtuve el método directo de fluxiones y en Enero del año siguiente obtuve la Teoría de los Colores y en Mayo siguiente encontré el método inverso de fluxiones. Y el mismo año empecé a pensar en extender la gravedad a la órbita de la Luna... Todo esto fue en los años de la peste 1665–1666. Pues en aquellos días estaba en lo mejor de mi edad para la invención y pensaba en Matemáticas y Filosofía más que en cualquier otro tiempo desde entonces. *

A su regreso a la universidad, Newton comunicó algunos de sus logros a su maestro, Isaac Barrow, quien desde su fundación ocupaba la Cátedra Lucasiana de Matemáticas en Cambridge, pero por lo demás, todos permanecieron en secreto. Hacia principios de 1668 el matemático londinense John Collins envió a Barrow un ejemplar de la obra *Logaritmotechnia*, del matemático y astrónomo Nicolaus Mercator, en la que se describen técnicas para calcular el área bajo una hipérbola. Hacia julio de ese año Barrow

*El texto es una traducción libre del material citado en el libro de Westfall [24], p. 39.

respondió informando sobre un amigo suyo "que tiene un excelente genio para esas cosas, me trajo el otro día unos papeles, donde había desarrollado métodos para calcular las dimensiones de magnitudes como el de S^{r} Mercator acerca de la hipérbola, pero muy generales. . . " †

Cuando Barrow escribió esto a Collins ya había convencido a Newton de publicar, al menos parcialmente, sus resultados. En efecto, poco después Collins recibió de parte de Barrow un manuscrito anónimo, en latín, titulado *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas* (*Sobre el Análisis por Series Infinitas*), referido frecuentemente como *De Analysi*. En agosto, Barrow reveló la identidad del autor: "su nombre es S^{r} Newton; un *fellow* de nuestra Facultad y muy joven (de hecho, estudiante del segundo año para Master of Arts), pero de un genio extraordinario y profundo conocimiento de estas cosas". ‡ Collins se comprometió a no mostrar el contenido del ensayo así como tampoco informar sobre su autor sin la autorización explícita de Newton. En 1676, Henry Oldenburg, quien ocupaba el cargo de Secretario de la Royal Society de Londres, recibió una carta de Leibniz solicitándole información sobre los avances en Inglaterra en el tema de series infinitas (parte de las funciones del Secretario era actuar como intermediario entre los miembros de la comunidad científica). Oldenburg envió la carta a Newton, quien para entonces era ya el reconocido profesor lucasiano de matemáticas y se encontraba inmerso en una disputa con el científico londinense Robert Hooke sobre su teoría de los colores. A pesar de esta circunstancia, Newton accedió a responder y en junio envió una carta a Oldenburg, una copia de la cual fue transmitida a Leibniz el 26 de julio. Éste examinó el documento y escribió de nuevo, informando sobre sus propios trabajos, solicitando algunos detalles adicionales y elogiando la obra de Newton:

> Su carta contiene más numerosas y más notables ideas acerca del análisis que muchos tomos voluminosos publicados sobre el tema. . . Los descubrimientos de Newton son dignos de su genio, el cual es tan abundantemente puesto de manifiesto por sus experimentos ópticos y por su tubo catadióptrico [telescopio de reflexión]. §

Newton redactó una segunda carta para Leibniz en octubre, una semana después que el destinatario hubiese concluido una visita de diez días a Londres, durante la cual Collins le dió acceso a *De Analysi*, sin el conocimiento de Newton. Años más tarde, Newton se enteró de la indiscreción de Collins. Leibniz recibió la carta en junio de 1677. Aproximadamente cuatro décadas más tarde se desarrollaba uno de los más lamentables y amargos episodios en la historia de las matemáticas: la controversia entre Newton y Leibniz sobre la prioridad en la invención del Cálculo. Newton argumentaba que él había desarrollado primero esta teoría y que Leibniz había

---

† Esta nota también es traducida de una cita en el libro de Westfall [24], p. 68.

‡ La carta aparece citada en [24], p. 68.

§ También ésta es de una cita en [24], p. 99.

cometido plagio, porque supuestamente el científico alemán había visto su versión del Cálculo en el manuscrito que custodiaba Collins y, además porque había leído algunos de los elementos en su correspondencia.

Por su parte los seguidores de Leibniz publicaban obras utilizando las técnicas y la notación inventadas por su maestro a la vez que argumentaban que éstas habían sido inventadas antes que las de Newton y que eran muy superiores. La reacción de los ingleses fue inmediata y se desarrolló un fuerte intercambio de acusaciones de ambos lados. La controversia se extendió por muchos años y muchos científicos se vieron involucrados, algunos actuando de forma no muy honesta; hasta que la Royal Society (que era prácticamente controlada por Newton) estableció un comité especial para estudiar el caso.

El veredicto de éste comité fue favorable al científico inglés. Entre los elementos probatorios de su posición Newton presentó copias de las cartas que había enviado a Leibniz identificadas con las expresiones latinas *Epistola Prior* (primera carta) y *Epistola Posteriori* (carta posterior). Hoy en día se acepta que los dos científicos inventaron cada uno por su cuenta el Cálculo y que no hubo plagio alguno.

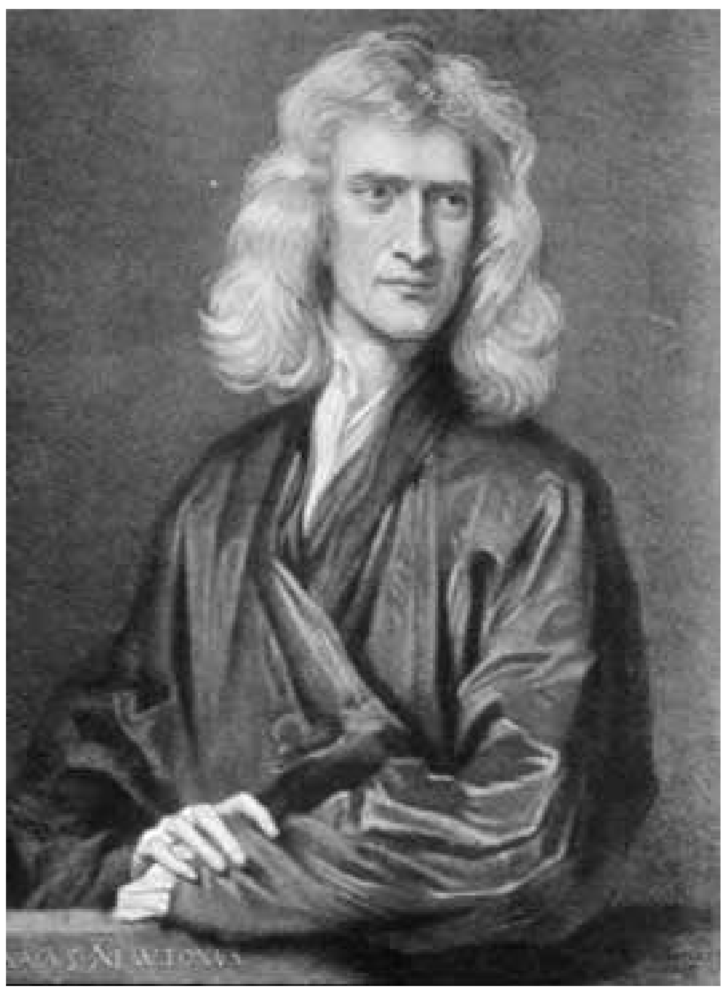


FIGURA 1: Retrato de Isaac Newton pintado en Cambridge por Godfrey Kneller en 1689.

Epistola Prior

La traducción la *Epistola Prior* está basada sobre la versión en inglés que aparece en *A Source Book in Mathematics* por David Eugene Smith, Dover, Nueva York, 1959. ([15], pp. 224–225). Otra traducción pero presentada en un estilo más moderno se encuentra en el tomo 4 de la colección *Sigma, El Mundo de las Matemáticas*, por J. R. Newman ([16], pp. 112–115).

La expresión &c es una forma antigua de escribir *et cetera*.

EPISTOLA PRIOR

Carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried W. Leibniz
a través de Henry Oldenburg
Cambridge, 13 de Junio de 1676

Aunque la modestia del Dr. Leibniz en los Extractos de su Carta que usted recientemente me envió, atribuye demasiado a mi trabajo en ciertas Especulaciones relativas a las *Series Infinitas*, rumor del cual se ha empezado a expandir ya, no tengo duda de que él ha hallado no sólo un método para reducir Cantidades cualesquiera a Series de este tipo, *como él mismo asegura*, sino que también ha hallado varios *Compendia*, similares a los nuestros, si no mejores.

Sin embargo, puesto que él desea saber los descubrimientos que han sido hechos por los ingleses en este sentido (yo mismo caí en esta Especulación hace algunos años) y con el fin de satisfacer sus deseos, al menos en cierto grado, le he enviado a usted algunos puntos que se me han ocurrido.

Las fracciones pueden ser reducidas a Series Infinitas por División y las Cantidades Radicales pueden ser también reducidas por Extracción de Raíces. Estas Operaciones pueden ser extendidas a Especies de la misma forma en que se aplican a Números Decimales. Estos son los Fundamentos de las Reducciones.

La Extracción de Raíces se reduce mucho por el Teorema

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{4n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

donde $P+PQ$ representa una Cantidad cuya Raíz o Potencia o cuya Raíz de una Potencia se desea hallar, siendo P el primer Término de esa cantidad y Q los términos restantes divididos por el primer término y $\frac{m}{n}$ el Índice numérico de las potencias de $P+PQ$. Este puede ser un Número Entero o (digamos) un Número Quebrado; un número positivo o uno negativo. Como escriben los Analistas, a^2 y a^3 por aa y aaa, así para $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c\,.\,a^5}$, &c. Escribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$, etc.; para $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$ a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}; y para $\frac{aab}{\sqrt{c:\overline{a^3+bbx}\times\overline{a^3+bbx}:}}$, escribo $aa\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. En este último caso, si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ se toma como $P+PQ$ en la Fórmula, entonces $P=a^3$, $Q=bbx/a^3$, $m=-2$, $n=3$.

Finalmente, en lugar de los términos que ocurren en el curso del trabajo en el cociente, usaré A, B, C, D, etc. Así A representa el primer término $P^{\frac{m}{n}}$; B el segundo término $\frac{m}{n} A Q$; y así sucesivamente. El uso de esta Fórmula se hará claro mediante Ejemplos.

EPISTOLA POSTERIORI

La traducción la *Epistola Posteriori* está basada sobre la versión en inglés que aparece en *A Source Book in Mathematics* por David Eugene Smith, Dover, Nueva York, 1959. ([15], pp. 225-228).

La referencia es a la obra del matemático inglés John Wallis (1616–1703) quien publicó algunos de los resultados de Newton (entre ellos la serie binómica) en el libro *De Algebra Tractatus, Historicus & Practicus.*

Esto es $\overline{1 - xx|}^{\frac{1}{2}} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - x^2}$.

EPISTOLA POSTERIORI

Carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried W. Leibniz

a través de Henry Oldenburg

Cambridge, 23 de Octubre de 1676

Uno de mis propios [métodos para deducir las series infinitas] lo describí antes; y ahora voy a agregar otro, a saber, la forma en la que descubrí estas Series, pues las hallé antes de saber las Divisiones y Extracción de Raíces que ahora uso. La explicación de este método dará la base del Teorema dado al principio de mi Carta anterior el cual el Dr. Leibniz desea.

El inicio de mi estudio de Matemáticas, ocurrió sobre la obra de nuestro más Celebrado Wallis y sus consideraciones de las Series mediante cuya intercalación él muestra los valores del Área de un Círculo y una Hipérbola, y de esa serie de curvas que tienen una Base o Eje x y cuyas Ordenadas son de la Forma $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$. &c. Entonces si las Áreas de las alternadas, las cuales son x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$, &c. tendrían valores interpolados entre estos términos, deberíamos tener las Áreas de los intermedios, el primero de los cuales $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ es el Círculo. Por estas interpolaciones, noté que el primer término de cada uno es x y que el segundo término $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, &c., están en progresión Aritmética. Así los dos primeros términos de la Serie que deben ser intercalados deberían ser $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{2}{3}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{5}$, &c.

Intercalando el resto, consideré que los Denominadores 1, 3, 5, 7, &c. estaban en progresión Aritmética y así sólo se requeriría investigar los Coeficientes Numéricos de los Numeradores. Además, en las Áreas alternadas dadas, éstas eran las figuras de las potencias el onceavo número, a saber, 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Es decir, primero 1, luego 1, 1, tercero 1, 2, 1, cuarto 1, 3, 3, 1, quinto 1, 4, 6, 4, 1, &c. Por tanto, busqué un método para deducir el resto de elementos en estas Series, habiendo dado las dos primeras figuras. Encontré que cuando la segunda figura m era dada, el resto se produciría por multiplicación continua de los términos de esta Serie:

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}\ \&c.$$

Por Ejemplo: Sea (el segundo término) $m=4$, entonces el tercer término será $4\times\frac{m-1}{2}$, es decir 6; y $6\times\frac{m-2}{3}$, es decir 4, el cuarto;

Es decir

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)=&\\ =1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots&\\ =-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6-\cdots&\\ =-\frac{1}{16}x^6-\cdots&\\ =1-x^2.&\end{aligned}$$

y $4 \times \dfrac{m-3}{4}$ es decir 1, el quinto; y $1 \times \dfrac{m-4}{5}$, es decir 0, el sexto donde la serie termina en este caso.

Por tanto, apliqué esta Regla a la Serie a ser insertada. Así para el Círculo, el segundo término sería $\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, entonces coloqué $m = \frac{1}{2}$, y los términos que resultaron fueron $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{1}{2}-1}{2}$ o $-\dfrac{1}{8}$, $-\dfrac{1}{8} \times \dfrac{\frac{1}{2}-2}{3}$ o $+\dfrac{1}{16}$, $+\dfrac{1}{16} \times \dfrac{\frac{1}{2}-3}{4}$ o $-\dfrac{5}{128}$, y así infinitamente. De esto supe que el Área deseada de un segmento de Círculo es

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \text{ \&c.}$$

Por el mismo proceso se hallaron las áreas de las Curvas restantes, como el área de una Hipérbola, y de las otras alternadas en esta Serie $\overline{1-xx|}^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx|}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1-xx|}^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx|}^{\frac{3}{2}}$, &c.

El mismo método puede ser usado para intercalar otras Series, inclusive con intervalos de dos o más términos faltantes al mismo tiempo.

Esta fue mi primer entrada a estos estudios; lo cual seguramente se me habría escapado de la memoria de no haber hecho referencia a ciertas notas hace pocas semanas.

Pero cuando supe esto, inmediatamente consideré que los términos $\overline{1-xx\,|}^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx\,|}^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx\,|}^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx\,|}^{\frac{6}{2}}$, &c. es decir 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, etc. serían interpolados de la misma forma y las áreas serían deducidas de ellas; y que para esto no se requiere nada más que la omisión de los denominadores 1, 3, 5, 7, etc. en los términos que expresan las áreas, es decir, los coeficientes de los términos de la cantidad a ser intercalada $\overline{1-xx\,|}^{\frac{1}{2}}$, o $\overline{1-xx\,|}^{\frac{3}{2}}$, o más generalmente $\overline{1-xx\,|}^{m}$ se produciría por multiplicación continua de los términos de esta Serie $m \times \dfrac{m-1}{2} \times \dfrac{m-2}{3} \times \dfrac{m-3}{4}$ &c. Así, (por ejemplo) $\overline{1-xx\,|}^{\frac{1}{2}}$ resultaría $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. Y $\overline{1-xx\,|}^{\frac{3}{2}}$ se convertiría en $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$ etc. Y $\overline{1-xx\,|}^{\frac{1}{3}}$ sería $1 - \frac{1}{3}xx + \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{81}x^6$ &c.

Así la Reducción general de Radicales a Series se volvió conocida para mí a través de la Regla que establecí al principio de la Carta anterior, antes de conocer la Extracción de Raíces. Pero, habiendo aprendido esto, lo otro no podía permanecer oculto para mí por mucho tiempo. Para probar estas operaciones, multipliqué $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. por sí mismo, y resultó $1 - xx$, el resto de los términos se desvanecieron en el infinito por la continuación de la serie.

Similarmente $1 - \frac{1}{3}xx + \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{81}x^6$ &c. fue multiplicado dos veces por sí mismo y produjo $1 - xx$. Lo cual indica que éstas pueden ser consideradas como una Demostración de estas conclusiones, me llevaron naturalmente a tratar el recíproco, para ver si estas Series las cuales eran ciertamente Raíces de la cantidad $1 - xx$ no podrían ser extraídas por medios Aritméticos. El intento fue exitoso...

Habiendo descubierto esto, abandoné por completo la interpolación de Series, y usé estas operaciones solamente como una base más genuina, tampoco fallé en descubrir la Reducción por División, un método ciertamente más fácil.

CAPÍTULO

SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS

9

...Lagrange, Laplace y Gauss conocieron y siguieron las obras de Euler...El Introductio *de 1748 cubrió en sus dos tomos una amplia variedad de temas. Contiene una exposición sobre series infinitas incluyendo aquellas para* e^{x}*, sen* x *y cos* x*, y presenta la relación* $\mathrm{e}^{\mathrm{ix}} = cos\,\mathrm{x} + \mathrm{i}\, sen\,\mathrm{x}$ *(que ya había sido descubierta por Johann Bernoulli y otros en diferentes formas).*

DIRK J. STRUIK

Durante los últimos capítulos, la actividad en nuestro juego de las series se ha concentrado en el estudio de algunos movimientos o partidas especiales jugadas por grandes maestros. Ahora vamos a realizar el trabajo de explorar otras variantes de juego, como cuando se juega con tres ejércitos o con una pieza adicional, que en realidad constituyen otros juegos y por tanto tienen sus propias técnicas y estrategias, pero que conservan algo del aroma del juego original.

El objetivo de este corto capítulo es explorar la noción de serie en el contexto del campo $\mathbf{C}$ de los números complejos. En general asumimos que el lector posee conocimiento de la estructura algebraica de $\mathbf{C}$ y de su descripción geométrica.

Sucesiones Complejas

Por supuesto, iniciamos nuestra aproximación al problema mediante la introducción del concepto de sucesión. Una **sucesión compleja** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido es un subconjunto de $\mathbf{C}$. Como en el caso de sucesiones reales, utilizamos la notación $\{z_n\}$ para denotar una sucesión arbitraria con términos en $\mathbf{C}$. Notemos que para cada n existen dos números $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ (Figura 1), tales que

$$z_n = a_n + i b_n.$$

Estos números son la *parte real* y la *parte imaginaria* de la sucesión respectivamente.

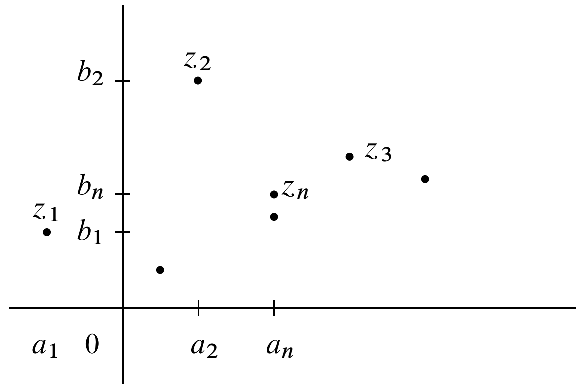


FIGURA 1.

Decimos que una sucesión compleja $\{z_n\}$ **converge** hacia l si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo n, si $n \geq N$ entonces $|z_n - l| < \varepsilon$ (Figura 2). En este caso escribimos $z_n \to l$ cuando $n \to \infty$ o simplemente $\lim_{n\to\infty} z_n = l$. Si $\{z_n\}$ no converge, decimos que **diverge**.

A continuación presentamos un par de resultados evidentes que trasladan los problemas de convergencia de sucesiones complejas al escenario de sucesiones reales.

TEOREMA 1 *Una sucesión compleja $\{z_n\}$ converge hacia l si y sólo si la sucesión de números reales $\{|z_n - l|\}$ converge hacia 0.*

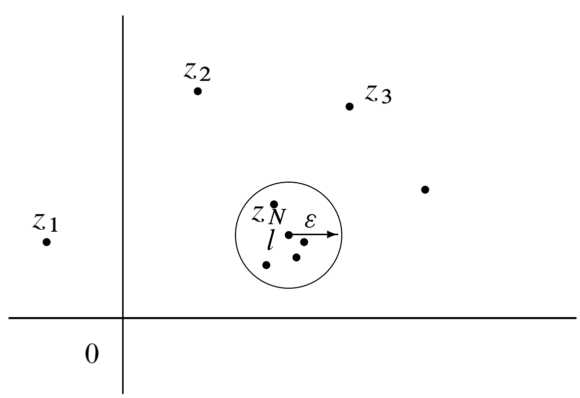


FIGURA 2.

En el siguiente resultado utilizamos la parte real y la parte imaginaria para estudiar la convergencia de una sucesión compleja.

TEOREMA 2 *Supongamos que $z_n = a_n + i b_n$ para todo n. entonces la sucesión $\{z_n\}$ converge hacia $l = a + ib$ si y sólo si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen hacia a y b respectivamente.*

También resulta evidente que los teoremas sobre el álgebra de límites para sucesiones reales se pueden extender al contexto de sucesiones complejas. Una forma corta y fácil de desarrollar esta tarea es utilizando el Teorema 2.

Series Complejas

Ahora disponemos de los ingredientes fundamentales para estudiar el problema de la convergencia de series en el contexto de los números complejos. Si $\{z_n\}$ es una sucesión compleja, definimos la sucesión de **sumas parciales** $\{S_n\}$ de $\{z_n\}$ por

$$S_n = z_1 + \cdots + z_n.$$

Entonces decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **converge** si la sucesión $\{S_n\}$ converge. Si $\{S_n\}$ diverge decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **diverge**.

Notemos que si $z_n = a_n + i b_n$ para todo n, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ está determinada por las dos series reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y, tenemos el siguiente corolario del Teorema 2.

TEOREMA 3 *Supongamos que $z_n = a_n + i b_n$ para todo n. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen. Y tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Finalmente, para ampliar la posibilidad de usar nuestros conocimientos sobre series reales analizamos la serie $\sum |z_n|$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **converge absolutamente** si la serie (real) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge. Resulta evidente que si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces también converge y se cumple la siguiente desigualdad

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

TEOREMA 4 *Supongamos que $z_n = a_n + i b_n$ para todo n. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que la serie $\sum z_n$ converge absolutamente, es decir que $\sum |z_n|$ converge. Pero, para todo n tenemos

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = |z_n|$$

y

$$|b_n| \leq \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = |z_n|,$$

entonces, por el criterio de comparación deducimos que las series $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen.

Ahora supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen absolutamente, entonces $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen y, por tanto, $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge. Pero

$$|z_n| = |a_n + i b_n| \leq |a_n| + |b_n| \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces, aplicando de nuevo el criterio de comparación tenemos que $\sum |z_n|$ converge. ▮

Convergencia Uniforme

Por supuesto, disponiendo de la noción de convergencia para series complejas podemos estudiar la convergencia de series de funciones complejas.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto $A \subset \mathbf{C}$, decimos que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia una función f sobre A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo n, si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } z \in A.$$

Análogamente decimos que la serie de funciones complejas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** sobre A, si la sucesión $\{S_n\}$ converge uniformemente sobre A, donde $S_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ para todo $z \in A$.

En particular estamos interesados en *series de potencias complejas*, es decir series de funciones complejas de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

donde a y a_n son número complejos. Como en el caso de las series de potencias reales, podemos concentrar nuestra atención a series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

En primer lugar notemos que si $a_n = a_n z^n$ tenemos

$$|a_n|^{1/n} = |a_n|^{1/n} |z|,$$

entonces, de acuerdo con el criterio de la raíz la serie $\sum |a_n z^n|$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |z| = |z| \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1.$$

Como en el caso de las series de potencias reales, si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$, denominamos **radio de convergencia** de la serie $\sum a_n z^n$ al número

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

y al círculo determinado por $|z| < r$ lo llamamos el **círculo de convergencia** (Figura 3).

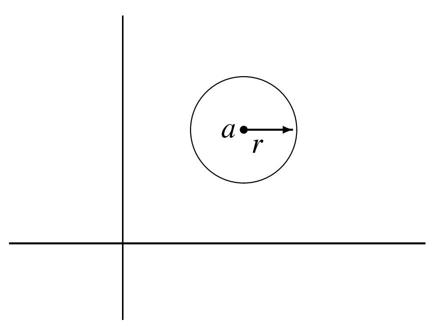


FIGURA 3.

También en este caso establecemos las convenciones $r = +\infty$ si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, en cuyo caso el círculo de convergencia es $\mathbf{C}$ y, $r = 0$

si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, en cuyo caso el círculo de convergencia se reduce a $\{0\}$.

Para la manipulación formal de series de potencias complejas necesitamos el equivalente al Teorema 7-18.

TEOREMA 5 *Supongamos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0{}^n$ *converge para algún* $z_0 \neq 0$. *Entonces para cualquier* $z \in \mathbf{C}$ *con* $0 < |z| < |z_0|$ *las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

convergen absolutamente.

DEMOSTRACIÓN Puesto que la serie $\sum a_n z_0{}^n$ converge, la condición del resto implica que la sucesión $|a_n z_0{}^n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, está acotada, es decir existe un M tal que

$$|a_n z_0{}^n| \leq M \qquad \text{para todo } n.$$

Para z con $0 < |z| \leq |z_0|$, tenemos

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n| \cdot |z^n| \\ &= |a_n| \cdot |z_0{}^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \\ &\leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \end{aligned}$$

Escribiendo $M_n = M|z/z_0|^n$ nos queda

$$|a_n z^n| \leq M_n.$$

Como $z < |z_0|$ tenemos que la serie geométrica $\sum |z/z_0|^n$ converge y por tanto también $\sum M_n$. Entonces por el criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para todo z con $|z| < 1$.

Notemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|z|} n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{|z|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

converge (por el criterio del cociente) entonces, aplicando nuevamente el criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente si $|z| < 1$. ▮

Ahora presentamos una proposición equivalente a la segunda parte del Teorema 7-18.

TEOREMA 6 *Supongamos que la serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tiene radio de convergencia $r > 0$, *entonces* f *es derivable en* z *si* $|z| < r$ *y*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Del Teorema 6 se deriva que si una función f se puede desarrollar en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{para todo } n,$$

es decir, la serie de potencias es la *serie de Taylor* de f.

La introducción de series de potencias complejas no es solamente un esfuerzo por hacer el juego un poco más extenso, en realidad las propiedades de éstas arrojan cierta luz sobre algunos problemas relacionados con series de potencias reales, como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 7 Sea f la función definida sobre $\mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En el Ejemplo 7-23 demostramos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$ y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \qquad \text{para todo } x.$$

Pero como $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, tenemos pues, que la serie de Taylor de f converge hacia $f(x)$ solamente cuando $x = 0$.

Una explicación para el comportamiento anómalo de esta función se obtiene si consideramos f definida sobre $\mathbf{C}$ así

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Notemos que si f tuviese desarrollo en serie de potencias para algún $z_0 \neq 0$ entonces tendría desarrollo en serie de potencias en algún círculo que contiene a 0 y sería continua y acotada sobre un círculo $|z| \leq r$. Pero, si tomamos números de la forma $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$ con $|y| < r$ tenemos

$$f(z) = e^{-1/z^2} = e^{-1/(iy)^2} = e^{1/y^2},$$

y en consecuencia, si $z \to 0$, entonces $y \to 0$ y $f(z) \to +\infty$, lo cual contradice el hecho de que z está acotada. $\square$

Concluimos este capítulo con el examen de un conjunto de series muy importantes y la presentación de una de las fórmulas más curiosas en todas las matemáticas.

EJEMPLO 8 Es fácil demostrar que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

tienen radio de convergencia $= \infty$, así que podemos *defininir* las funciones sen, cos y exp sobre $\mathbf{C}$ por las siguientes igualdades (coincidiendo con sus equivalentes reales)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{y} \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos $\operatorname{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\operatorname{sen}$. Utilizando estas definiciones Euler obtuvo todo un conjunto de identidades interesantes. Por ejemplo, si consideramos la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

luego, dividiendo por z queda

$$1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots = 0.$$

Ahora, haciendo el cambio $w = z^2$ tenemos

$$1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \cdots = 0.$$

Entonces, utilizando "teoría de ecuaciones", tenemos que la suma de los recíprocos de las raíces de esta ecuación es el opuesto del coeficiente del término lineal, es decir $1/6$. Pero las raíces de "polinomio infinito" son π, 2π, 3π,... Entonces

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots,$$

es decir

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + +\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

Otro uso de estas definiciones llevó a Euler a una fórmula muy importante. Notemos que

$$\begin{aligned}
\cos z + i \ \operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) \\
&= 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots \\
&\qquad\qquad + \left(iz + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \right) \\
&= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

es decir

$$e^{iz} = \cos z + i \ \operatorname{sen} z.$$

En particular, para $z = \pi$ tenemos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \ \operatorname{sen} \pi,$$

de donde

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta fórmula tiene la particularidad de que involucra los cinco números más importantes en el Cálculo. $\square$

Un Texto de Euler

Para concluir este capítulo estudiamos un juego muy importante desarrollado por uno de los grandes maestros de toda la historia de las matemáticas: Leonhard Euler. El trabajo original fue publicado en latín como un libro de texto titulado *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748). Hemos incluido aquí esta obra, entre otros motivos, porque facilita la comprensión de la evolución histórica de la noción de suma infinita. Siguiendo a la generación de Newton, la de Euler extendió las aplicaciones del Análisis a diversas áreas de las matemáticas, en muchos casos sin aportar pruebas rigurosas, pero obteniendo resultados válidos que luego formalizaron los analistas modernos de la generación de Abel y otros.

Considerado el más eminente científico nacido en Suiza, Euler fue un prolífico matemático cuyo trabajo contribuyó profundamente al desarrollo del Cálculo y otras disciplinas, tanto en el plano teórico como en el de las aplicaciones. Álgebra, aritmética, ecuaciones diferenciales, dinámica de fluidos, geometría diferencial, mecánica y teoría de números, son todas áreas en las que se encuentras su huellas; inclusive en topología, una disciplina matemática moderna que se desarrolló en el siglo XX tiene entre sus orígenes un trabajo de Euler en el que consiguió resolver un famoso rompecabezas conocido como “el problema de los puentes de Königsber” que trata de una isla en la ciudad, la cual está rodeada por dos brazos de un río los cuales pueden ser cruzados a través de siete y se trata de determinar si es posible hacer un recorrido pasando por todos los puentes solamente una vez; una traducción de la memoria original de Euler se encuentra en el tomo 4 de la colección *Sigma, El Mundo de las Matemáticas*, por J. R. Newman ([24], pp. 164–171).

También es reconocido por el hecho de que obtuvo resultados sobre series de Fourier, series de Bessel y transformadas de Laplace, todo esto antes que Fourier, Bessel y Laplace nacieran.

Según la tradición, Euler se caracterizaba por la capacidad para desarrollar cálculos formales de una manera prodigiosa y una gran intuición, de manera que en muchos casos desarrolló teorías sin completar todos los detalles de las demostraciones. También se le atribuye el mejoramiento de la notación matemática que de una forma u otra contribuyó a la difusión de las ideas; en particular a él se deben los convenios de denotar por e y π esos dos números importantes, y el de denotar por $f(x)$ el valor de una función f en un punto x, la base de los logaritmos naturales y la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. También estableció la notaciones Σ, sen y cos para indicar suma y las funciones trigonométricas.

Otro aspecto notable de la obra de Euler es su interés por la enseñanza de la ciencia, por ejemplo el libro que estudiamos a continuación fue escrito como un libro de texto para la enseñanza del Cálculo. Resulta interesante notar como, aparte de algunos aspectos de estilo propio de la época, se trata de un escrito moderno que presenta de una forma clara y precisa algunos conceptos y técnicas, como se pueden hallar en un buen libro de Cálculo de estos días. Algunos matemáticos opinan que todos los libros de texto de Cálculo son copias (o copias de copias) del libro indicado arriba y de sus obras: *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) e *Institutiones Calculi Integralis* (1748–1794).

Otro hecho asombroso acerca de Euler es que durante los últimos 17 años de su vida estuvo completamente ciego (antes había perdido un ojo) sin disminuir su dedicación al trabajo ni su productividad. En una ocasión el gobierno suizo planteó un proyecto (que no llegó a feliz término) para publicar las obras completas de Euler y se estimó que se requerirían entre setenta y ochenta volúmenes de gran tamaño.

FIGURA 4. Retrato de Leonhard Euler.

A continuación presentamos una traducción de una de las obras de Euler en la que trata sobre series infinitas. El texto de referencia fue publicado en inglés bajo el título *Introduction to Analysis of the Infinite. Book I* ([17], pp. 50–112), el cual a su vez fue traducido del original en latín *Introductio in Analysin Infinitorum.* En nuestra traducción seguimos muy de cerca la versión en inglés excepto por unos cuantos aspectos relacionados con el formato y la notación, para los cuales hemos usado como referencia el facsímil de dos páginas del original que aparencen en las páginas 122 y 123 *A Concise History of Mathematics,* por D. Struik (referencia [23] en la *Reseña Bibliográfica*).

CAPÍTULO IV

Sobre del Desarrollo de Funciones por Series Infinitas

59. Puesto que ni las funciones racionales ni las funciones irracionales de z son de la forma de polinomios $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$, donde el número de términos es finito, estamos acostumbrados a buscar expresiones de este tipo con un número infinito de términos las cuales dan el valor de la función racional o irracional. Inclusive la naturaleza de las funciones trascendentes parece comprenderse mejor cuando ésta se expresa en tal forma, inclusive sabiendo que esta es una expresión infinita. Puesto que la naturaleza de las funciones polinómicas es muy bien conocida, si otras funciones se pueden expresar por diferentes potencias de z de manera que se pueda escribir de la forma $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$, entonces parecen ser la mejor forma para la mente determinar su naturaleza, a pesar de que el número de términos es infinito. Es claro que ninguna función que no sea un polinomio de z puede ser expresada de la forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$, en la cual el número de términos es finito, ya que en este caso sería una función polinómica por definición. Si existe alguna duda de que una función se puede expresar con una serie infinita, esta duda debería desaparecer con la siguiente discusión. Con el fin de que la siguiente explicación sea bien general, además de potencias enteras positivas de z permitiremos que los exponentes sean números reales arbitrarios. Así no existe duda de que cualquier función de z se le puede dar la forma $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \cdots$, donde los exponentes α, β, γ, δ, etc. son números reales arbitrarios.

60. *Mediante un procedimiento de división continuada la función racional* $\dfrac{a}{\alpha + \beta z}$ *puede expresarse como una serie infinita*

$$\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{a^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} - \cdots .$$

Como el cociente de dos términos consecutivos cualesquiera es $-\dfrac{\alpha}{\beta z}$*, ésta es denominada serie geométrica.*

Esta serie puede ser hallada escribiendo

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \cdots ,$$

y luego hallar los coeficientes A, B, C, D,..., que dan la igualdad. Como

$$a = (\alpha + \beta z)\,(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots),$$

Euler deduce la fórmula de la sección 61 y luego coloca un ejemplo donde prueba que

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \cdots .$$

Entre las secciones 64 y 68, Euler explora los desarrollos en series de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$\frac{a+bz}{(1-\alpha z)^2}, \quad \frac{a+bz+cz^2}{(1-\alpha z)^3}, \quad \text{y} \quad \frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4}.$$

De la sección 67 a 70 hace consideraciones sobre un caso general.

después de realizar la multiplicación indicada,

$$\begin{aligned} a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \cdots \\ + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \cdots . \end{aligned}$$

Pero $a = \alpha A$, así que $A = \frac{a}{\alpha}$. Los coeficientes de cada potencia de z deben tener suma cero, así que tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha B + \beta A &= 0, \\ \alpha C + \beta B &= 0, \\ \alpha D + \beta D &= 0, \\ \alpha E + \beta D &= 0. \end{aligned}$$

Una vez que cada coeficiente es conocido, el coeficiente siguiente puede ser hallado fácilmente como sigue. Si se conoce el coeficiente P y Q es el siguiente, entonces $\alpha Q + \beta P = 0$ o $Q = \frac{-\beta P}{\alpha}$. Como se determinó que el primer término A es igual a $\frac{a}{\alpha}$, de aquí las letras B, C, D, etc. son definidas de la misma forma en que surgirían del procedimiento de división. Para continuar, por simple inspección es claro que en la serie infinita para $\frac{a}{\alpha + \beta z}$, el coeficiente de z^n será $\frac{\pm a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$, donde el signo positivo ocurre cuando n es par y el signo negativo ocurre cuando n es impar, o los coeficientes pueden ser expresados como $\frac{a}{\alpha}(-\beta/\alpha)^n$.

61. *En forma similar por medio de un procedimiento de división continuada la función racional* $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma z^2}$ *se puede convertir en una serie infinita.*

* * *

71. Las funciones irracionales se pueden transformar en series por

* * *

el siguiente teorema universal:

$$\begin{aligned} (P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 \\ + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \cdots , \end{aligned}$$

donde existe un número infinito de términos a menos que $\frac{m}{n}$ sea un entero positivo. Así cuando elegimos valores enteros fijos para m y n,

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^{\frac{-1}{2}}Q - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}P^{\frac{-3}{2}}Q^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}P^{\frac{-5}{2}}Q^3 - \cdots$$

o

$$(P+Q)^{\frac{-1}{2}} = P^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}P^{\frac{-3}{2}}Q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}P^{\frac{-5}{2}}Q^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}P^{\frac{-7}{2}}Q^3 - \cdots$$

o

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}P^{\frac{-2}{3}}Q - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}P^{\frac{-5}{3}}Q^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}P^{\frac{-8}{3}}Q^3 - \cdots$$

o

$$(P+Q)^{\frac{-1}{3}} = P^{\frac{-1}{3}} - \frac{1}{3}P^{\frac{-4}{3}}Q + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}P^{\frac{-7}{3}}Q^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}P^{\frac{-10}{3}}Q^3 - \cdots$$

o

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}P^{\frac{-1}{3}}Q - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 6}P^{\frac{-4}{3}}Q^2 + \frac{2\cdot 1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 9}P^{\frac{-7}{3}}Q^3 - \cdots.$$

72. En una serie de este tipo cualquier términos puede ser determinado por la forma del término precedente. Una serie que surge de $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$, un cierto término tiene la forma $MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$, entonces el término siguiente tiene la forma

$$\frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}.$$

Se debería notar que en los términos siguientes el exponente de P decrece por 1 y el exponente de Q crece por 1. En ciertos casos puede ser más conveniente expresar la forma general $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ como $P^{\frac{m}{n}}(1+Q/P)^{\frac{m}{n}}$. Entonces cuando $(1+Q/P)^{\frac{m}{n}}$ se expresa como una serie infinita el resultado se puede multiplicar por $P^{\frac{m}{n}}$ para obtener la serie en su primera forma. Por otra parte, si m denota no sólo enteros, sino también fracciones, entonces n puede ser siempre igual a 1. Además, si en lugar de $\frac{Q}{P}$, la cual es una función de z, colocamos Z, entonces tenemos

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3 + \cdots.$$

En lo que sigue, será conveniente haber notado lo siguiente

El capítulo continúa con la consideración de los casos $Z = \alpha z$, $Z = \alpha z + \beta z^2$ y $Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$ (secciones 73–75), para concluir con el estudio del caso general (sección 76):

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \cdots)^{m-1}.$$

Continúa con exploraciones de propiedades de la función exponencial.

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3 + \cdots .$$

*   *   *

CAPÍTULO VI

Sobre Exponenciales y Logaritmos.

96. A pesar de que el concepto de función trascendente depende del cálculo integral, antes de que lleguemos a eso, existen ciertas clases de funciones que son más evidentes, las cuales pueden ser convenientemente desarrolladas, y que abren las puertas para investigaciones más profundas. En primer lugar consideraremos las exponenciales, o potencias en las cuales el exponente es variable. Es claro que las cantidades de este tipo no son funciones algebraicas, ya que en aquellas los exponentes deben ser constantes. Hay diferentes clases de exponenciales, dependiendo de si sólo el exponente es variable o si ambos, la base y el exponente son variables. La primera clase es ejemplificada por a^z, mientras que la segunda lo es por y^z. Además el exponente mismo puede ser un exponencial como en los siguientes: a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Nosotros no consideraremos estas diferentes formas como de género diferente, ya que su naturaleza será suficientemente clara si desarrollamos solamente a^x.

97. Consideremos la exponencial a^x donde a es una constante y el exponente z es variable. Como el exponente z representa todos los números, es claro que al menos todos los enteros positivos pueden sustituir a z para dar los valores determinados a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, etc. Si sustituimos z por los enteros negativos -1, -2, -3, etc., obtenemos $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, etc. Si $z = 0$, entonces $a^0 = 1$. Si sustituimos z por una fracción, por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, etc. obtenemos los valores $\sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, etc. Estos símbolos pueden tener dos o más valores, ya que la extracción de raíces da varios valores. Sin embargo sólo vamos a considerar su valor primario, es decir el valor real positivo puesto que a^z debe ser considerada como una función con un solo valor. Por esta razón

En esta sección se encuentra una de nuestras diferencias con la versión en inglés: usamos la notación i en lugar de j, pues Euler lo usaba para describir una cantidad infinitamente grande. En la versión inglesa no siguen la costumbre de Euler para evitar confusiones que pueden surgir pues i suele usarse para denotar la unidad imaginaria.

$a^{\frac{5}{2}}$ cae entre a^2 y a^3, y así es una cantidad que tiene el mismo género. Aunque $a^{\frac{5}{2}}$ es igual tanto a $-a^2\sqrt{a}$ como a $a^2\sqrt{a}$, consideramos sólo el segundo. De manera similar z puede tomar valores irracionales, a pesar de que este concepto es más difícil de comprender. Sin embargo, consideramos solo valores reales para z. Así $a^{\sqrt{7}}$ tiene un valor que cae entre a^2 y a^3.

98. Los valores de la exponencial a^z dependen principalmente de la magnitud de la constante a. Si $a = 1$, entonces siempre tenemos $a^z = 1$, sin importar el valor que toma z. Si $a > 1$, entonces a^z tendrá un valor mayor si el valor de z es mayor que el que originalmente tenía y cuando z tiende a infinito, entonces a^z también tiende a infinito.

* * *

101. Si $y = a^z$, entonces y es una función de z, y como y depende de z se comprende fácilmente de la naturaleza de los exponentes. Así para cualquier valor dado de z, el valor de a^z está determinado.

* * *

102. Exactamente de la misma forma, dado un número a, para cualquier valor de z, podemos hallar el valor de y, así, a la inversa, dado un valor positivo de y nos gustaría dar un valor de z, tal que $a^z = y$. Este valor de z es, efectivamente, visto como una función de y, y es llamado el LOGARITMO de y. La discusión acerca de los logaritmos supone que existe una constante fija a ser sustituida por a, y este número es la *base* para el logaritmo. Habiendo asumido esta base, decimos que el logaritmo de y es el exponente de la potencia a^z tal que $a^z = y$. Ha sido costumbre designar el logaritmo de y por el símbolo $\log y$.

* * *

CAPÍTULO VII

Exponenciales y Logaritmos Expresados por medio de Series.

114. Puesto que $a^0 = 1$, cuando el exponente sobre a crece, la potencia misma crece, suponiendo que a es mayor que 1. Se sigue que si el exponente es infinitamente pequeño y positivo, entonces

la potencia excede a 1 por un número infinitamente pequeño. Sea ω un número infinitamente pequeño, o una fracción tan pequeña que, aunque no sea igual a cero, aún se cumple $a^\omega = 1 + \psi$, donde ψ es un número infinitamente pequeño. Se sigue que $\psi = \omega$, o $\psi > \omega$, o $\psi < \omega$. Cuál de estas es cierta depende del valor de a, lo que no es hasta ahora conocido, así que escribimos $\psi = k\omega$. Entonces tenemos que

$$a^\omega = 1 + k\omega,$$

y con a como base de los logaritmos tenemos

$$\omega = \log(1 + k\omega).$$

* * *

115. Puesto que $a^\omega = 1 + k\omega$, tenemos que $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, para cualquier valor que se le asigne a i. Se sigue que

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots .$$

Si ahora colocamos $i = \frac{z}{\omega}$, donde z denota cualquier número finito, como ω es infinitamente pequeño, entonces i es infinitamente grande. Como tenemos $\omega = \frac{z}{i}$, donde ω es representada por una fracción con un denominador infinito, así que ω es infinitamente pequeño, como debería ser. Cuando sustituimos $\frac{z}{i}$ por ω queda

$$\begin{aligned} a^z &= (1 + k\frac{z}{i})^i \\ &= 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 \\ &\quad + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \end{aligned}$$

Esta igualdad es válida suponiendo que i es sustituido por un número infinitamente grande, pero entonces k es un número finito que depende de a, como hemos visto.

116. Puesto que i es infinitamente grande, $\frac{i-1}{i} = 1$, y si sustituimos i por un número mayor, más cercana a 1 está la fracción $\frac{i-1}{i}$. Por tanto, si i es un número mayor que cualquier número asignable, entonces el número $\frac{i-1}{i}$ es igual a 1. Por el mismo motivo $\frac{i-2}{i} = 1$, $\frac{i-3}{i} = 1$, y así sucesivamente. Se sigue

Euler continúa explorando consecuencias de esta ecuación para diferentes valores de k.

Esta es, aparentemente, la primera vez que el símbolo e fue introducido para representar la base de los logaritmos naturales.

Euler se refiere al hecho de que $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, que es la forma en que se define la función logarítmica en los libros de Cálculo modernos.

El resto del capítulo es dedicado al uso de series para calcular ciertos valores particulares de la función logaritmo.

En este capítulo Euler hace una introducción a las funciones trigonométricas y describe sus propiedades elementales, para pasar al estudio de sus desarrollos como series infinitas.

que $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$, y así sucesivamente. Cuando sustituimos estos valores obtenemos

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots .$$

Esta ecuación expresa una relación entre a y k, ya que cuando colocamos $z=1$, tenemos

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots .$$

Cuando $a = 10$, entonces k es por necesidad aproximadamente igual a 2,30258 como ya hemos visto.

* * *

122. Puesto que somos libres de elegir la base a para el sistema de logaritmos, ahora tomamos a de tal manera que $k=1$. Supongamos ahora que $k=1$, entonces la serie hallada en la sección 116

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

es igual a a. Si los términos de esta suma son representados como fracciones decimales y sumados, obtenemos el valor$a = 2,71828182845904523536028\cdots$. Cuando esta base es elegida, los logaritmos son llamados naturales o hiperbólicos. El último nombre es usado porque la cuadratura de una hipérbola puede ser expresada por medio de estos logaritmos. Con el objeto de ser más breves, para este número $a = 2,718281828459\cdots$ usaremos el símbolo e, el cual denotará la base para los logaritmos naturales o hiperbólicos, que corresponde para el valor $k=1$, y e representa la suma de la serie infinita

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots .$$

CAPÍTULO VIII

Sobre Cantidades Trascendentes que Surgen del Círculo.

126. Después de haber considerado logaritmos y exponenciales, ahora debemos pasar a los arcos circulares con sus senos y

Se dice que esta es la primera vez que el símbolo π fue usado para denotar la razón entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de un círculo.

En esta sección nuestra presentación difiere un poco más de la versión en inglés y nos acercamos más a la original en latín usando en lugar de sen y cos las abreviaturas sen. y cos. Como en la sección 116, en la versión en inglés usan j en lugar de i y además usan i para indicar la unidad imaginaria en lugar de $\sqrt{}-1$.

Es decir,

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

cosenos. Esto no es sólo porque son un género más de cantidades trascendentes, sino porque se derivan de logaritmos y exponenciales cuando se usan valores complejos. Esto se verá más claro con el desarrollo siguiente.

Si establecemos el radio, o seno total, del círculo igual a 1, entonces es suficientemente claro que la circunferencia del círculo no se puede expresar exactamente como un número racional. Una aproximación de la mitad de la circunferencia del círculo es 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 58209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446+. Con el fin de ser más breves usaremos el símbolo π para este número. Decimos, entonces, que la mitad de la circunferencia del círculo unitario es π, o que la longitud de un arco de 180 grados es π.

* * *

138. Una vez más usamos las fórmulas de la sección 133, donde z es un arco infinitamente pequeño y n un número infinitamente grande i, así que zi tiene un valor finito v. Ahora tenemos $nz = v$ y $z = \frac{v}{i}$, así que $\text{sen.}\, z = \frac{v}{i}$ y $\cos.\, z = 1$. Con estas sustituciones,

$$\cos.\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

y

$$\text{sen.}\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

En el capítulo anterior vimos que

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

Con notación moderna

$$e^{iv} = \cos v + i \operatorname{sen} v,$$

o, equivalentemente

$$e^{iv} - \cos v = i \operatorname{sen} v,$$

de donde se deduce la famosa fórmula de Euler (tomando $v = \pi$):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

donde e denota la base de los logaritmos naturales; cuando sustituimos z por $+v\sqrt{-1}$ y $-v\sqrt{-1}$ obtenemos

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

y

$$\text{sen. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

De estas ecuaciones comprendemos como se pueden expresar las exponenciales complejas en términos de seno y coseno reales, ya que

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } v$$

y

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } v.$$

Problemas

1 En cada uno de los siguientes casos decidir si la serie dada converge o no. En caso de ser convergente, decidir si la convergencia es absoluta o no.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{2^n}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n.$

2 Hallar el radio de convergencia de cada una de las series de potencias dadas a continuación.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n.$

3 Decimos que una sucesión compleja $\{z_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe una número natural N tal que para todos $n, m \geq N$ tenemos

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Si $\{z_n\}$ una sucesión tal que $z_n = a_n + i b_n$, con $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ para todo n. Demostrar que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy.

CAPÍTULO

10

TRES OBRAS DE ABEL

La lectura de este artículo será probablemente tan valiosa como la de cualquier otro... El motivo es sugerido por una observación del mismo Abel, quien atribuía su profundo conocimiento de las matemáticas al hecho de que leía a los maestros, más que a los discípulos.

MICHAEL SPIVAK

En este último capítulo volvemos de nuevo a nuestra (casi olvidada) analogía con el juego del ajedrez. Por principio, las analogías se agotan y surgen diferencias entre los "objetos" comparados. En nuestro caso resulta que es muy difícil determinar cuál es el rey en este juego, tal vez sea el conjunto de todos los problemas o algo así. Sin prestar mucha atención a este detalle, ni tampoco preguntarnos cuál es el equivalente a la reina, dedicaremos nuestro esfuerzo al estudio de algunos jaques magistrales, siguiendo una tradición de los aprendices del juego que consiste en estudiar las partidas jugadas por los grandes maestros.

Como hemos notado, los trabajos sobre el tema de sumas infinitas de Newton, Leibniz, sus contemporáneos y las generaciones inmediatas ampliaron enormemente los horizontes matemáticos, pero en muchos casos dejaron los fundamentos un poco vulnerables. Motivados por diferentes críticas e inconsistencias, algunos matemáticos se dieron a la tarea de dar un tratamiento riguroso a los problemas relacionados con la convergencia (y muchos otros en Cálculo que permanecían bajo un velo de misterio). Entre todos estos pensadores surge en forma muy notable el nombre del matemático noruego Niels Henrik Abel.

Abel mostró desde muy temprana edad un talento especial para las matemáticas y antes de iniciar los estudios universitarios ya se encontraba realizando investigación sobre algunos de los problemas más importantes de su época. Cuando se retiró el profesor de matemáticas de su universidad todos estaban de acuerdo en que la cátedra debería quedar a cargo de Abel, pero él declinó la oferta porque, con su nobleza característica argumentó, que la cátedra debía ser adjudicada a uno de sus maestros, fundamentalmente por razones de antigüedad.

Ante la muerte temprana de su padre se vió obligado a asumir la responsabilidad de cuidar de su madre y hermanos y, entre muchas otras dificultades económicas, tuvo que cancelar algunas deudas dejadas por su padre. Signada por la pobreza y el sacrificio, la corta vida de Abel fue prácticamente dedicada al estudio y al cuidado de su familia. A pesar de todos los problemas personales continuó trabajando duramente en varios problemas matemáticos de avanzada. Sus contemporáneos locales reconocieron su extraordinario talento y comprendieron que su desarrollo científico estaría muy limitado en su país natal. Así tras muchas dificultades logró una beca para realizar un viaje de estudio por un año, dirigido en principio hacia Gotinga y Paris, los dos mayores centros matemáticos de la época, dirigidos por Gauss y Cauchy respectivamente.

Abel emprendió el viaje, llevando como carta de presentación algunos manuscritos con la solución de problemas originales; pero en ninguna de las ciudades logró su objetivo, pues su obra fue escasamente atendida. Afortunadamente, en algún momento desvió su ruta y pasó más tiempo del que tenía previsto en Berlín, donde conoció y entabló una gran amistad con August Leopold Crelle.

Al regresar a su patria, Abel se dedicó a sus investigaciones y luchar para poder subsistir al no contar con un empleo permanente.

Por esta época, Crelle fundó la primera revista dedicada exclusivamente a las matemáticas puras: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, popularmente conocida como la "*Journal* de Crelle". Abel fue uno de los científicos que más aportes hizo a la revista, publicando cinco artículos en el primer volumen y fundando la teoría de funciones doblemente periódicas en un artículo del segundo volumen, así como muchos otros, como por ejemplo aquel famoso resultado sobre la imposibilidad de resolver la ecuación polinómica de grado no menor a cuatro.

La amistad y respeto de Crelle se manifestaron muchas veces en forma significativa; por ejemplo, propuso al gobierno alemán crear una cátedra de matemáticas en la Universidad de Berlín que sería adjudicada a Abel. La cátedra fue creada, pero de acuerdo a la legislación de la época, un matemático alemán solicitó su asignación ya que tenía prioridad por su nacionalidad. A pesar de la derrota Crelle siguió trabajando en esta dirección.

La enfermedad ligada a la pobreza y al sacrificio, truncó la vida de este matemático a la corta edad de veintiseis años, dejando la traza permanente de un genio y una nobleza extraordinarios. Poco después del fallecimiento, llegó a su casa un telegrama que informaba que en la Universidad de Berlín había una nueva cátedra de matemáticas esperando por el joven genio.

Un poco más tarde se inició la tarea de publicar sus *Œuvres Complètes*. El trabajo editorial fue asumido por su amigo Bernt Michael Holmboe y fue publicada en Oslo, en 1839. Una nueva edición apareció en dos volúmenes en 1881, editada por los matemáticos de origen noruego Peter Ludwing

Sylow y Marius Sophus Lie.

A continuación se presenta un material como lectura sugerida sobre series. El mismo consta de tres artículos que aparecieron publicados en la *Journal* de Crelle junto con unas notas que sólo fueron publicadas póstumamente.

Hasta donde tenemos noticias estas obras no están disponibles en español y, aparentemente ni siquiera en inglés (parte del segundo artículo está traducido al inglés en [10], pp. 286-291).

La traducción aparece en las páginas de numeración impar, mientras que en las otras aparecen algunas notas de la lectura por parte del autor. Hemos procurado preservar el estilo del trabajo original, tanto en la redacción como en el aspecto tipográfico a fin de dar una idea del aroma general de la obra, así como una muestra de respeto y gratitud a la obra del gran genio de Abel. Por supuesto, cualquier defecto debe ser atribuido al autor y no a la obra original.

Figura 10.1: Retrato de Niels Henrik Abel.

Una Generalización de la Serie Binómica

Este artículo aparece como la memoria X en el tomo I de las *Œuvres Complètes* de Niels Henrik Abel, ([18], pp. 102-103), con el título *Démonstration d'une Expression de laquelle la Formule Binome Est un cas Particulier*, publicada en francés en la revista de *Crelle* en 1826.
La fórmula de la que trata el artículo es un caso particular de una fórmula descubierta por Cauchy.

DEMOSTRACIÓN DE UNA EXPRESIÓN DE LA QUE LA FÓRMULA DEL BINOMIO ES UN CASO PARTICULAR

por

Niels Henrik Abel

Journal für reine und angewandte Mathematatik, herausgegeben von *Crélle*, Bd. 1. Berlín 1826.

Consideremos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^n = {} & x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \cdots \\ & + \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1\,.\,2\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \cdots \\ & + \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1};\end{aligned}$$

siendo x, α y β cantidades cualesquiera, n un entero positivo.

Cuando $n = 0$, la expresión queda

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

la cual es evidente. Podemos, como lo hacemos a continuación, demostrar que si la expresión es cierta para $n = m$, entonces es cierta para $n = m+1$, es decir que se cumple en general.

Sea

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^m = {} & x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \cdots \\ & + \frac{m}{1}\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando por $(m+1)dx$ e integrando, tenemos

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} & + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m \\ & + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \cdots \\ & + \frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + C,\end{aligned}$$

siendo C una constante arbitraria. Para hallar el valor de C, tomemos $x = -(m+1)\beta$, entonces las dos ecuaciones anteriores implican

Esta línea indica que el artículo continúa, pero que los editores de las *Œuvres Complètes* consideraron que el resto del material es irrelevante y lo omitieron.

$$(\alpha - (m+1)\beta)^m = (-1)^m \Big[(m+1)^m \beta^m - m^m \alpha\beta^{m-1}$$
$$+ \frac{m}{2}(m-1)^m \alpha(\alpha-2\beta)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}(m-2)^{m-2}\alpha(\alpha-3\beta)^{m-3} + \cdots \Big],$$
$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1} = (-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1} m\beta^{m+1} - (m+1)m^m \alpha\beta^m$$
$$+ \frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1} - \cdots \Big] + C.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $(m+1)\beta$ y sumando el producto con la segunda, obtenemos

$$C = \alpha(\alpha - (m+1)\beta)^{m+1} + (m+1)\beta(\alpha - (m+1)\beta)^m,$$

o sea

$$C = \alpha(\alpha - (m+1)\beta)^m.$$

Por tanto, la ecuación propuesta se verifica también para $n = m + 1$ y también es cierta para $n = 0$; así por tanto se cumple para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ etc. es decir, la ecuación es cierta para todo valor entero positivo de n.

Si suponemos $\beta = 0$ obtenemos la fórmula del binomio. Si tomamos $\alpha = -x$, entonces tenemos

$$0 = x^n - \frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

ahora, dividiendo por x,

$$0 = x^{n-1} - \frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

la cual es bien conocida; ya que el segundo miembro de esta ecuación no es otra cosa que

$$(-1)^n \Delta(x^{n-1}),$$

al considerar la diferencia constante igual a β.

Sobre la Serie Binómica

Esta es la memoria XIV en el tomo I de las *Œuvres Complètes* de Niels Henrik Abel, ([18], pp. 219-250), titulada *Recherches sur la Série* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$, fue escrita originalmente en francés y publicada en la revista de *Crelle* en 1826 (la versión en alemán fue obra de Crelle).

La parte traducida aquí comprende las páginas 219-247.

Aparentemente para la época no se acostumbraba colocar el punto final después de una fórmula cuya parte final era "..." (esto se hace consistentemente a lo largo del artículo).

INVESTIGACIONES SOBRE LA SERIE

$$1 + \frac{m}{1}\, x + \frac{m(m-1)}{1.2}\, x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\, x^3 + \cdots$$

por

Niels Henrik Abel

Journal für reine und angewandte Mathematatik, herausgegeben von *Crelle,*
Bd. 1. Berlín 1826.

1.

Si realizamos un estudio crítico sobre el tema de series infinitas en general, es decir, un estudio más preciso, encontramos que es básicamente insatisfactorio, y por tanto, el número de teoremas relativos a series infinitas que se encuentran rigurosamente establecidos es muy limitado. Comúnmente aplicamos las operaciones del análisis a series infinitas de la misma manera que lo hacemos con series finitas y me parece que esto no podemos considerarlo como una demostración propiamente dicha. Por ejemplo, si queremos multiplicar dos series infinitas una por otra, escribimos

$$\begin{aligned}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) &= u_0 v_0 \\ &+ (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots \\ &+ (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0) + \cdots\end{aligned}$$

Esta ecuación es cierta siempre que las series $u_0 + u_1 + \cdots$ y $v_0 + v_1 + \cdots$ sean finitas. Pero cuando son infinitas, es necesario que sean convergentes, ya que una serie divergente no tiene suma; luego la serie del segundo miembro también converge. Solamente con esta única condición la expresión considerada arriba es cierta; pero, si no me equivoco, hasta el presente no se ha demostrado. Este es el objetivo de este ensayo. También varias operaciones similares se justifican, por ejemplo el procedimiento común de dividir una cantidad por una serie infinita, el de la elevación de una serie infinita a una potencia determinada, el de la determinación de su logaritmo, de su seno, de su coseno, etc.

Otro procedimiento que hallamos con frecuencia en análisis y que muchas veces conduce a contradicciones, es el de establecer las series divergentes por la evaluación de valores numéricos. Una serie divegente nunca puede ser igualada a una cantidad determinada; es solamente una expresión alegre de ciertas propiedades que se parecen a aquellas de las series de las cuales se derivan.

Las series divergentes pueden en algunos casos funcionar como símbolos formales para expresar una u otra proposición de manera resumida; pero nunca pueden ser colocadas en el lugar de cantidades determinadas. Pues mediante un procedimiento de este tipo, uno puede prácticamente demostrar cualquier cosa, tanto imposible como posible.

Una de las series más notables del análisis algebraico es la siguiente:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}x^n+\cdots$$

Cuando m es un número entero positivo, vemos que la suma de esta serie se reduce a un caso finito, la cual representamos por $(1+x)^m$. Cuando m no es un número entero, la serie es infinita, y será convergente o divergente, dependiendo de los diferentes valores asignados a m y x. En tal caso escribimos la misma igualdad

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\cdots,$$

la cual solamente indica que las dos expresiones

$$(1+x)^m \qquad \text{y} \qquad 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\cdots,$$

tienen ciertas propiedades comunes, para ciertos valores de m y de x, dependiendo de la igualdad numérica de las expresiones.

Asumimos que la igualdad numérica se cumple siempre que la serie sea convergente; pero hasta el presente este hecho no ha sido demostrado. Ni siquiera todos los casos en que la serie es convergente han sido examinados. Si suponemos la existencia de la igualdad indicada, falta investigar el valor de $(1+x)^m$, ya que esta expresión tiene en general una infinidad de valores diferentes, mientras que la serie $1+mx+\cdots$ tiene solamente uno. El objetivo de esta memoria es el de llenar una laguna existente en la solución completa del siguiente problema:

”Hallar la suma de la serie

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots$$

”para todos los valores reales o imaginarios de x y de m para ”los cuales la serie es convergente.”

Tal vez la idea al enfatizar el apellido en la expresión "M. *Cauchy*" (Monsieur Cauchy) es evitar confusiones. Este punto trae a la memoria una anécdota de Littlewood, quien comenta que creó el "fantasma matemático" M. Landau, a cuyos trabajos se hacían referencias no verificadas (ver *A mathematician's miscellany*, por J. E. Littlewood, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. pag 164).

La expresión "para todos los valores crecientes de m" se refiere, por supuesto, a la idea de sucesión.

*) es una forma antigua (y fuera de uso) de etiquetar las notas al pie de página.

2.

A continuación establecemos algunos teoremas necesarios sobre series. En esta tarea nos servirá como guía la excelente obra de M. *Cauchy* "Cours d'analyse de l'ecole polytechnique", el cual es muy apreciado por todos los analistas que gustan del rigor en las investigaciones matemáticas.

Definición. Una serie cualquiera

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_m + \cdots$$

se denomina convergente, si para todos los valores crecientes de m, la suma $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ se aproxima indefinidamente a un cierto límite. Este límite se denomina *la suma de la serie*. En caso contrario se dice que la serie es divergente, y no tiene suma. De acuerdo con esta definición, para que una serie sea convergente, es necesario y suficiente que para todos los valores crecientes de m, la suma $v_m + v_{m+1} + \cdots + v_{m+n}$ se aproxime indefinidamente a cero, para cualquier valor de n.

Luego, dada una serie convergente cualquiera, el término general v_m se aproximará indefinidamente hacia cero *).

Teorema I. Si $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ representa una serie de cantidades positivas, el cociente $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, para todos los valores crecientes de m, se aproxima indefinidamente a un límite α más grande que 1, entonces la serie

$$\varepsilon_0\varrho_0 + \varepsilon_1\varrho_1 + \varepsilon_2\varrho_2 + \cdots + \varepsilon_m\varrho_m + \cdots,$$

ε_m es una cantidad que para todos los valores crecientes de m se aproxima indefinidamente hacia cero, será necesariamente divergente.

Teorema II. Si para una serie de cantidades positivas $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m + \cdots$ el cociente $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, para todos los valores crecientes de m, se aproxima indefinidamente a un límite α más pequeño que 1, entonces la serie

$$\varepsilon_0\varrho_0 + \varepsilon_1\varrho_1 + \varepsilon_2\varrho_2 + \cdots + \varepsilon_m\varrho_m + \cdots,$$

donde ε_m es una cantidad que para todos los valores crecientes de m se aproxima indefinidamente hacia cero, será necesariamente convergente. En efecto, de acuerdo con nuestra suposición podemos tomar valores de m suficientemente grandes para que $\varrho_{m+1} < \alpha\varrho_m$, $\varrho_{m+2} < \alpha\varrho_{m+1}, \ldots \varrho_{m+n} < \alpha\varrho_{m+n-1}$.

---

*) Para abreviar, a lo largo de esta memoria ω representa una cantidad que es más pequeña que cualquier cantidad dada.

El teorema III es fundamentalmente el Lema de Abel (Lema 5-2).

Esta es la fórmula de sumación parcial de Abel (Teorema 5-1).

Los teoremas IV y V son esencialmente el Teorema del Límite de Abel (Teorema 7-25).

Se sigue que $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ y por tanto

$$\varrho_m + \varrho_{m+1} + \cdots + \varrho_{m+n} < \varrho_m(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n) < \frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

luego, tenemos un argumento más fuerte

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1} + \cdots + \varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n} < \frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Ahora, como $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ y $\alpha < 1$, resulta claro que ϱ_m tiende a cero y, en consecuencia la suma

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1} + \cdots + \varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}$$

se aproximará hacia cero. Luego la serie indicada es convergente.

Teorema III. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots t_m \ldots$ designa una serie de cantidades cualesquiera y si $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_m$ es siempre menor que una cantidad determinada δ, entonces tenemos

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_m t_m < \delta \varepsilon_0,$$

donde $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ son cantidades positivas decrecientes. En efecto, tenemos

$$t_0 = p_0,\ t_1 = p_1 - p_0,\ t_2 = p_2 - p_1, \qquad \text{etc.}$$

luego

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1(p_1 - p_0) + \varepsilon_2(p_2 - p_1) + \cdots + \varepsilon_m(p_m - p_{m-1}),$$

o también

$$r = p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + p_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Como las diferencias $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots$ son positivas, la cantidad r es evidentemente menor que $\delta\varepsilon_0$.

Definición. Una función fx se denomina *función continua* de x entre los límites $x = a$ y $x = b$, si para cualquier valor de x comprendido entre estos límites, la cantidad $f(x - \beta)$ se aproxima indefinidamente al límite fx, para valores siempre decrecientes de β.

Teorema IV. Si la serie

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

es convergente para un cierto valor δ de α, entonces será convergente para todo valor menor que δ y, para todos los valores siempre decrecientes de β, la función $f(\alpha - \beta)$ se aproximará indefinidamente al límite $f\alpha$, suponiendo que α sea igual o inferior a δ.

Notemos que φ es continua pues es la suma finita de funciones continuas.

Es decir
$$\psi(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \psi(a) \leq \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{\delta}\right)^m p = 0.$$
Luego

$$\lim_{h\to 0}[f(a) - f(a+h)] = \lim_{h\to 0}[\varphi(a) - \varphi(a+h)] + \lim_{h\to 0}[\psi(a) - \psi(a+h)] = 0.$$

Sean

$$v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_{m-1}\alpha^{m-1} = \varphi\alpha,$$
$$v_m + v_m\alpha + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \cdots = \psi\alpha,$$

entonces

$$\psi\alpha = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1}\delta^{m+1} + \cdots;$$

así, de acuerdo con el teorema III, $\psi\alpha < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p$, donde p designa la mayor de las cantidades $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. Tenemos entonces que para todo valor de α, igual o inferior a δ, podemos tomar valores de m suficientemente grandes para obtener

$$\psi\alpha = \omega.$$

Pero $f\alpha = \varphi\alpha + \psi\alpha$, entonces $f\alpha - f(\alpha - \beta) = \varphi\alpha - \varphi(\alpha - \beta) + \omega$.

Además, $\varphi\alpha$ es una función entera de α, podemos elegir β suficientemente pequeño para que

$$\varphi\alpha - \varphi(\alpha - \beta) = \omega;$$

o, lo que es lo mismo

$$f\alpha - f(\alpha - \beta) = \omega,$$

que es lo que debíamos demostrar.

Teorema V. Sea

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \cdots$$

una serie convergente, donde $v_0\, v_1,\, v_2 \ldots$ son funciones continuas de una misma cantidad variable x entre los límites $x = a$ y $x = b$, entonces la serie

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots,$$

donde $\alpha < \delta$, es convergente y es una función continua de x entre los mismos límites.

A continuación se demuestra que la serie fx es convergente. Luego procedemos a demostrar que la función fx es continua.

Sea

$$v_0 + v_1\alpha + \cdots + v_{m-1}\alpha^{m-1} = \varphi x,$$
$$v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \cdots = \psi x,$$

de donde

Este razonamiento es análogo al del teorema IV.

Este es el Teorema de Cauchy-Abel (Teorema 6-4). Aquí Abel confronta un problema de notación que aún hoy en día se presenta con cierta frecuencia y es el hecho de que el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ denota tanto la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$ como $\lim_{n\to\infty} s_n$. En este caso $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ denota una sucesión, $\{\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots\}$ la respectiva sucesión de sumas parciales y p el límite de la segunda.

$$fx = \varphi x + \psi x.$$

Pero

$$\psi x = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1} \delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2} \delta^{m+2} + \cdots;$$

luego, si designamos por θx a la mayor de las cantidades $v_m \delta^m$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}$ etc., tenemos por el teorema III:

$$\psi x < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \theta x.$$

Ahora tomamos m suficientemente grande para que se cumpla $\psi x = \omega$, y en consecuencia también tenemos

$$fx = \varphi x + \omega,$$

donde ω es menor que cualquier cantidad dada.

Análogamente

$$f(x - \beta) = \varphi(x - \beta) + \omega,$$

de donde

$$fx - f(x - \beta) = \varphi x - \varphi(x - \beta) + \omega.$$

Por la forma de φx resulta claro que podemos elegir β suficientemente pequeño para que se verifique

$$\varphi x - \varphi(x - \beta) = \omega,$$

es decir

$$fx - f(x - \beta) = \omega.$$

Por tanto la función fx es continua *

Teorema VI. Designemos por ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. $\varrho_0{}'$, $\varrho_1{}'$, $\varrho_2{}'$ etc. los valores numéricos de los miembros respectivos de las dos series convergentes

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = p,$$
$$v_0{}' + v_1{}' + v_2{}' + \cdots = p',$$

*) En la obra de M. *Cauchy* citada arriba (p. 131) se encuentra el siguiente teorema: "Cuando los diferentes términos de la serie, $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ son funciones de una "misma variable x, continuas con relación a dicha variable, en una vecindad de un valor "particular para el cual la serie es convergente, la suma s de la serie es también una fun- "ción continua de x, en la vecindad de este valor particular". Me parece que este teorema admite algunas excepciones. Por ejemplo la serie

$$\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \cdots$$

es discontinua para todo valor $(2m + 1)\pi$ de x, siendo m un número entero. Como bien sabemos muchas series son de este tipo.

Aquí hay una pequeña inconsistencia de notación: ${p_k}'$ significa lo mismo que p'_k.

Aquí se presenta una inconsistencia de notación con los ϱ_k similar a la indicada arriba.

Esta es la condición de Cauchy.

si las series

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots$$
$$\varrho_0{}' + \varrho_1{}' + \varrho_2{}' + \cdots$$

son también convergentes, entonces la serie $r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$, donde los términos generales son

$$r_m = v_0 v_m{}' + v_1 v_{m-1}{}' + v_2 v_{m-2}{}' + \cdots + v_m v_0{}'$$

también converge y tiene por suma

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)(v_0{}' + v_1{}' + v_2{}' + \cdots).$$

Demostración. Considerando

$$p_m = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots ,$$
$$p_m{}' = v_0{}' + v_1{}' + v_2{}' + \cdots ,$$

fácilmente vemos que

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{2m} = p_m p_m{}' + [&p_0 v_{2m}{}' + p_1 v_{2m-1}{}' + \cdots \\ &+ p_{m-1} v'_{m+1} + (= t) \\ &+ p_0{}' v_{2m} + p_1{}' v_{2m-1} + \cdots \\ &\quad + p'_{m-1} v_{m+1} (= t')]. \end{aligned}$$

Sea

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots = u,$$
$$\varrho_0{}' + \varrho_1{}' + \varrho_2{}' + \cdots = u',$$

es claro que, sin considerar el signo, tenemos,

$$t < u(\varrho'_{2m} + \varrho'_1 + \varrho_{2m-1} + \cdots + \varrho'_{m+1})$$
$$t' < u'(\varrho_{2m} + \varrho_1 + \varrho_{2m-1} + \cdots + \varrho_{m+1}).$$

Pero si las series $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots$ y $\varrho_0{}' + \varrho_1{}' + \varrho_2{}' + \cdots$ son convergentes, entonces las cantidades t y t', se aproximan indefinidamente al límite cero, para valores siempre crecientes de m. Haciendo que m tienda a infinito en la ecuación (a), tenemos

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)(v_0{}' + v_1{}' + v_2{}' + \cdots).$$

Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_0{}', t_1{}', t_2{}' \ldots$ dos series de cantidades positivas o negativas, cuyos términos generales se aproximan indefinidamente hacia cero, se sigue por el teorema II que las series $t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \cdots$ y $t_0{}' + t_1{}'\alpha + t_2{}'\alpha^2 + \cdots$, donde α designa una cantidad inferior a la unidad, son ambas convergentes. Esto es lo mismo que asignar a cada término su valor numérico luego, por el teorema anterior:

Esta es una aplicación del Teorema del Límite de Abel (Teorema 6-4).

Aquí hay una pequeña inconsistencia o tal vez un error de imprenta. Lo importante es tomar en cuenta que φ no denota la función definida por la ecuación (1), sino el argumento del número complejo x.
Esta es una nota de los editores de las *Œuvres Complètes*.

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} (t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \cdots)(t_0{}' + t_1{}'\alpha + t_2{}'\alpha^2 + \cdots) \\ \quad = t_0 t_0{}' + (t_1 t_0{}' + t_0 t_1{}')\,\alpha + (t_2 t_0{}' + t_1 t_1{}' + t_0 t_2{}')\,\alpha^2 + \cdots \\ \qquad + (t_m t_0{}' + t_{m-1} t_1{}' + t_{m-2} t_2{}' + \cdots + t_0 t_m{}')\,\alpha^m + \cdots \end{cases}$$

Ahora supongamos que las tres series

$$t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \cdots$$
$$t_0{}' + t_1{}'\alpha + t_2{}'\alpha^2 + \cdots$$
$$t_0 t_0{}' + (t_1 t_0{}' + t_0 t_1{}') + (t_2 t_0{}' + t_1 t_1{}' + t_0 t_2{}') + \cdots$$

son convergentes, entonces, por el teorema IV, aplicado en la ecuación (b) se tiene que α converge hacia la unidad:

$$\begin{aligned}(t_0 + t_1 + t_2 + \cdots)&(t_0{}' + t_1{}' + t_2{}' + \cdots) \\ &= t_0 t_0{}' + (t_1 t_0{}' + t_0 t_1{}') + (t_2 t_0{}' + t_2 t_1{}' + t_0 t_2{}') + \cdots\end{aligned}$$

3.

A continuación examinamos la serie propuesta,

$$1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \cdots .$$

Designando por φm, y adoptando la siguiente notación para abreviar $1 = m_0$, $\frac{m}{1} = m_1$, $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2} = m_2$, y en general $\frac{m(m-1)\ldots(m-m+1)}{1\,.\,2\ldots m} = m_\mu$, es decir

$$\text{(1)} \qquad \varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots$$

A continuación hallamos los valores de m y de x para los cuales la serie es convergente.

Las cantidades m y x son en general imaginarias, así *).

$$x = a + bi, \;\; m = k + k'i,$$

donde a,b, k, k' son cantidades reales. Por tanto los valores en la ecuación (1) tienen la forma

$$\varphi m = p + qi,$$

donde p y q son dos series cuyos términos tienen valores reales. Podemos hallar estas series de la siguiente manera: Sean

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha, \qquad \frac{a}{\alpha} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\varphi,$$

de donde

$$x = \alpha\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$

donde α y φ son cantidades reales, α se asume positiva.

*) Para todas las fórmulas escritas en esta memoria i representa $\sqrt{-1}$. Nota del editor.

Los "dos puntos" (:) en esta fórmula no constituyen alguna notación matemática particular sino que sirven para indicar el factor por el que debe multiplicarse a fin de obtener la ecuación siguiente. Una traducción más acorde con el espíritu (pero alejada del estilo original que queremos preservar aquí) del texto sería

Así, multiplicando por

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + i \operatorname{sen}\mu\varphi),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} m_\mu x^\mu = \alpha^\mu \delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\mu[&\cos(m\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) \\ &+ i \operatorname{sen}(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu)], \end{aligned}$$

Si escribimos

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\operatorname{sen}\gamma_\mu) = \frac{k+k'i-\mu+1}{\mu},$$

hallamos

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{m-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \cos\gamma_\mu = \frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu}; \operatorname{sen}\gamma_\mu = \frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si en la expresión

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu\,(\cos\gamma_\mu + i\operatorname{sen}\gamma_\mu),$$

tomando μ sucesivamente los valores $1, 2, 3, \ldots \mu$, obtenemos μ ecuaciones que multiplicadas término a término resultan

$$\begin{aligned} m_\mu &= \frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\ldots\mu} \\ &= \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[\cos(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) + i\operatorname{sen}(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)]. \end{aligned}$$

Así obtenemos, multiplicando por

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + i\operatorname{sen}\mu\varphi):$$

$$\begin{aligned} m_\mu x^\mu = \alpha^\mu\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[&\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) \\ &+ i\operatorname{sen}(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)], \end{aligned}$$

ahora usamos una nueva notación para abreviar

$$\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu = l_\mu,\ \mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu = \alpha_\mu:$$
$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu(\cos\theta_\mu + i\operatorname{sen}\theta_\mu).$$

La expresión (1) se cambia por la siguiente,

$$\begin{aligned} \varphi m = 1 + l_1\alpha\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) + l_2\alpha\,(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ + \cdots + l_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\operatorname{sen}\theta_\mu) + \cdots, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \varphi m = 1 + l_1\alpha\cos\theta_1 + l_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ + il_1\alpha\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\alpha^2\operatorname{sen}\theta_2 + \cdots + l_\mu\alpha^\mu\operatorname{sen}\theta_\mu + \cdots). \end{aligned}$$

Luego

$$(2)\qquad \begin{cases} p = 1 + l_1\alpha\cos\theta_1 + l_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + l_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ q = \qquad l_1\alpha\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\alpha^2\operatorname{sen}\theta_2 + \cdots + l_\mu\alpha^\mu\operatorname{sen}\theta_\mu + \cdots \end{cases}$$

Entonces las series serán *divergentes* o *convergentes*, dependiendo de que α sea *superior* o *inferior* a la unidad.

De la expresión de l_μ tenemos que $l_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} l_\mu$, luego

$$l_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1} l_\mu \alpha^\mu,$$

y

$$\frac{l_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{l_\mu \alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1};$$

además tenemos

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

luego, para valores siempre crecientes de μ, tenemos que δ_μ se aproximará al límite 1 y, por consiguiente $\dfrac{l_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{l_\mu \alpha^\mu}$ tiende al límite α. Luego, por los teoremas I y II de la sección anterior, las series p y q son convergentes o divergentes, dependiendo de que α sea superior o inferior a la unidad. Y esto es exactamente la serie propuesta φm.

El caso $\alpha = 1$, será tratado más abajo.

Como la serie φm es convergente para todo valor de α inferior a la unidad, entonces la suma es una cierta función de m y de x. A continuación, establecemos una propiedad de esta función con la ayuda de la que deseamos hallar: Tenemos

$$\varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots,$$
$$\varphi n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_\mu x^\mu + \cdots,$$

donde n_μ designa el valor de m_μ para $m = n$. Concluimos, por el teorema IV:

$$\begin{aligned}\varphi m\,.\,\varphi n = t_0 t_0{}' + (t_0 t_1{}' + t_1 t_0{}') + (t_0 t_2{}' + t_1 t_1{}' + t_2 t_0{}') + \cdots \\ + (t_0 t_\mu{}' + t_1 t'{}_{\mu-1} + t_2 t'{}_{\mu-2} + \cdots + t_\mu t_0{}') + \cdots,\end{aligned}$$

donde $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t_\mu{}' = n_\mu x^\mu$, suponiendo que la serie del segundo miembro sea convergente. Sustituyendo los valores de t_μ y $t_\mu{}'$ tenemos

$$\begin{aligned}\varphi m.\varphi n = m_0 n_0{}' + (m_0 n_1 + m_1 n_0)x + (m_0 m_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0)x^2 + \cdots \\ + (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0)x^\mu + \cdots\end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo a una conocida propiedad de la función m_μ, tenemos

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0,$$

donde $(m+n)_\mu$ designa el valor de m_μ cuando sustituimos m por $m+n$. Entonces por sustitución tenemos

$$\varphi m\,.\,\varphi n = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots + (m+n)_\mu x^\mu + \cdots$$

De acuerdo a lo anterior, el segundo miembro de esta ecuación es una serie convergente y exactamente $\varphi(m+n)$; así

$$\varphi m\,.\,\varphi n = \varphi(m+n). \tag{3}$$

Esta ecuación constituye una propiedad fundamental de la función φm. De esta propiedad deducimos una expresión de la función en forma finita usando funciones exponenciales, logarítmicas y circulares.

Como vimos arriba, la función φm es de la forma $p+qi$, siendo p y q siempre funciones reales y continuas de las cantidades k, k', α y φ, y $m = k + k'i$, $x = \alpha(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. Sea

$$p + qi = r(\cos s + i \operatorname{sen} s),$$

donde

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = r, \qquad \frac{p}{r} = \cos s, \qquad \frac{q}{r} = \operatorname{sen} s,$$

siendo r siempre positivo y s una cantidad real. Si escribimos

$$r = f(k,k'), \qquad s = \psi(k,k'),$$

resulta

$$p + qi = \varphi(k+k'i) = f(k,k')[(\cos\psi(k,k') + i \operatorname{sen}\psi(k,k')]. \tag{3'}$$

De esta forma, colocando sucesivamente l, l' y $k+l$, $k'+l'$ en lugar de k y k',

$$\begin{aligned}
\varphi(l+l'i) &= f(l,l')[(\cos\psi(l,l') + i \operatorname{sen}\psi(l,l')] \\
\varphi[k+l+(k'+l')i] & \\
&= f(k+l,k'+l')[(\cos\psi(k+l,k'+l') + i \operatorname{sen}\psi(k+l,k'+l')].
\end{aligned}$$

De la igualdad $\varphi m\,.\,\varphi n = \varphi(m+n)$ obtenemos que

$$\varphi[k+l+i(k'+l')i] = \varphi(k+k'i)\varphi(l+l'i),$$

tomando $m = k+k'i$, $n = l+l'i$. Entonces, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}
f(k+l,k'+l')&[(\cos\psi(k+l,k'+l') + i \operatorname{sen}\psi(k+l,k'+l')] \\
&= f(k,k')f(l,l')[\cos(\psi(k,k')+\psi(l,l')) + i \operatorname{sen}(\psi(k,k')+\psi(l,l'))].
\end{aligned}$$

De esta ecuación resulta, al separar los términos reales de los imaginarios

$$f(k+l, k'+l')\cos\psi(k+l, k'+l') = f(k, k')f(l, l')\cos[\psi(k, k') + \psi(l, l')]$$
$$f(k+l, k'+l')\operatorname{sen}\psi(k+l, k'+l') = f(k, k')f(l, l')\operatorname{sen}[\psi(k, k') + \psi(l, l')].$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones miembro a miembro, queda

$$[f(k+l, k'+l')]^2 = [f(k, k')f(l, l')]^2,$$

de donde

$$f(k+l, k'+l') = f(k, k')f(l, l'). \tag{4}$$

Por esta igualdad, las anteriores se transforman así:

$$\cos\psi(k+l, k'+l') = \cos[\psi(k, k') + \psi(l, l')],$$
$$\operatorname{sen}\psi(k+l, k'+l') = \operatorname{sen}[\psi(k, k') + \psi(l, l')],$$

de donde se deduce

$$\psi(k+l, k'+l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(l, l'), \tag{5}$$

siendo m un número entero positivo o negativo. Ahora usando las propiedades de las funciones $f(k, k')$ y $\psi(k, k')$ de las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo con esto son funciones continuas de k y k' entre dos límites cualesquiera de las variables. En efecto, de acuerdo con el teorema V, p y q son, evidentemente, funciones continuas. Entonces tenemos

$$f(k, k') = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}, \ \cos\psi(k, k') = \frac{p}{f(k, k')}, \ \operatorname{sen}\psi(k, k') = \frac{q}{f(k, k')};$$

donde $f(k, k')$, al igual que $\cos\psi(k, k')$ y $\operatorname{sen}\psi(k, k')$, es una función continua. Podemos suponer que $\psi(k, k')$ es también continua. Ahora pasamos a examinar la ecuación (5). La función $\psi(k, k')$ es continua por el hecho de que m tiene el mismo valor para todos los valores de k, k', l, l'. Asignando sucesivamente los valores $l = 0$, $k = 0$, obtenemos

$$\psi(k, k'+l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$
$$\psi(l, k'+l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(l, l').$$

Eliminando entre estas ecuaciones y la ecuación (5) las dos cantidades $\psi(k, k')$ y $\psi(l, l')$, queda

$$\psi(k, k'+l') + \psi(l, k'+l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') + \psi(k+l, k'+l').$$

Por tanto

$$\begin{cases} \psi(k, k'+l') = \theta k, \\ 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') = a, \end{cases} \tag{6}$$

luego

$$\theta k + \theta l = a + \theta(k+l). \tag{7}$$

Asignando sucesivamente los valores $l = k, 2k, \ldots, \varrho k$, nos queda

$$\begin{aligned} 2\theta k &= a + \theta(2k), \\ \theta k + \theta(2k) &= a + \theta(3k), \\ \theta k + \theta(3k) &= a + \theta(4k), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta k + \theta(\varrho - 1)k &= a + \theta(\varrho k), \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, tenemos

$$\varrho\theta k = (\varrho - 1)a + \theta(\varrho k). \tag{7'}$$

Luego, considerando $k = 1$,

$$\varrho\theta = \varrho[\theta(1) - a] + a,$$

y tomando $\theta(1) - a = c$,

$$\theta\varrho = c\varrho + a. \tag{8}$$

Es decir dado el valor de la función αk, cuando k es un número entero. Además la función θk tiene la misma forma para todo valor de k, lo cual podemos demostrar fácilmente, como hacemos a continuación. Si en la ecuación (7′) tomamos $\frac{\mu}{\varrho}$, siendo μ un número entero, nos queda $\varrho\,.\,\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = (\varrho - 1)a + \theta\mu$. Luego, por la ecuación (8)

$$\theta\mu = c\mu + a,$$

luego, sustituyendo y dividiendo por ϱ, tenemos

$$\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = c\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) + a.$$

La ecuación (8) se verifica para todo valor positivo y racional de ϱ.

Sea $l = -k$, la ecuación (7) se convierte en

$$\theta k + \theta(-k) = a + \theta(0).$$

Entonces, tomando $k = 0$

$$\theta(0) = a,$$

por tanto

$$\theta(-k) = 2a - \theta k.$$

Si k es un racional positivo, tenemos que $\theta k = ck + a$, de donde

$$\theta(-k) = -ck + a.$$

La ecuación

$$\theta k = ck + a, \tag{9}$$

se verifica para todo valor racional de k y en consecuencia, puesto que θk es una función continua, para todo valor real de k.

Ahora $\theta k = \psi(k, k' + l')$, y $a = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l')$; considerando $c = \theta(k', l')$, obtenemos

$$\psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \,.\, k + 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l'). \tag{10}$$

Por tanto, considerando $k = 0$,

$$\psi(0, k' + l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (7) y de manera análoga

$$\psi(0, k') = \beta' k' - 2m\pi,$$

siendo β' una cantidad independiente de k'.

Colocando l' en lugar de k', obtenemos $\psi(0, l') = -2m\pi + \beta' l'$. Sustituyendo los valores de $\psi(0, k')$ y $\psi(0, l')$ en la ecuación (10) nos queda

$$\psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \,.\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi.$$

Vemos que $\theta(k', l')$ es una función continua de $k' + l'$. Designando esta función por $F(k' + l')$, queda

$$\psi(k, k' + l') = F(k' + l') \,.\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi,$$

y, en consecuencia, tomando $l' = 0$,

$$\psi(k, k') = Fk' \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi.$$

Notemos que

$$\psi(k, k' + l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$
$$\psi(0, l') = \beta' l' - 2m\pi,$$

entonces la ecuación anterior queda así

$$F(k' + l') \,.\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi = 2m\pi + Fk' \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi + \beta' l' - 2m\pi,$$

es decir:

$$F(k' + l') = Fk'.$$

Tomando $k' = 0$, obtenemos $Fl' = F(0) = \beta = Fk'$. Entonces se sigue que el valor de $\psi(k, k')$ es de la forma,

$$\psi(k, k') = \beta k + \beta' k' - 2m\pi, \tag{11}$$

donde β y β' son constantes. Este valor de $\psi(k, k')$ satisface la ecuación (5) con toda generalidad, como es fácil de ver.

A continuación examinamos la ecuación

$$f(k + l, k' + l') = f(k, k') f(l, l').$$

Puesto que $f(k, k')$ es siempre una cantidad positiva, podemos escribir

$$f(k, k') = e^{F(k,k')},$$

donde $F(k, k')$ representa una función real continua de k y k'. Sustituyendo y aplicando logaritmo a los dos miembros, tenemos

El “punto” (.) que debe ir al final de esta fórmula no aparece en el original.

$$F(k+l, k'+l') = F(k, k') + F(l, l').$$

Como esta ecuación coincide con la ecuación (5), colocando F en lugar de ψ y 0 en lugar de m, por la ecuación (11) resulta

$$F(k, k') = \delta k + \delta' k', \tag{12}$$

donde δ y δ', al igual que β y β', son dos cantidades independientes de k y de k'. La función $f(k, k')$ tiene la forma

$$f(k, k') = e^{\delta k + \delta' k'}$$

Las funciones $\psi(k, k')$ y $f(k, k')$ son siempre de esta forma, luego, por la ecuación (3′)

$$\varphi(k+k'+i) = e^{\delta k + \delta' k' +}[\cos(\beta k + \beta' k') + i \operatorname{sen}(\beta k + \beta' k')], \tag{13}$$

donde falta hallar las cantidades δ, δ', β, β', que no dependen de las funciones α y φ. Así tenemos

$$\varphi(k+k'+i) = p + qi,$$

donde p y q están dadas por las ecuaciones (2). Separando las cantidades reales de las imaginarias resulta

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} e^{\delta k + \delta' k' +} \cos(\beta k + \beta' k') &= 1 + l_1 \alpha \cos\theta_1 + l_2 \alpha^2 \cos\theta_2 + \cdots \\ &\qquad + l_\mu \alpha^\mu \cos\theta_\mu + \cdots \\ e^{\delta k + \delta' k'} \operatorname{sen}(\beta k + \beta' k') &= l_1 \alpha \ \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \alpha^2 \operatorname{sen}\theta_2 + \cdots \\ &\qquad + l_\mu \alpha^\mu \operatorname{sen}\theta_\mu + \cdots \end{aligned} \right.$$

A continuación consideramos el caso donde m es real, es decir, cuando $k' = 0$. Las ecuaciones (14) toman la forma

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned} e^{\delta k} \cos\beta k &= 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\cos 2\varphi \\ &\qquad + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 \cos 3\varphi + \cdots = f\alpha \\ e^{\delta k} \operatorname{sen}\beta k &= \frac{k}{1}\alpha \ \operatorname{sen}\varphi + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 \operatorname{sen} 2\varphi \\ &\qquad + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 \operatorname{sen} 3\varphi + \cdots = \theta\alpha. \end{aligned} \right.$$

Para determinar δ y β, tomemos $k = 1$, entonces

$$e^\delta \cos\beta = 1 + \alpha\cos\varphi; \qquad e^\delta \operatorname{sen}\beta = \alpha \operatorname{sen}\varphi.$$

Luego

$$e^{\delta} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\cos\beta = \frac{1 + \alpha\cos\varphi}{(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{\alpha\operatorname{sen}\varphi}{(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\alpha\operatorname{sen}\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}.$$

Esta última ecuación se cumple, designando por s el más pequeño de todos los valores de β que la satisfacen, y que se encuentra restringida a los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta = s + \mu\pi,$$

siendo μ un número entero positivo o negativo. De las ecuaciones (15) se obtiene:

$$f\alpha = e^{\delta k}\cos k(s + \mu\pi) = e^{\delta}\cos ks\cos k\mu\pi - e^{\delta}\operatorname{sen} ks\,.\,\operatorname{sen} k\mu\pi,$$
$$\theta\alpha = e^{\delta k}\operatorname{sen} k(s + \mu\pi) = e^{\delta}\operatorname{sen} ks\cos k\mu\pi + e^{\delta}\cos ks\,.\,\operatorname{sen} k\mu\pi.$$

De donde

$$\cos k\mu\pi = e^{-\delta k}(f\alpha\,.\,\cos ks + \theta\alpha\,.\,\operatorname{sen} ks),$$
$$\operatorname{sen} k\mu\pi = e^{-\delta k}(\theta\alpha\,.\,\cos ks - f\alpha\,.\,\operatorname{sen} ks).$$

Ahora, de acuerdo con el teorema IV, las funciones $\theta\alpha$ y $f\alpha$ son continuas de α; en consecuencia $\cos k\mu\pi$ y $\operatorname{sen} k\mu\pi$ conservan los mismos valores para todo valor de α. Por tanto, para hallarlos es suficiente asignar a α un valor cualquiera. Sea $\alpha = 0$, observando que $e^{\delta} = 1$, $f\alpha = 1$, $\theta\alpha = 0$, $s = 0$, tenemos

$$\cos k\mu\pi = 1, \qquad \operatorname{sen} k\mu\pi = 0.$$

Sustituyendo los valores en las expresiones de $f\alpha$ y $\theta\alpha$, y recordando que $e^{\delta} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^1)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$f\alpha = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^1)^{\frac{k}{2}}\cos ks, \qquad \theta\alpha = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^1)^{\frac{k}{2}}\operatorname{sen} ks.$$

Entonces las ecuaciones (15) se transforman en:

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} &1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots \\ &\qquad\qquad = (1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^1)^{\frac{k}{2}}\cos ks, \\ &\frac{k}{1}\alpha\operatorname{sen}\varphi+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\operatorname{sen} 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\operatorname{sen} 3\varphi+\cdots \\ &\qquad\qquad = (1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^1)^{\frac{k}{2}}\operatorname{sen} ks, \end{aligned}\right.$$

Aquí siguen unos cálculos bastante detallados para deducir las ecuaciones (18) abajo.

donde s se encuentra restringido a los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ y satisface la ecuación

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\alpha \operatorname{sen}\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Las expresiones (16) fueron establecidas por primera vez por M. *Cauchy* en la obra citada arriba.

*   *   *

Las ecuaciones (14) quedan de la forma

$$(18) \qquad \begin{cases} 1 + l_1\alpha\cos\theta_1 + l_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad e^{\delta k - \beta k' +}\cos(\beta k + \delta k') = p, \\ l_1\alpha\operatorname{sen}\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\operatorname{sen}\theta_2 + \cdots + l_\mu\alpha^\mu\operatorname{sen}\theta_\mu + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad e^{\delta k - \beta k' +}\operatorname{sen}(\beta k + \delta k') = q, \end{cases}$$

donde

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2), \qquad \beta = \operatorname{arc.tang}\frac{\alpha\operatorname{sen}\varphi}{1+\alpha\cos\varphi};$$

luego la suma de la serie propuesta es igual a $p + qi$ y tenemos

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\ldots\mu}x^\mu + \cdots$$
$$= e^{\delta k - \beta k' +}[\cos(\beta k + \delta k') + i\operatorname{sen}(\beta k + \delta k')].$$

Entonces tenemos

$$m = k + k', \qquad x = \alpha(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = a + bi,$$

luego

$$\alpha = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \alpha\cos\varphi = a, \qquad \alpha\operatorname{sen}\varphi = b,$$
$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2a + a^2 + b^2) = \tfrac{1}{2}\log[(1+a)^2 + b^2],$$
$$\beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{1+a}.$$

Sustituyendo y escribiendo m por k y n por k', esta expresión toma la forma:

La “etiqueta” de la ecuación (19) aparecen en esta posición en el original.

Parece que en algunos casos Abel usaba arc. tang como una abreviatura más que un símbolo matemático.

La ecuación (20) es la serie binómica.

Seguidamente Abel presenta una cantidad de cálculos desarrollando los casos para diferentes valores de a, b,. . .

Esto corresponde al apartado A de la sección 5 donde Abel examina la convergencia de las series.

(19)

$$
\begin{aligned}
1+&\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2\\
&+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\quad 2\quad 3}(a+bi)^3+\cdots\\
&+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)\dots(m-m+1+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \dots\ m}(a+bi)^{\mu}+\cdots\\
&=\Big[\cos\Big(m\operatorname{arc\,tang}\tfrac{b}{1+a}\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\\
&\qquad\qquad +i\,\mathrm{sen}\Big(m\operatorname{arc\,tang}\tfrac{b}{1+a}\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\Big]\\
&\qquad\qquad \times[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{1+a}}.
\end{aligned}
$$

Como sabemos esta expresión es cierta, al igual que la expresión (18), para todo valor de $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ inferior a la unidad.

Considerando, por ejemplo $b=0$, $n=0$, tenemos la fórmula

$$
1+\frac{m}{1}\,a+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,a^2+\cdots=(1+a)^m, \tag{20}
$$

la cual vamos a explotar a continuación.

* * *

A.

Sumación de las series $\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots$,
$\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\,\mathrm{sen}\,3\varphi-\cdots$.

Si suponemos que α es superior a la unidad tenemos que las series son divergentes. Si α es inferior a la unidad, tenemos que las series indicadas arriba son convergentes y sus sumas son las cantidades β y δ de la sección 3. y en consecuencia β y δ están dados por las ecuaciones (18),

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)=\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots;\\
\text{arc. tang}\dfrac{\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}=\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\,\mathrm{sen}\,3\varphi-\cdots;
\end{cases} \tag{34}
$$

Entonces las sumas de estas series cuando $\alpha=+1$ o $\alpha=-1$ convergen cuando α tiende a estos límites. La primera expresión queda de la siguiente forma suponiendo que los segundos miembros de

las ecuaciones son series convergentes, y por tanto, de acuerdo con el teorema II, para todo valor de φ excepto para $\varphi = (2\mu + 1)\pi$ en la primera expresión y para $\varphi = 2\mu\pi$ en la segunda, siendo μ un entero cualquiera positivo o negativo.

La segunda fórmula es, suponiendo que φ se encuentra entre π y $-\pi$ y usando el hecho de que

$$\text{arc. tang}\frac{\alpha \operatorname{sen} \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} = \text{arc. tang}(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi :$$

$$(35) \qquad \tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{sen} \varphi - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3\varphi - \cdots (\text{entre } \varphi = +\pi \text{ y } \varphi = -\pi).$$

Cuando $\varphi = \pi$ o $\varphi = -\pi$, la serie se reduce a cero, como sabemos. También sabemos que la función:

$$\operatorname{sen} \varphi - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3\varphi - \cdots$$

tiene la notable propiedad de ser discontinua para los valores $\varphi = \pi$ y $\varphi = -\pi$. En efecto, cuando $\varphi = \pm\pi$, la función se reduce a cero, mientras que si $\varphi = \pm(\pi - \alpha)$, siendo o α un número positivo menor que π, el valor de la función es

$$\pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Acerca de las Series

La memoria XVI en el tomo II de las *Œuvres Complètes* de Niels Henrik Abel, ([18], pp. 197-205), son extractos de un conjunto de notas tituladas *Sur les Séries*, escritas originalmente en francés en la segunda mitad del año 1827, parecen formar parte de un proyecto más general y fueron publicadas póstumamente (como todo el material del tomo II).

A diferencia del artículo anterior aquí se usa el punto después de "…" en una ecuación que aparece al final de un párrafo.

Esta es la condición de Cauchy.
La palabra "límite" se usa aquí no en el sentido matemático moderno sino como sinónimo de "extremo" (de un intervalo, en este caso).

ACERCA DE LAS SERIES

por

Niels Henrik Abel

Definición. La serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

se denomina convergente, si en

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

podemos hallar un n tal que s_{n+m} es diferente de una cantidad determinada s por una cantidad tan pequeña como uno quiera. En este caso s se denomina la suma de la serie y escribimos

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots.$$

Si s_n, para todos los valores de n está contenido entre dos límites finitos la serie se denomina indeterminada y si s_n sobrepasa todo límite se llama divergente.

Tenemos el siguiente:

Teorema. Para que una serie sea convergente, es necesario y suficiente que la suma $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$, para un valor cualquiera de m y para todo valor de n más grande que un cierto límite tan grande como se quiera, estando contenido entre dos límites también tan cercanos como se desee.

1. *Sobre la convergencia de series cuyos términos son todos positivos.*

Teorema. Si la serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

es divergente, entonces la serie siguiente:

$$\frac{u_1}{s_0^{\alpha}} + \frac{u_2}{s_1^{\alpha}} + \frac{u_3}{s_2^{\alpha}} + \cdots + \frac{u_n}{s_{n-1}^{\alpha}} + \cdots$$

también lo es, si α no supera a la unidad. Tenemos

$$\log \frac{s_n}{s_{n-1}} = \log\left(1 + \frac{u_n}{s_{n-1}}\right) < \frac{u_n}{s_{n-1}},$$

luego

$$s_n{}' = \frac{u_1}{s_0} + \frac{u_2}{s_1} + \cdots + \frac{u_n}{s_{n-1}} > \log \frac{s_n}{s_{n-1}} + \log \frac{s_{n-1}}{s_{n-2}} + \cdots + \log \frac{s_1}{s_0} + \cdots,$$
$$s_n{}' > \log s_n - \log s_0;$$

Esta es la primera vez que la notación Σ para series aparece aquí, lo cual no significa que esta sea la primera ocasión en que Abel la usara. El tomo II de las *Œuvres complètes* contiene una memoria escrita durante los viajes de Abel la cual se titula *Les fonctions transcendentes* $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$,... $\Sigma\frac{1}{a^n}$ *exprimées par des intégrales definies*, pp. 1–6.

Aparentemente la notación convencional para límites no estaba plenamente establecida en los días de Abel y parece que él usaba lim. como una abreviación de la palabra "límite".

recordando que s_n puede sobrepasar todo límite, s' es divergente y concluimos lo mismo para

$$\frac{u_1}{s_0^\alpha} + \frac{u_2}{s_1^\alpha} + \frac{u_3}{s_2^\alpha} + \cdots + \frac{u_n}{s_{n-1}^\alpha} + \cdots$$

donde $\alpha < 1$.

Teorema. Si la serie Σu_n es divergente, entonces la serie $\Sigma \frac{u_n}{{s_n}^{\alpha+1}}$ es convergente, si α es positivo.

$$s_{n-1}^{-\alpha} - {s_n}^{-\alpha} = (s_n - u_n)^{-\alpha} - {s_n}^{-\alpha} > {s_n}^{-\alpha} + \alpha {s_n}^{-\alpha-1} \,.\, u_n = \alpha \,.\, \frac{u_n}{{s_n}^{1+\alpha}},$$

en consecuencia la serie

$$\Sigma \frac{u_n}{{s_n}^{1+\alpha}}$$

es convergente.

Aplicación. Supongamos que $u_n = 1$, tenemos que $s_n = n$. En consecuencia la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es divergente, y por tanto

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}} + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha+1}} + \cdots$$

es convergente. Si la serie $\Sigma\varphi n$ es divergente, se sigue que para una serie convergente cualquiera Σ, el más pequeño de los límites $\frac{u_n}{\varphi n}$ sea cero.

En efecto, supongamos que por el contrario

$$u_n = p_n \,.\, \varphi n,$$

donde p_n no sea mayor que α. Luego

$$\Sigma u_n > \Sigma\alpha \,.\, \varphi n,$$

es, en consecuencia, divergente.

Sabemos que la serie $\Sigma \frac{1}{n}$ es divergente, luego para que una serie Σu_n sea convergente, es necesario que el más pequeño de los límites de $n u_n$ sea cero.

Pero esta no es una condición suficiente. En general podemos demostrar que no existe una función φn tal que toda serie Σu_n sea convergente si $\lim.(\varphi n \,.\, u_n) = 0$, y divergente en caso contrario. En efecto, la serie

$$\Sigma \frac{1}{\varphi n}$$

es divergente de acuerdo con la hipótesis, y la serie siguiente

$$\Sigma \frac{1}{\varphi n \,.\, \Sigma \frac{1}{\varphi(n-1)}}$$

es convergente; pero sabemos que esta serie es divergente al igual que la anterior. Por tanto M. *Olivier* está seriamente equivocado.

La serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\left(1+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} + \cdots + \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} + \cdots$$

es divergente. Pero

$$\log(1+n) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

luego

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \log n.$$

En consecuencia, la serie

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$$

es divergente. Sea φn una función continua de n indefinidamente creciente, tenemos

$$\varphi(n+1) = \varphi n + \varphi' n + \frac{\varphi''(n+\theta)}{1\,.\,2},$$
$$\varphi(n+1) - \varphi n < \varphi' n,$$
$$\varphi'(0) + \varphi'(1) + \cdots + \varphi'(n) < \varphi(n+1) - \varphi(0);$$

entonces la serie

$$\varphi'(0) + \varphi'(1) + \cdots + \varphi'(n) + \cdots$$

es divergente.

Sea

$$\varphi_m n = \log^m(n+a),$$

tenemos

$$\varphi'_m n = \frac{d}{dn} \log \varphi_{m-1} n = \frac{\varphi'_{m-1} n}{\varphi_{m-1} n},$$
$$\varphi'_m n = \frac{1}{(n+a)\,.\,\log(n+a)\,.\,\log^2(n+a)\ldots\log^m(n+a)};$$

entonces la serie

$$\Sigma \frac{1}{\log n\,.\,\log^2 n\,.\,\log^3 n\ldots\log^{m-1} n}$$

es divergente.

$$\begin{aligned}
&\varphi n = \int_a^n \frac{d(\log^m n)}{(\log^m n)^\alpha} = \frac{(\log^m n)^{1-\alpha}}{1-\alpha},\\
&\varphi n = C - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(\log^m n)^{\alpha-1}},\\
&\varphi' n = \frac{d(\log^m n)}{dn} \cdot \frac{1}{(\log^m n)^\alpha},\\
&\varphi(n+1) - \varphi n = \varphi'(n+l) < \varphi'(n+1), \quad (l<1),\\
&\varphi' n < \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{[\log^m (n-1)]^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\log^m n)^{\alpha-1}} \right\},\\
&\varphi'(n-1) < \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{[\log^m (n-2)]^{\alpha-1}} - \frac{1}{[\log^m (n-1)^{\alpha-1}]} \right\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi'(a) + \varphi'(a+1) + \cdots + \varphi' n < \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{[\log^m (a-1)]^{\alpha-1}},
\end{aligned}$$

$\varphi'(a) + \varphi'(a+1) + \cdots + \varphi' n + \cdots$ es convergente.

Luego la serie

$$\Sigma \frac{1}{n \,.\, \log n \,.\, \log^2 n \,.\, \log^3 n \ldots \log^{m-1} n \,.\, (\log^m n)^{1+\alpha}}$$

es convergente si $\alpha > 0$.

Si

$$\lim . \frac{\log\left(\frac{1}{u_n \,.\, n \,.\, \log n \,.\, \log^2 n \,.\, \log^3 n \ldots \log^{m-1} n}\right)}{\log^{m+1} n} > 1,$$

En efecto, en el primer caso tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{u_n \,.\, n \,.\, \log n \,.\, \log^2 n \,.\, \log^3 n \ldots \log^{m-1} n} > (\log^m n)^{1+\alpha},\\
&u_n < \frac{1}{n \,.\, \log n \,.\, \log^2 n \,.\, \log^3 n \ldots \log^{m-1} n \,.\, (\log^m n)^{1+\alpha}},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Si

$$\lim . \frac{\log\left(\frac{1}{u_n} \cdot \frac{d}{dn} \log^m n\right)}{\log^{m+1} n} \begin{cases} > 1, & \text{convergente;} \\ < 1, & \text{divergente;} \\ = 1, & \text{puede ser convergente o divergente.} \end{cases}$$

Este es el teorema V del artículo sobre la serie binómica.

Si la serie $\Sigma a_n x^n$ es convergente entre $-\alpha$ y $+\alpha$, entonces también es convergente la serie que se obtiene derivando cada término. Estas derivadas son todas funciones continuas entre $-\alpha$ y $+\alpha$.

Si $\varphi_0(y) + \varphi_1(y) \,.\, x + \varphi_2(y) \,.\, x^2 + \cdots + \varphi_n(y) \,.\, x^n + \cdots = f(y)$ es convergente para todo valor de x menor que α, y todo valor de y desde β (inclusive) hasta otra cantidad cualquiera, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{y=\beta-\omega} f(y) &= \lim_{y=\beta-\omega} \varphi_0(y) + x \,.\, \lim_{y=\beta-\omega} \varphi_1(y) \cdots \\ &= A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots = B,\end{aligned}$$

en todos los casos esta última serie es convergente.

$$\begin{aligned}[f(\beta-\omega) - R] &= [\varphi_0(\beta-\omega) - A_0] + [\varphi_1(\beta-\omega) - A_1] \,.\, x + \cdots \\ &\quad + [\varphi_n(\beta-\omega) - A_n]x^n + \cdots \\ &= [\varphi_0(\beta-\omega) - A_0] + [x_1\varphi_1(\beta-\omega) - A_1 x_1]x_2 + \cdots \\ &\quad + [\varphi_n(\beta-\omega) \,.\, x_1^n - A_n x_1^n]x_2^n + \cdots\end{aligned}$$

donde $x_1 < \alpha$, $x_2 < 1$.

Sea $[\varphi_m(\beta-\omega) \,.\, x_1^m - A_m x_1^m]$ el mayor de los términos

$$\varphi_0(\beta-\omega) - A_0, \; \varphi_1(\beta-\omega) - A_1 x_1, \ldots,$$

entonces

$$f(\beta-\omega) = R + \frac{k}{1-x_2} \cdot [\varphi_m(\beta-\omega) \,.\, x_1^m - A_m x_1^m],$$

donde k es un número comprendido entre $+1$ y -1. El coeficiente k converge para valores decrecientes de ω que tienden a cero, luego

$$\lim_{y=\beta-\omega} f(y) = R = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots .$$

Por tanto tenemos el siguiente teorema:

Si $\varphi_0 y, \; \varphi_1 y, \ldots$ son funciones continuas de y entre β y α, si además la serie

$$f(y) = \varphi_0(y) + \varphi_1(y) \,.\, x + \varphi_2(y) \,.\, x^2 + \cdots$$

es convergente para todos los valores de x menores que α, entonces $f(y)$ es también una función continua de y.

Este uso de la expresión “Lim.” sugiere la idea de mi interpretación de la notación usada por Abel.

Por ejemplo, la serie

$$f(y) = 1^y \,.\, x + 2^y \,.\, x^2 + 3^y \,.\, x^3 + 4^y \,.\, x^4 + \cdots + n^y \,.\, x^n + \cdots$$

es convergente si $x < 1$, para cualquier y; entonces $f(y)$ es una función continua de y desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

$$f(y) = \operatorname{sen} y \,.\, x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y \,.\, x^2 + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3y \,.\, x^3 + \cdots$$

es una función continua de y, si $x < 1$. Si $x = 1$, la serie es también convergente, pero en este caso $f(y)$ es discontinua para ciertos valores de y.

$$f(y) = \frac{y}{1+y^2}\, x + \frac{y}{4+y^2}\, x^2 + \frac{y}{9+y^2}\, x^3 + \cdots$$

es convergente si $x < 1$, para todo y. Luego $f(y)$ es una función continua de y. Si por ejemplo y converge hacia $\frac{1}{0}$, entonces $f(y)$ converge hacia cero. Por el contrario $x = 1$, la serie aún es convergente, pero para valores crecientes de y, $f(y)$ converge hacia $\dfrac{\pi}{2}$, y no hacia cero.

Nota I. Si una serie

$$\varphi_0(y) + \varphi_1(y) \,.\, x + \varphi_2(y) \,.\, x^2 + \cdots + \varphi_n(y) \,.\, x^n + \cdots$$

es convergente para $x < \alpha$ y $y < \beta$, entonces la serie siguiente nunca es convergente:

$$A_0 + A_1 \,.\, x + A_2 \,.\, x^2 + \cdots + A_n \,.\, x^n + \cdots;$$

por ejemplo

$$\frac{\operatorname{sen} ay}{y} + \frac{\operatorname{sen} a^2 y}{y}\, x + \cdots + \frac{\operatorname{sen} a^{n+1} y}{y}\, x^n + \cdots$$

es convergente, si $x < 1$, $y > 0$; mientras que la serie

$$A_0 + A_1 x + \cdots \quad \text{o} \quad a + a^2 x + \cdots + a^{n+1} x^n + \cdots$$

es divergente si $ax > 1$.

Nota II. $\lim\limits_{y=\beta-\omega}.\, [\varphi_0(y) + \varphi_1(y) \,.\, x + \cdots + \varphi_n(y) \,.\, x^n + \cdots]$ es finito siempre que la serie $A_0 + A_1 \,.\, x + \cdots + A_n \,.\, x^n + \cdots$ es convergente; por ejemplo,

$$\begin{aligned} &1 + a + \cdots + a^y - [1 + 2a + \cdots + (y+1)a^y] \,.\, x \\ &\quad + \left(1 + 3a + \cdots + \frac{(y+1)(y+2)}{2} a^y\right) x^2 - \cdots \\ &\quad = \frac{1}{1+x} + \frac{a}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{a^y}{(1+x)^{y+1}}, \quad \lim_{y=\frac{1}{2}}.(fy) = \frac{1}{1+x-a}. \end{aligned}$$

Esta y otras frases que aparecen entre corchetes fueron agregadas por los editores de las *Œuvres Complètes*.

Este es, evidentemente, un error de imprenta. Por supuesto tanto en la igualdad como en la desigualdad se trata de a_m en lugar de a^m en el primer término.

Aquí los editores de las *Œuvres Complètes* omitieron unos detalles.

La notación $\lim_{n=\frac{1}{0}}.$ significa, por supuesto, $\lim_{n\to\infty}$.

[Coloquemos]

$$R = \lim_{x=\alpha-\omega}. (a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + a_{m+2}x^{m+2} + \cdots + a_{m+n}x^{m+n}),$$

donde $a_m,\ a_{m+1}, \ldots$ son positivos, [y sean]

$$(\alpha-\omega)^n = \alpha^n \delta,$$
$$\omega = \alpha\left(1 - \sqrt[n]{\delta}\right),$$

[tenemos]

$$R = a^m \alpha \delta^{\frac{m}{n}} + a_{m+1}\alpha^{m+1}\delta^{\frac{m+1}{n}} + \cdots + a_{m+n}\alpha^{m+n} \,.\, \delta^{\frac{m}{n}+1},$$
$$R > (a^m\alpha + a_{m+1}\alpha^{m+1} + \cdots + a_{m+n}\alpha^{m+n})\delta^{\frac{m}{n}+1},$$

etc.

Sea

$$fx = (a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + a_2^{(0)}x^2 + \cdots) + (a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + a_2^{(1)}x^2 + \cdots) + \cdots$$
$$+ (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + a_2^{(n)}x^2 + \cdots) + \cdots$$

una serie convergente, si $x < 1$.

Sean

$$A_0 = \lim_{n=\frac{1}{0}}. (a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + \cdots + a_0^{(n)}),$$
$$A_1 = \lim_{n=\frac{1}{0}}. (a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots + a_1^{(n)}), \qquad \text{etc.},$$

tenemos

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m + \cdots,$$

si la última serie es convergente.

[Escribiendo]

$$f_n x = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + A_2^{(n)} + \cdots + A_m{}^{(n)} + \cdots$$

se deduce que

$$fx = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m + \cdots.$$

Desarrollando $f(x+\omega)$ como serie de potencias de ω. Así tenemos que

$$\lim_{x=\beta\pm\omega}. (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + \cdots,$$

si la última serie es convergente; puesto que si $a_n x^n$ es positivo finito,

$$P = \lim_{x=\beta-\omega}. (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \frac{1}{0},$$

si $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots$ es divergente.
[Coloquemos]

$$f(x+\omega) = a_0 + a_1(x+\omega) + a_2(x+\omega)^2 + \cdots, \qquad x+\omega < 1;$$
$$f(x+\omega) = a_0 + (a_1 x + a_1\omega) + (a_2 x^2 + 2a_2\omega + a_2\omega^2) + \cdots,$$

luego

$$f(x+\omega) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (a_1 + 2a_2 x + \cdots)\omega + \cdots,$$

es decir:

$$f(x+\omega) = fx + \frac{f'x}{1}\omega + \frac{f''x}{1\,.\,2}\omega^2 + \cdots,$$

si esta serie es convergente. Entonces lo será siempre: Tenemos

$$\frac{f^n x}{1\,.\,2\ldots n} = a_n + (n+1)a_{n+1}x + \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}a_{n+2}x^2 + \cdots,$$
$$x_1^n \frac{f^n x}{1\,.\,2\ldots n} = x_1^n a_n + (n+1)a_{n+1}x_1^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}a_{n+2}x_1^{n+2} + \cdots,$$
$$x + \omega = x_1, \qquad x_1 < 1,$$
$$x = x_1 x_2, \qquad x_2 < 1,$$
$$x_1^n \frac{f^n x}{1\,.\,2\ldots n} < v_n \left(\frac{\omega}{x_1 - x_1 x_2}\right)^n \frac{1}{1-x_2} = \frac{v_n}{1-x_2},$$
$$\lim_{n=\frac{1}{0}}. \left\{\frac{\omega^n f^n x}{1\,.\,2\ldots n}\right\} = \text{ cero, } \quad \text{luego etc.}$$

Epílogo

Los matemáticos, en su forma muy particular han rendido honor a la memoria de Abel, siguiendo la tradición de asociar el nombre a los teoremas obtenidos por el investigador. En este caso, como hemos visto, en el tema de series existen varios resultados que llevan el nombre de Abel, pero el asunto no se limita a este tema, de hecho existen muchos otros teoremas, así como objetos matemáticos, entre los que destacan las integrales abelianas y los grupos abelianos.

En el año 1902 el Rey Oscar II de Suecia y Noruega propuso crear un premio internacional, tal como lo había sugerido el matemático Lie, pero la propuesta no se critalizó porque los dos países se separaron en 1905.

Mucho después, en agosto del 2001 el primer ministro de Noruega anunció el establecimiento del Premio Abel, como parte de la conmemoración del bicentenario de su nacimiento. El premio, de carácter internacional, se otorga anualmente desde el año 2003 y es considerado equivalente al Premio Nobel.

RESEÑA BIBLIOGRÁFICA

Los libros se hacen a partir de un árbol. Es un conjunto de partes planas y flexibles (llamadas todavía hojas) impresas con signos de pigmentación oscura... La escritura es tal vez el mayor de los inventos humanos. Un invento que une personas, ciudadanos de épocas distantes, que nunca se conocieron entre sí. Los libros rompen las ataduras del tiempo...

CARL SAGAN

El tema de series, de una u otra forma se encuentra presentado en cualquier texto de Cálculo o de Cálculo avanzado. Entre todos los libros disponibles sugerimos los siguientes que son verdaderos clásicos de la disciplina.

[1] *Calculus* (4ta edición), por Michael Spivak, Publish or Perish, Houston, 2008.

Este libro considerado con frecuencia como una excelente "Introducción al Análisis Real" ya que frecuentemente es utilizado en cursos donde el estudiante ya maneja los aspectos operatorios del Cálculo y se dedica por tanto a la exploración de los aspectos teóricos con mucho más énfasis y profundidad de lo que se hace en los libros ordinarios. (Es de esperar que esta edición sea publicada en español pronto por la Editorial Reverté, mientras tanto tenemos disponible la segunda edición de 1993).

El otro clásico del tema, dirigido a un espectro más amplio de estudiantes es:

[2] *Calculus* (volumen 1, 2da edición), por Tom Apostol, Editorial Reverté, Barcelona, 1983.

Uno de los aspectos más singulares de este libro es la presentación del Cálculo siguiendo un orden histórico. La exposición de las diferentes materias es muy precisa y con frecuencia presenta ejemplos que ilustran muy claramente los conceptos y teoremas, así como motivaciones históricas y geométricas que contribuyen a facilitar la lectura (en el caso de las series, por ejemplo, se presenta una descripción de la paradoja de Zenón).

Como indicamos en alguna ocasión, estos textos son la fuente de todos los ejemplos (y de casi todos lo problemas) presentados en este libro.

Otro famoso libro de Cálculo, un poco viejo (lo cual lo hace muy interesante desde el punto de vista histórico) y muy notable desde el punto de vista pedagógico, en sus tiempos más o menos el equivalente al libro de Spivak, es:

[3] *A Course of Pure Mathematics* (10$^{\text{ma}}$ edición), por Godfrey H. Hardy, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

En cuanto a textos de Cálculo Avanzado que pueden servir en el contexto tenemos los dos clásicos siguientes, aunque un estudiante de un curso más o menos común de Cálculo probablemente nunca necesite acudir a estas referencias, pero sin duda serán muy útiles para el quiera profundizar en los aspectos teóricos.

[4] *Análisis Matemático* (2$^{\text{da}}$ edición), por Tom Apostol, Editorial Reverté, Barcelona, 1983.

[5] *Principles of Mathematical Analysis* (3$^{\text{ra}}$ edición), por Walter Rudin, McGraw-Hill, Nueva York, 1976.

La siguiente referencia es un pequeño libro dedicado exclusivamente al tema de sucesiones y series el cual se caracteriza por un esquema muy riguroso y una gran cantidad de ejemplos.

[6] *Infinite Sequences and Series*, por Konrad Knopp, Dover, Nueva York, 1956.

En este libro hemos trabajado haciendo énfasis en la importancia de la convergencia de una serie para usarla como objeto matemático, de tal manera que la divergencia suele interpretarse como una propiedad no deseada (ver epígrafe en la página xi). Aunque hemos trabajado principalmente con un concepto de “serie convergente” y hemos mencionado incidentalmente otros dos: “según Abel” y “según de Cesàro”, los cuales incorporan ciertas restricciones especiales. Como establecimos en los lugares correspondientes estos dos conceptos de convergencia implican la convergencia en el sentido convencional, sin embargo las proposiciones recíprocas no son ciertas, así que podemos tener una serie convergente en el sentido de Abel o de Cesàro y no en el sentido usual, pero con algunas propiedades matemáticamente importantes, resultando que, después de todo, la divergencia no es algo tan malo. Con esta idea de fondo tenemos el siguiente texto especializado, probablemente el único sobre la materia.

[7] *Divergent Series* (2$^{\text{da}}$ edición), por Godfrey H. Hardy, Chelsea, Nueva York, 1991.

Por motivos evidentes, la lectura de esta obra es recomendada a aquellos que ya han completado un buen estudio sobre series en términos generales, pero una revisión ocasional puede ser muy útil para el lector interesado en información histórica sobre series. Esta es la fuente de donde fue tomado el pensamiento de Abel (indicado arriba) que aparece como epígrafe de este libro.

Un estudio avanzado de series de potencias complejas se encuentra en todos los libros de Análisis Complejo, particularmente en el clásico:

[8] *Complex Analysis*, por Lars Ahlfors (3$^{\text{ra}}$ edición), McGraw-Hill Co., Nueva York, 1979.

El concepto de sucesión convergente puede ser planteado en esquemas más amplios mediante una generalización del concepto de *distancia* (como por ejemplo en los Problemas 1-15 y 2-5). La idea es considerar un escenario brindado por un conjunto cualquiera X en el cual se encuentra definida una "distancia"; entonces una sucesión en este "espacio métrico" es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido es un subconjunto de X y la noción de convergencia es una traducción del concepto de convergencia estudiado aquí reemplazando adecuadamente los signos de "valor absoluto". Una presentación muy elegante de este tema y de muchos otros relacionados con la naturaleza de estos espacios se encuentra en el libro siguiente:

[9] *Set Theory and Metric Spaces* (2$^{\text{da}}$ edición), por Irving Kaplansky, Chelsea, Nueva York, 1977.

Otro libro dedicado al mismo tema (y que por motivos diversos he tenido que leer en múltiples ocasiones) es

[10] *Topología de los Espacios Métricos*, por Fernando Mejías, Publicaciones del Vicerrectorado Académico de la Universidad de Los Andes, Mérida, 2006.

Un área especializada sumamente útil en el estudio de la convergencia de series es el de las desigualdades y sobre este particular hay varias fuentes disponibles; sin embargo debe hacerse notar que existe otra variante del problema que es el estudio de desigualdades que involucran series como por ejemplo la desigualdad de Minkowski en el Problema 2-6; sobre este particular, a pesar del paso de los años (la primera edición fue publicada en 1934), la referencia generalmente aceptada como texto clásico por excelencia es:

[11] *Inequalities* (2$^{\text{da}}$ edición), por Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood y George Pólya, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Los tres autores de esta colaboración escribieron material sobre filosofía, psicología y enseñanza de las matemáticas; en particular el libro de Littlewood tiene carácter anecdótico sobre experiencias que pueden resultar interesantes para cualquier aprendiz de esta ciencia.

Mucho más allá de esta obra maestra la colaboración entre Hardy y Littlewood es considerada como una de las más fructífera de la historia (se dice que fue Littlewood quien agregó en la referencia [7] el pensamiento de Abel que hemos colocado como epígrafe de este libro en la página xi).

[12] *A Mathematician's Miscellany*, John E. Littlewood, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

En cuanto al libro de Hardy, es una presentación personal del significado de la profesión de matemático, en especial son interesantes sus observaciones sobre la relación entre "matemática pura" y "matemática aplicada", ya que términos generales a ésta última no la considera matemática en absoluto.

[13] *A Mathematician's Apology*, Godfrey H. Hardy, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

A continuación pasamos a referencias útiles para evaluar el papel del concepto de serie en el desarrollo del Cálculo. La primera de las referencias no es precisamente un libro de historia, sino una excepcional exposición de los conceptos fundamentales del Cálculo partiendo del concepto de serie, tal y como fue el proceso histórico, pero presentado en forma sistemática.

[14] *An Infinite Series Approach to Calculus* por Susan Bassein, Publish or Perish, Houston, 1993.

Sobre los aspectos históricos señalados en este libro, para empezar, las cartas de Newton a Leibniz sobre la serie binómica fueron traducidas de una notable selección de textos matemáticos:

[15] *A Source Book of Mathematics* por David E. Smith, Dover, Nueva York, 1959.

Otra traducción de los documentos pero con una apariencia muy moderna se encuentra en el tomo 3 de otra valiosa selección, particularmente interesante para quien gusta de leer escritos originales y biografías.

[16] *Sigma, el Mundo de las Matemáticas* (3^{ra} edición, tomos 1–6), por James R. Newman, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1968.

El material sobre series infinitas de Euler es traducido del siguiente libro (el cual a su vez es una traducción del texto original en latín).

[17] *Introduction to Analysis of the Infinite, Book I* por Leonhard Euler, Springer-Verlag, Nueva York, 1988.

Para la traducción de los artículos de Abel que aparecen en el Capítulo 10, hemos usado, por supuesto:

[18] *Œuvres Complètes* por Niels H. Abel, Christiana, Johnson Reprint Corporation, Nueva York, 1965.

Para profundizar en los detalles de la vida de Abel existen varias referencias disponibles pero tal vez la mejor de todas es la siguiente biografía, muy bien documentada y excelentemente expuesta.

[19] *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, por Oystein Ore, Chelsea, Nueva York, 1974.

Algunos aspectos sobre el desarrollo histórico de las series se encuentran dispersos en las siguientes obras de carácter escolar.

[20] *Elementos de Historia de las Matemáticas* (2$^{\text{da}}$ edición), por Nicolás Bourbaki, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[21] *The History of Calculus and its Conceptual Development*, por Carl Boyer, Dover, Nueva York, 1949.

[22] *An Introduction to the History of Mathematics* (6$^{\text{ta}}$ edición), por Howard Eves, Saunders College Publishing, Nueva York, 1990.

[23] *A Concise History of Mathematics* (4$^{\text{ta}}$ edición), por Dirk Struik, Dover, Nueva York, 1987.

En las páginas 122 y 123 de esta última referencia se encuentra una reproducción de la deducción de la igualdad $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ del *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler. Más detalles sobre esta fórmula aparecen en:

[24] *¿Qué Son las Matemáticas?*, por Richard Courant y Herbert Robbins, Fondo de Cultura Económica, México, 2002.

Sobre el papel histórico de las cartas de Newton a Leibniz acerca de la serie binómica, se encuentra un buen estudio en:

[25] *The Life of Isaac Newton*, por Richard Westfall, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Algunos elementos adicionales sobre el particular se hallan en:

[26] *Isaac Newton, Adventurer in Thought*, por A. Rupert Hall, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Claro está, los libros indicados arriba son biografías de Newton y no se dedican exclusivamente a temas de Cálculo. Otra biografía que trata minuciosamente todos los detalles, en especial los pormenores de la controversia entre Newton y Leibniz sobre la prioridad en la invención del Cálculo es:

[27] *Newton* (2 volúmenes), por Gale Christianson, Salvat Editores, Barcelona, 1986.

SOLUCIONES A PROBLEMAS ESCOGIDOS

...Euclides, que sistematizó de modo brillante la geometría y que en cierta ocasión dijo a su rey, que luchaba con un difícil problema matemático: "no hay camino real hacia la geometría"...

CARL SAGAN

En esta sección se ofrece indicaciones generales para resolver algunos de los problemas del texto. En cada caso se presenta la idea principal con una referencia sobre su aplicación y se deja al lector la tarea de desarrollar los detalles.

Capítulo 1

1 (1) $a_n = (1/2)^{n-1}$.

(2) $a_n = (3/2)^{n-1}$.

(3) $a_n = 3^{n-1}/2^n$.

(4) Podemos definir $a_n =$ si n es impar y $a_n = n - 1$ si n es par, o también $a_n = n + (-1)^n$.

(5) $a_n = (-1)^{n-1/2}/n$ para n impar y $a_n = 0$ para n par. Una versión muy elegante es $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)/n$.

2 (1) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) Observemos que para $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$ tenemos que $a_n = \cos(2k\pi) = 1$; mientras que para $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$ se cumple que $a_n = \cos(2k\pi) = 0$. Por tanto la sucesión diverge.

(3) Por la Regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \log 2} = 0,$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

(4) Similarmente al problema anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

(5) Para n par tenemos que $a_n = 2$ y para $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$ se cumple que $a_n = 0$. Luego la sucesión diverge.

(6) Notemos que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ para todo n. Entonces

$$0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n},$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0.$$

(7) Como en la parte (6) podemos probar que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n,$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Por otro lado tenemos que la sucesión $\{1 + (-1)^n\}$ diverge, luego la sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ es divergente.

(8) $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1$.

(9) Para n par tenemos que $(-1)^n = 1$, por tanto $\{2, 4, 6, \ldots\}$ es una subsucesión divergente de $\{a_n\}$.

(10) Sabemos que $-1 \leq \cos(n!) \leq 1$ para todo n. Además $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{2/3}}{n+1} = 0$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cos(n!)}{n+1} = 0.$$

(11) Tenemos

$$a_n = \frac{(-1)^n + 2^n}{(-1)^{n+1} + 2^{n+1}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1}{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

(12) Con un procedimiento análogo al del problema anterior resulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

(14) Observemos que para $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$ se cumple que $\cos \dfrac{n\pi}{2} = 1$, mientras que para $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, $\cos \dfrac{n\pi}{2} = 0$. Por otro lado la sucesión $\{n/(n+1)\}$, converge hacia 1, entonces la sucesión $\left\{1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ es divergente.

(15) Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(n^n) \leq 1$ para todo n y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\, \operatorname{sen}(n^n)}{n+1} = 0.$$

(16) Si $a = b = 0$ es evidente que la sucesión converge hacia 0. Ahora, sea $\alpha = \max(a, b) > 0$, entonces

$$a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} = \alpha \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha^n}\,(a^n + b^n)} = \alpha \sqrt[n]{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{b}{\alpha}\right)^n},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

5 (a) Supongamos que $x_n \to \alpha < 0$. Entonces aplicando la definición de límite para $\varepsilon = -\alpha$ tenemos que existe un N, tal que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$|x_n - \alpha| < -\alpha.$$

Es decir

$$\alpha < x_n - \alpha < -\alpha \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De donde

$$2\alpha < x_n < 0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

pero esto contradice la hipótesis.

(b) Aplicar la parte (a) a la sucesión definida por $a_n = x_n - y_n$.

(c) Tomar $x_n = 1/n$.

6 Dar un ejemplo de una sucesión

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$$

donde

$$a_{k_n} = k + \frac{1}{n}.$$

7 Formar una sucesión $\{a_n\}$ con todos los números racionales empezando por 0 y continuar con el siguiente esquema (sin preocuparse por las repeticiones):

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
-\frac{1}{1} & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
-\frac{2}{1} & & -\frac{2}{2} & & -\frac{2}{3} & & -\frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

y luego utilizar el hecho de que todo intervalo abierto contiene algún número racional.

9 Dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego

$$|a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{N+M} - M\ell| < \frac{M\varepsilon}{3},$$

de donde

$$\left|\frac{1}{N+M}(a_N + a_{N+1} \cdots + a_{N+M} - M\ell) - \frac{M\ell}{N+M}\right| < \frac{M\varepsilon}{3(N+M)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podemos elegir M suficientemente grande para que se cumpla que

$$\left|\frac{M\ell}{N+M} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{N+M}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego

$$\left|\frac{1}{N+M}(a_1 + \cdots + a_{N+M} - \ell)\right| < \varepsilon.$$

10 (a) Supongamos que $p \notin [a, b]$, es decir $p < a$ o $p > b$. Si $p < a$, existe un N tal que para todo n

$$\text{si } n \geq N, \text{ entonces } |x_n - p| < a - p.$$

Luego

$$2p - a < x_n < a, \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

lo cual es una contradicción. Proceder en forma análoga si $p > b$.

(b) Tomemos $a = 0$, $b = 1$, $x_n = 1/n$.

16 (a) Dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces

$$|a_n - \ell|$$

Pero $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell|$, entonces si $n \geq N$ tenemos

$$||a_n| - |\ell|| < \varepsilon.$$

Para una segunda demostración consideremos $f(x) = |x|$ para todo x y apliquemos el Corolario 1-15.

(b) Consideremos $a_n = (-1)^n$ para todo n.

17 Tomemos $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$, $\gamma = \{b_n\} \in \mathfrak{M}$.

(a) $|a_n - b_n| \geq 0$ para todo n, por tanto $\sup\{|a_n - b_n|\} \geq 0$.
Si $\sup\{|a_n - b_n|\} = 0$, entonces $|a_n - b_n| = 0$ para todo n, es decir $a_n = b_n$ para todo n.
La proposición recíproca se prueba en forma análoga.

(b) Esta es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$$

para todo n.

(c) Por la desigualdad triangular para números reales tenemos

$$|a_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n|,$$

entonces

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n - b_n|\} &\leq \sup\{|a_n - c_n| + |c_n - b_n|\} \\ &\leq \sup\{|a_n - c_n|\} + \sup\{|c_n - b_n|\}. \end{aligned}$$

18 Ver el Teorema 3-33.

20 (a) Tomar $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ la función identidad.

(b) Definir $a : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ por

$$a_n = \begin{cases} 1 - (n+1)/2 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ n/2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

(c) Evidentemente el caso más importante es cuando A y B son infinitos. Si $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, considerar $\alpha : \mathbf{N} \to A \cup B$ definida por

$$\alpha_n = \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ b_{n/2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

(d) Un poco más general que en la indicación es el Problema 1-6.

(e) Supongamos que $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & \cdots & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

21 Para demostrar que PA1 implica a PA2 supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $1/n \geq \varepsilon$ para todo $n \in N$. Entonces $1/\varepsilon < n$ para todo n lo cual contradice PA1.

Ahora supongamos que PA2 es cierto. Dado $k > 0$ si $x \leq 0$ es suficiente tomar $n = 1$. Supongamos que $x > 0$, Para $\varepsilon = k/x$ existe una $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{k}{x}$, de donde $x < nk$.

Ahora probaremos que PA1 es cierta a partir de PA3. Sea x un número real cualquiera, para $k = 1$ existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $x < n$.

Capítulo 2

1 (1) Utilizando el método de descomposición en fracciones simples para demostrar que

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ es una serie telescópica que converge hacia $1/2$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-3}} = \frac{2}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{3}{2}.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \right) = 1.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1.$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{2}.$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{10^n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{10}\right)^n = \frac{10\alpha}{10-\alpha}.$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{25}\left[2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n \right] = \frac{1}{10}.$

(9) Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1,$$

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ es divergente.

(10) Recordando que $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$, entonces es fácil verificar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ es telescópica y converge hacia $\pi/4$.

2 Si la serie $\sum(a_n+b_n)$ fuese convergente, entonces la serie $\sum b_n = \sum(a_n+b_n) - \sum a_n$ sería convergente.

3 Tomar cualquier serie convergente $\sum a_n$ y definir $b_n = -a_n$.

4 Consideremos $a_n = (-1)^n$. La serie $\sum a_n$ diverge y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

5 Consideremos $\alpha = \{a_n\}, \beta = \{b_n\}, \gamma = \{c_n\} \in \ell^2(\mathbf{R})$.

(a) Puesto que $(a_n - b_n)^2 \geq 0$ para todo n tenemos que la sucesión de sumas parciales $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2$ cumple $s_n \geq 0$ luego $\Delta(\alpha, \beta) \geq 0$ (ver Problema 1-4(a)).
Por otro lado, si $\Delta(\alpha, \beta) = 0$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2 = 0,$$

y $a_n = b_n$ para todo n. La proposición recíproca se prueba de forma similar.

(b) Basta notar que para todo n se cumple que $(a_n - b_n)^2 = (b_n - a_n)^2$.

(c) La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2},$$

de donde obtenemos que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2}.$$

Luego

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k - b_k)^2}.$$

Entonces, por el Problema 1.4(b) tenemos

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - b_n)^2}.$$

7 (a) Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ es finito. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos la colección de intervalos $[x_i - \varepsilon/4N, x_i + \varepsilon/4N]$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \frac{\varepsilon}{4N} - \left(x_i - \frac{\varepsilon}{4N}\right)\right] = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(b) Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos la colección de intervalos $[x_n - \varepsilon/2^{n+1}, x_n + \varepsilon/2^{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\right] = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(c) Dado $\varepsilon > 0$ para cada n existe una colección numerable de intervalos $[a_{nm}, b_{nm}]$ tal que

$$X_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{nm}, b_{nm})$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_{nm} < \frac{\varepsilon}{2^{m+2}}.$$

Entonces

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m \subset \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (a_{nm}, b_{nm}),$$

y

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ell_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(d) Notemos que el complemento $[0,1] \setminus C$ del conjunto de Cantor es la unión numerable de intervalos cerrados, uno de los cuales tiene $\frac{1}{3}$, dos miden $\frac{1}{3^2}$, cuatro miden $\frac{1}{3^3}$ y así sucesivamente. Entonces tenemos que

$$\text{medida de } [0,1] \setminus C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

de donde

$$\text{medida de } C = 1 - \text{medida de } [0,1] \setminus C = 0.$$

(e) Un rectángulo cerrado en $\mathbf{R}^2$ es el producto cartesiano $[a,b] \times [c,d]$, siendo $[a,b]$ y $[c,d]$ intervalos cerrados (análogamente definimos los rectángulos abiertos $(a,b) \times (c,b)$). El área A del rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ está definida por

$$A = (b-a)(d-c).$$

Entonces, decimos que un conjunto $X \subset \mathbf{R}^2$ *tiene medida 0* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos cerrados $[a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ tal que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \varepsilon.$$

(f) Imitar la parte anterior.

Capítulo 3

1 (2) Divergente, comparar con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

(3) Divergente, utilizar el problema anterior.

(4) Convergente, porque $\displaystyle\frac{1}{(\log n)^n} < \frac{1}{2^n}$ para valores grandes de n.

(5) Divergente, note que $n^3/(n^4+1)$ "es prácticamente" $1/n$ para valores grandes de n.

(6) Convergente, pues $\dfrac{1}{n^s \log n} < \dfrac{1}{n^s}$.

(7) Convergente, pues $\dfrac{n!}{(n+3)!} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}$.

(10) Divergente, pues $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es prácticamente $\dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$ para n grande.

(11) Divergente, pues $\dfrac{n}{(3n-2)(3n-1)}$ es prácticamente $\dfrac{n}{9n^2} = \dfrac{1}{9n}$ para n grande.

2 Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge tenemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty,$$

de donde concluimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

4 Comparando con la serie

$$1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} + \cdots$$

obtenemos que la serie sugerida es divergente.

5 Los términos de la serie sugerida $\sum a_n$ pueden reordenarse de la forma

$$\left(\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2} + \tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} + \cdots\right) + \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots\right).$$

Es decir, $\sum a_n$ es la suma de dos series convergentes. Además para los casos en que n es un “cuadrado perfecto” se cumple que $na_n = 1$.

Capítulo 4

1 (3) Notemos que para todo $x > 0$ suficientemente pequeño se cumple $\operatorname{sen} x \leq x$, entonces para n suficientemente grande tenemos que $\operatorname{sen}(1/n) \leq 1/n$, de donde

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Luego, notando que $\cos(1/n) > 0$, tenemos que para todo n suficientemente grande se cumple

$$1 - \cos\frac{1}{n} = \frac{\operatorname{sen}^2(1/n)}{1+\cos(1/n)} \leq \frac{1}{n^2[1+\cos(1/n)]} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ es absolutamente convergente.

(4) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$ es condicionalmente convergente. En efecto, se cumple que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$$

Pero como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ es divergente, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$ diverge.

Por otro lado, si definimos la función f por

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1},$$

entonces

$$f'(x)=-\frac{2}{1+(2x+1)^2}.$$

Es decir, la función f es decreciente, por tanto tenemos que la sucesión $\{\operatorname{arctg}(1/(2n+1)\}$ es decreciente. Además tenemos que $\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}=0$, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$ converge (por el criterio de Leibniz).

(5) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\log n)\right)$ es condicionalmente convergente. La divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\log n)\right)$ se demuestra aplicando el criterio de comparación por paso al límite con la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$; para lo cual es suficiente observar el siguiente cálculo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

Por otro lado, aplicando el criterio de Leibniz obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\log n)\right)$ es convergente (ver el Ejemplo 4-5).

(7) Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}/2^{n+1}}{n^{100}/2^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)$ converge absolutamente.

(8) Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \log(1+1/n) = 0$ de donde obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\log(1+1/n)}$ diverge.

(9) Notemos que si definimos la función f por

$$f(x) = 1/(x\log^2 x)$$

tenemos que

$$f'(x) = -\frac{2+\log x}{x^2\log^3 x}.$$

Entonces f es decreciente para $x \geq 2$. Además

$$\int \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = -\frac{1}{3\log^3 x}.$$

Así que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ \log^2 n}$ converge y por tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ \log^2(1+n)}$$

converge absolutamente.

(10) Si $a_n = (-1)^{n+1}n^{37}/(n+1)!$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{37} = 0.$$

Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^{37}}{(n+1)!}$ converge absolutamente.

2 Por la desigualdad triangular tenemos que

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

para todo N. Además, la sucesión de sumas parciales de $\{|a_n|\}$ es creciente, luego

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \text{para todo } N.$$

Para concluir notemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$.

4 Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, tenemos que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, para n suficientemente grande se cumple que $|a_n| < 1$, por tanto

$$a_n^2 = |a_n|^2 \le |a_n|.$$

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge.

Capítulo 7

1 (1) Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Así que $\{f_n\}$ no converge uniformemente ya que cada f_n es continua.

(2) Para cada $x > 1$ tenemos que $x^n \to \infty$ si $n \to \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x > 1$. Pero f_n no converge uniformemente pues para cada n, dado $\varepsilon > 0$ podemos hallar un x tal que $f_n(x) > \varepsilon$ ya que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

(3) La sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente pues cada f_n es continua y

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

2 (1) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n.$$

Por otra parte $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; luego

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(2) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ (según el Problema 7-2(1)). Entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n$$

y

$$f'(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

(3) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$ (Problema 7-2(2)). Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, x^n$$

y

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}.$$

(4) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3\, x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$ (Problema 7-2(3)). Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n^4\, x^n$$

y

$$f'(x) = \frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5}.$$

(5) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\, dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-x) = \log \frac{1}{1-x}.$$

(6) Consideremos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\end{aligned}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned}$$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$.

(8) $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}\,x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right),$$

y, por tanto, basta con aplicar algunas de las identidades demostradas arriba.

(9) Análogamente al problema anterior tenemos

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}\,x^n = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 11\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

3 (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2$, (según el Problema 7-2(1)).

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^n(n+1)} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \log\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ (de acuerdo con el Problema 7.2(5)).

$$(5)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2\sqrt{e}.$$

4 Notemos que si $x \in \mathbf{Q}$ es decir $x = p/q$, con $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, entonces existe un número natural N tal que $N!x \in \mathbf{Z}$ (es suficiente tomar $N = |q|$), entonces $f_n(x) = 1$ para todo $n \geq N$. Por otro lado, si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tenemos que $n!\pi x$ no es múltiplo entero de π para todo n por tanto $\cos(n!\pi x) < 1$, luego $\lim\limits_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k} = 0$. En conclusión, la función de Dirichlet está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Observemos f es discontinua en *todos* los números reales, por tanto $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia f.

5 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ converge puntualmente pero no uniformemente sobre $\mathbf{R}$. En efecto, si f es el límite puntual del la serie, entonces $f(\pi) = 0$ pero

$$\lim_{x\to\pi+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

es decir, f no es continua π; para mayores detalles sobre este problema ver el artículo de Abel titulado *Recherches sur la Série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$ (páginas 209 y 233).

ÍNDICE ALFABÉTICO