Talleres I y II

Jesús Pérez Sánchez

Abril 2011

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

He aquí una colección de problemas cuyo objetivo es servir de apoyo a los cursos de Taller 1 y Taller 2 de nuestra licenciatura.

Los temas tratados son: Lógica, Aritmética, Geometría euclidiana, Álgebra y Combinatoria. En parte hemos querido recoger algunas experiencias, producto del ejercicio de la enseñanza de dichos talleres durante varios semestre, acá en nuestro Departamento de Matemáticas (Facultad de Ciencias ULA).

El plan es muy sencillo: en una primera parte presentamos los enunciados de los problemas, luego, ofrecemos sugerencias para muchos de ellos, y, por último, damos las respuestas correspondientes.

Agradecemos a Yeni Suárez, Naive Ángulo, Carina Niño, Amílcar Mata y Antonio Vizcaya por el apoyo brindado por parte de ellos durante la realización del presente trabajo. Agradecemos también las observaciones que los usuarios consideren convenientes a fin de mejorar éste. Será una gran satisfacción el que el presente material sea de utilidad en las labores de las asignaturas Taller 1 y 2 y en las aplicaciones de teoremas básicos de las mencionadas ramas de la matemática.

Jesús A. Pérez Sánchez.
jesusp@ula.ve

CAPÍTULO 1

PROBLEMAS DE TALLER I

1.1 Adolfo, Felipe, Juan y Marcos son jefes de la sección 1, la sección 2, la sección 3 y la sección 4 de cierta compañia, aunque no necesariamente en ese orden.

i) El jefe de la sección 3 es un fumador empedernido.

ii) Adolfo y Marcos asistieron recientemente a la conferencia del jefe de la sección 2 en el Club Ítalo.

iii) Felipe es un gran aficcionado a escribir, siendo el único de los cuatro que ha publicado un libro.

iv) En sus desplazamientos, Juan y Adolfo siempre van en el Departamento de no fumadores.

v) El libro del jefe de la sección 1 ha tenido un gran éxito.
¿Quién es el jefe de cada sección?

1.2 ¿ Cuál es el número que al quitarle la mitad queda igual a cero?

1.3 ¿ Cuántos minutos faltan para la medianoche si hace 10 minutos faltaban $\frac{5}{3}$ de lo que falta ahora?

1.4 Cada una de las tarjetas de la figura tiene un número en una cara y una letra en la otra.

$\boxed{4}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{5}$

Alguién afirmó: “Todas las tarjetas que tienen una vocal en una cara tienen un número impar en la otra”.

¿Cómo comprobar si tal afirmación es verdadera volteando el **menor** número de tarjetas?

1.5 En una tribu india en la que todavía susbsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:

- Un collar y una lanza se cambian por un escudo.
- Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo.
- Dos escudos se cambian por tres cuchillos.

¿A cuántos collares equivale una lanza?

1.6 En una región de Canadá, los dos idiomas oficiales son el inglés y el francés. Cualquier ciudadano de la región sabe hablar, al menos, uno de los dos; unos hablan sólo el inglés y otros hablan los dos idiomas. Si el 85 % de los habitantes de esa región habla inglés y el 75 % habla francés, ¿qué porcentaje de los habitantes de esa región sabe hablar los dos idiomas?.

1.7 De los números 8^{10}, 9^{10} y 10^8, ¿cuál es el mayor?

1.8 Observe las siguientes disposiciones de números:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\
 & & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\
 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\
26 & 27 & 28 & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

a) ¿Cuál es el término del medio en la 30ª fila?

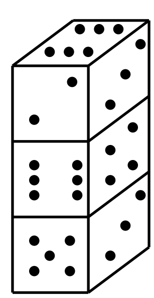
b) ¿Cuál es el número que queda directamente encima del 898?

1.9 Consideremos la siguiente tabla:

$$\begin{array}{lcccccc}
fila\ 1 & 0 & 8 & 16 & 24 & 32 & \cdots \\
fila\ 2 & 1 & 9 & 17 & 25 & 33 & \cdots \\
fila\ 3 & 2 & 10 & 18 & 26 & 34 & \cdots \\
fila\ 4 & 3 & 11 & 19 & 27 & 35 & \cdots
\end{array}$$

Hallar la fila y la columna del número 1234.

1.10 La figura muestra **tres dados iguales**. Hallar el número de la cara que es la base inferior de la columna de dados.



1.11 Demostrar que el número $111 + 222^2 + 333^3 + 444^4 + 555^5$ no es un cuadrado perfecto.

1.12 Hallar el mayor factor primo del número $3^{14} + 3^{13} - 12$.

1.13 Demostrar que $11^{10} - 1$ es múltiplo de 100.

1.14 ¿Cuántos números cuadrados perfectos hay entre 5^4 y 4^5?

1.15 Alberto, Benito y Cecilio son abogado, médico e ingeniero, aunque no necesariamente en ese mismo orden.

El médico quiso ver al abogado, pero le dijeron que se había ido de vacaciones con su amigo el ingeniero.

El ingeniero gana más dinero que el médico. Cecilio no ha oído hablar nunca de Benito.

Benito gana más que Alberto.

¿Cuál es la profesión de cada uno?

1.16 Un nadador tarda 5 minutos en nadar entre dos islas de un río, ayudado por la corriente. Al regresar, nadando contracorriente, tarda 15 minutos. ¿ Cuánto tardaría si no hubiese corriente alguna?

1.17 Se tienen nueve bolas, todas aparentemente iguales, pero se sabe que hay una que pesa menos que las demás. Se dispone además de una balanza de platillos iguales, pero no se tienen pesas. ¿Es posible identificar la bola diferente, en, a lo máximo, dos pesadas?

1.18 En un cajón hay 12 pares de medias blancas, 12 pares de medias negras, 12 pares de medias azules,12 pares de media rojas y 12 pares de medias grises. Falla la luz, y no podemos ver el color de las medias.

¿Cuál es el número mínimo de calcetines que debemos sacar para **tener la seguridad** que entre ellos habrá al menos un par del mismo color?

1.19 ¿Qué altura tiene un árbol que es 2 metros más corto que un poste de altura triple de la del árbol?

1.20 ¿Cuál es el mayor número de dos cifras igual al cuadrado de la cifra de sus unidades?

1.21 Se tiene un número de dos cifras, digamos ab. Resulta que ab excede a ba en un 20 % de ba.

¿Cuánto valen a y b?

1.22 Calcular $3^x + 3^{-x}$ sabiendo que $9^x + 9^{-x} = 62$

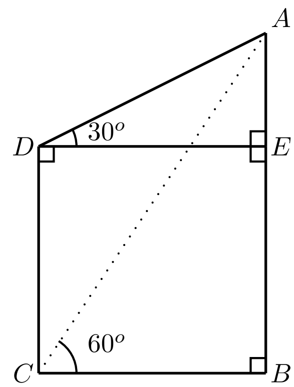
1.23 ¿Cuál es el número de dos cifras que es igual al doble del producto de sus dos cifras?

1.24 Un señor llegó hasta un puente ferroviario y empezó a correr por él. Cuando había recorrido $\frac{3}{8}$ del puente oyó el silbato de un tren. Calculó inmediatamente: si retrocedo al comienzo llegaré exactamente en el momento en que el tren entre en el puente, corriendo a mi velocidad de 10 Km, y si corro al final a esta velocidad, llegaré allá al mismo tiempo que el tren. ¿En qué velocidad marcha el tren?

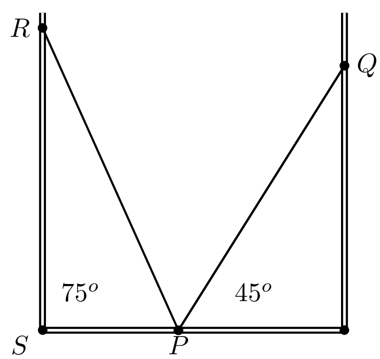
1.25 Los lados a y b de un triángulo miden respectivamente 20 cm y 8 cm ¿Cuál es la menor medida del tercer lado c sabiendo que es un número natural?

1.26 El semiperímetro de un triángulo isósceles mide 20 cm. Hallar la longitud de los lados sabiendo que uno de ellos es $\frac{2}{3}$ de la suma de los otros dos, que son iguales.

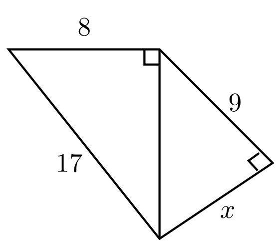
1.27 En la figura se tiene:
$DCBE$ es un rectángulo;
$DC = 48cm$;
$\sphericalangle ACB = 60°$;
$\sphericalangle ADE = 30°$.
Hallar AB.



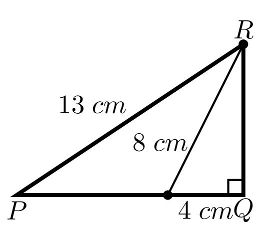
1.28 En un estrecho callejón de anchura desconocida ponen una escalera con su pie en un punto P entre las paredes. Si la apoyamos sobre la pared de la derecha, la escalera forma un ángulo de 45° con el suelo. Apoyándola sobre la otra pared, el ángulo que se forma es de 75°, como indica la figura. Además, la altura del punto R es de 4 m. Hallar el ancho del callejón.



1.29

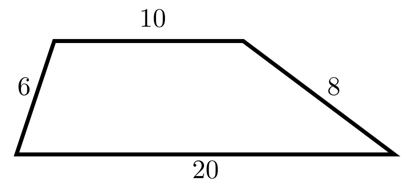


a. Calcular el valor de x.



b. Calcular el área del triángulo PQR.

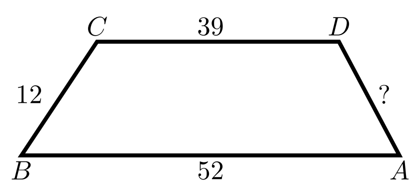
1.30 Hallar el área del trapecio cuyas bases miden 10 cm y 20 cm respectivamente, mientras que los lados no paralelos son de 6 cm y 8 cm.



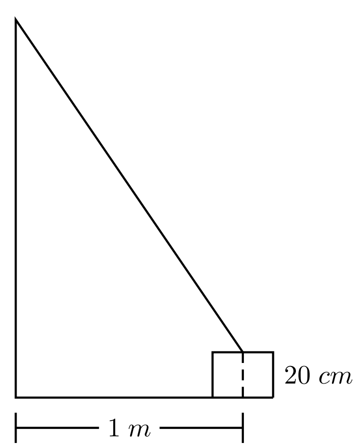
1.31 A 300 metros de una carretera rectilínea hay un campamento escolar, C_1. En la carretera y a 500 metros del campamento C_1 hay otro campamento C_2. Se desea construir una cafetería a orillas de la carretera y a igual distancia de cada campamento. Hallar la distancia de la cafetería a cada campamento.

1.32 A ambas orillas de un río de 40 metros de ancho hay dos palmeras, una frente a la otra. Las alturas de las palmeras son de 8 y 12 metros respectivamente. En la parte alta de cada palmera se encuentran sendos pájaros que súbitamente descubren un pez en la superficie del agua entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y con la misma velocidad, alcanzando al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del pie de la palmera más alta apareció el pez?

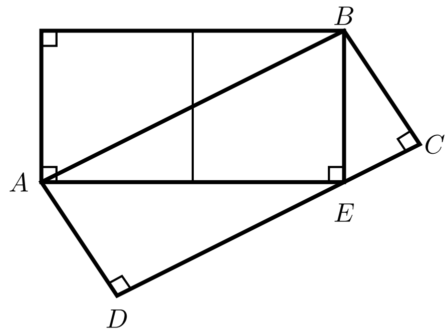
1.33 El área del trapecio $ABCD$ es de 210 cm^2. Además, la base mayor AB mide 52 cm, mientras que la base menor CD mide 39 cm. Si BC mide 12 cm, ¿cuánto mide DA?



1.34 Un muchacho, queriendo subir hasta el borde de una tapia, consiguió una escalera, que adosada verticalmente resultó tener la misma altura que la tapia. En vista de ello puso un cajón de 20 cm de alto, separado 1 m de la tapia, con lo que la escalera, apoyada en el cajón, llegaba justo hasta el borde de la tapia. ¿Qué altura tenía la tapia?



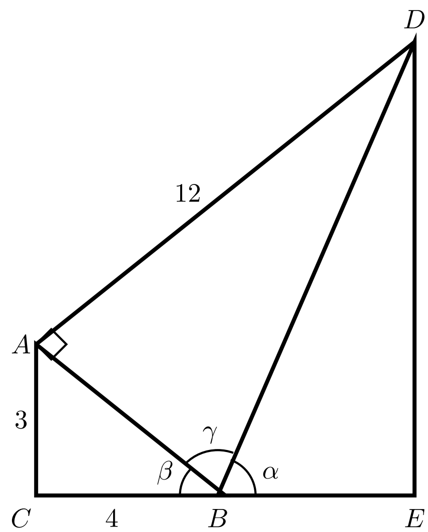
1.35 Cada uno de los cuadrados de la figura tiene de lado 1 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo $ABCD$?



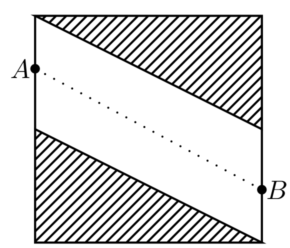
1.36 En la figura tenemos:

$AC = 3$;
$BC = 4$;
$AD = 12$;
$\overline{AC} \perp \overline{BC}$
$\overline{AD} \perp \overline{AB}$;
$\overline{DE} \perp \overline{BE}$.

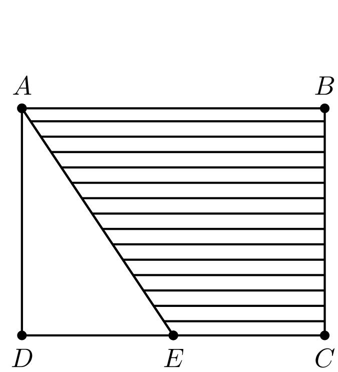
Hallar el coseno del ángulo EBD.



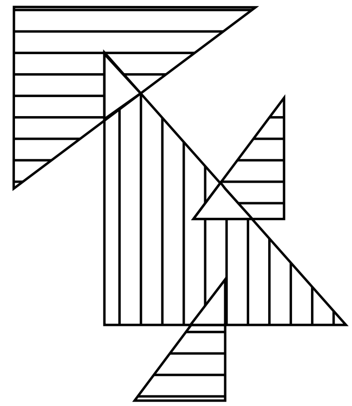
1.37 En una parcela cuadrada de 750 m de lado, la Comisión de Urbanismo ha decidido que solamente serán edificables las zonas rayadas, que son exactamente iguales. La parte no edificable corresponde a los $\frac{7}{12}$ de la parcela. En la parte central de esta zona irá una avenida $\overline{AB}$, tal como se señala en el dibujo. ¿Qué longitud tendrá la avenida?



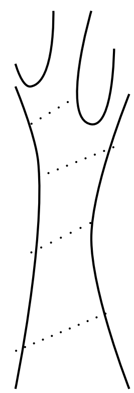
1.38 En el rectángulo de la figura, $AB = 30$ cm; DE, la mitad de AE. Si el área rayada es $250\sqrt{3}$ cm^2, hallar la longitud de $\overline{AE}$.



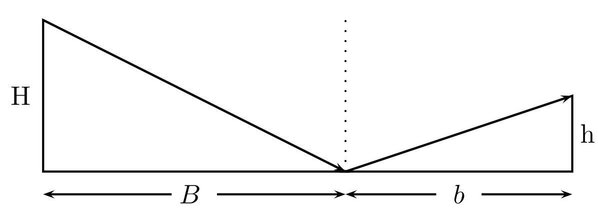
1.39 En el dibujo tenemos cuatro triángulos rectángulos. El mayor tiene sus catetos de 9 y 8 *cms* respectivamente. Los catetos del mediano miden 6 y 8 *cms*, mientras que los dos triángulo menores (que son congruentes) tienen sus catetos de 3 y 4 *cms* respectivamente. ¿Qué relación hay entre la zona rayada en una forma y la zona rayada en forma distinta?



1.40 Un pajáro carpintero marca su camino a picotazos descendiendo el tronco de un árbol, comenzando 20 pies arriba del nivel del suelo. El pájaro sigue una trayectoria en espiral (hélice) y da la vuelta 7 veces en la circunferencia del árbol (de 3 pies aproximadamente). Determinar la distancia total recorrida por el pájaro carpintero.

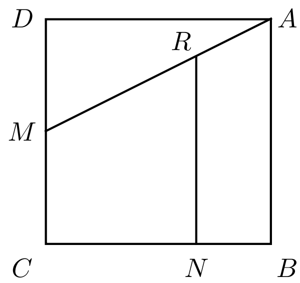


1.41 Un método para encontrar la altura de un objeto es poner un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta pueda verse en el espejo. ¿Qué altura tiene una torre si una persona de 1,5 m. de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?

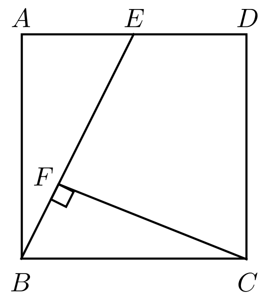


1.42 Un pino de 7,2 m de altura proyecta una sombra de 11,2 m. Dos pajaritos se posan en dicho árbol, uno en el tope y otro un poco más abajo (en la misma vertical). Si las distancias entre las sombras que esos pajaritos proyectan en el suelo es de 4,2 m, ¿cuál es la distancia entre los dos pajaritos?

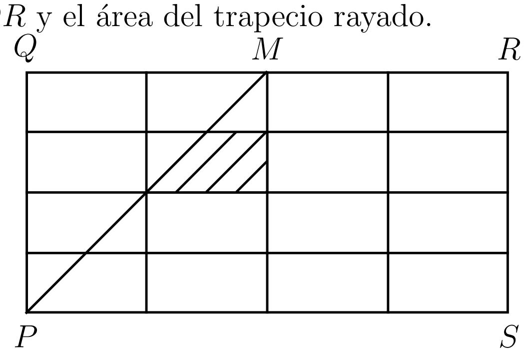
1.43 En el cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de $\overline{CD}$; $MR = 4RA$ y $AD = 10\ cm$. Hallar la distancia de R al lado $\overline{CB}$.



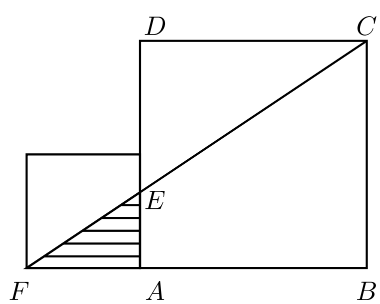
1.44 En la figura al lado, $ABCD$ es un cuadrado de área $4\ cm^2$; E es el punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BE}$.
¿Cuál es el área del cuadrilátero $CDEF$?



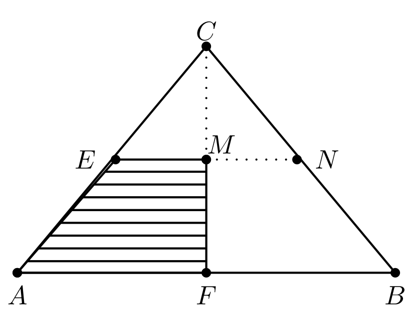
1.45 Dividimos los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ del rectángulo $PSRQ$ en cuatro partes iguales respectivamente y trazamos por los puntos de división segmentos paralelos a $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ respectivamente. Finalmente, unimos M (punto medio de $\overline{QR}$) con P. Hallar el cociente entre el área del rectángulo $PSQR$ y el área del trapecio rayado.



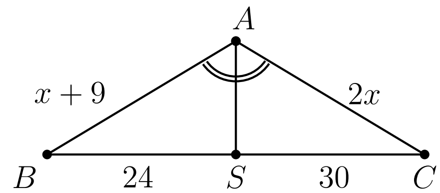
1.46 Los dos cuadrados de la figura tienen $4\ cm^2$ y $25\ cm^2$ de área respectivamente. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



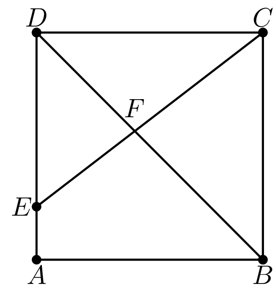
1.47 En el triángulo ABC se cumple: $AC = BC$; F, E y N, son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $\dfrac{1600}{3}\ cm^2$, hallar el área del trapecio $AFME$.



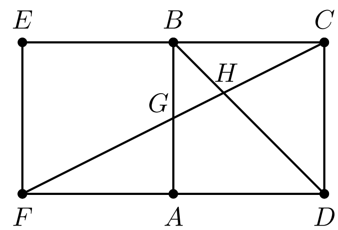
1.48 ¿Es posible la situación indicada en la figura en la cual $\overline{AS}$ es la bisectriz del ángulo BAC?



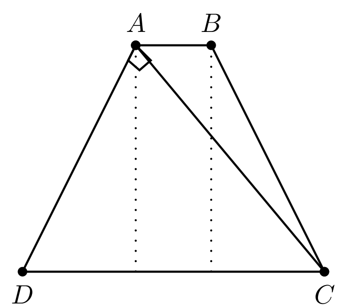
1.49 El lado del cuadrado $ABCD$ mide $28\ cm^2$; $DE = 21\ cm$. Hallar EF y FC.



1.50 $ABCD$ y $ABEF$ son cuadrados. Si $GH = 4$, calcular HC.



1.51 $ABCD$ es un trapecio, tal que:
$\overline{AC} \perp \overline{AD}$;
$\overline{AB} \| \overline{DC}$.
Si $CD = 25\ cm$ y $AD = 15\ cm$, hallar la altura del trapecio.



1.52 Juan tiene 40 años y la suma de las edades de sus tres hijos es 22 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Juan será la suma de las edades de sus dos hijos?

1.53 En un grupo de vacas y gallinas, el número de cabezas menos 53 es igual a un cuarto del número total de patas. ¿Cuántas gallinas hay?

1.54 Regocíjanse los monos, divididos en dos bandos:
su octava parte, al cuadrado, en el bosque se solaza; con alegres gritos, doce, atronando el campo están. ¿Sabes cuántos monos hay en la manada total?.

Nota: Alguien que pasaba por el lugar dijo: " con certeza, hay más de 30 monos, ahí ".

1.55 Un profesor de gimnasia rítmica solicita a sus alumnos que se agrupen formando un cuadrado de x filas. Se da cuenta entonces de que le sobran 18 gimnastas. Luego, ordena que se forme una nueva fila y una nueva columna, pero le quedan 23 lugares sin llenar. ¿Cuántos alumnos constituían el grupo?

1.56 Si quieres saber mi edad, ten en cuenta que:
la diferencia entre el triple de la edad que tenía hace hace tres años y la que tendré dentro de tres años, es igual a la edad que tengo actualmente. ¿Cuál es mi edad ?

1.57 Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2^{x-y} = 32 \\ 4^{x+y} = \frac{1}{64} \end{cases}$$

1.58 Sean a y b, números reales distintos, tales que:

$$\begin{cases} a^2 = 6b + 5ab \\ b^2 = 6a + 5ab \end{cases}$$

i) Hallar $a + b$

ii) Hallar ab

1.59 Si $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 5x - 9 = 0, \qquad x \neq -1$. Calcular $(x + 1)^4$

1.60 Si x es un entero positivo y

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = 131^2$$

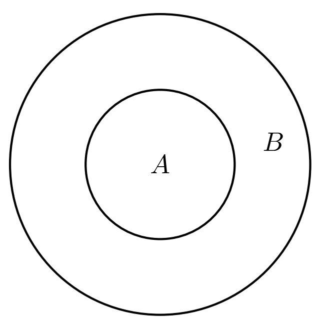
¿Cuál es el valor de x ?

1.61 Si

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 400 \\ x^2y + y^2x = 200, \end{cases}$$

hallar $x.y$

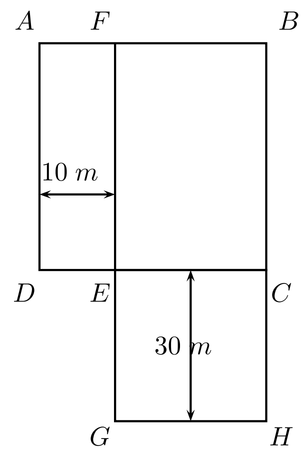
1.62 En un blanco como en el dibujo, una cierta puntuación es dada si la flecha cae en la región A y otra si la flecha cae en la región B. Andrea lanzó 5 flechas: 2 cayeron en la región B y 3 en la región A, totalizando 24 puntos. Por su parte, María también lanzó 5 flechas: 2 cayeron en la región A y 3 en la región B, y obtuvo 26 puntos. ¿Cuántos puntos son atribuidos por una flecha que cae en la región B?



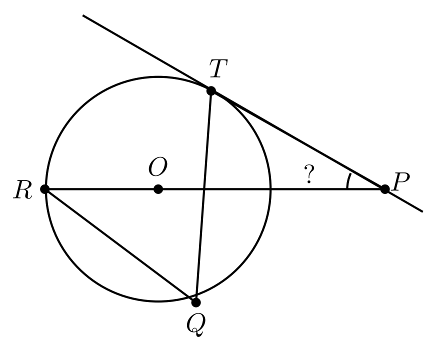
1.63 Rosa y Elena compraron idénticas cajas de escritorio. Rosa utiliza la suya para escribir cartas de una hoja y Elena usó la suya para escribir cartas de tres hojas. Rosa utilizó todos los sobres y le sobraron 50 hojas, mientras que Elena empleó todas las hojas de papel y le sobraron 50 sobres. ¿Cuál era el número de hojas de papel en cada caja?

1.64 En cierto examen, todas las preguntas tienen el mismo valor. María respondió 9, de las primeras 10 preguntas, correctamente. De las preguntas restantes sólo respondió bien el 30 %. En total obtuvo un puntaje del 50 % en su examen ¿Cuántas preguntas tenía el examen?

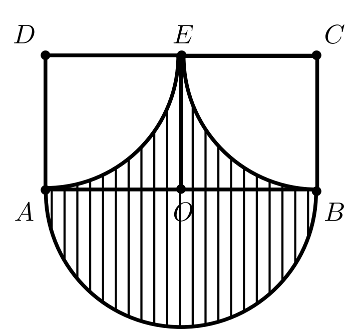
1.65 Juan poseía un terreno rectangular $ABCD$, de 1800 m^2, del cual <u>cedió</u> el lote $ADEF$, de 10 m de ancho, a <u>cambio</u> del lote $CEGH$, de 30 m de largo, conforme está indicado en la figura, y de modo que $ABCD$ y $BHGF$ tuviesen la <u>misma área</u>. Hallar el perímetro del terreno $ABCD$.



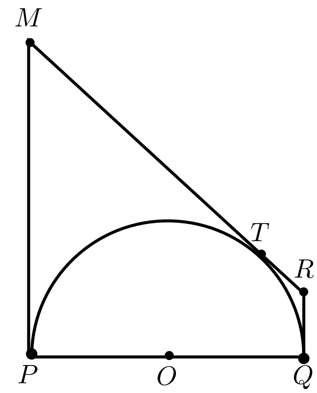
1.66 Hallar $\sphericalangle\, TPR$ sabiendo que $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia; O el centro de dicha circunferencia y $\sphericalangle\, RQT = 66°$



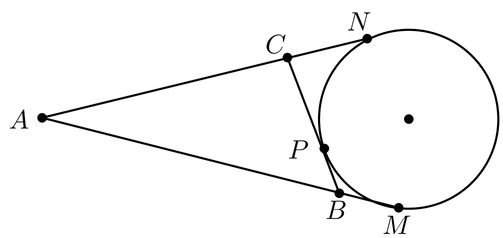
1.67 En el siguiente dibujo de un terreno, $AOED$ y $OBCE$ son cuadrados de lado $10m$; $\widehat{AE}$ y $\widehat{BE}$ son arcos de circunferencia de centros D y C respectivamente. Se quiere sembrar grama en la zona rayada. Si cada metro cuadrado de grama cuesta 50 Bs, ¿cuánto es el costo total del trabajo requerido?



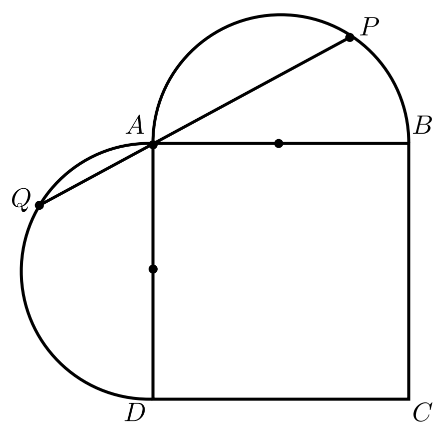
1.68 En la figura, $\overline{MP}$, $\overline{MR}$ y $\overline{RQ}$ son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos P, T y Q respectivamente. Si $TR = 2cm$, $MT = 8cm$ y $\overline{PQ}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O, hallar el radio de dicha circunferencia.



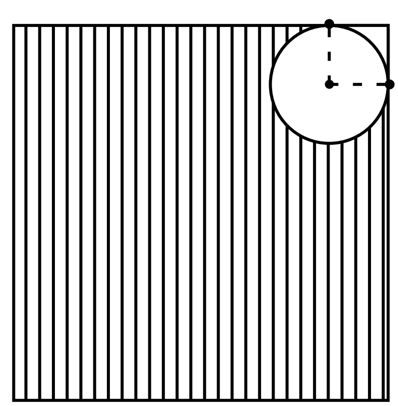
1.69 Calcular el perímetro del triángulo ABC cuyos vértices son las intersecciones de las tres tangentes a la circunferencia: $\overline{AN}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CB}$, sabiendo que $AN = 10\ cm$.



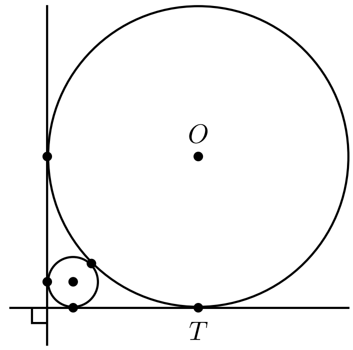
1.70 En el cuadrado $ABCD$ de la figura hemos trazado dos semicircunferencias exteriores, una con diámetro $\overline{AB}$ y otra con diámetro $\overline{AD}$. El punto A divide el segmento $\overline{PQ}$ en dos segmentos de longitudes 7 y 23. Hallar la longitud de la diagonal del cuadrado.



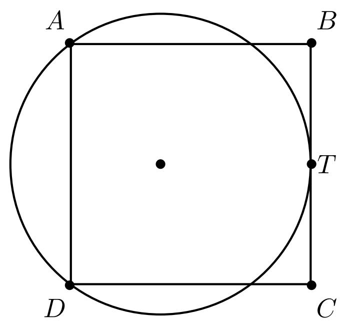
1.71 La circunferencia de la figura es tangente a los lados del cuadrado de área $81cm^2$. El radio de dicha circunferencia es de $2cm$. Expresada el área sombreada como $a + \pi b$, donde a y b son números enteros, ¿cuál es el valor de a?



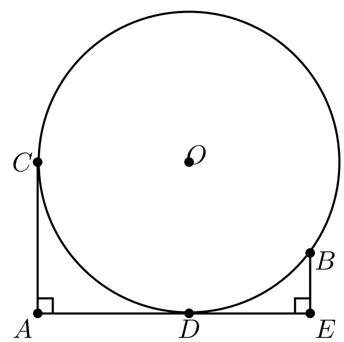
1.72 Las dos circunferencias de la figura son tangentes entre sí y tangentes a dos rectas perpendiculares. Si el radio de la mayor es 1 cm, ¿cuál es el radio de la menor?



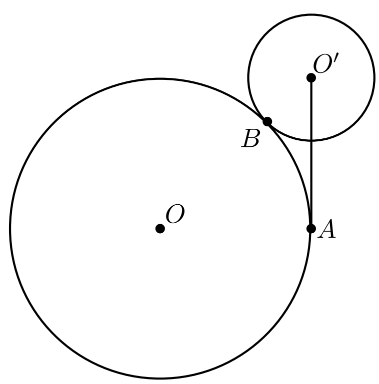
1.73 Dado un cuadrado $ABCD$ de lado x se construye una circunferencia que pasa por los vértices A y D, y que además es tangente al lado $\overline{BC}$. Si el radio de la circunferencia es 5 cm, hallar x.



1.74 En la figura se tiene: $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos C y D respectivamente. Además: $EB = 12$; $AE = 54$; $\overline{AE} \perp \overline{BE}$; $\overline{AC} \perp \overline{AD}$. Hallar el radio de la circunferencia.



1.75 La circunferencia de centro O' tiene radio igual a 1 cm y es tangente a la circunferencia de centro O (B es el punto de tangencia) $\overline{O'A}$ es tangente a la circunferencia de centro O (A es el punto de tangencia). Si $O'A = 3\ cm$, hallar el radio de la circunferencia mayor.



1.76 Hallar el valor de la suma:

$$log_{10}(tg\ 1^\circ) + log_{10}(tg\ 2^\circ) + log_{10}(tg\ 3^\circ) + \cdots + log_{10}(tg\ 89^\circ)$$

1.77 ¿ Cuál de las siguientes opciones es la verdadera?

a. $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{10}$

b. $-2^4=16$

c. $\dfrac{3a+b}{3}=a+b$

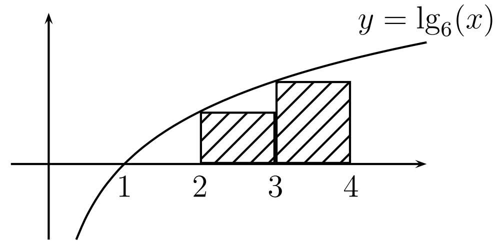
d. $\dfrac{0,039}{1,3}=0{,}3$

e. El 10 % del (10 % de x) es igual al 1 % de x

1.78 Alguién afirmó que el número real $\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$ es en verdad un número natural. ¿Mintió esa persona?

1.79 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x+y)=f(xy)$ para cualesquiera x e y, en $\mathbb{R}$. Si, además, $f(0)=100$, hallar $f(2008)$

1.80 Si la curva de la figura tiene por ecuación $y=log_6\, x$, hallar el valor del área sombreada.



1.81 Calcular el producto de todas las soluciones de la ecuación:

$$\left(\frac{2x+3}{3x+2}\right)^2+\frac{2x+3}{3x+2}=0$$

1.82 Calcular el número de soluciones reales de la ecuación

$$x^{100}-4^x.x^{98}-x^2+4^x=0$$

1.83 Utilizando los datos de la siguiente tabla, hallar el valor de m.

x	$log_m x$
10	1.6610
60	2.9534
110	3.3907
160	3.6610

1.84 Consideremos 3 trabajadores A, B, y C, cada uno de los cuales trabaja siempre al mismo ritmo. Trabajando juntos, A y B realizan cierto trabajo en 10 días. Por su parte, A y C, juntos, demoran 12 días para realizar el mismo trabajo. Mientras que B y C necesitan 15 días para hacerlo. Si C ejecutase el trabajo solito, ¿cuántos días tardaría?

1.85 Al intentar resolver la inecuación

$$\frac{4}{x-2} > 5,$$

Luisa copió mal el enunciado y en lugar del 5 escribió otro entero positivo. Ella trabajó correctamente y obtuvo como respuesta:
$2 < x < 4$. ¿Cuál fue el entero positivo que colocó en lugar del 5 del enunciado?

1.86 a.- Un buhonero compra una caja de lápices por Bs. 3000. Decide ganarle a cada lápiz Bs. 60, pero accidentalmente pierde 5 de los lápices de la caja. Sin embargo, al vender el resto de los lápices (al precio que había pensado) todavía gana Bs. 600 en total. ¿Cuántos lápices tenía la caja?

b.- José quería distribuir, **igualmente**, entre sus sobrinos 480 libros. El día de la repartición faltaron 6 sobrinos, y así, cada uno de los sobrinos presentes recibió **18 libros de más** ¿Cuántos son los sobrinos de José ?

1.87 a.- Cuál es la **menor capacidad** de un estanque que se puede llenar, **en un número entero de minutos**, por cualquiera de las tres llaves, que vierten:

la primera, 12 litros por minuto;

la segunda, 18 litros por minuto;

la tercera, 20 litros por minuto.

b.- Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud respectivamente se quieren dividir en <u>pedazos iguales</u> y de la **mayor longitud posible.** ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

1.88 Sobre una mesa hay 16 libros (**todos diferentes**): 2 de Aritmética, 5 de Botánica, 2 de Álgebra, 3 de Geometría y 4 de Zoología.

a.- Si se me es permitido elegir un libro de Geometría o un libro de Biología, ¿de cuántas maneras puedo hacer mi elección?

b.- Si se me permite ahora elegir un libro de Matemática y un libro de Biología, ¿lo puedo hacer de cuántas maneras?

1.89 Para marcar sus pájaros, un criador dispone de cintas de 10 colores diferentes. Un pájaro marcado debe tener una cinta en la pata izquierda, en la pata derecha o en ambas. Si, a lo sumo, se puede poner una cinta en cada pata y si dos pájaros no pueden ser marcados de modo idéntico, ¿cuál es el mayor número de pájaros que pueden ser marcados?

1.90 En un grupo de 15 personas, 5 son médicos, 7 son ingenieros y 3 son abogados. ¿Cuántas comisiones de 5 personas podemos formar, cada una constituida por 2 médicos, 2 ingenieros y un abogado?

1.91 Tenemos en una mesa 6 libros **diferentes**, de los cuales, dos son de Matemática. ¿De cuántas formas podemos poner los libros en orden en un estante de manera que los de Matemática queden siempre juntos?

1.92 Si una persona gasta exactamente un minuto para escribir cada **anagrama** de la palabra CAPÍTULO, ¿cuánto tiempo tardará en escribirlos todos si no debe parar ningún instante para descansar?

1.93 Son dadas dos rectas paralelas. Se marcan 10 puntos distintos sobre una y 8 puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos podemos formar uniendo 3 cualesquiera de esos 18 puntos?

1.94 En un estante tenemos una colección de libros, todos diferentes: 7 son de Matemática, 5 de Física y 10 de Química. Pedro debe elegir dos libros de ese estante con la condición de que no sean de la misma disciplina. ¿De cuántas maneras puede Pedro hacer su elección?

1.95 Tenemos en una mesa 8 libros diferentes, de los cuales, 2 son de Aritmética, 2 de Física, 2 de Algebra, 1 de Geometría y 1 de Química. ¿De cuántas maneras podemos disponerlos en un estante si el libro de Geometría siempre debe quedar entre los dos de Álgebra?

1.96 En una cierta región, las placas de los automóviles son formadas por dos letras, seguidas de cuatro dígitos. Hallar el número de placas diferentes que pueden ser formadas con las letras A y B si las 4 cifras han de ser **pares** (sin repetir éstas).

1.97 Un químico posee 10 tipos de sustancias. ¿De cuántas maneras posibles podrá asociar 6 de esas sustancias si, entre las 10, solamente 2 no pueden ser mezcladas porque producen explosión?

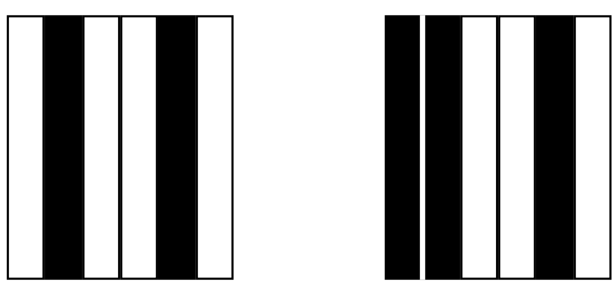
1.98 Un profesor debe elegir uno o más alumnos a partir de un grupo de 6 alumnos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

1.99 Una persona posee cinco sellos correspondientes a los números 1, 2, 3, 4 y 5. Usando dichos sellos, ella pretende formar números impares de 3 dígitos.

a) ¿Cuántos números de ese tipo puede formar la persona sin ninguna otra condición?

b) ¿Cuántos números de ese tipo puede formar la persona si las tres cifras deben ser diferentes entre sí?

1.100 Un código para lectura óptica está constituido por seis barras, blancas o negras. Ningún código tiene todas las barras de un solo color. Ejemplo de los códigos:



¿Cuántos códigos, distintos entre sí, pueden formarse?

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS DE TALLER II

2.1 Obtener razonadamente, y sin calculadora, $\sqrt{2003 \cdot 2001 \cdot 1999 \cdot 1997 + 16}$

2.2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f\left(\dfrac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. Calcular la suma de todos los valores de z para los que $f(3z) = 7$

2.3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+a)^3 + b^2$. Calcular el número de parejas (a, b) que cumplen $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$.

2.4 Una función f, definida para los enteros positivos verifica que:

$$f(m) + f(n) = f(m \cdot n),$$

cualesquiera que sean los enteros positivos m y n.

Si $f(2) = 8$ y $f(3) = 10$, hallar f(12).

2.5 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |3x - 1|$. Hallar todos los valores de x para los que

$$f(f(x)) = x$$

2.6 Sea $f[0, 1] \to \mathbb{R}$, tal que:

a. $f(0) = 0$
b. $f\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f(x)}{2}$
c. $f(1 - x) = 1 - f(x)$

Hallar $f(\frac{242}{243})$

2.7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, $f(5) = 4$, y $f(x + 5) = f(x) \cdot f(5)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Hallar $f(-5)$

2.8 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x - 3$. Hallar el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x^3) = f(x)\}$$

2.9 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por: $f(x) = 3x^2$.
Hallar $f(f(2x) - 2f(x))$

2.10 Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida así: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx^2 + d$, hallar una condición, necesaria y suficiente, para que se cumpla que:
$f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.11 Hallar el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : ||x - 1| - 4| \leq 3\}$$

2.12 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función para la cual se cumple que:

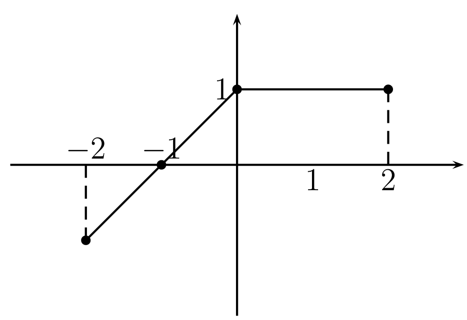
$$f(x) + f(x - 1) = x^2,$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.
Si, además, f(1)=1, hallar f(10).

2.13 En el conjunto de los pares ordenados de números naturales definimos f como sigue:

* $f(x, 1) = x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
* $f(x, y) = 0$, si $y > x$.
* $f(x + 1, y) = y[f(x, y) + f(x, y - 1)]$, para todo $x \in \mathbb{N}$, para todo $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 2$.
  Hallar f(5,5)

2.14 Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, cuya gráfica es:



Hallar $f(f(2) - f(f(-2)))$

2.15 Una persona compró cierto número de cajas de lápices por 18.000 Bs. Si con ese mismo dinero hubiera comprado 6 cajas menos, cada caja le habría costado 100 Bs. más. ¿Cuántas cajas compró y cuánto le costó cada una?

2.16 La señora Josefina compró un cierto número de huevos, por los que pagó 6000 Bs. Al volver a casa se le cayó la cesta, rompiéndosele dos huevos, con lo cual el precio le resultó 1200 Bs. más caro por docena con respecto a lo que pagó en el supermercado. ¿Cuántos huevos compró la señora Josefina?

2.17 Para llenar de agua una piscina hay tres surtidores. El primer surtidor tarda 30 horas en llenarla; el segundo tarda 40 horas y el tercero tarda 5 días. Si los tres se conectan juntos, ¿cuánto tiempo tardará la piscina en llenarse?

2.18 Un zorro perseguido por un perro le lleva 50 saltos (de zorro) de ventaja y da 4 saltos por cada 3 del perro; pero, en compensación, dos saltos del perro equivalen a 3 del zorro. ¿Cuántos saltos dará el perro para alcanzar al zorro ?

2.19 La matrícula de un automóvil tiene 5 cifras, todas diferentes. Al instalarla, el propietario se equivocó y la puso cabeza abajo, obteniendo un número mayor que el original de la matrícula, en la cantidad 78633. ¿Cuál es el número de la matrícula?

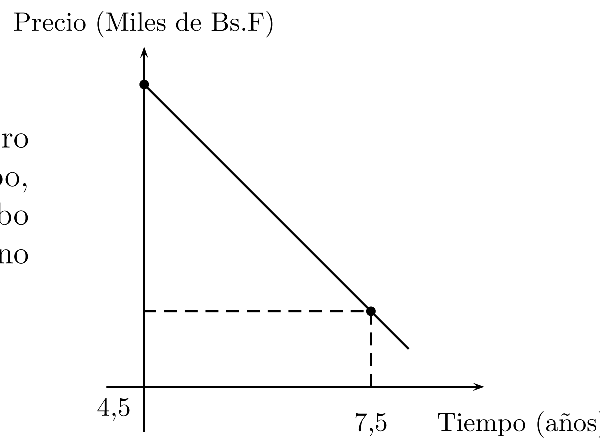
Nota: La cifra uno se escribe así: I; no 1.

2.20 Un padre tiene 26 años más que su hijo. Si dentro de 10 años, entre los dos sumarán 54 años, ¿cuál es la edad actual del padre?

2.21 En una asamblea hay hombres y mujeres. Abandonan 15 mujeres la asamblea y entonces quedan dos hombres por cada mujer; a continuación abandonan la asamblea 45 hombres y quedan entonces 5 mujeres por cada hombre. ¿ Cuántas personas participan inicialmente en ella?

2.22 Una señora posee tres hijas en edad escolar. El producto de su edad con las edades de sus hijas es 16555. Hallar la edad de la hija mayor.

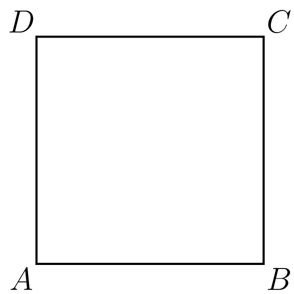
2.23 El valor de un cierto tipo de carro disminuye con el paso del tiempo, según indica el gráfico. ¿Al cabo de cuántos años dicho carro no tendrá valor alguno?

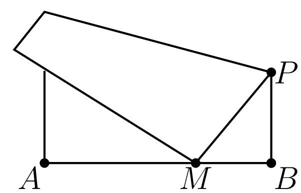


2.24 En la tabla que se muestra, n_0 es el número de la casilla en que, **por primera vez**, el número inferior es mayor que el número superior de la misma columna. Hallar n_0.

1	2	3	4	...	n_0
1000 20	1004 27	1008 34	1012 41	...	

2.25 Una hoja (cuadrada) de papel $ABCD$ es doblada de forma que el vértice C coincida con M, punto medio de $\overline{AB}$. Si el lado del cuadrado $ABCD$ mide 1 cm, ¿cuánto mide $\overline{BP}$?





2.26 Actualmente, Isabel tiene 24 años de edad. Ana dice a Isabel: "Tienes el doble de la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tengo ahora"

¿Cuál es la edad de Ana?

2.27 Resolver la ecuación $4^x - 2^x = 56$.

En los problemas del (2.28) al (2.36), usar el **Principio de Inducción Matemática.**

2.28 Demostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.29 Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15.

2.30 Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

2.31 Demostrar que:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} k! \qquad \text{es } \textbf{par}\text{, para todo } n \in \mathbb{N}$$

2.32 Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$7^n + 2 \qquad \text{es divisible entre } 3$$

2.33 Demostrar que:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

2.34 Demostrar que:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

2.35 a.- Demostrar que para todo número natural $n \geq 3$ se tiene:

$$2^n > 2n + 1$$

b.- Demostrar que si n es un número natural par, entonces:

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}, \qquad \text{es un número natural}$$

2.36 a.- Demostrar que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 para todo $n \in \mathbb{N}$

b.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, entonces, $A^n = 5^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

2.37

$$\sum_{k=1}^{n} k!$$

es un cuadrado perfecto para sólo dos valores de n, ¿cuáles?

2.38 a.- Sea A un conjunto de 4 elementos. Hallar el número de funciones $f : A \to A$ tales que la ecuación $f(x) = x$ no tenga solución.

b.- Una sección tiene 10 alumnos y 5 alumnas. Se forman comisiones de 4 alumnos y 2 alumnas. Hallar el número de comisiones en las que participa el alumno X y no participa la alumna Y.

2.39 Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

a.- ¿Cuántas son las funciones de A en B?

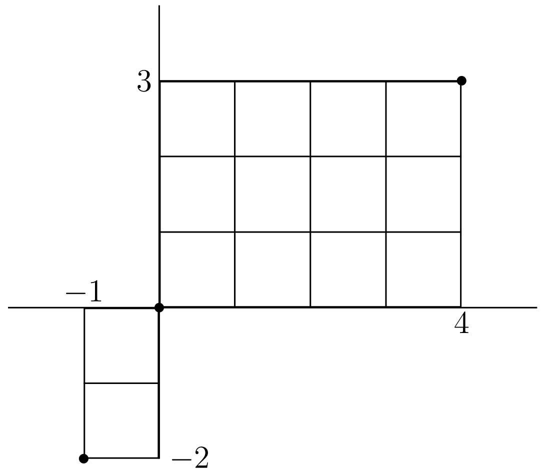
b.- De ellas, ¿cuántas son inyectivas?

c.- ¿Cuántas son las funciones de A en B, estrictamente crecientes?

2.40 Si una persona gasta exactamente un minuto para escribir cada anagrama de la palabra VENEZUELA, ¿cuánto tiempo tardará en escribirlos todos si no debe parar ningún instante para descansar?

2.41 María llega a una frutería en la cual ofrecen mandarinas, mangos, manzanas y cambures. Ella quiere comprar media docena de frutas. ¿De cuántos modos puede hacerlo?

2.42 Un hombre se encuentra en el punto $(-1, -2)$, en un sistema cartesiano ortogonal. Él sólo puede dar un paso cada vez: para el Norte (N) o para el Este (E). Partiendo del punto $(-1, -2)$ y pasando por el origen, ¿cuántas trayectorias puede hacer hasta el punto $(4, 3)$?



2.43 Se forman las combinaciones simples, de clase 5, de los elementos

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12},$$

las cuales son escritas con los elementos en orden creciente de índices. ¿Cuántas son las combinaciones en las cuales el elemento a_8 ocupa el tercer lugar?

2.44 Se ordenan en forma creciente todos los números de 5 cifras que se pueden formar, sin repeticiones de dígitos, con el 1, con el 2, el 4, el 6 y el 7.

a.- ¿Qué lugar ocupa el 62417?

b.- ¿Qué número ocupa el 66° lugar?

c.- ¿Cuál es la 200ª cifra escrita?

d.- ¿Cuál es la suma de los números formados?

2.45 ¿Cuántos son los números naturales de 7 dígitos en los cuales el dígito 4 figura exactamente 3 veces y el dígito 8 exactamente 2 veces?

2.46 a.- ¿Cuál es el número mínimo de sillas que debe tener un restaurante que posee 50 mesas para garantizar la existencia de, por lo menos, **una mesa** con, al menos, **6 sillas**?

b.- En una gaveta hay 12 medias blancas y 12 azules. ¿Cuál es el número **mínimo** de medias que debemos retirar (con los ojos vendados) para tener la seguridad de obtener **tres pares de medias de un mismo color**?

c.- Demostrar que en una fiesta de cumpleaños con 37 niños, por lo menos 4 nacieron el mismo mes.

2.47 Una ciudad tiene 7.000.015 habitantes. El número máximo de cabellos que puede crecer en una cabeza humana es de 500.000.

Demostrar que hay al menos 15 habitantes de la ciudad mencionada con el mismo número de cabellos.

2.48 Se marcan 5 puntos, al azar, en la superficie de un cuadrado de lado 2.

Demostrar que por lo menos, uno de los segmentos determinados por parejas de los puntos marcados tiene longitud menor o igual a $\sqrt{2}$.

2.49 Demostrar que si se marcan, al azar, cinco puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, debe haber dos de ellos, por lo menos, a una distancia menor igual a $\dfrac{1}{2}$.

2.50 Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 98, 99, 100\}$, una persona elige, al azar, 51 números de dicho conjunto. Demostrar que entre los números escogidos por la persona hay, por lo menos, **dos** números tales que uno divide al otro.

2.51 Diremos que en un punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ es "entero" si sus dos coordenadas son enteras. Por ejemplo, $(1, 4)$, $(7, 8)$, $(-2, 5)$, $(0, 0)$, $(-11, -77)$ son "enteros", mientras que $(\frac{1}{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$ no son "enteros".

a.- Sea, en general, un conjunto de 5 puntos "enteros", de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que el punto medio de alguno de los segmentos que unen parejas de esos puntos es "entero".

b.- Dar un conjunto de 4 puntos "enteros" de $\mathbb{R}^2$ tales que ninguno de los puntos medios de los segmentos que unen parejas de dichos cuatro puntos, es "entero".

2.52 Demostrar que 7 divide a algún número de la forma:

$$252525\ldots2525.$$

2.53 Los agentes de un servicio secreto reciben mensajes codificados. Cada letra es sustituida por el número de su posición en el alfabeto. Con estos números se forma la matriz M. Por ejemplo,

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}, \text{ el mensaje es: bala.}$$

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}, \text{ el mensaje es: huya.}$$

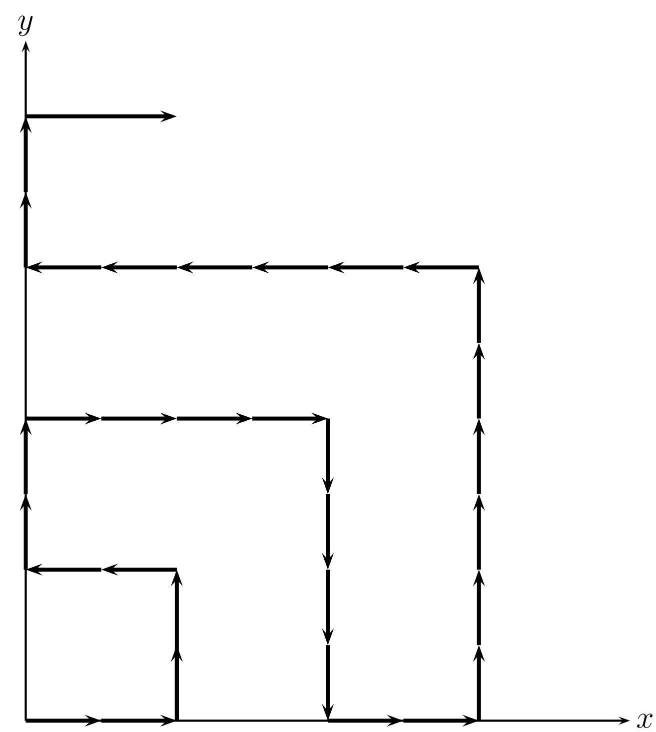
$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}, \text{ el mensaje es: hola.}$$

Pero, para mayor seguridad, cada mensaje de cuatro letras es enviado al agente en la forma MA, donde $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (la cual el agente conoce y guarda en secreto). Es decir, el agente recibe el resultado MA y debe encontrar M. Cierto agente recibió la matriz $\begin{pmatrix} 72 & 241 \\ 12 & 61 \end{pmatrix}$. ¿Cuál era el mensaje?

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

2.54 Una partícula se mueve en el primer cuadrante como se describe a continuación: durante el primer minuto se mueve del origen al punto $(1,0)$; de ahí en adelante continúa siguiendo las direcciones que se muestran en la figura, a lo largo de una trayectoria comprendida entre las partes positivas de los ejes x e y, desplazándose una unidad de distancia, paralela a alguno de los ejes, en cada minuto. ¿En qué punto se encontrará la partícula después de exactamente 2.008 minutos?



2.55 a.- ¿En cuál punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y = 3$?

b.- ¿En cuál punto la tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ tiene la pendiente más pequeña? ¿Cuál es la pendiente de la tangente en ese punto?

2.56 Probar que la recta normal a la curva de la ecuación

$$8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2),$$

en $(3,1)$, pasa por el punto $(12,14)$.

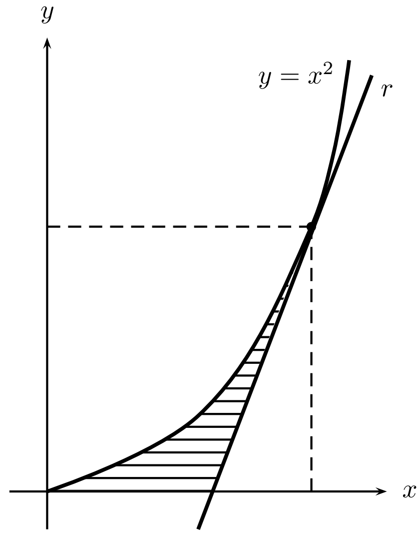
2.57 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable, tal que: $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$.
Hallar la derivada de $f(f(f(f(x))))$, en x=0.

2.58 En la figura, r es la recta tangente, en el punto $(1, 1)$, al gráfico de la función:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^2$$

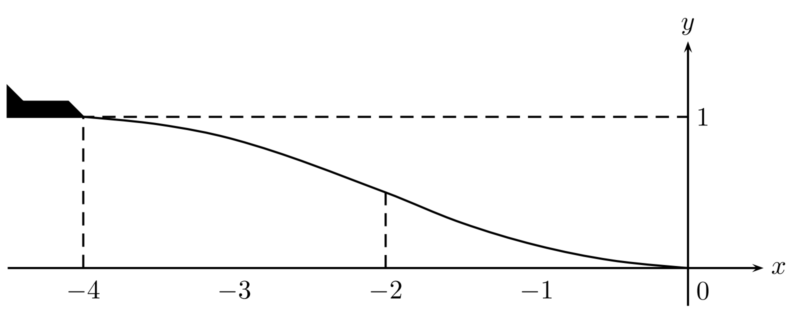
Hallar el área de la zona rayada.



2.59 Un avión reporta su descenso desde el punto $(-4, 1)$. Hallar la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

que describe, en el intervalo $[-4, 0]$, la trayectoria suave del aterrizaje.



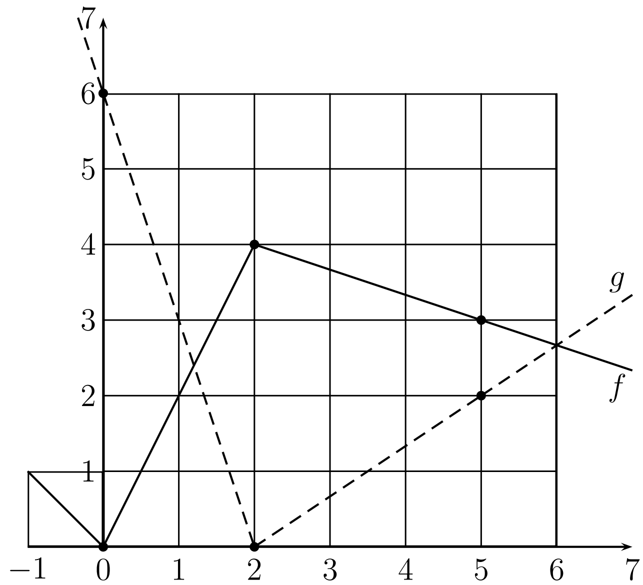
2.60 Dadas f y g, funciones cuyas gráficas aparecen en la figura, sean:

$$u(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad w(x) = \frac{f(x)}{g(x) + 1}.$$

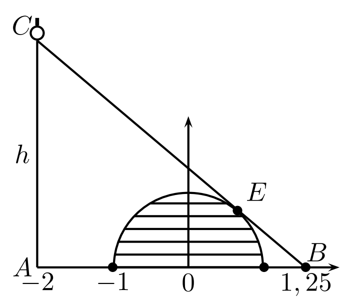
Calcular:

a) $u'(1)$

b) $9 \cdot w'(5)$

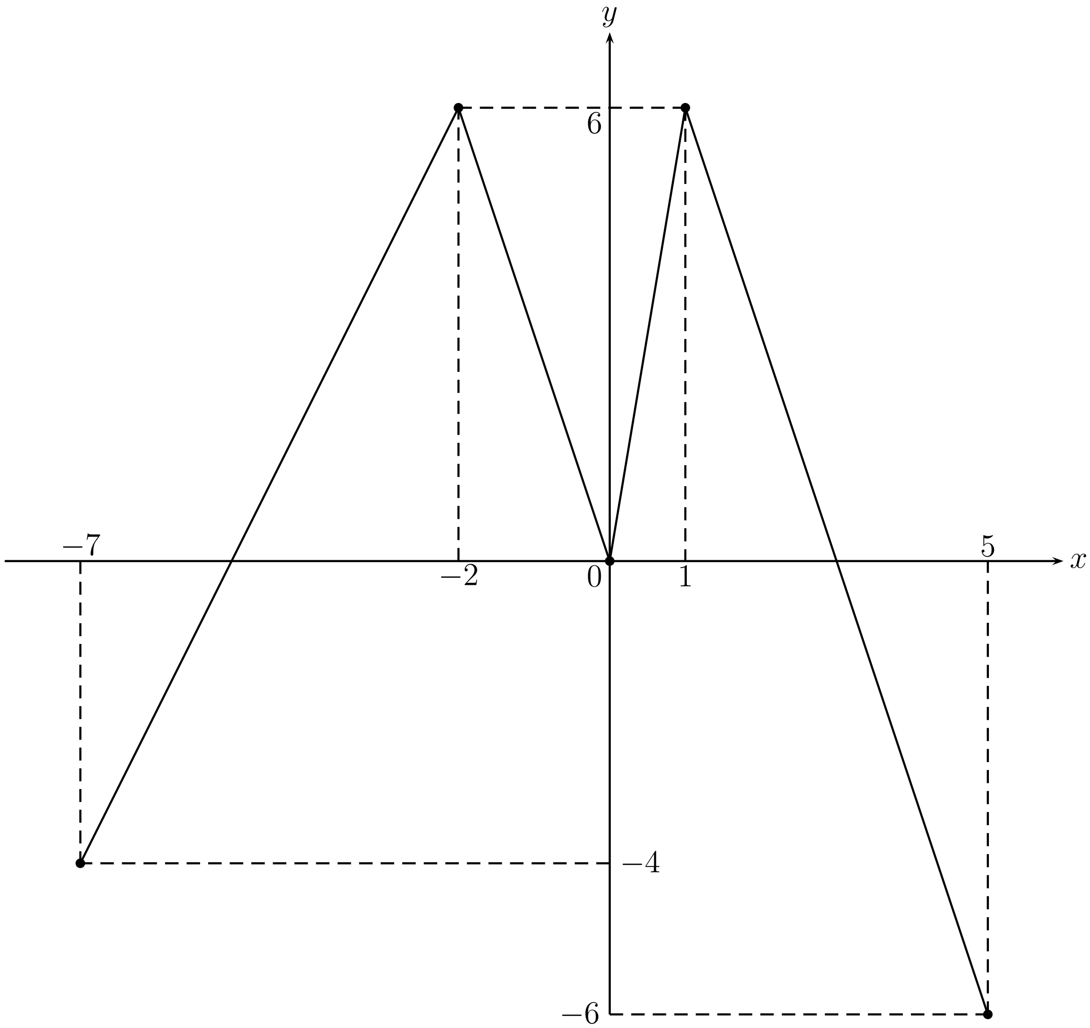


2.61 ¿A qué altura h debe estar el foco de la figura si el punto $(1.25, 0)$ está en el <u>borde</u> de la región iluminada?



2.62 La figura representa la gráfica de una función consiste de cuatro segmentos. Hallar las soluciones de la ecuación:

$$f(f(x)) = 6$$



2.63 Una recta que pasa por el origen de coordenadas divide al paralelogramo de vértices $A(10, 41)$, $B(10, 110)$, $C(28, 149)$ y $D(28, 80)$ en dos regiones iguales. Calcular la pendiente de dicha recta.

2.64 Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ consideremos la siguiente operación: $A \triangle B = A \cup B - A \cap B$, para A y B en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

a.- ¿Cuál es el elemento neutro para esta operación $\triangle$?

b.- ¿Cuál es el inverso de un elemento $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$?

2.65 Sea $f : \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \to \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$,
dada por $f(A) = A \triangle \{1\}$.

Probar que f es biyectiva y hallar su inversa.

2.66 Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si x es par,} \\ x, & \text{si x es impar.} \end{cases}$$

a.) ¿Es f inyectiva?

b.) ¿Es f sobreyectiva?

2.67 Sean f y g funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i, \qquad g(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

¿Cuál es la opción falsa ?

a.) $f = g$

b.) f es inyectiva

c.) $4f(n)g(n) = n^4 + 2n^3 + n^2$

d.) $f(n) + g(n) = n(n+1)$

e.) g es sobreyectiva.

2.68 Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos.
Definimos una operación (denotada por $\boxtimes$) así: $x \boxtimes y = 10xy$ (en el segundo miembro de la igualdad aparece el producto usual de números reales).

a.) ¿Cuál es el elemento neutro para la operación definida?

b.) ¿Cuál es el inverso, respecto a $\boxtimes$, del número $\dfrac{1}{100}$?

2.69 Las transformaciones que superponen un triángulo equilatero sobre sí mismo son:

e : la transformación identidad

w : la rotación de 120°, alrededor del centro del triángulo, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

w^2 : la rotación de 240°, alrededor del centro del triángulo, en sentido antihorario.

p : la simetría respecto a la recta l

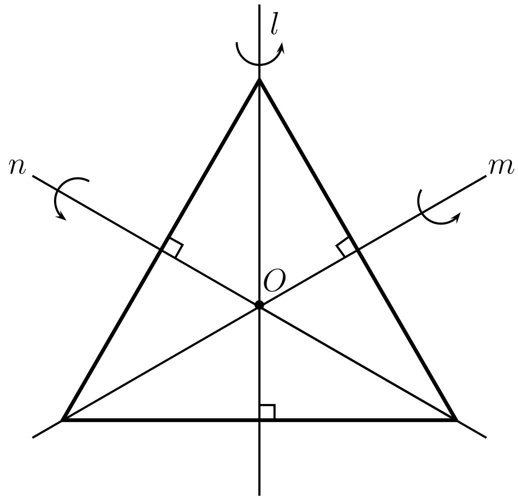
q : la simetría respecto a la recta m

r : la simetría respecto a la recta n

El producto de dos transformaciones, por ejemplo, $p \cdot q$, es la transformación que resulta de aplicar p y después q.

En nuestro caso, $pq = w^2$.

Completar la tabla de operaciones y deducir algunas propiedades.



	e	w	w^2	p	q	r
e						
w						
w^2						
p					w^2	
q						
r						

2.70 a.) Si $m+n=3$ y $m^2+n^2=6$, calcular m^3+n^3

b.) ¿Cuál es el mayor divisor de $2^{14}-1$, distinto de él mismo?

c.) Demostrar que el resto de dividir el cuadrado de un número impar entre 8 es siempre 1

d.) Calcular la suma de los 120 números de 5 cifras, no repetidas, que se pueden formar con los dígitos: 1,2,3,4, y 5

e.) Demostrar que si p es un número primo, mayor o igual a 5, entonces, p^2-1 es múltiplo de 24.

f.) Hallar todos los enteros positivos n, tales que $n^2-19n+99$ es un cuadrado perfecto.

g.) Demostrar que $47^{21}+23^{21}$ es múltiplo de 70.

h.) ¿Cuántos números naturales n hay, tales que $n+3$ divide exactamente a n^2+7?

2.71 a.) Expresar $\dfrac{1}{2}$ como suma de dos fracciones de numerador 1 (fracciones del tipo $\dfrac{1}{n}$ con n número natural)

b.) Encontrar todos los rectángulos cuyos lados tengan por medida números naturales y que tengan **área y perímetro numéricamente iguales.**

c.) ¿Cuáles pares de números naturales tienen media armónica igual a 4? (La media armónica de dos números a y b es $\frac{2ab}{a+b}$)

d.) Hallar todos los posibles pares de enteros cuyo producto sea positivo e igual al doble de su suma.

e.) En un plano es dado un punto P. Hallar todos los n, tales que el espacio alrededor de P pueda ser recubierto sin superposición, por polígonos regulares, congruentes, de n lados.

f.) ¿Para cuáles enteros n, mayores que 2, el número 2n es divisible por $n-2$?

2.72 Dos velas de la misma longitud están hechas de diferentes materiales de forma que una se consume completamente (de manera uniforme) en 3 horas y la otra en 4 horas.

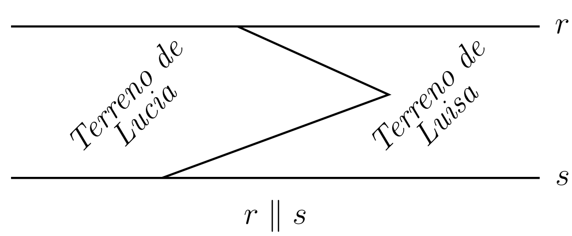
¿A que hora de la tarde fueron encendidas las velas si a las 4 de la tarde, la longitud de una es el doble que la de la otra?

2.73 Dos velas son de diferente longitud y diferente grosor. La más larga dura 7 horas en gastarse completamente, y la más corta dura 10 horas. Después de estar encendidas durante 4 horas, las dos velas tienen el mismo largo. Hallar la razón (cociente) entre el largo original de la vela más corta y el largo de la vela más larga.

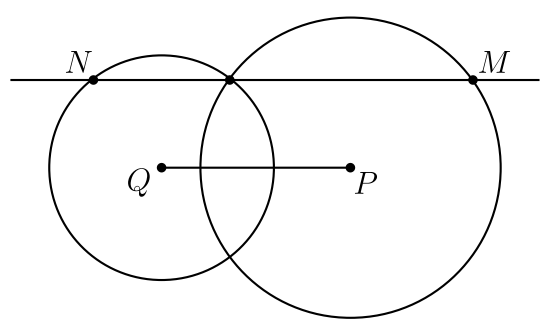
2.74 Se disponen los estudiantes de una clase de baile, igualmente espaciados, en círculo, y luego se les asignan números consecutivos comenzando por el número 1. Resulta que el estudiante número 20 queda **diametralmente opuesto** al estudiante número 53. ¿Cuántos estudiantes componen la clase?

2.75 Un habitante del pueblo A parte en la mañana hacia el pueblo B y, al mismo tiempo, un habitante del pueblo B parte hacia el pueblo A. Cada uno de ellos hace su recorrido a velocidad constante. Al mediodía, ambos se cruzan. El primero llega a su destino a las 4 p.m., mientras que el segundo llega al pueblo A a las 9 p.m. ¿A qué hora salieron?

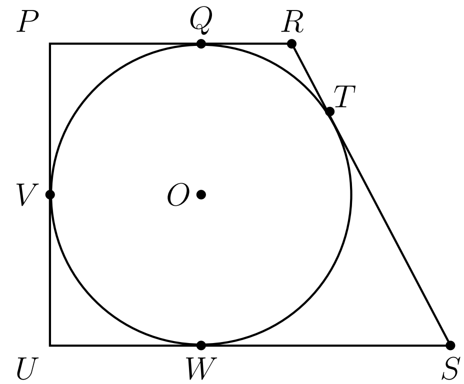
2.76 El lindero entre los terrenos de Luisa y de Lucía es una línea quebrada, como se indica la figura. ¿Cómo trazar un lindero que sea un **segmento de recta**, tal que nadie pierda ni gane terreno? (Hay, por lo menos, tres maneras)



2.77 En la figura se tiene: P y Q son los respectivos centros de las circunferencias. El segmento $\overline{PQ}$ mide 4 cm. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{MN}$, paralelo a $\overline{PQ}$?



2.78 En la figura, V, Q, T y W son puntos de tangencia; $QR = 1$cm; $ST = 12$cm; $\overline{PQ} \perp \overline{PV}$; $\overline{VU} \perp \overline{UW}$; O es el centro de la circunferencia. Hallar el área del círculo.



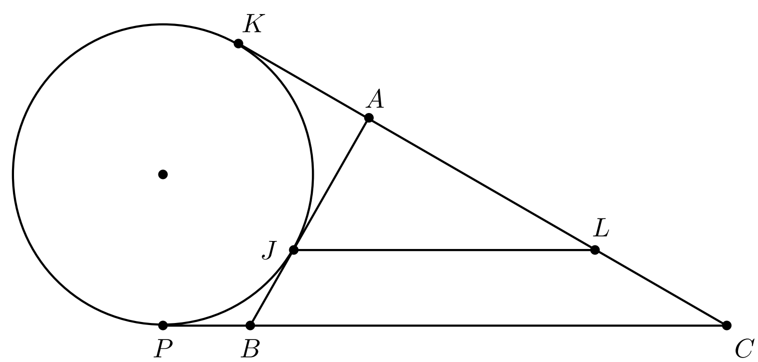
2.79 Sabiendo que:

$AB = 6$cm;

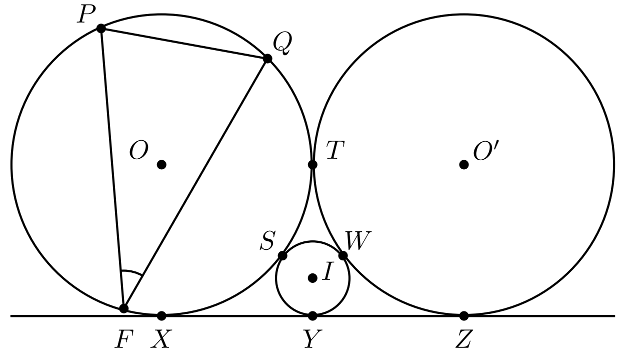
$AC = 9$cm;

$BC = 11$cm;

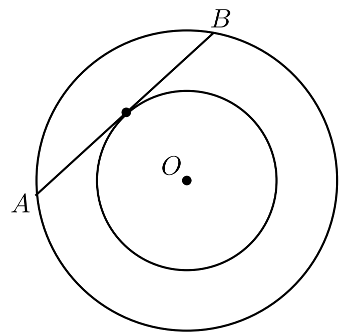
Además, P, K y J son puntos de tangencia; también $\overline{JL} \| \overline{BC}$. Hallar AL



2.80 Observemos tres circunferencias, tangentes entre sí, y tangente a la recta t (X, Y, Z, T, S, W son los puntos de tangencia) Las circunferencias mayores tienen igual radio; el radio de la menor es $r = 5\ cm$. Si $\sphericalangle PFQ = 30°$, hallar PQ.



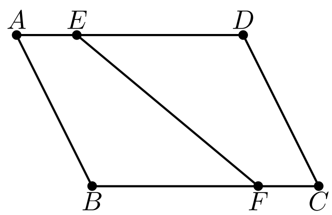
2.81 Consideremos dos circunferencias con centro O; la cuerda $\overline{AB}$ mide $10\sqrt{2}$cm y es tangente a la circunferencia menor; el radio de la circunferencia mayor es de 10 cm. Hallar el área del círculo menor.



2.82 Para cada número real k representamos por $[k]$ la parte entera de k, es decir, el mayor entero que es menor igual a k. Calcular el área de la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que:

$$\left[x^2\right] + \left[y^2\right] = 1.$$

2.83 En el paralelogramo $ABCD$ se verifica que $AE = FC$; además, $EF = 12$cm, y el perímetro del cuadrilátero $ABFE$ es 40 cm. Hallar el perímetro del paralelogramo $ABCD$.

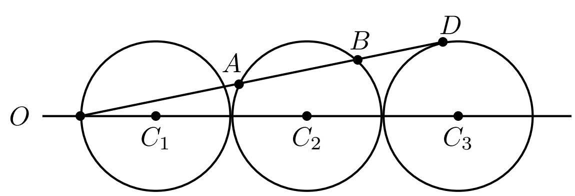


2.84 a.) Un triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm está inscrito en una circunferencia. Calcular el radio de ésta.

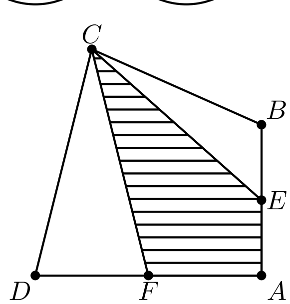
b.) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 cm y 15 cm respectivamente. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los vértices de dicho triángulo.

c.) Los lados a y b de un triángulo miden respectivamente 20 cm y 8 cm. ¿Cuál es la menor medida del tercer lado c sabiendo que es un número natural?

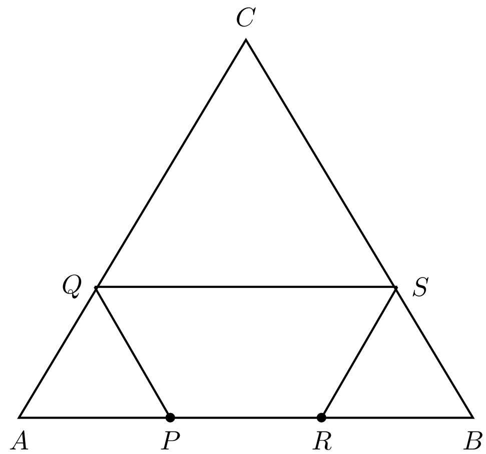
2.85 Las tres circunferencias de la figura tienen el mismo radio r y sus centros están alineados. La circunferencia del medio es tangente a las otras dos. Desde el punto O se traza una tangente a la circunferencia de centro C_3. Hallar, en función de r, la longitud del segmento $\overline{AB}$, interceptado por la circunferencia central.



2.86 El área del cuadrilátero $FAEC$ es 32 cm^2; E es el punto medio de $\overline{AB}$, y F el punto medio de $\overline{AD}$. Hallar el área del cuadrilátero $ABCD$.



2.87 El triángulo ABC es equilátero, de lado 20 cm; $\overline{PQ} \| \overline{BC}$; $\overline{RS} \| \overline{AC}$ y $\overline{QS} \| \overline{AB}$. Si $RS + QS + PQ = 29$cm, hallar PS.



2.88 a.) En un círculo de 20 m. de radio, una cuerda perpendicular a un diámetro tiene 24 m. de longitud. Hallar su distancia al centro del círculo.

b.) En un círculo de 16 cm. de radio, dos cuerdas se cortan. Sabiendo que el producto de los dos segmentos de cada una es 156 cm^2, ¿cuál es la distancia del punto de intersección al centro?

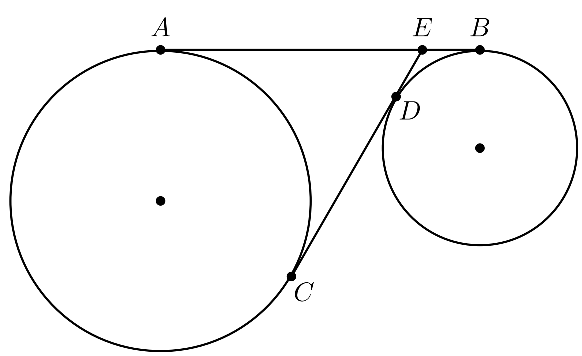
c.) Un círculo tiene 15 m. de radio. Desde un punto a 25 m del centro se traza una tangente a ese círculo. Hallar la longitud de esa tangente.

d.) Desde un punto exterior a un círculo parten dos tangentes a éste. Cada tangente mide 10 cm; la cuerda que une los puntos de contacto mide 12 cm. Hallar el radio de círculo.

e.) El radio de un círculo mide 13 cm. Desde un punto situado a 5 cm del centro del círculo se traza una cuerda.

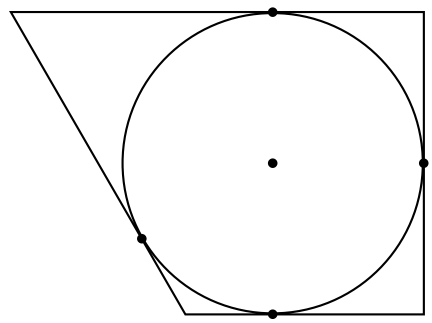
1) ¿Cuál es el producto de los segmentos de dicha cuerda?
2) ¿Cuál es la longitud de la menor cuerda que pasa por aquel punto?

2.89 a.) $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ son tangentes comunes a las dos circunferencias de la figura. Si $AB = 12$ cm y $AE = 2EB$, hallar CD.



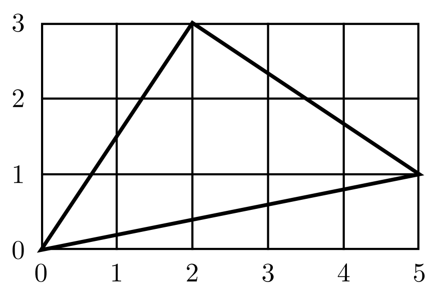
(A, C, D y B, son los puntos de tangencia)

b.) Tres lados consecutivos del cuadrilátero circunscrito a la circunferencia de la figura miden 3, 4 y 7 cm respectivamente. Hallar la longitud del cuarto lado.

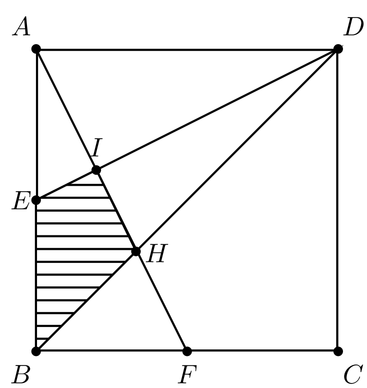


2.90 a.) En un triángulo, que <u>no</u> es isósceles, dos de sus lados miden 6 y 11 cm respectivamente; si al longitud del tercer lado también es un número entero, ¿cuántas posibles longitudes son válidas para este tercer lado?

b.) Observar la cuadrícula y hallar el área del triángulo.



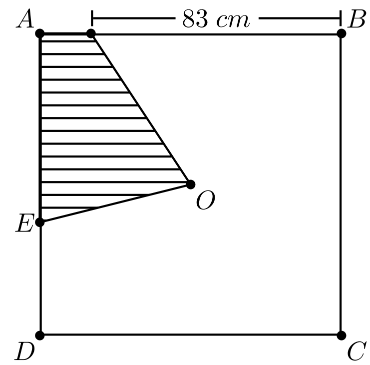
2.91 En el cuadrado $ABCD$ tenemos: la longitud de la diagonal es $12\sqrt{2}$cm; E es el punto medio de $\overline{AB}$; F el punto medio de $\overline{BC}$; I el punto de corte $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$; H el punto de corte de $\overline{AF}$ y $\overline{DB}$. Hallar el área del cuadrilátero $BEIH$:



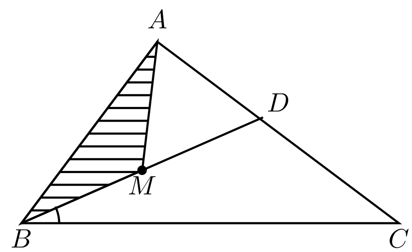
a.) Usando semejanza de triángulos.

b.) Usando Geometría Analítica.

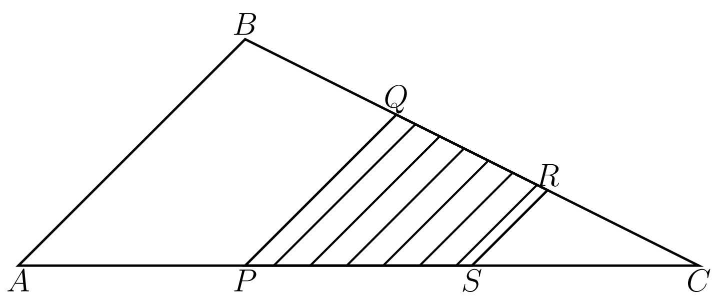
2.92 En el <u>cuadrado</u> de la figura de 100 cm de lado, el punto O es el centro de éste. El área de la zona sombreada es la quinta parte del área del cuadrado. Calcular la longitud del segmento $\overline{DE}$.



2.93 En el triángulo ABC, de área igual a 20 cm^2, se tiene: AB = 6cm; BC = 9cm; $\overline{BD}$ es la <u>bisectriz</u> del ángulo ABC y M es el punto medio de $\overline{BD}$. Hallar el área del triángulo ABM.

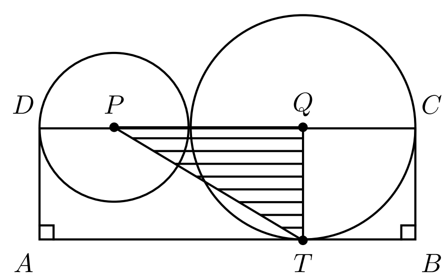


2.94 En el triángulo ABC de la figura se tiene: $AP = PS = SC$, y además $BQ = RQ = RC$.



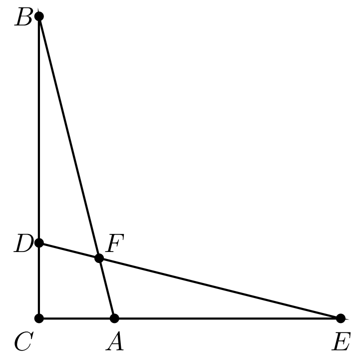
Hallar el cociente del aŕea del triángulo ABC entre el área del cuadrilátero $PSRQ$.

2.95 Las circunferencias de la figura, de centros P y Q respectivamente, y radios diferentes, son tangentes entre sí. Además, una de ellas es tangente al rectángulo $ABCD$ en el punto T. Si el área del rectángulo $ABCD$ es 36 m^2, ¿cuál es el área del triángulo rectángulo PQT? (D y C también son puntos de tangencia.)

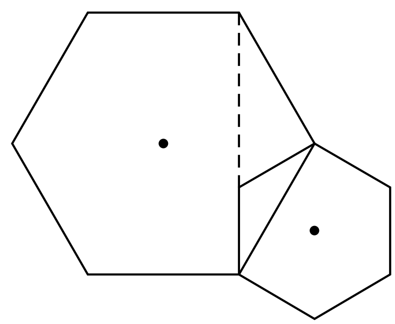


2.96 a.) Un círculo está inscrito en un triángulo cuyos lados miden respectivamente 36 cm, 28 cm y 18 cm. Calcular las longitudes de los segmentos en que son divididos los lados del triángulo por los puntos de contacto con el círculo.

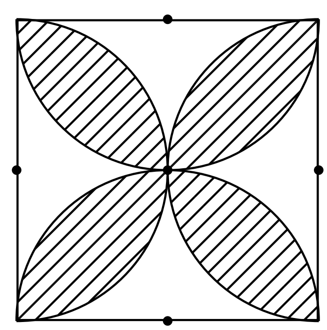
b.) En los triángulos ABC y CED tenemos: $DC = CA = 1\ cm$, y $CB = CE = 4\ cm$ ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero $CAFD$ y el área del triángulo ABC?



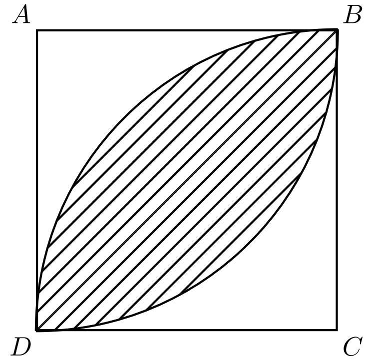
2.97 Los hexágonos de la figura son regulares. Calcular el cociente entre el área del hexágono pequeño y el área del grande.



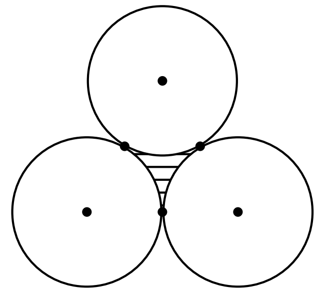
2.98 a.) Haciendo centro en los puntos medios de los lados de un cuadrado y, con un radio igual a la mitad de ese lado, se describen en su interior semicircunferencias que forman una rosa de cuatro petálos. Hallar el área de esa rosácea sabiendo que la diagonal de cuadrado mide $8\sqrt{2}$cm.



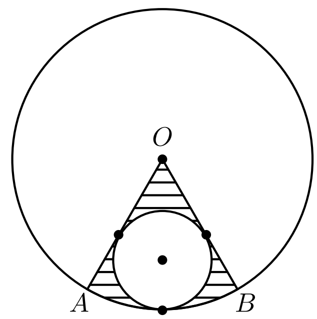
b.) Dado un cuadrado $ABCD$ de lado 25 cm, hallar el área de la región sombreada formada haciendo centro sucesivamente en A y C y describiendo semicircunferencias de radios iguales al lado del cuadrado.



c.) Calcular el área de la región comprendida entre 3 circunferencias de radio iguales a 3 m respectivamente, y tangentes entre sí.



d.) El ángulo AOB mide 60^o. O es el centro de la circunferencia mayor; la circunferencia menor es tangente a los lados del ángulo AOB y tangente a la circunferencia mayor. Hallar el área de la región sombreada sabiendo que el radio de la circunferencia mayor es de 36 cm.



2.99 a.) Los enteros positivos 30, 72 y N tienen la propiedad de que el producto de dos cualesquiera de ellos es múltiplo del tercero. ¿Cuál es el menor valor posible para N?

b.) Se tienen 85 metras en una caja y hay 20 rojas, 30 azules, 20 verdes y de las 15 restantes, algunas son amarillas y otras son blancas. ¿Cuál es el número mínimo de metras que deben ser retiradas de la caja, sin verles el color, para que estemos completamente seguros de que entre ellas hay por lo menos 15 metras del mismo color?

2.100 **Conversación de dos amigos en un autobús.**

- Te acababas de casar la última vez que nos vimos. ¿Niños?
- Tengo tres.
- ¡Guao!, ¿cuáles son sus edades?
- Bien, si multiplicas sus edades obtendrás el número 36, pero si las sumas resultará el número de pasajeros en este autobús.
- Caray, pero no me dijiste lo suficiente para descifrar sus edades.
- Cierto. Olvidé decirte que mi muchacho mayor es bueno en Matemática.
- ¡Ajá!, ahora ya sé sus edades.

Hallar el número de pasajeros en el autobús y la edad de los tres hijos.

CAPÍTULO 3

SUGERENCIAS DE TALLER I

1.2 Resolver la ecuación $x - \frac{x}{2} = 0$.

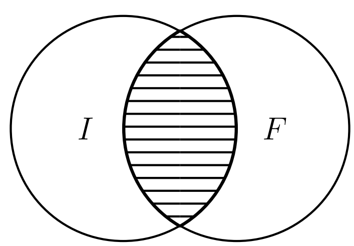
1.3 Llamando x a los minutos que faltan para la medianoche, tenemos:

$$x + 10 = \frac{5}{3}x.$$

1.4 Notar que la afirmación es sobre las tarjetas que tienen una vocal en una cara, no nos dicen sobre las que tienen una consonante en una cara.

1.6 Recordar que:

$$\sharp(I \cup F) = \sharp(I) + \sharp(F) - \sharp(I \cap F)$$



1.7 $8^{10} = (2^3)^{10} = (2^{10})^3 = (1024)^3 > (1000)^3 = (10^3)^3 = 10^9$.

1.8 Notar que la línea de cuadrados perfectos es una buena referencia.

1.9 Los números de la 1^a fila son de la forma $8(n-1)$, donde n indica la columna a la cual pertenece dicho número.

1.10 Observar con atención la posición del 3 en el dado superior respecto al 3 en el dado de la base. Análogamente, ver cómo está ubicado el 6 en el dado superior en relación a la posición del 6 en el dado del medio. ¿Cómo se pasa de una posición a la otra?

1.11 Averiguar sobre la cifra de las unidades del número dado.

1.12 $3^{14} + 3^{13} - 12 = 3^{12}(9+3) - 12 = 3^{12} \cdot 12 - 12 =$
$= 12 \cdot (3^{12} - 1) = 12 \cdot (3^6 + 1)(3^6 - 1) = 12 \cdot (3^6+1)(3^3+1)(3^3-1) =$
$= 12 \cdot 730 \cdot 28 \cdot 26$

1.13 $11^{10} - 1 = (11^5+1)(11^5-1) = (11^5+1)(11-1)(11^4+11^3+11^2+11+1)$

1.14 $5^4 = (5^2)^2 = \mathbf{25^2}$; $4^5 = (2^2)^5 = (2^5)^2 = \mathbf{32^2}$

1.16 Sea d la distancia a nadar.

Llamemos V_c, a la velocidad de la corriente.

Llamemos V_n, a la velocidad del nadador respecto a la corriente.
Entonces, usando la igualdad:

distancia=velocidad· tiempo, tenemos:

$$\begin{cases} d = (V_n + V_c) \cdot 5 \\ d = (V_n - V_c) \cdot 15; \quad \text{se pide hallar } \dfrac{d}{V_n}. \end{cases}$$

1.17 Se hacen grupos de 3 bolas cada uno.

1.18 Imaginar el peor de los casos: se han sacado 5 medias, todas de diferente color.

1.19 Llamando h a la altura del árbol, tenemos:

$$h = 3h - 2$$

1.20 Sea ab el número buscado. Escrito en la forma $10a + b$, queremos: $10a + b = b^2$, o sea, 10a=b(b-1). Entonces, para b resultan las posibilidades: $b = 5$ ó $b = 6$.

1.21 Se tiene: $10a + b - (10b + a) = \dfrac{20}{100}(10b + a)$

1.22 ¿Cómo queda $(3^x + 3^{-x})^2$?

1.23 Sea ab el número. Se tiene:

$$10a + b = 2a \cdot b, \qquad \text{o sea,}$$

$$10a = b(2a - 1).$$

Notar además que $2a - 1$ es impar, por lo que b no puede ser igual a 5.

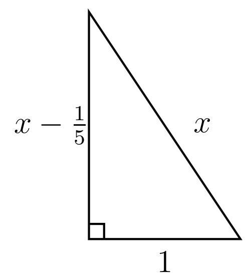
1.24 Si el señor no retrocede, ¿cuánto habrá recorrido del puente hasta el instante en que el tren llega al puente?

1.25 Tomar en cuenta que en un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos.

1.27 ¿Cuánto mide el ángulo DAC?

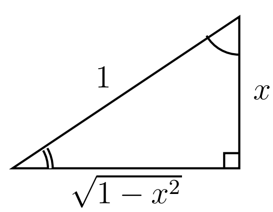
1.28 Unir R con Q. ¿Qué de especial tiene el triángulo RPQ?. Luego, proyectar horizontalmente el punto Q sobre la pared opuesta (llame T a esa proyección). Comparar ahora los triángulos rectángulos RTQ y RSP.

1.34 Llamando x a la longitud de la escalera resulta el triángulo rectángulo:

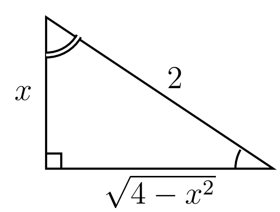


(expresando las distancias en metros)

1.35 Llamando x a la longitud del lado $\overline{BC}$, en el triángulo ECB tenemos:



Mientras que en el triángulo ADE:

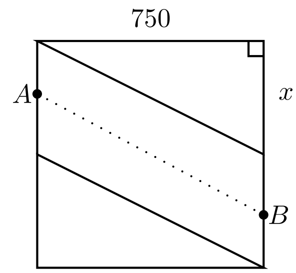


Pero ambos triángulos son semejantes.

1.36 $\cos \widehat{EBD} = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Así que, hallando AB y BD queda resuelto el problema.

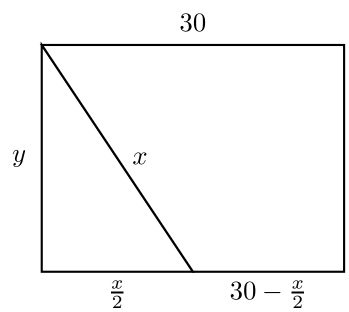
1.37 Tenemos: $750 \cdot x = \dfrac{5}{12} \cdot 750^2$.

La longitud buscada es: $\sqrt{750^2 + x^2}$



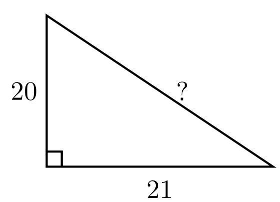
1.38

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{30+30-\dfrac{x}{2}}{2}\right) y = 250\sqrt{3}\\[2ex] y^2+\dfrac{x^2}{4}=x^2\end{array}\right. .$$



1.39 Hecho clave: el área del triángulo mayor es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos.

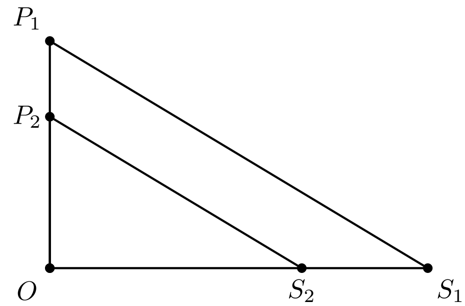
1.40 Desenrrollando la espiral obtenemos el triángulo



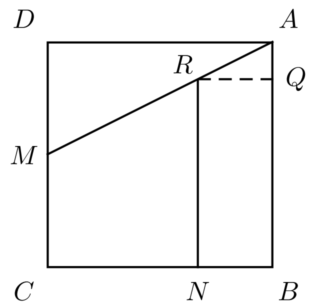
1.41 Los dos triángulos rectángulos de la figura son semejantes (para probarlo se usa la ley física de la reflexión de la luz).

1.42 Los triángulos P_1OS_1 y P_2OS_2 son semejantes.

$OP_1 = 7{,}2\ m$
$OS_1 = 11{,}2\ m$
$S_2S_1 = 4{,}2\ m$
$P_1P_2 = ?\ m$



1.43 Los triángulos MDA y RQA son semejantes.



1.44 Los triángulos BAE y BFC son semejantes. Esto permite hallar FB.

1.46 Usar la semejanza de los triángulos CBF y EAF.

1.47 El triángulo CME es semejante al triángulo CFA.

1.48 Usando el Teorema de la bisectriz, tenemos: $\dfrac{24}{x+9} = \dfrac{30}{2x}$, y así que $x = 15$. Pero eso nos lleva a un absurdo al interpretar la figura.

1.49 En virtud del Teorema de la bisectriz: $\dfrac{EF}{DE} = \dfrac{FC}{DC}$.
Además, $EF + FC = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$.

1.50 Primero, probar que G es el punto medio de AB; luego, aplicar el Teorema de la bisectriz en el triángulo GBC.

1.51 Hallar AC y luego el área del triángulo DAC.

1.52 Sea h_1, h_2, h_3, las edades respectivas de los hijos de Juan.
Al cabo de t años, la edad de Juan será: $40 + t$, y la suma de las edades de los hijos de Juan será: $22 + t + t + t$.

1.53 Sea v : el número de vacas.

g : el número de gallinas.

Entonces: $v + g - 53 = \dfrac{1}{4}(4v + 2g)$

1.54 Sea x el número de monos. Tenemos:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

1.55 Tenemos: $x^2 + 18 = (x+1)^2 - 23$.

Después de hallar x, el número de alumnos viene dado por cualquiera de los resultados: $x^2 + 18$ ó $(x+1)^2 - 23$.

1.56 Sea x mi edad actual. Entonces $(x-3)$ era mi edad hace tres años, mientras que $x+3$ será mi edad dentro de tres años.

Luego: $3(x-3) - (x+3) = x$.

1.57 Resulta

$$\begin{cases} x - y &= 5 \\ x + y &= -3. \end{cases}$$

1.59 $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

$\therefore\ (x+1)^5 - 10x - 10 = 0 \therefore\ (x+1)\left[(x+1)^4 - 10\right] = 0$

1.60 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 131^2 - 1 = 132 \cdot 130 = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$.

1.61 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

1.63 Sean:
$x =$número de sobres en cada caja,
$y =$ número de hojas en cada caja.
Luego

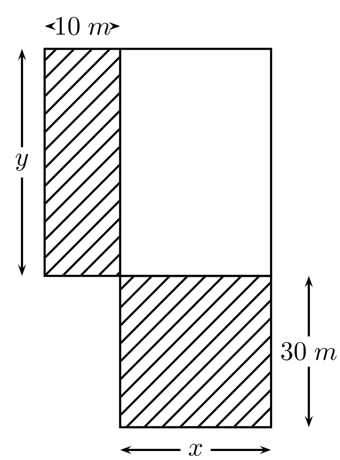
$$\begin{cases} x + 50 = y \\ \dfrac{y}{3} + 50 = x. \end{cases}$$

1.64 Sean:
$x =$ número de preguntas del examen.
$y =$ valor de cada pregunta.

Entonces: $9y + \dfrac{3}{10}(x-10)y = \dfrac{1}{2}xy$

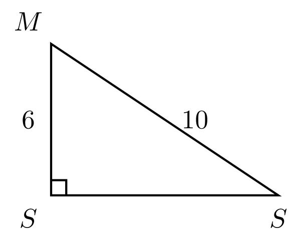
1.65 Se cumple:

$$\begin{cases} 10y = 30x \\ (10+x)y = 1800 \end{cases}.$$



1.66 Según el Teorema del ángulo inscrito, $\sphericalangle ROT = 132^o$.

1.68 Proyectando horizontalmente el punto R sobre $\overline{PM}$, llamemos S a esta proyección, nos queda el triángulo rectángulo RSM:

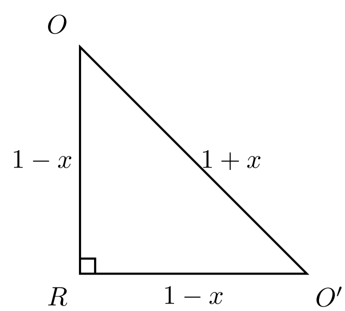


1.69 Tomar en cuenta que resultan: $CN = CP$ y $BP = BM$.

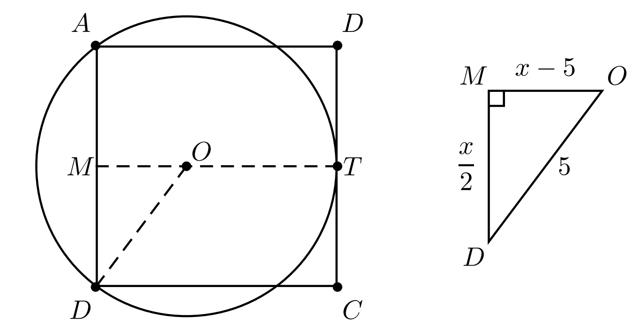
1.70 Comparar los **triángulos rectángulos**: APB y AQD.

1.71 El área no sombreada es igual a $\dfrac{3}{4}$ del área del círculo más el área del cuadrado de lado igual al radio del círculo.

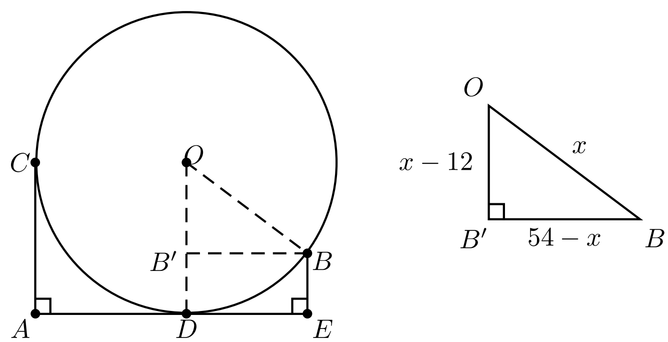
1.72 Llamemos x al radio de la circunferencia menor y O' a su centro. Entonces, proyectando O' horizontalmente sobre $\overline{OT}$ (sea R, dicha proyección), obtenemos el triángulo rectángulo ORO':



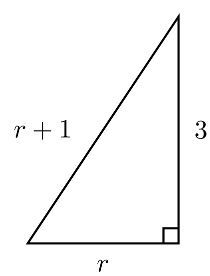
1.73



1.74



1.75



1.76 Tomar en cuenta que: $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ y $\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$

1.78 Sea $\alpha = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}$.

Probar que $\alpha^3 - 2\alpha - 4 = 0$

Es decir, α es raíz real del polinomio

$$x^3 - 2x - 4.$$

Pero usando la Regla de Ruffini podemos encontrar que:

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+2x+2).$$

Así que dicho polinomio tiene una sola raíz real: el 2.

Pero ya vimos que α es raíz real de

$$x^3 - 2x - 4.$$

Conclusión: $\alpha = 2$.

1.80 $log_6 2 + log_6 3$

1.81 $\left(\dfrac{2x+3}{3x+2}\right) \cdot \left(\dfrac{2x+3}{3x+2} + 1\right) = 0$

$\therefore \left(\dfrac{2x+3}{3x+2}\right) \cdot \left(\dfrac{5x+5}{3x+2}\right) = 0$

1.82 $x^{100} - x^2 - 4^x(x^{98} - 1) = 0$

$\therefore x^2(\mathbf{x^{98}\text{-}\ 1}) - 4^x(\mathbf{x^{98}\text{-}1}) = 0$

$\therefore (x^2 - 4^x).(x^{98} - 1) = 0$

$\therefore \underbrace{x^2 - 4x = 0}_{\text{una solución real}}$ ó $\underbrace{x^{98} - 1 = 0}_{\text{dos soluciones reales}}$

1.83 Observe la 1^a fila: $\begin{array}{c|c} \hline 10 & 1.6610 \end{array}$

y la última fila: $\begin{array}{c|c} 160 & 3.6610 \end{array}$

1.84 Llamemos a, b y c respectivamente a la fracción del trabajo realizado en un día por A, B y C.
Tenemos:

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{1}{10} \\[2ex] a + c = \dfrac{1}{12} \\[2ex] b + c = \dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

1.85 Se puede partir de $2 < x < 4$ y llegar a $\dfrac{4}{x-2} > 2$.

1.86 a.- Sea x el número de lápices que tenía la caja.

¿Qué representa el número $\dfrac{3000}{x}$?

¿Qué representa el número $\dfrac{3000}{x} + 60$?

¿Qué interpretación tiene la expresión

$$(x-5).\left(\frac{3000}{x} + 60\right)?$$

b.- Sea x el número de sobrinos de José.
¿Cómo están relacionadas las expresiones

$$\frac{480}{x} \quad y \quad \frac{480}{x-6}?$$

1.87 a.- Se trata de hallar el m.cm de 12, 18 y 20.

b.- La respuesta requerida no es otra que el $M.C.D$ de 36 y 48.

1.90 $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{3}{1}$

1.91 Consideremos los dos libros de Matemáticas como formando un solo "bloque". De manera que se trata <u>en principio</u> de permutar 5 objetos, lo cual dará origen a 5! maneras de colocarlos en el estante. Pero no hay que olvidar que podemos permutar los libros de Matemáticas entre sí. De manera que la respuesta es 2!.5!.

1.92 El número total de anagramas es 8!, de manera que el tiempo (en días) que tardará la persona en escribirlos es: $\dfrac{8!}{60 \cdot 24}$ días.

1.93 Los triángulos se forman eligiendo dos vértices <u>en una de las rectas</u>, y el tercer vértice en la <u>otra recta</u>. Por eso la respuesta viene dada por:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} + \binom{8}{2}\binom{10}{1}$$

1.94 En cuanto a las disciplinas:

puede elegir: Matemática y Física

Matemática y Química

Física y Química

Por eso la respuesta es:

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{1} + \binom{7}{1}\binom{10}{1} + \binom{5}{1}\binom{10}{1}$$

1.95 Formemos, con los 2 libros de Álgebra y el de Geometría, un solo "bloque". De manera que se trate de permutar 6 objetos, lo cual produce 6! modos diferentes de ordenar los objetos en el estante; pero no olvidemos que podemos, en cada "<u>bloque</u>", permutar los libros de Álgebra entre sí. Luego la respuesta es: 2!.6!.

1.96 Consideremos el método de las casillas.

$$\underbrace{A \acute{o} B}_{1^a} \cdot \underbrace{A \acute{o} B}_{2^a} \cdot \underbrace{\text{5 opciones}}_{3^a} \cdot \underbrace{\text{4 opciones}}_{4^a} \cdot \underbrace{\text{3 opciones}}_{5^a} \cdot \underbrace{\text{2 opciones}}_{6^a}$$

Las dos primeras casillas son para las letras. En cada una de ellas puede ir la A o la B.

Cada una de las casillas restantes debe ser ocupada por un número del conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Por eso, para la tercera casilla hay 5 opciones.

Una vez ocupada la 3^a casilla, para la 4^a casilla quedan 4 opciones (recordar que no deben haber repetición de números). Análogamente, para la 5^a casilla hay 3 posibilidades (una vez llenadas la 3^a y la 4^a casillas). Por último, ya ocupadas las casillas anteriores, para la 6^a casilla quedan 2 opciones. En total, el número de placas diferentes viene dado por $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

1.97 Podemos llegar al resultado de dos maneras:

a) Consideremos <u>todas</u> las combinaciones posibles de 6 de las 10 sustancias y le restamos el número de combinaciones en las cuales están presentes las dos sustancias que producen explosión, es decir:

$$\binom{10}{6} - \binom{8}{4}$$

b) Formamos combinaciones de 6 sustancias sin tomar en cuenta las dos sustancias peligrosas. Al número anterior debemos añadir el número de casos en que se toman sólo 5 de las sustancias (entre la cuales figuran las "prohibidas") y le añadimos sólo una de las sustancias problemáticas, o sea:

$$\binom{8}{6} + 2\binom{8}{5}$$

1.98 La respuesta viene dada por:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6},$$

lo cual es igual a $(1+1)^6 - \binom{6}{0}$

1.99 *a*) Los números deben terminar en 1, 3 ó 5. De manera que empleando el método de las casillas, $\underbrace{\quad}_{1^a}\ \underbrace{\quad}_{2^a}\ \underbrace{\quad}_{3^a}$ para llenar la 3^a casilla hay 3 opciones, pero para llenar cada una de las otras casillas tenemos 5 posibilidades. Luego la respuesta es: $5 \cdot 5 \cdot 3$.

b) Ahora, la respuesta cambia, pues para llenar la 3^a casilla tenemos de nuevo 3 posibilidades; pero una vez ocupada la 3^a casilla, para ocupar la 2^a quedan 4 opciones, y, ocupadas la 2^a y 3^a casillas, la 1^a puede llenarse de 3 maneras diferentes. Así, el resultado ahora es: $3 \cdot 4 \cdot 3$.

1.100 Para cada barra hay dos posibilidades (que sea blanca o que sea negra), de modo que el número total de códigos sería:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

Pero como debemos descartar los casos en que todas las barras sean blancas o todas las barras sean negras, quedan en definitiva 62 códigos distintos.

CAPÍTULO 4

SUGERENCIAS DE TALLER II

2.1 $\sqrt{(2000+3)(2000+1)(2000-1)(2000-3)+16} =$
$= \sqrt{(2000^2-1)(2000^2-9)+16} =$
$= \sqrt{2000^4 - 10 \cdot 2000^2 + 25}$

2.6 $f\left(\dfrac{242}{243}\right) = f\left(1 - \dfrac{1}{243}\right)$; luego, aplicar c y b y continuar hasta llegar a utilizar que $f(0) = 0$.

2.7 $f(5) = f(0+5) = f(0).f(5) \;\therefore\; f(0) = 1$
$f(0) = f(5 + (-5)) = f(5).f(-5)$.

2.13 $\mathbf{f(5{,}5)} = f(4+1,5) = 5\,[f(4,5) + f(4,4)] = 5\mathbf{f(4{,}4)} = 5f(3+1,4) =$
$= 5 \cdot 4[f(3,4) + f(3,3)] = 5 \cdot 4 \cdot f(3,3),$ y así se continúa...

2.15 Sea x el número de cajas de lápices.
¿Qué indican las expresiones: $\dfrac{18000}{x}$ y $\dfrac{18000}{x-6}$?
¿Cómo están relacionadas dichas expresiones?

2.16 Sea x el número de huevos que compró la señora.
¿Qué significan las cantidades: $\dfrac{6000}{x}$ y $\dfrac{6000}{x-2}$?
¿Qué conexión hay entre ellas?

2.17 <u>En una hora</u>:

el primer surtidor llena $\dfrac{1}{30}$ de la piscina.

el segundo surtidor llena $\dfrac{1}{40}$ de la piscina.

el tercer surtidor llena $\dfrac{1}{120}$ de la piscina.

2.18 Sean: P, el número de saltos que dará el perro.

Z, el número de saltos que dará el zorro.

Entonces: $\dfrac{Z}{P} = \dfrac{4}{3}$.

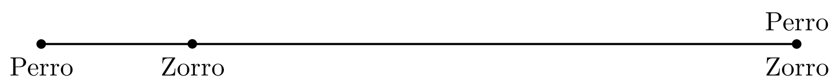
Además, sean: l_P, la longitud de un salto del perro.

l_Z, la longitud de un salto del zorro.

Entonces, $2l_P = 3l_Z$.

¿Qúe representan las expresiones $P.l_P$ y $50l_Z + Zl_z$?

¿Cómo están relacionadas dichas expresiones?



2.19 Los números que aparecen en las matrículas son:

I, 0,8, 6, 9 (al voltearlos se convierten en I, 0, 8, 9, 6 respectivamente)

Representamos la matrícula original por:

$$X_1X_2X_3X_4X_5,$$

y la matrícula invertida por:

$$X_5'X_4'X_3'X_2'X_1', \text{donde,}$$

X_n' es la cifra que resulta de dar la vuelta a X_n.

Tenemos: $\begin{array}{cccccc} & X_5' & X_4' & X_3' & X_2' & X_1' \\ - & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \hline & 7 & 8 & 6 & 3 & 3 \end{array}$

Luego, $X_5' - X_1 = 7$ (u 8, si hay arrastre)

De modo que las posibilidades son:

$X_5' = 8$ y $X_1 = 1$ $(X_5 = 8,\ X_1' = 1)$
$X_5' = 8$ y $X_1 = 0$ $(X_5 = 8,\ X_1' = 0)$
$X_5' = 9$ y $X_1 = 1$ $(X_5 = 6,\ X_1' = 1)$

Pero además debe cumplirse que:

$$X_1' - X_5 = 3$$

Eso obliga a elegir la primera posibilidad.

Así que podemos escribir:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & X_4' & X_3' & X_2' & \mathrm{I} \\ - & \mathrm{I} & X_2 & X_3 & X_4 & 8 \\ \hline & 7 & 8 & 6 & 3 & 3 \end{array}$$

Ahora se necesita que $X_2' - X_4 = 3$.

Para eso (como se ha prestado I decena) debe ser

$X_2' = 0$ ($\therefore\ X_2 = 0$)

$X_4 = 6$ ($\therefore\ X_4' = 9$),

Y las cosas van así:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & 9 & X_3' & \text{O} & \text{I} \\ - & \text{I} & \text{O} & X_3 & 6 & 8 \\ \hline & 7 & 8 & 6 & 3 & 3 \end{array}$$

$\therefore X_3' = 6$ ($\therefore\ X_3 = 9$)

2.21 Sean:
h, el número de hombres en la asamblea;
m, el número de mujeres en la asamblea.

Tenemos:

$$\begin{cases} 2(m-15) = h \\ \\ 5(h-45) = m-15. \end{cases}$$

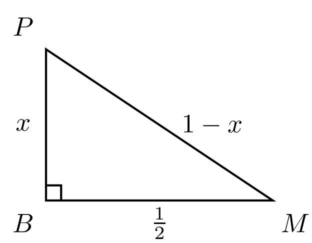
2.22 $16555 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$

2.24 Los números de la <u>segunda</u> fila son de la forma:

$1000 + 4(n-1)$ y los de la <u>tercera</u> fila: $20 + 7(n-1)$,
donde n indica la columna a la cual pertenece dicho número.

De manera que se trata de hallar el primer n que cumple:

$$20 + 7(n-1) > 1000 + 4(n-1)$$



2.25

2.26 Sea x la edad actual de Ana. Entonces, cuando Ana tenía 12 años, la de Isabel era x. Desde ese momento hasta hoy han transcurrido $24 - x$ años.

¿A qué es igual la cantidad $12 + 24 - x$?

2.27 $4^x - 2^x = 56$, es lo mismo que $(2^x)^2 - 2^x = 56$.

Ahora, hacemos $2^x = y$.

2.37 <u>Para $n = 1$</u>, $\sum_{k=1}^{n} k!$ se reduce a $1 = \mathbf{1^2}$.

Para $n = 2$, $\sum_{k=1}^{n} k!$ es $1! + 2! = 3$.

<u>Para $n = 3$</u>, $\sum_{k=1}^{n} k!$ es $1! + 2! + 3! = 9 = \mathbf{3^2}$.

Para $n = 4$, $\sum_{k=1}^{n} k!$ es $1! + 2! + 3! + 4! = 33$.

Para $n > 4$, se tiene que en $\sum_{k=1}^{n} k!$, al número 33 se le suman <u>números que terminan en cero</u>, luego nunca se obtendrá un cuadrado perfecto.

2.38 a.- Cada función de A en A se puede identificar con una cuaterna (, , ,), en donde, si $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, en la primera casilla se coloca $f(x_1)$; en la segunda, $f(x_2)$; y así sucesivamente. Como no queremos que se tenga $f(x_i) = x_i$, para llenar cada casilla tenemos tres posibilidades. Luego la respuesta es: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, o sea, 81.

b.- Tomamos el alumno X, lo juntamos con 3 alumnos (los cuales podemos elegir de $\binom{9}{3}$ maneras) y 2 alumnas (las cuales podemos escoger de $\binom{4}{2}$ modos).

Así, la respuesta es $\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}$

2.39 a.- Cada función la visualizamos como una terna: $(f(1), f(2), f(3))$.

Para cada una de las casillas tenemos 5 posibilidades, luego la respuesta es:

$5 \cdot 5 \cdot 5$ funciones.

b.- $f(1), f(2), f(3)$.

Para $f(1)$ tenemos 5 posibilidades.

Una vez elegido $f(1)$, para $f(2)$ quedan 4 posibilidades. Y elegidas $f(1)$ y $f(2)$, para $f(3)$, hay 3 posibilidades. Así que en este caso, la respuesta es: $5 \cdot 4 \cdot 3$ funciones inyectivas.

c.- $(f(1), f(2), f(3))$

$$\begin{array}{rcl}
(8, 9, f(3)) & \longrightarrow & 3 \text{ posibilidades para } f(3) \\
(8, 10, f(3)) & \longrightarrow & 2 \text{ posibilidades para } f(3) \\
(8, 11, f(3)) & \longrightarrow & 1 \text{ posibilidad para } f(3) \\
(9, 10, f(3)) & \longrightarrow & 2 \text{ posibilidades para } f(3) \\
(9, 11, f(3)) & \longrightarrow & 1 \text{ posibilidad para } f(3) \\
(10, 11, f(3)) & \longrightarrow & 1 \text{ posibilidad para } f(3)
\end{array}$$

En total, 10 funciones estrictamente crecientes.

2.40 Como hay una letra que aparece 3 veces, el número de anagramas es: $\frac{9!}{3!}$, o sea, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Luego, el tiempo en días es:

$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{60 \cdot 24}$ días, es decir, 42 días.

2.41 Sean: x, número de mandarinas compradas.

y, número de mangos comprados.

z, número de manzanas compradas.

t, número de cambures comprados.

Se trata, pues, de hallar el número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación:

$x + y + z + t = 6$, que sabemos que son:

$\dfrac{(6+4-1)!}{6!(4-1)!}$ soluciones.

2.42 Primero, el número de trayectorias del $(-1,-2)$ al $(0,0)$ es: 3.

Luego, del $(0,0)$ al $(4,3)$ tiene que dar 3 pasos al Norte y 4 al este. Por ejemplo, puede seguir esta ruta: NENNEEE, o esta otra, NNNEEEE, es decir, cada trayectoria corresponde a una permutación de 7 letras: tres son N y cuatro son E. Luego, de $(0,0)$ a $(4,3)$ hay $\dfrac{7!}{3!4!}$ trayectorias (siguiendo al condición del problema, claro). En fin, la respuesta es:

$$3 \cdot \frac{7!}{3!4!}$$

2.43 $\_,\ \_,\ \underline{a_8}\ ,\ \_,\ \_$

Para ocupar las dos primeras casillas elegimos 2 elementos entre

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ (lo cual podemos hacer de $\binom{7}{2}$ maneras). Para llenar las dos últimas casillas elegimos 2 elementos del conjunto $\{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$ (lo cual puede suceder de $\binom{4}{2}$ modos).

Así que la respuesta es: $\binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2}$

2.44 12467, 12476, 12647, 12674, ... , 76412, 76421.

a.- Comenzando en 1 hay 24 números.
Comenzando en 2 hay 24 números.
Comenzando en 4 hay 24 números.
Hasta ahora van: 72 números, el último de los cuáles es el 47621.
Ya el 73º es el 61247 .
Empezando por 61 hay 6 números, siendo el último el 61742 (78º)
El lugar 79º lo ocupa 62147; el 62174 es el 80º;
luego el **81º es el 62417**.

b.- El 27641 ocupa el 48º lugar. Ahora siguen los que empiezan por 4.
Hay 6 que empiezan por 41; los seis siguientes empiezan por 42; los seis siguientes empiezan por 46. Llevamos 48+6+6+6 (o sea, 66).
De modo que debemos encontrar el último de los números que comienza por 46.
Es decir, el 46721

c.- Como $200 \,\big|\!\underline{\;5\;}$ $\;\;40$, debemos hallar el 40º número y la respuesta será la última cifra de dicho número.

El 48º número es el último que empieza por 2, o sea, el 27641. Seis lugares más atrás está el 26741 (que ocuparía el 42º lugar); 26714 ocupa el 41º lugar y el 26471 el 40º lugar, así que la cifra buscada es el 1.

d.- Veamos cuántas unidades tiene el número que buscamos:
hay 24 números terminados en 1,
24 números terminados en 2,
24 números terminados en 4,
24 terminados en 6 y
24 números terminados en 7.
Así que el número que nos interesa tiene:

$$\begin{array}{rcl} 24\cdot 1 & = & 24 \\ 24\cdot 2 & = & 48 \\ 24\cdot 4 & = & 96 \\ 24\cdot 6 & = & 144 \\ 24\cdot 7 & = & \underline{168} \\ & & 480 \ \underline{\text{ unidades }} \end{array}$$

Análogamente, hay 24 números que tiene el 1 como penúltima cifra, 24 números que tienen el 2 como penúltima cifra, ...

De modo que la suma que queremos tendrá 480 decenas,
480 centenas,
480 unidades de mil,
480 decenas de mil.

$$\begin{array}{r} 480 \\ 4800 \\ 48000 \\ 480000 \\ 4800000 \\ 48000000 \\ \hline 5.333.280 \end{array}$$

2.45 Los dígitos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

_, _, _, _, _, _, _

Primero escogemos las casillas donde van a ir los números 4 y 8. Eso lo podemos hacer de $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ maneras.

Nos quedan dos casillas por llenar; esto lo podemos hacer de $8 \cdot 8$ maneras (no pueden ser escogidos ni el 4 ni el 8).

De modo que hasta ahora tenemos: $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} .8.8$ números (de 7 dígitos), en los cuales figuran: el 4 tres veces y el 8, dos veces; pero atención, en esa cuenta están incluidos los números que empiezan por 0, los cuales no se consideran de 7 dígitos. De manera que vamos a contar cuántos son los números de 7 dígitos (en los que el 4 figura 3 veces y el 8, dos veces) que empiezan por 0 y restarlos a la cuenta anterior.

$$\underline{0}\ ,\ \_,\ \_,\ \_\ \_,\ \_,\ \_$$

Ahora, ubicar 3 veces el 4 y 2 veces el 8, lo cual podemos hacer de $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ maneras. La casilla restante puede llenarse de 8 maneras diferentes.

Así que la respuesta es:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 8 \cdot 8 - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 8$$

2.46 Para resolver éste y los problemas que siguen hasta el 2.52, usaremos "el principio del nido de las palomas" en sus dos versiones:

a) Si hay n nidos para albergar a $n+1$ palomas, entonces, en al menos un nido habrá 2 ó más palomas.

b) Si hay $n.k+1$ palomas y n nidos, entonces, en por lo menos un nido habrá $k+1$ palomas.

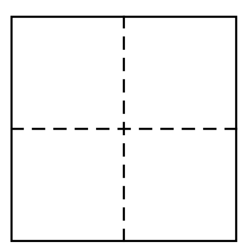
a.- Aquí, $n = 50$; $k+1 = 6 \therefore\ k = 5$. Así que: $nk+1 = 251$.

b.- En este caso, $n = 2$ (dos colores); $k+1 = 6 \therefore\ k = 5$. Luego $nk+1 = 11$.

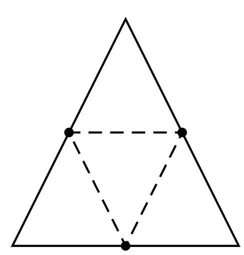
c.- Tenemos: $n = 12$, $nk+1 = 37 \therefore\ k = 3\ \therefore k+1 = 4$

2.47 Aquí, $n = 500 \cdot 001$ (hemos incluido un nido para las personas con 0 cabellos); $nk+1 =$7.000.015 $\therefore\ k = \dfrac{7 \cdot 000 \cdot 014}{500 \cdot 001} = 14\ \therefore\ k+1 = 15$.

2.48 $n = 4$
5 puntos (5 palomas).
Luego por lo menos 2 puntos caen en el mismo cuadrado (de lado 1), y así, la distancia entre ellos es menor que la longitud de la diagonal: $\sqrt{2}$.



2.49 $n = 4$
5 puntos (5 palomas)
Entonces, por lo menos 2 puntos caen en un mismo triángulo (de lado $\frac{1}{2}$).



2.50 Notar en primer lugar que cualquier número natural se puede escribir en la forma: $n = 2^r \cdot b$, con r, entero no negativo, y b, entero impar.

Por ejemplo, $36 = 2^2 \cdot 9$, $25 = 2^0 \cdot 25$, $16 = 2^4 \cdot 1$.

En nuestro caso, ¿cuántos son los valores que b puede tomar? ¿Qué sucede si hay dos números naturales, n_1 y n_2, tales que:

$$n_1 = 2^{r_1} \cdot b$$

$$n_2 = 2^{r_2} \cdot b?$$

Aquí, el número de nidos va a ser el número de valores que b puede tomar; las palomas van a ser los números elegidos al azar, (51).

2.51 Recordar que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^2$, el punto medio del segmento determinado por ellos es: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$; poner los puntos en cuatro "nidos" tomando en cuenta si sus coordenadas son pares o impares. Por último, usar el hecho de que:

par + par da par; impar + impar da par, y par + impar da impar.

2.52 Considerar los 8 números (palomas)

$$\begin{array}{r} 25 \\ 2525 \\ 252525 \\ 25252525 \\ 2525252525 \\ 252525252525 \\ 25252525252525 \\ 2525252525252525. \end{array}$$

Como al dividir un número natural entre 7, el resto pertenece al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (hay 7 nidos), entonces al menos dos de los números de la forma $2525\ldots25$ (en la lista) dan el mismo resto al dividirlos entre 7. Al hacer la resta de dichos dos números se obtiene un número de la forma

$2525\ldots2500\ldots00$, el cual será divisible entre 7

O sea, 7 divide a un número de la forma:

$2525\ldots25 \cdot 10^{2m}$.

Como 7 es primo y no divide a 10^{2m}, entonces 7 divide a 2525...25.

2.53 Tenemos: $M.\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 241 \\ 12 & 61 \end{pmatrix}$

Luego, $M = \begin{pmatrix} 72 & 241 \\ 12 & 61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

2.54 Una buena pista: cada vez que la partícula llega a un punto de la forma $(x, 0)$ con x impar, lo hace en el minuto x^2.

2.56 Primero verificamos que el punto $(3, 1)$ pertenece a la curva:

$$8(9+1)^2 = 100(9-1)$$

Luego, derivamos implícitamente:

$$16(x^2+y^2).(2x+2yy') = 100(2x-2yy')$$

Ahí hallamos y', para $x = 3$ e $y = 1$.

2.57 Aplicamos la regla de la cadena.

$f'(f(f(f(0)))).f'(f(f(0))).f'(f(0)).f'(0) = f'(0).f'(0).f'(0).f'(0)$

2.58 Como $f'(1) = 2$, la ecuación de r es:

$$y - 1 = 2(x-1)$$

Luego para $y = 0$ resulta $x = \frac{1}{2}$.

De modo que el punto de intersección de r con el eje de las abscisas es:

$$(\frac{1}{2}, 0)$$

$$\therefore\ A = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2},1.\frac{1}{2}$$

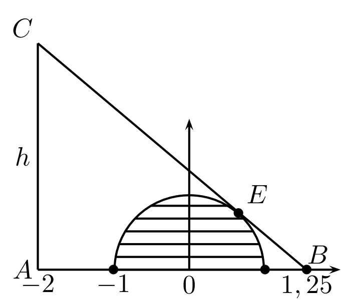
2.59 Tenemos:

$$\begin{cases} f(-4) = 1 \\ f'(-4) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

2.60 a.- $u'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$

b.- $9.\dfrac{(g(5)+1).f'(5) - f(5).g'(5)}{(g(5)+1)^2}$

2.61 El triángulo CAB es semejante al triángulo OEB; EB se halla usando el teorema de pitágoras



2.63 Dicha recta debe pasar por el centro del paralelogramo, el cual es el punto $(19, 95)$.

2.66 Notar que $f(x)$ siempre es impar.

2.67 Por ejemplo, no existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $g(n) = 2$.

2.70 a.) Considerar $(m+n)^3$ y $(m+n)^2$

b.) $2^{14}-1 = (2^7+1)(2^7-1) = 129\cdot(2-1)(2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+1) = 129\cdot 127 = 3\cdot 43\cdot 127$

c.) Un número impar es de la forma: $2n-1$.
Ahora, $(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$.
Pero $4n(n-1)$ es múltiplo de 8.

d.) De esos 120 números hay 24 terminados en 1, 24 terminados en 2, 24 terminados en 3, 24 terminados en 4 y 24 terminados en 5.
De manera que la suma que estamos buscando tiene tantas unidades como:

$$\begin{array}{rcl} 24\cdot 1 & = & 24 \\ 24\cdot 2 & = & 48 \\ 24\cdot 3 & = & 72 \\ 24\cdot 4 & = & 96 \\ 24\cdot 5 & = & \underline{120} \\ & & 360 \end{array}$$

Análogamente, la suma procurada va a tener 360 decenas, 360 centenas, 360 unidades de mil y 360 decenas de mil.
Así que la suma es:

$$\begin{array}{r} 360 \\ 3600 \\ 36000 \\ 360000 \\ 3600000 \\ \hline \\ 3.999.960 \end{array}$$

e.) $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.
Veamos primero que $p^2 - 1$ es múltiplo de 3.
Si $p-1$ es múltiplo de 3, no tenemos más nada que probar.
Supongamos entonces que $p-1$ <u>no</u> es múltiplo de 3.
De modo que $\frac{p-1}{3}$ da resto 1 ó 2. Si da resto 1, entonces $p+1$ dividido entre 3 da resto 0. (Y así, queda $p+1$ múltiplo de 3).
Si $p-1$ entre 3 da resto 2, tenemos:

$p - 1 = 3q + 2$, o sea, $p = 3q + 3 = 3(q+1)$, y p no sería primo.

Luego concluimos que p^2-1 es múltiplo de 3. Ahora veamos que alguno de los factores de $p^2 - 1$ es múltiplo de 4. O sea, $p-1$ es múltiplo de 4 ó $p+1$ es múltiplo de 4. Como cada uno de ellos es par, esto nos daría que $p^2 - 1$ es múltiplo de 8. Si $p-1$ es múltiplo de 4 no hay más nada que hacer (recordar que $p \geq 5$). Si $p-1$ no es múltiplo de 4, entonces, al dividirlo entre 4 da resto 1,2 ó 3.
Si $p - 1 = 4q + 1$ para cierto entero q, entonces,
$p = 4q + 2 = 2(2q+1)$, y p no sería primo.

Si $p-1=4q'+2$, entonces $p+1=4q'+4=4(q'+1)$
y $p+1$ sería múltiplo de 4.

Si $p-1=4q''+3$, entonces $p=4q''+4=4(q''+1)$
y p no sería primo.

En todo caso, vemos que se cumple que

$p+1$ ó $p-1$, alguno de ellos, es múltiplo de 4.

O sea: p^2-1 es

$$\begin{cases} \text{múltiplo de 3} \\ \text{múltiplo de 8} \end{cases}$$

$\therefore\ p^2-1$ es múltiplo de 24.

f.) Escribiendo $n^2-19n+99$ como

$(n-10)^2+n-1$, enseguida comprobamos que para $n=1$, 9, 10 y 18 resultan cuadrados perfectos $(81,9,9,81$ respectivamente).

¿Existirán otros?

Sea $n^2-19n+99=k^2$ con k entero positivo.

$\therefore\ n^2-19n+99-k^2=0$

$\therefore\ n=\dfrac{19\pm\sqrt{4k^2-35}}{2}$

Observamos que para $k=3$ ó $k=9$ se obtienen: $n=1,9,10,18$.

En general, supongamos que $4k^2-35=w^2$, con w, natural. Entonces, $(2k+w)(2k-w)=35$. Luego $2k+w=7$ y $2k-w=5$ ó $2k+w=35$ y $2k-w=1$. O sea, $k=3$ ó $k=9$

g.) Si n es impar, se cumple:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-1}b+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1})$$

Luego

$47^{21}+23^{21}=(47+23)(47^{20}-47^{19}\cdot 23+\ldots+23^{20})=70\cdot\text{entero}.$

h.) $n^2+7=(n+3)^2-6n-2=(n+3)^2-6(n+3)+16.$

Luego $n+3$ divide exactamente a n^2+7 si, y sólo si, $n+3$ divide a 16. Y esto ocurre para $n=1,5,13$.

2.71 a.) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$, con p y q, enteros positivos.

No puede ser $\dfrac{1}{p}<\dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{4}$.

Luego $\dfrac{1}{p}\geqslant\dfrac{1}{4}$ ó $\dfrac{1}{q}\geqslant\dfrac{1}{4}$

Supongamos $\dfrac{1}{p}\geqslant\dfrac{1}{4}$.

Entonces $p=1,2,3$ ó 4.

Si fuera $p = 1$ tendríamos:

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{q}, \text{ o sea, } q = -2 \text{ (absurdo)}$$

Si fuera $p = 2$ quedaría:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}.$$

Luego $\frac{1}{q} = 0$ (absurdo).

Si $p = 3$ obtenemos $q = 6$.

Si $p = 4$ resulta q=4.

Así, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

b.) Sean: a el largo del rectángulo y b el ancho del rectángulo

Tenemos $2a + 2b = ab$,

$$\therefore\ 2(a + b) = ab$$

$$\therefore\ \frac{(a + b)}{ab} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

Como a y b deben ser enteros positivos, esta última ecuación tienen la misma forma que la ecuación de la parte a.).

c.) La media armónica de dos números x e y es:

$$\frac{2xy}{x + y}.$$

Sean x e y enteros positivos.

Según las condiciones dadas:

$$\frac{2xy}{x + y} = 4$$

$$\therefore\ \frac{xy}{x + y} = 2$$

$$\therefore\ \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2$$

d.) Sean x e y dos enteros; z su producto, $z > 0$.

Los números x e y deben ser positivos, pues su suma y producto son positivos. De las condiciones dadas se llega a:

$$xy = z$$

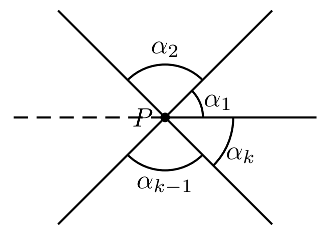
$$x + y = \frac{z}{2},$$

Lo cual implica que $x + y = \frac{xy}{2}$.

Es decir: $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{2}$,

o sea, $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

e.) Sea k el número de polígonos con vértice en P. Si los polígonos no se superponen, son regulares y congruentes, y utilizando la notación de la figura se obtendrá:



$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = \frac{360°}{k}$$

Pero cada α_i es un ángulo de un polígono regular de n lados, luego

$$\alpha_i = \frac{(n-2)180°}{n}, \qquad 1 \le i \le k$$

así, $$\frac{360°}{k} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}.$$

$$\therefore \ \frac{2}{k} = \frac{n-2}{n}$$

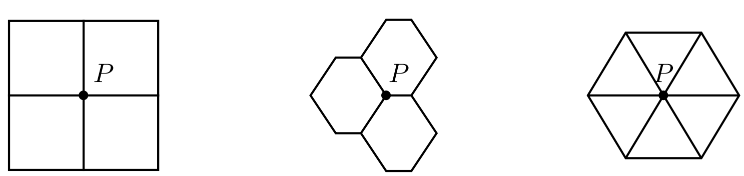
$$\therefore \ 2n = (n-2)k$$

$$\therefore \ 2n + 2k = nk$$

De las condiciones del problema se sigue que n y k deben ser enteros positivos. Además, de $2n + 2k = nk$ se obtiene

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

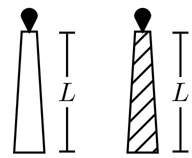
Luego $k = n = 4$ ó $k = 3$, $n = 6$ ó $k = 6$, $n = 3$



f.) Sea $2n$ es divisible entre $n-2$, entonces $2n = (n-2)k$, donde k es un número entero. $\therefore$ $2n + 2k = nk$. (el cual resulta positivo) (igual que la ecuación de la parte e.)

2.72 ¿Cómo se interpreta la expresión $\frac{L}{3}$?
¿y la expresión $\frac{L}{4}$?

Sea t, la hora del encendido.



¿Qué significa la expresión $(4-t)\frac{L}{3}$?

¿Qué significa la expresión $(4-t)\frac{L}{4}$?

¿Cómo están relacionadas las expresiones:

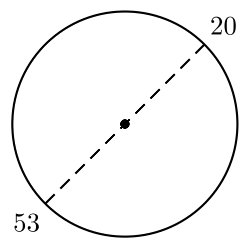
$$L-(4-t)\frac{L}{3} \quad y \quad L-(4-t)\frac{L}{4}?$$

2.73 ¿Qúe relación hay entre las expresiones:

$$L-4.\frac{L}{7} \quad y \quad l-4\frac{l}{10}?$$

2.74 <u>Entre</u> el 20 y el 53 hay 32 números.
Luego el número de alumnos es:

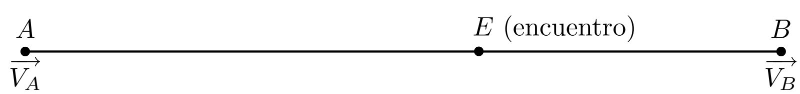
$$32+32+2.$$



2.75 Sea t la hora de salida.

V_A, la velocidad del habitante del pueblo A.

V_B, la velocidad del habitante del pueblo B.



Tenemos: $AE = V_A \cdot (12-t)$,

también $AE = V_B \cdot 9$.

Luego $V_A.(12-t) = V_B \cdot 9$

Por otro lado, $EB = V_B(12-t)$, y

$$EB = V_A \cdot 4$$

o sea, $V_B(12-t) = V_A \cdot 4$

De manera que:

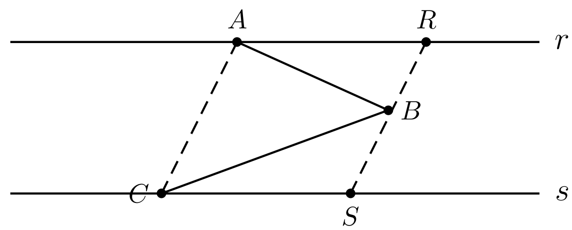
$$\begin{cases} V_A \cdot (12-t) = V_B \cdot 9 \\ V_A \cdot 4 = V_B(12-t), \end{cases}$$

De donde $(12-t)^2 = 36$

2.76 Unimos A con C;

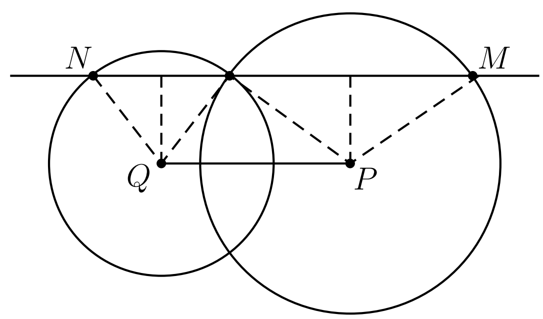
Por B trazamos la paralela a $\overline{AC}$. Aparecen los puntos $R \in r$ y $S \in s$.

Como nuevo lindero se puede tomar: $\overline{CR}$, ó $\overline{AS}$ ó $\overline{MN}$, donde M es el punto medio de $\overline{AR}$ y N es el punto medio $\overline{CS}$.

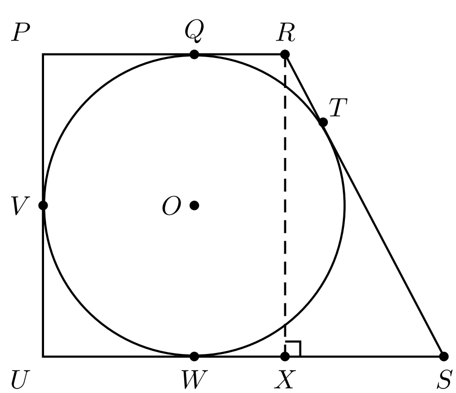


2.77 Los triángulos MPC y CQN son isósceles.

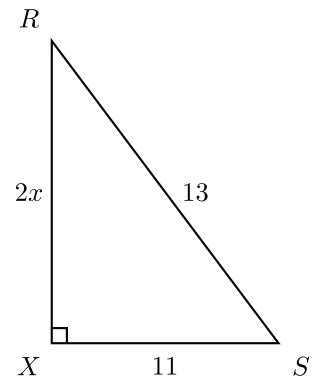
Proyectar: P sobre $\overline{MC}$ y Q sobre $\overline{CN}$.



2.78

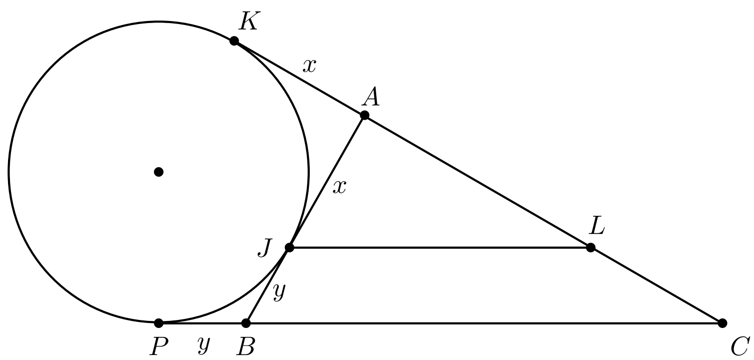


En el triángulo RXS tenemos:



r : radio de la circunferencia.

2.79



Tenemos:

$$x + y = 6.$$

Además, el triángulo AJL es semejante al triángulo ABC.

$\therefore\ \dfrac{AC}{AL} = \dfrac{AB}{x}$

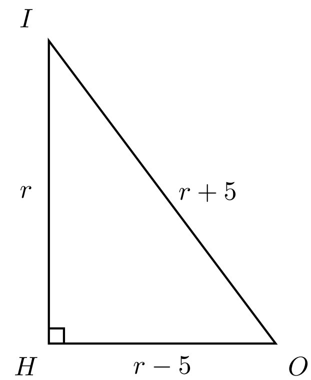
$\therefore\ \dfrac{9}{AL} = \dfrac{6}{x}$

También $CP = CK$,

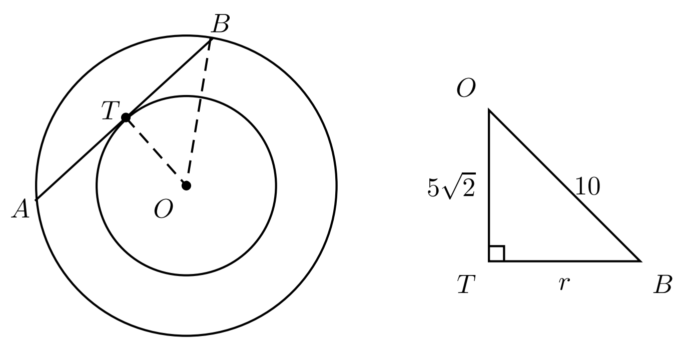
$\therefore\ 11 + y = 9 + x.$

2.80 Por el Teorema del Ángulo Inscrito resulta que $\sphericalangle POQ = 60^0$; Así, el triángulo POQ es equilátero y entonces PQ es igual al radio de las circunferencias mayores.

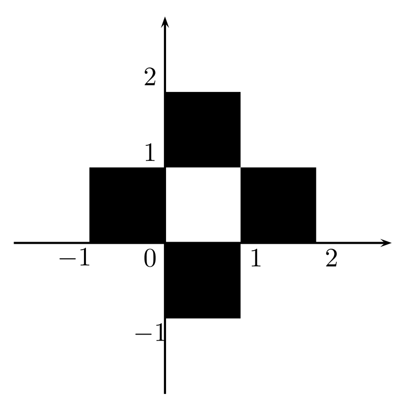
Ahora, proyectando (horizontalmente) el punto I sobre $\overline{OX}$ (llamemos H a esa proyección) tenemos:



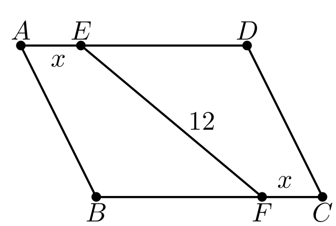
2.81 Como T es punto de tangencia resulta que: $\sphericalangle OTB = 90^0$, y además $AT = TB = 5\sqrt{2}$. Tenemos:



2.82



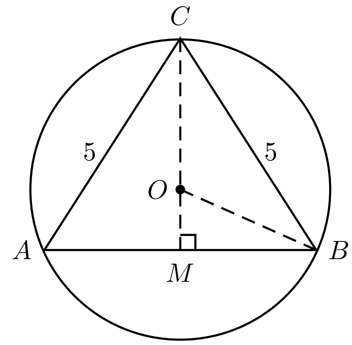
2.83 $\mathbf{x} + AB + \mathbf{BF} + 12 = 14$
$\therefore\ BC + AB = 28$
$\therefore\ 2BC + 2AB = 56$



2.84 a.) En el triángulo rectángulo OMB se tiene:

$$OB = r;\ MB = 3;\ OM = 4 - r$$

(Para justificar que $OM = 4 - r$ se demuestra primero que los triángulos AOC y COB son iguales. De ahí se deduce que:
$\sphericalangle ACO = \sphericalangle OCB$.
Luego $\overline{CO}$ es bisectriz del ángulo ACB. Así que al prolongar $\overline{CO}$ hasta cortar a $\overline{AB}$ se obtiene M, punto medio de $\overline{AB}$ y, además, $\overline{CM} \perp \overline{AB}$)



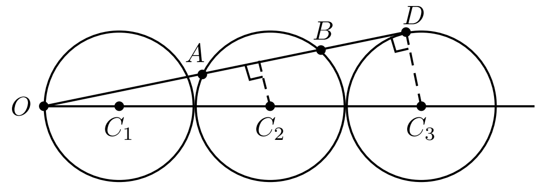
b.) En todo triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

c.) Como debe ser:
$20 < 8 + c$
$\therefore c > 12$,
(las otras condiciones son: $8 < 20 + c$ y $c < 20 + 8$)
la menor longitud de c es 13 cm.

2.85 Unimos C_3 con D, y por C_2 trazamos la perpendicular a $\overline{AB}$. Resulta que los triángulos rectángulos:

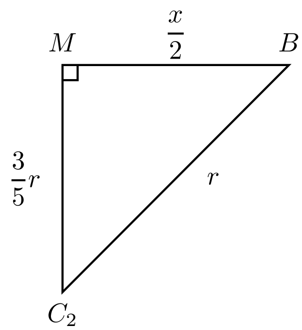
OC_2M y OC_3D son semejantes.

Así, $\dfrac{OC_3}{OC_2} = \dfrac{C_3D}{C_2M}$, o sea, $\dfrac{5r}{3r} = \dfrac{r}{C_2M}$.



Por lo tanto, $C_2M = \dfrac{3}{5}r$.

Tenemos entonces,



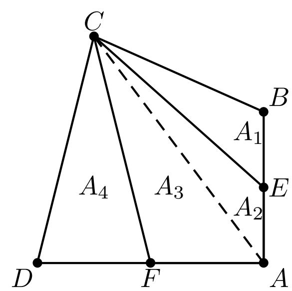
llamando $x = AB$

$\therefore\ \frac{9}{25}r^2 + \frac{x^2}{4} = r^2$

$\therefore\ x = \frac{8}{5}r.$

2.86 Tenemos:

- área A_1 = área A_2;
- área A_3 = área A_4.;
- $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2A_3 + 2A_2$
  $= 64\ cm^2$

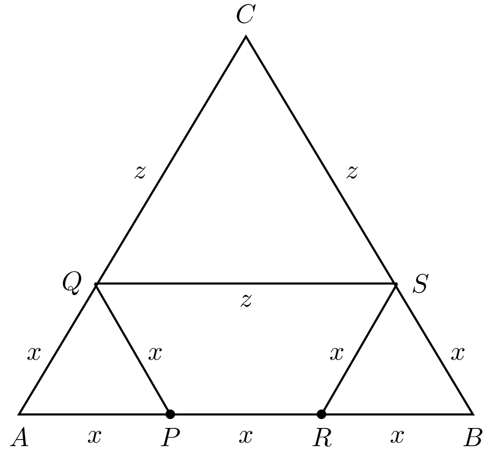


2.87 Los triángulos CQS, QAP, RSB y CAB son equiláteros.

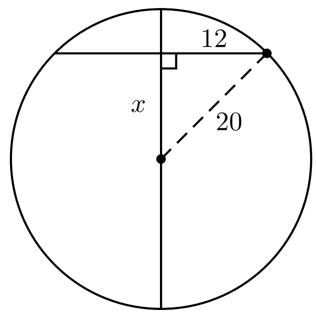
(También $QARS$ y $QPBS$ son paralelogramos.)

Tenemos:

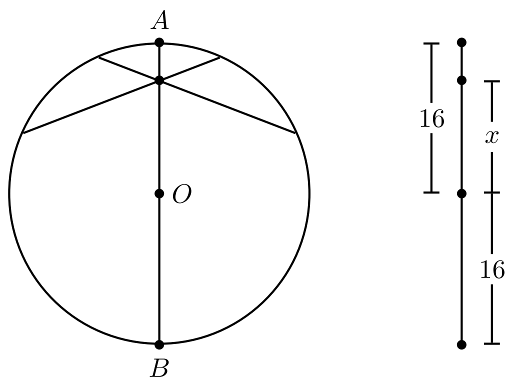
$$\begin{cases} x + z + x = 29 \\ x + z = 20 \end{cases}$$



2.88 a.)



b.) Trazamos el diámetro que pasa por el punto de intersección de las cuerdas.

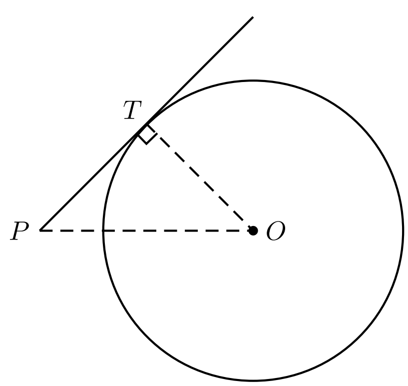


En virtud del Teorema de las Cuerdas Secantes:

$$\begin{aligned} (16+x)(16-x) &= 156 \\ \therefore \quad 256-x^2 &= 156 \\ \therefore \quad x^2 &= 100 \\ \therefore \quad x &= 10\ cm \end{aligned}$$

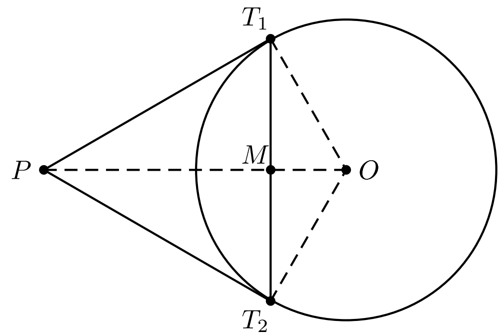
c.) $PT^2 + 15^2 = 25^2$

$\therefore PT = 20\ m.$

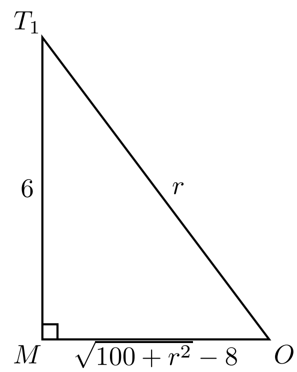


d.) Resulta que $\overline{T_1T_2} \perp \overline{OP}$

Luego $\underline{M}$ es el punto medio de $\overline{T_1T_2}$.



Así, nos queda el triángulo:

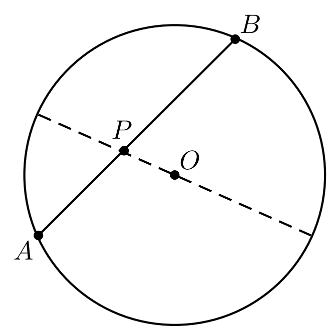


$\therefore r = 7{,}5\ cm$

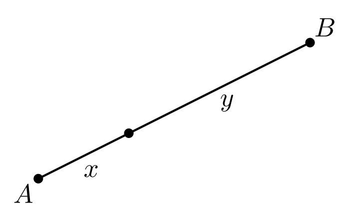
e.)

1) Usamos el Teorema de las Cuerdas Secantes. Trazamos el diámetro que pasa por P.

$$\begin{aligned} AP.PB &= (r-OP)(r+OP) \\ &= r^2 - OP^2 \\ &= 169 - 25 \\ &= 144\ cm^2 \end{aligned}$$



2) Queremos saber el valor mínimo de $x+y$ sabiendo que $x \cdot y = 144$, con $x > 0,\ y > 0,\ x+y \leq 26$.



Sea $f : (0,26) \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia está dada por $f(x) = x + \frac{144}{x}$.

$\therefore\ f'(x) = 1 - \dfrac{144}{x^2};\ f''(x) = \dfrac{288}{x}$

$\therefore\ 1 = \dfrac{144}{x^2}\ \therefore\ x = 12\ \therefore\ y = 12.$

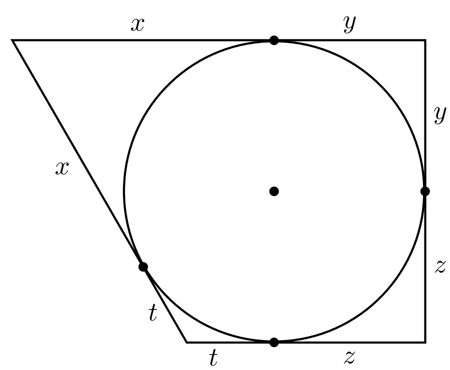
2.89 a.) Resultan:

$AE = 8\ cm \therefore\ EC = 8\ cm \searrow$

$\therefore\ CD = 4\ cm$

$EB = 4\ cm \therefore\ ED = 4\ cm \nearrow$

b.) Tenemos:



$$\begin{cases} t+z &= 3 \\ z+y &= 4 \\ x+y &= 7 \end{cases}$$

Necesitamos hallar $x+t$. Sumando la 1^a y la 3^a ecuaciones y tomando en cuenta la segunda:

$$t + \mathbf{z} + x + \mathbf{y} = 10$$

$$\therefore\ x + t = 6$$

2.90 a.) Sean a, b y c los lados del triángulo.

Supongamos que $a = 6$ y $b = 11$

Debe cumplirse:

$6 < 11 + c$

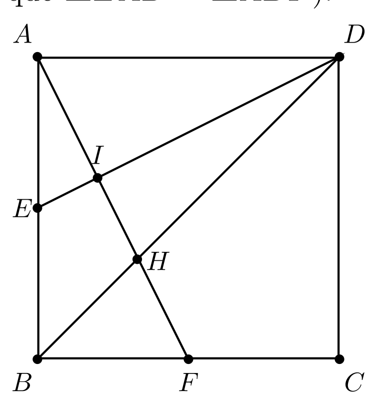
$11 < 6 + c \quad \therefore\ 5 < c < 17,$ y

$c < 6 + 11, \quad c \neq 6$ y $c \neq 11$

$$\therefore c \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$

El lado del cuadrado mide 12 cm.

2.91 a.) Primero, probar que $\sphericalangle EIA = 90^0$ (Usar que $\triangle EAD \equiv \triangle ABF$).



Luego, probar que los triángulos EIA y ABF son semejantes; esto permitirá hallar que:

$$EI = \frac{6}{\sqrt{5}};\ AI = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

También, usando la semejanza de los triángulos AHD y BHF, se halla que el área del $ABFH$ es 12 cm^2. De modo que el área buscada es

$$(36 - 7{,}2 - 12) cm^2$$

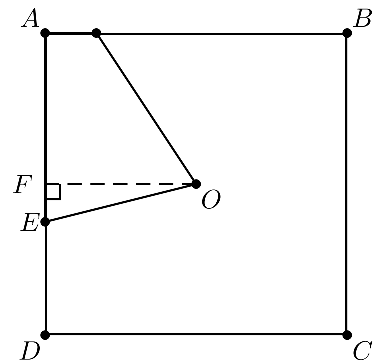
b.) Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales cuyo origen es el punto B; eje de las abscisas, la recta que contiene a $\overline{BC}$ y eje de las ordenadas, la recta que contiene a $\overline{BA}$.

Es sencillo hallar las ecuaciones de las rectas que aparecen en el dibujo, así como los puntos de intersección: I, H.

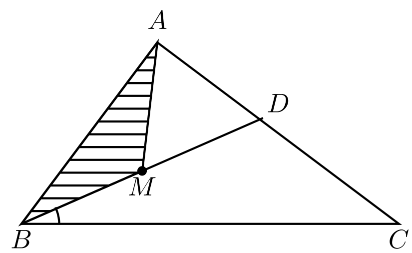
2.92 Proyectemos horizontalmente el punto O sobre el segmento $\overline{AD}$. (LLamemos F a esta proyección). Sea $EF = x$. Entonces

$$\frac{x \cdot 50}{2} + \frac{50+17}{2}50 = \frac{1}{5} \cdot 100^2$$

$$\therefore\ x = 13\ \therefore DE = 37cm$$



2.93 El área del triángulo ABM es la mitad del área del triángulo ABD.
Ahora, usando el <u>Teorema de la bisectriz</u>:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

$$\therefore \frac{AD}{6} = \frac{DC}{9}$$

$$\therefore\ \frac{AD}{DC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Es decir,

$$\frac{\text{área del } \triangle ABD}{\text{área del } \triangle DBC} = \frac{2}{3};$$

como la suma de las dos áreas es $20cm^2$, el área del $\triangle ABD = 8cm^2$.

$$\therefore\ \text{área pedida} = 4cm^2.$$

2.94 Como el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle RSC$, con razón de semejanza igual a 3, resulta que:

$$\frac{\text{área del } \triangle ABC}{\text{área del } \triangle RSC} = 9.$$

Análogamente,

$$\frac{\text{área del } \triangle ABC}{\text{área del } \triangle PQC} = \frac{9}{4}.$$

Ahora,

área del cuadrilátero $PSRQ =$ área del $\triangle PQC -$ área del $\triangle RSC =$

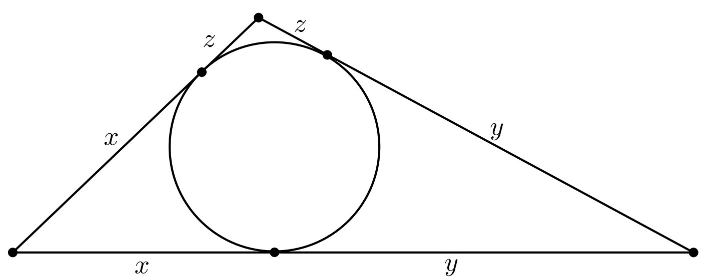
$= \frac{4}{9}$ área del $\triangle ABC - \frac{1}{9}$ área del $\triangle PRC = \frac{1}{3}$ área del $\triangle ABC$

$$\therefore \frac{\text{área del}\triangle ABC}{\text{área del cuadrilátero PSRQ}} = 3.$$

2.95 El área del rectángulo $ABCD$ se expresa como: $R(2r + 2R)$ (lo cual es igual a $36m^2$).

El área del $\triangle PQT = \frac{(r+R)R}{2} = \frac{18}{2} = 9m^2$.

2.96 a.)

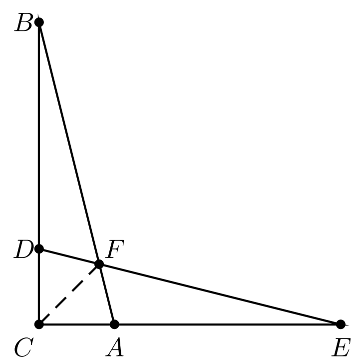


Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y &= 36 \\ y + z &= 28 \\ x + z &= 18, \end{cases}$$

de donde $x = 13$; $y = 23$; $z = 5$.

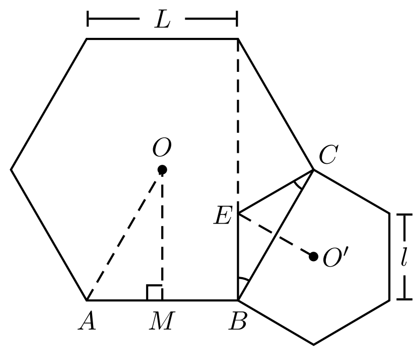
b.) Resulta que los triángulos BCA y DCE son congruentes, luego también lo son los triángulos BDF y FAE.
Llamemos x al área del $\triangle DCF$, e y al área del $\triangle CAF$.
$\therefore$ el área del $\triangle BDF = 3x$; el área del $\triangle FAE = 3y$.
Pero área del $\triangle BDF =$ área del $\triangle FAE$



$$\therefore \ 3x = 3y$$
$$\therefore \ x = y.$$

Así: área del $\triangle BCA = 5x$, y área del cuadrilátero $CAFD = 2x$.

2.97 Se cumple:
$\sphericalangle\, OAM = 60°$;
apotema del hexágono mayor



$$OM = Lsen60° = L\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$ área del hexágono mayor:

$$\frac{6L.L\sqrt{3}}{4} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

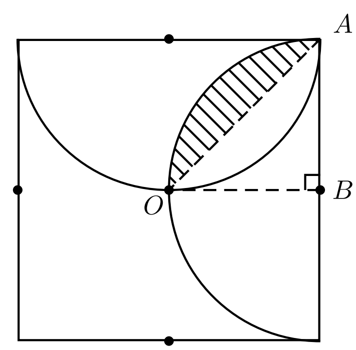
Análogamente, área del hexágono menor: $\dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

- $\sphericalangle EBC = 30^0$
- $\dfrac{L}{2} = l\cos 30° = l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \frac{\text{área del hexágono menor}}{\text{área del hexágono mayor}} = \frac{l^2}{L^2} = \frac{1}{3}$$

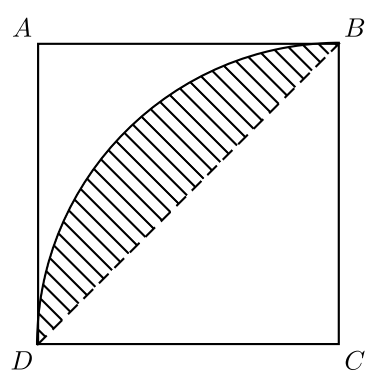
2.98

a.) Al <u>sector circular</u> OAB le restamos el área del $\triangle OAB$.
Luego, el resultado lo multiplicamos por 8:



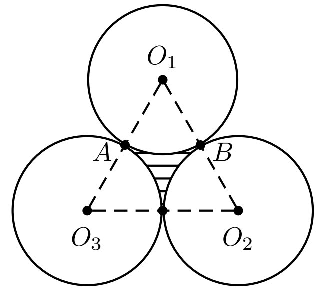
$$8 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2}\right) cm^2$$

b.)



$$2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot 25^2}{4} - \frac{25 \cdot 25}{2}\right]$$

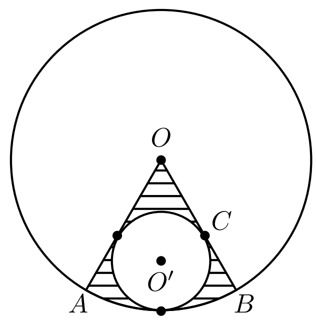
c.) Al área del $\triangle O_1O_2O_3$ le restamos 3. área del sector circular O_1AB.
Tenemos: el $\triangle O_1O_2O_3$ es <u>equilátero</u>, de lado 6 m;
$\sphericalangle AO_1B = 60^0 = \dfrac{\pi}{3} rad.$

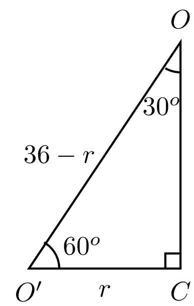


Respuesta:

$$\frac{6^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{3^2}{2}\frac{\pi}{3} = \left(9\sqrt{3} - \frac{9}{2}\pi\right) cm^2$$

d.) $r = (36 - r) sen 30^0 = 18 - \dfrac{r}{2}$
$\therefore\ \dfrac{3}{2} r = 18$
$\therefore r = 12.$





$$\begin{aligned}
\text{El área sombreada} &= \text{área del sector } OAB - \pi \cdot 12^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 36^2 \cdot \tfrac{\pi}{3} - \pi \cdot 12^2 \\
&= \pi\left(\frac{36^2}{6} - 12^2\right) \\
&= 72\pi\ cm^2
\end{aligned}$$

2.99 a.) Tenemos

$30 = 2 \cdot 5 \cdot 3$
$72 = 2^3 \cdot 3^2$
N divide a $30 \cdot 72 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$
30 divide a $72 \cdot N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot N$
72 divide a $30 \cdot N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot N$

De esto se concluye que N es de la forma: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5$

¿Cuáles son las condiciones para α y β?

- $2^\alpha \cdot 3^\beta$,5 divide a $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$
  $\therefore\ \alpha \leq 4; \quad \beta \leq 3$
- $2^3 \cdot 3^2$ divide a $2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta+1} \cdot 5^2$
  $\therefore\ \alpha + 1 \geq 3;\ \beta + 1 \geq 2$

¿Cuáles son los α y β más pequeños que cumplen los requisitos?

Son $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Así que, $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

b.) Imaginemos cuatro “nidos”, uno para el color rojo, otro para el color azul, otro para el verde y otro para las metras amarillas o blancas. Imaginemos también el peor de los casos:

Hemos sacado las 15 (entre blancas y amarillas), 14 rojas, 14 azules y 14 verdes. Con la próxima metra que se saque se habrán completado con seguridad 15 metras de un mismo color.

Así que la respuesta es: 15+14+14+14+1, total: <u>58</u> metras.

2.100 Quien quería descifrar el enigma, hizo un listado de las distintas maneras en la que 36 puede descomponerse como producto de tres números naturales (al lado puso la suma respectiva de dichos factores):

1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	**13**
2	2	9	**13**
2	3	6	11
3	3	4	10

Luego, contó el número de pasajeros del autobús. Aún así, no pudo hallar las edades de los hijos de su amigo. ¿A qué se debía su duda? <u>Sólo a un hecho</u>: estaba en el caso 1,1,6 ó 2,2,9. Su duda se despejó con la información adicional que le dió el amigo.

CAPÍTULO 5

RESPUESTAS DE TALLER I

1.1 Adolfo $\longrightarrow$ sección 4
Felipe $\longrightarrow$ sección 1
Juan $\longrightarrow$ sección 2
Marcos $\longrightarrow$ sección 3

1.2 0

1.3 15 minutos.

1.4 Volteando las dos primeras tarjetas.

1.5 A 5 collares

1.6 60 %

1.7 9^{10}

1.8 a.) 871
b.) 840

1.9 3^a fila
155^a columna.

1.10 El 4.

1.11 Basta ver que termina en 3.

1.12 73

1.13 $11^{10} - 1 =$ número par $\cdot$ 10 $\cdot$ número terminado en 5

1.14 6

1.15 Alberto abogado
Benito médico
Cecilio ingeniero

1.16 7.5 minutos

1.17 Sí. Se hacen 3 grupos de 3 bolas cada uno.

1.18 6

1.19 1 m.

1.20 36

1.21 $a = 5$
$b = 4$

1.22 8

1.23 36

1.24 $40\dfrac{km}{h}$

1.25 13 cm.

1.26 12 cm, 12 cm, 16 cm.

1.27 72 cm

1.28 4m

1.29 a.) 12
b.) $22\sqrt{3}cm^2$

1.30 $72\ cm^2$

1.31 312,5 metros.

1.32 19 metros.

1.33 5 cm.

1.34 2.6 m.

1.35 $2cm^2$

1.36 $\frac{16}{65}$

1.37 812,5 m.

1.38 20 cm.

1.39 Son iguales.

1.40 29 pies.

1.41 30 m.

1.42 2,7 m.

1.43 9 cm.

1.44 $2.2\ cm^2$

1.45 $\frac{64}{3}$

1.46 $\frac{10}{7}cm^2$

1.47 $200cm^2$

1.48 No es posible

1.49 $EF = 15cm$
$FC = 20cm$

1.50 8

1.51 12 cm

1.52 9 años

1.53 106

1.54 48

1.55 418

1.56 12 años

1.57 $x = 1$
$y = -4$

1.58 a.) $a + b = -6$
b.) $ab = 6$

1.59 10

1.60 $x = 10$

1.61 20

1.62 6 puntos

1.63 150

1.64 30

1.65 180m

1.66 42^0

1.67 10.000 $B^{\underline{s}}$

1.68 4 cm

1.69 20 cm

1.70 34 cm

1.71 77

1.72 $(3 - 2\sqrt{2})$cm

1.73 8 cm

1.74 30

1.75 4cm

1.76 $log_{10}1 = 0$

1.77 la e

1.78 No mintió; se trata del número 2

1.79 100

1.80 1

1.81 $\frac{3}{2}$

1.82 3

1.83 4

1.84 40 días

1.85 el 2

1.86 a.) 25
b.) 16

1.87 a.) 180 litros
b.) 12m

1.88 a.) 12
b.) 63

1.89 120

1.90 630

1.91 240

1.92 28 días

1.93 640

1.94 155

1.95 1440

1.96 480

1.97 140

1.98 63

1.99 *a*) 75
b) 36

1.100 62

CAPÍTULO 6

RESPUESTAS DE TALLER II

2.1	3.999.995
2.2	-$\frac{1}{9}$
2.3	4, que son: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,\sqrt{2})$, $(-1.-\sqrt{2})$
2.4	26
2.5	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{4}$
2.6	$\frac{31}{32}$
2.7	$\frac{1}{4}$
2.8	$\{0,1,-1\}$
2.9	$108x^4$
2.10	$a=b=0$
2.11	$[-6,0]\cup[2,8]$
2.12	55
2.13	120
2.14	1
2.15	36 cajas; 500 Bs
2.16	una docena
2.17	15 horas
2.18	300
2.19	I0968
2.20	30 años
2.21	90: 50 hombres y 40 mujeres.
2.22	11 años
2.23	12 años
2.24	328
2.25	0,375 cm
2.26	18 años
2.27	$x=3$
2.37	1 y 3
2.38	a.) 81 b.) 504
2.39	a.) 125 b.) 60 c.) 10

2.40 42 días

2.41 84

2.42 105

2.43 126

2.44 a.) $81^{\underline{o}}$

b.) 46721

c.) 1

d.) 5.333.280

2.45 12.960

2.46 a.) 251

b.) 11

2.51 b.) $(2,4),\ (3,7),\ (0,3),\ (3,8)$

2.53 rece

2.54 En el punto $(44,16)$

2.55 a.) $(1,-3)$

b.) En $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$; $\frac{9}{2}$

2.57 16

2.58 $\frac{1}{12}$

2.59 $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{16}x^2$

2.60 a.) 0

b.) -3

2.61 $\frac{13}{3}$

2.62 $-6,-\frac{9}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{8}{3},\frac{11}{3}$

2.63 $m=5$

2.64 a.) $\emptyset$

b.) A

2.65 f^{-1} es la misma f

2.66 a.) Sí

b.) No

2.67 la e

2.68 a.) $\frac{1}{10}$

b.) 1

2.69

	e	w	w^2	p	q	r
e	e	w	w^2	p	q	r
w	w	w^2	e	q	r	p
w^2	w^2	e	w	r	p	q
p	p	r	q	e	w^2	w
q	q	p	r	w	e	w^2
r	r	q	p	w^2	w	e

2.70 a.) $\frac{27}{2}$

b.) 5461

d.) 3.999.960

f.) 1, 10, 9, 18

h.) tres: 1, 5, 13

2.71 a.) $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

b.) existen dos rectángulos:uno es 4x4, el otro, 3x6.

c.) 4 y 4 ó 3 y 6

d.) 4 y 4 ó 3 y 6

e.) $n=3$; $n=4$; $n=6$

f.) $n=3$; $n=4$; $n=6$

2.72 1 hora 36 minutos

2.73 $\frac{5}{7}$

2.74 66

2.75 6:00 am

2.77 8 cm

2.78 $12\pi cm^2$

2.79 6 cm

2.80 20 cm

2.81 $50\pi cm^2$

2.82 $4cm^2$

2.83 56 cm

2.84 a.) 3,125 cm

b.) 8.5 cm

c.- 13 cm

2.85 $\frac{8}{5}r$

2.86 $64cm^2$

2.87 2 cm

2.88 a.) 16 m

b.) 10 cm

c.) 20 m

d.) 7.5 cm

e.) 1) 144 cm^2

2) 24 cm

2.89 a.) 4 cm

b.) 6 cm

2.90 a.) nueve

b.) $\frac{13}{2}cm^2$

2.91 16,8 cm^2

2.92 37 cm

2.93 4 cm^2

2.94 3

2.95 9 m^2

2.96 a.) 23cm, 13cm, 5cm

b.) $\frac{2}{5}$

2.97 $\frac{1}{3}$

2.98 a.) $32(\pi - 2)cm^2$

b.) $625\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)cm^2$

c.) $9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)cm^2$

d.) $72\pi cm^2$

2.99 a.) 60

b.) 58

2.100 13 pasajeros; 2, 2 y 9 años.

BIBLIOGRAFÍA

[1] - Mataix Mariano, Nuevos Divertimentos Matemáticos, 1993. El discreto Encanto de la Matemática, 1998. Editora Marcombo, S.A. Barcelona (España).

[2] - José Gabriel Chaves, Ejercicios de Matemática, Livraría Francisco Alves, editora S.A, 1974. Brasil

[3] - Miguel de Guzmán, Para pensar mejor, ediciones Pirámide, S.A., 1994, Madrid.

[4] - The National Council of Teachers of Mathematic, Inc., Aprendendo e Ensinando Geometría, Atual Editora L.T.D.A, S$\bar{a}$o Paulo, 1994.

[5] - Hernández Gómez Joaquín, Donaire Moreno Juan Jesús, Concurso Intercentros de Matemáticas, Nívola Libros y Ediciones, S.L., España, 2006.

[6] - Sociedade Brasileira de Matemática, Revista do Professor de Matemática, $N^{\underline{o}}$ 4, 1984, Brasil.

[7] - Antonio Luiz Santos, Eduardo Wagner, Raúl F. W. Agostino, Olimpiadas de Matemática, Atual Editora, Rio de Janeiro, 1996

[8] - Mathematical Association of America, Concursos de Matemáticas, Euler Editorial, Madrid, 1996.

[9] - María Falk de Losada, Olimpíadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño, 1994.

[10] - Purcel, Edwin J., et al. Cálculo (Octava edición),Pearson Educación, México,2001.