

LA CIRCUNFERENCIA

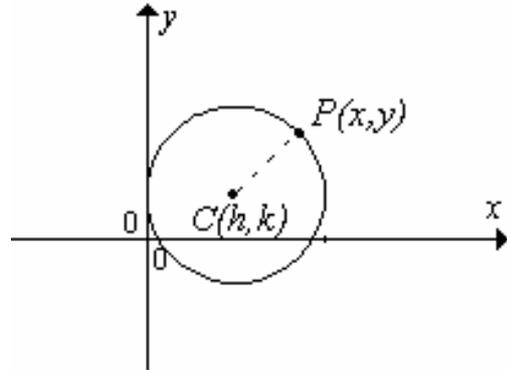
Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que distan r unidades de un punto fijo llamado centro de la circunferencia. r es llamado el radio de la circunferencia.

Podemos obtener la ecuación de una circunferencia con centro (h, k) y radio r a través de la fórmula de distancia entre dos puntos, pues la distancia entre el centro y cualquier punto (x, y) de la circunferencia tiene que ser igual a r .

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Es claro que un punto satisface esta ecuación si y solo si está sobre la circunferencia porque son los únicos puntos que satisfacen esta relación de distancia con respecto al centro.

Esta ecuación la llamaremos la forma centro-radio de una circunferencia.

Ejemplo 1.- Encontrar una ecuación de la circunferencia con centro $(2, -1)$ y radio 3.

Solución: Usamos la forma centro-radio con $C(2, -1)$

$$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = 3^2$$

Realizando el producto notable

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 3^2$$

Simplificando

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

Esta forma es conocida como la forma general de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia escrita como

$$x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$$
 es conocida como **la forma general de la circunferencia.**

Ejemplo 2.- Encontrar la ecuación general de la circunferencia con centro $(3, -1)$ y que pasa por $(0, -2)$.

Solución: Primero se determina el radio, usando el hecho que la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia es r .

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} &= r \\ \sqrt{(0-3)^2 + (-2-(-1))^2} &= r \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Ahora podemos usar la forma centro-radio con $C(3,-1)$

$$(x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = (\sqrt{10})^2$$

Realizando el producto notable

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 10$$

Simplificando

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0.$$

Observe que la forma centro-radio se ha llevado a la forma general de la circunferencia.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar una ecuación de la circunferencia con centro $(-1,5)$ y que pasa por $(-2,-3)$.

En ocasiones es dada la ecuación general y puede resultar conveniente llevarla a la forma centro-radio. Por ejemplo una utilidad de esta forma es que nos permite identificar el centro y el radio de la circunferencia. La manera de llevarlo a la forma centro-radio

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

es completando cuadrados. Observe que la suma $x^2 + ax$ son los dos primeros términos del desarrollo de $(x - h)^2$, específicamente $ax = -2hx$, de aquí vemos que $h = -\frac{a}{2}$, así que el término que falta para completar cuadrados es $(a/2)^2$, ya que $x^2 + ax + (a/2)^2 = (x + (a/2))^2$.

El siguiente ejemplo ilustra detalladamente el procedimiento.

Ejemplo 3.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$. Graficar la circunferencia.

Solución: Debemos llevarlo a la forma centro-radio a fin de identificarlos. Primero agrupamos los términos en x y los términos en y . La constante la pasamos al otro miembro.

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y = 5$$

Sumamos y restamos el mismo número para no alterar la ecuación con el fin de completar el desarrollo de $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$

$$x^2 + 4x + \underline{\quad} - \underline{\quad} + y^2 - 8y + \underline{\quad} - \underline{\quad} = 5$$

Observe que el término $4x$ corresponde a $-2hx$. Así $h=-2$. Para los términos en x el término que falta para completar cuadrados es $(-2)^2 = 4$

Para los términos en y , $-8y$ corresponde a $-2ky$. De aquí que $k=4$, el término que falta para completar cuadrados es $(4)^2 = 16$.

Así

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 5$$

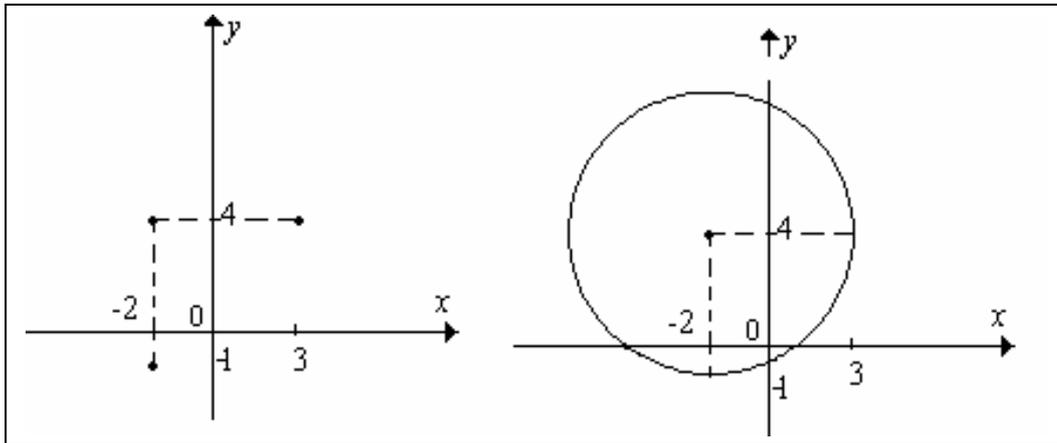
$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 5$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 = 5$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 + 4 + 16$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Al identificar con la forma centro-radio, tenemos que $r^2 = 25$, de aquí que $r = 5$ y el centro está dado por $C(-2,4)$. Observe que para graficar ubicamos primero el centro y luego trazamos a partir de allí dos rayos, uno vertical y otro horizontal, ambos de longitud 5. Luego hacemos el trazo de la circunferencia que pasa por los puntos finales de estos rayos.



Ejemplo 4.- Determinar si la ecuación dada es la ecuación de una circunferencia, en caso que lo sea encontrar el centro y el radio de la circunferencia y graficar la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 40 = 0$$

Solución: Debemos llevarlo a la forma centro-radio a fin de identificarlos. Primero agrupamos los términos en x y los términos en y . La constante la pasamos al otro miembro.

$$x^2 - 8x + y^2 - 6y = -40$$

Sumamos y restamos el mismo número para no alterar la ecuación con el fin de completar el desarrollo de $(x - h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$ en $x^2 - 8x$. Realizamos el mismo tipo de procedimiento con $(y - k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$

$$x^2 - 8x + \underline{\quad} - \underline{\quad} + y^2 - 6y + \underline{\quad} - \underline{\quad} = -40$$

Identificando, vemos que $-8x = -2hx$, de donde $h = 4$. Para los términos en x el término que falta para completar cuadrados es $(4)^2 = 16$

Similarmente vemos que $-6y = -2hy$, de donde $k = 3$. Para los términos en y el término que falta para completar cuadrados es $(3)^2 = 9$.

Así

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = -40$$

$$(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 6y + 9) - 9 = -40$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = -40 + 16 + 9$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = -15.$$

Observe que el lado izquierdo es siempre positivo para cualesquiera valores de x y y , por ser suma de cuadrados, así que nunca puede ser igual al lado derecho. Podemos concluir que no existe ningún punto (x, y) para el cual la ecuación anterior se satisfaga. Así que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 40 = 0$ no define una circunferencia.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 8 = 0$. Graficar la circunferencia

APLICACIONES

CURVA DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS

La mayoría de las fábricas elaboran dos o más bienes que compiten en los recursos, esto es, necesitan mano de obra, maquinarias, el mismo tipo de materias primas, etc. El aumento de la producción de un tipo de bien puede conllevar a la disminución de los otros. La forma como se relacionan las cantidades de cada tipo a producir muchas veces se pueden llevar a una ecuación. Cuando sólo existen dos bienes tenemos una ecuación en dos variables que se puede graficar y la gráfica de esta ecuación es conocida como la curva de transformación de productos. Muchas veces se usa la circunferencia para modelar la relación entre dos variables de este tipo.

Ejemplo 1.- Una fábrica elabora dos tipos de **morrales** A y B. Las cantidades posibles x y y que puede fabricar de cada tipo al mes están relacionadas por la siguiente ecuación.

$$x^2 + y^2 + 200x + 300y = 90000$$

donde x corresponde al tipo A y y al tipo B. a) Bosqueje la curva de transformación de productos en este caso. b) ¿Cuáles son los máximos posibles de producción de cada tipo al mes?

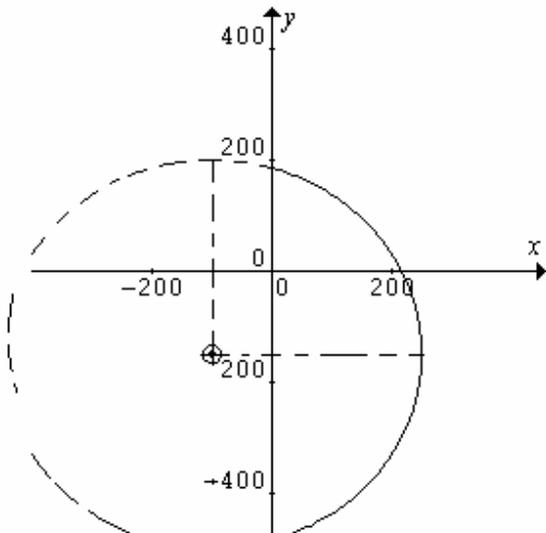
Solución: a) La curva dada tiene la forma general de una circunferencia, para graficarla la llevamos a la forma centro-radio: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ a fin de identificarlos. Entonces en

$$x^2 + 200x + y^2 + 300y = 90000$$

$x^2 + 200x$ corresponde a los dos primeros términos del desarrollo de $(x - h)^2$. Podemos identificar $200x = -2hx$. De aquí deducimos que $h = 100$, por consiguiente el término que falta en el desarrollo de $(x - h)^2$ es $h^2 = 100^2$. Lo sumamos y restamos en la ecuación. Igualmente podemos ver que $k = 150$ y el término que falta para completar cuadrados en $y^2 + 300y$ es 150^2 , lo sumamos y restamos para no alterar la ecuación.

$$\begin{aligned} x^2 + 200x + 100^2 - 100^2 + y^2 + 300y + 150^2 - 150^2 &= 90000 \\ (x^2 + 200x + 100^2) + (y^2 + 300y + 150^2) &= 90000 + 150^2 + 100^2 \\ (x - (-100))^2 + (y - (-150))^2 &= 122500 \end{aligned}$$

Así el centro es el punto $(100, 150)$ y el radio lo sacamos de la relación $r^2 = 122500$. Despejando obtenemos $r = \sqrt{122500} = 350$.



Recordamos de nuevo la estrategia para graficar una circunferencia. Ubicamos primero el centro y luego a partir del centro trazamos un rayo vertical de 350 unidades y otro rayo horizontal de 350. Se bosqueja la circunferencia que pasa por los puntos finales de estos rayos.

En la gráfica se hizo un trazo continuo de la circunferencia sólo para las x y y positivas, pues están son las que tienen sentido, en el resto se hizo un trazo punteado.

b) La máxima producción de **morrales** tipo A ocurre cuando $y=0$, para obtener el valor x de producción máxima podemos sustituir $y=0$ en cualquiera de las ecuaciones de la circunferencia, por comodidad usamos la forma centro-radio

$$\begin{aligned}(x - (-100))^2 + (y - (-150))^2 &= 122500 \\(x + 100)^2 + (0 - (-150))^2 &= 122500 \\(x + 100)^2 &= 122500 - 22500 \\x &= -100 \pm \sqrt{100000}\end{aligned}$$

Tomamos la solución positiva $x = 216,2$

La máxima producción de **morrales** tipo B ocurre cuando $x=0$, para obtener el valor x de producción máxima sustituimos $x=0$ en la forma centro-radio

$$\begin{aligned}(x - (-100))^2 + (y - (-150))^2 &= 122500 \\(0 + 100)^2 + (y + 150)^2 &= 122500\end{aligned}$$

$$y = -150 \pm \sqrt{112500} \quad \text{Tomamos la solución positiva.}$$

$$y \approx 185,4.$$

En conclusión la máxima producción posible de **morrales** de tipo B es 185 y de tipo A es de 216

EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación de la circunferencia que cumple las condiciones dadas.

1.1) Centro $(2,-1)$ y radio 3.

1.2) Centro $(\frac{1}{2}, -3)$ y radio $\sqrt{7}$.

1.3) Centro $(-3,0)$ y radio $2\sqrt{3}$

1.4) Centro $(-2,-1)$ y pasa por el punto $(-3,-2)$

1.5) Centro $(2,-3)$ y pasa por el punto $(-2,1/2)$

1.6) Los puntos extremos de un diámetro son $(4,1)$ y $(3,0)$

1.7) Centro en el origen y pasa por $(3,4)$

1.8) Centro $(2,3)$ y es tangente al eje x .

1.9) Centro $(-2,-3)$ y es tangente al eje y .

2) Determine si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia, en caso positivo determine el centro, el radio y grafique la circunferencia.

2.1) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$;

2.2) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

2.3) $x^2 + y^2 - 6x = 16$;

2.4) $x^2 + y^2 - 8x + y + \frac{1}{4} = 0$

2.5) $x^2 + y^2 - 2x + 7y = 0$;

2.6) $x^2 + y^2 - y - 3/4 = 0$

2.7) $x^2 + y^2 - 4y + 18 = 0$

3) En una zona se pueden sembrar dos tipos de árboles A y B. Las cantidades posibles x y y que se pueden plantar de cada tipo están relacionadas por la siguiente ecuación.

$$x^2 + y^2 + 100x + 150y = 10000$$

Bosqueje la curva de transformación en este caso. ¿Cuáles son los máximos posibles de cada especie?

4) La demanda de cierto producto es de q unidades cuando el precio fijado al consumidor es p UM en donde

$$q^2 + p^2 + 250q + 30p = 40000$$

Dibuje la curva de demanda. ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay ventas posibles

5) Una fabrica de celulares produce dos tipos I y II. Las cantidades posibles x y y que pueden producirse semanalmente están relacionadas por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 400x + 500y = 300000$$

Bosqueje la curva de transformación de productos. ¿Cuál es el número máximo de celulares de tipo II que pueden producirse?

Respuestas:

1.1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$; 1.2) $x^2 + y^2 - x + 6y + 9/4 = 0$; 1.3) $x^2 + y^2 + 6x - 3 = 0$; 1.4)

$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$; 1.5) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 97/4 = 0$; 1.6) $x^2 + y^2 - 7x - y + 12 = 0$

1.7) $x^2 + y^2 = 25$; 1.8) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$; 1.9) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

2.1) $(-3, 2)$; $r=7$; 2.2) $(-1, 4)$; $r=4$; 2.3) $(3, 0)$; $r=5$ 2.4) $(4, -1/2)$; $r=4$

2.5) $(1, -\frac{7}{2})$; $r=\frac{\sqrt{53}}{2}$; 2.6) $C(0, \frac{1}{2}), r=1$; 2.7) No es una circunferencia

