FUNCIONES

Muchas cantidades dependen de otras por ejemplo:

1.- Los costos totales de producción, *c*, dependen de la cantidad de artículos a producir, *q*.

2.- El nivel de contaminación en una determinada región puede depender del número de vehículos circulando en la vía.

3.- El área de un círculo depende del radio.

4.- La presión depende de la temperatura.

Para describir como una cantidad depende o es determinada por otra se usa el concepto de función.

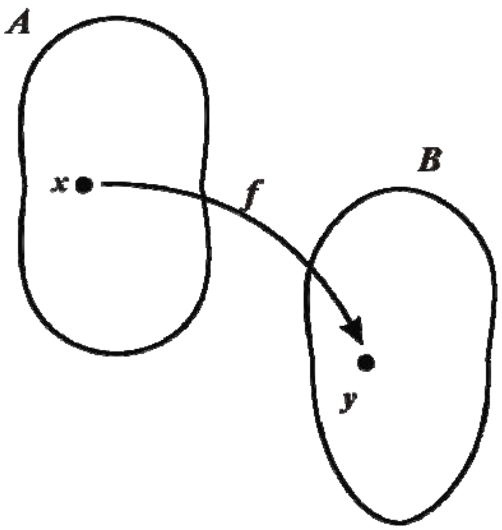
Una función tiene tres partes: Dos conjuntos A y B, no vacios, y una regla que relaciona dichos conjuntos. Más precisamente:

Definición.- Una función *f* de un conjunto A a un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el rango de la función es un subconjunto de B formado por todos los valores asignados.

Aun cuando el dominio puede ser cualquier colección de objetos: personas, ciudades, etc., aquí sólo consideraremos subconjuntos de **R.**

Una variable que represente los valores del dominio *x* se llama variable independiente y la variable dependiente *y* es la que representa los valores del conjunto B, ya que su valor depende del valor de la variable independiente.

Una forma de dar la relación entre A y B es través de ecuaciones o fórmulas, las más usuales son donde explícitamente se indique como obtener *y* a partir de *x*. Por ejemplo $y = x^2 + 2x - 1$. A las funciones se les suele colocar nombres, es frecuente usar las letras *f*, *g*, *h*, *F*, *G*. Podemos, por ejemplo, llamar *f* a la función que relaciona **R** con **R** mediante la ecuación $y = x^2$. Esta relación también la podemos escribir como $f(x) = x^2$.



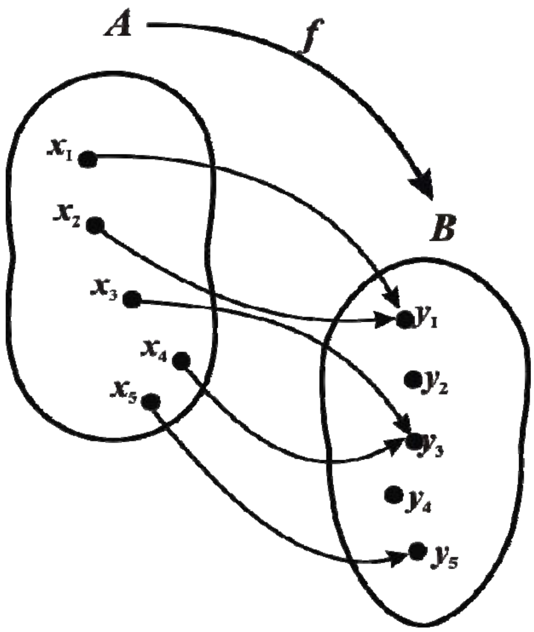
Para desarrollos teóricos usamos la representación de diagramas como él que se ilustra la figura.

Para indicar que *f* es una función con un dominio *A* y codominio *B* se escribe:

$$f : A \to B$$

Si *x* está en el dominio de *f* entonces decimos que *f* está definida en *x*.

En una función, un elemento del dominio se le asocia un solo elemento en el rango. Sin embargo pudiera ocurrir que dos elementos del dominio se le asocien el mismo elemento del rango.



$f(x)$ se lee *f* de *x* ó *f* en *x* ó *f* evaluada en *x*.

$f(x)$ representa un valor del rango, éste es el valor de la función en el punto *x*. Por ejemplo si $f(x)=x^2$, entonces

$$f(1)=1$$

$$f(2)=2^2=4$$

$$f(3)=3^2=9$$

Tenemos que 1, 4 y 9 son valores del rango de esta función. Si el dominio está dado por todos los números reales entonces el rango son los reales no negativos.

Usted podrá observar que para evaluar una función en un valor simplemente hay que sustituir la variable independiente por el valor.

Ejemplo 1.- Sea *f* una función cuyo dominio es R dada por $f(x)=x^2-3x$. Encontrar los siguientes valores de *f*. Simplifique su respuesta.
a) $f(-1)$, **b)** $f(b)$ y **c)** $f(b+1)$
Solución :
a) Cuando tenemos que evaluar expresiones más complicadas recomendamos que el estudiante en un principio piense la función como:

$$f(\quad)=(\quad)^2-3(\quad)$$

Es decir escriba paréntesis donde iba la *x*. Luego colocar dentro de cada paréntesis el valor a evaluar, así por ejemplo *f*(-1) es

$$f(-1)=(-1)^2-3(-1)$$
.

Realizando y simplificando queda $f(-1)=1^2+3$. De aquí que $f(-1)=4$

b) $f(b)=b^2-3b$

c)Para evaluar la función en b+1, colocamos dentro de los paréntesis de $f(\quad)=\left(\quad\right)^2-3\left(\quad\right)$ la expresión b+1:

$$f(b+1)=(b+1)^2-3(b+1).$$

Desarrollando tenemos:

$$f(b+1)=b^2+2b+1-3b-3$$

Simplificando

$$f(b+1)=b^2-b-2\,.$$

Ejercicio de desarrollo: Sea g una función cuyo dominio es **R** dada por $g(x)=\sqrt{2x^2+1}$. Complete los espacios vacíos en los siguientes desarrollos a fin de encontrar los siguientes valores de g: **a)** $g(-3)$, **b)** $g(3t)$ y **c)** $g(x+h)$

Desarrollo:

a) $g(\qquad)=\sqrt{2(\qquad)^2+1}=\sqrt{\_\_\_\_+1}=\sqrt{19}$. Observe donde se ha colocado los paréntesis.

b)

$g(\_\_\_\_)=\sqrt{2(\_\_\_\_)^2+1}=\sqrt{2\_\_\_\_+1}=\sqrt{18t^2+1}$. (Complete los espacios en blanco)

c) De nuevo dejamos en blanco el espacio donde iba x, el estudiante deberá colocar $x+h$ en el desarrollo:

$g(\_\_\_\_)=\sqrt{2(\_\_\_\_)^2+1}=\sqrt{2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_+1}=\sqrt{2x^2+4hx+2h^2+1}$

Cuidado

$$g(x+h)\neq g(x)+h$$
$$g(x+h)\neq g(x)+g(h)$$

Ejercicio de desarrollo: Sea f una función cuyo dominio es **R** dada por $f(x)=2x^2-x+1$.

Encontrar los siguientes valores de f:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $f\left(\sqrt{2}-2\right)$ **c)** $f\left(x+h\right)$.

Recuerde: En un principio escriba la función sin la variable y donde iba la variable abrir y cerrar paréntesis, luego colocar dentro de cada par de paréntesis el valor a evaluar.

En muchas ocasiones hay que evaluar expresiones que implique distintos valores de la función. El siguiente ejemplo es importante en cálculo.

Ejemplo 2.- Sea *f* una función cuyo dominio es R dada por $f(x)=x^2-3$. Calcule $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con $h\neq 0$. Simplifique su respuesta

Solución: Al sustituir obtenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\overbrace{(x+h)^2-3}^{f(x+h)}-\overbrace{(x^2-3)}^{f(x)}}{h}$$

Desarrollando y simplificando

$$=\frac{x^2+2xh+h^2-3-x^2+3}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h.$$

Ejercicio de desarrollo: Sea *f* una función cuyo dominio es R dada por $f(x)=x-2x^2$. Calcule y simplifique: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con $h\neq 0$

DOMINIO IMPLICITO

Si la función se define mediante una fórmula, sin especificar el dominio, entonces se entenderá que el dominio es el subconjunto más grande de **R** donde tiene sentido aplicar la fórmula y el resultado es un número real.

Ejemplo 3.- Encontrar el dominio de cada función

a) $f(x)=\sqrt{1-3x}$; **b)** $g(x)=\frac{4x+x^2}{x^2-1}$

Solución:

a) Para que la raíz sea un número real, el radicando tiene que ser mayor o igual a 0. Esto es $1-3x\geq 0$

Tenemos que buscar las soluciones de esta desigualdad lineal.

$$-3x\geq -1$$

$$x\leq \frac{1}{3}$$

Así, el dominio de *f* es el intervalo $(-\infty,\frac{1}{3}]$.

b) En el caso de la función $g(x)=\frac{4x+x^2}{x^2-1}$, el dominio es el conjunto de todos los reales excepto aquellos números donde el denominador se hace 0 (pues la división entre 0 no está definida). Entonces tenemos que quitar a **R** los *x*\`s que satisfacen

$$x^2-1=0$$

Estos son:

$$x=\pm 1.$$

Podemos expresar el dominio como

Dom g=**R**-{-1,1}.

Esto se lee como el conjunto de números reales excepto el –1 y el 1.

Recuerde:

1) Cuando queremos calcular el dominio de una función que tiene una expresión con radical con índice par se debe plantear la desigualdad: radicando mayor o igual a cero, pues el dominio está contenido en este conjunto para que la fórmula tenga valores reales. En este caso la solución suele ser un intervalo o uniones de intervalos.

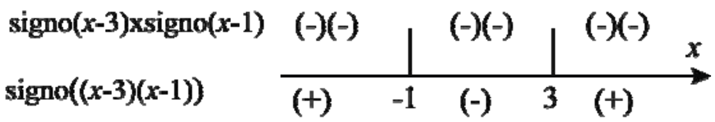
2) Por otro lado si se tiene una fracción donde la variable está en el denominador, se debe plantear la ecuación denominador igual a 0, entonces deberemos quitar las soluciones de esta ecuación del conjunto de números reales que estamos considerando.

Ejemplo 4.- Encontrar el dominio de cada función: **a)** $h(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$, **b)** $F(x)=\dfrac{x^3-3x}{2}$

Solución:

a) Como en la función $h(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ existe un radical, el dominio es el conjunto solución de la desigualdad: $x^2-2x-3\geq 0$. (Recuerde que el radicando debe ser mayor o igual a cero). Esta desigualdad es cuadrática, para resolverla empleamos el método de de los signos: Factorizamos, colocamos las raíces de los factores en la recta real, tomamos valores de prueba en los intervalos definidos por las raíces y evaluamos en los factores, para finalmente ver el resultado del producto. A continuación se da el desarrollo lo anterior:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$



De la figura vemos que la solución de la desigualdad:

$$x^2-2x-3\geq 0$$

es el conjunto $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$

Por lo tanto Dom h= $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$.

b) La función $F(x)=\dfrac{x^3-3x}{2}$ puede ser evaluada en cualquier parte. Cualquier número real puede ser elevado al cubo, restarle tres veces ese número, para luego el resultado dividirlo entre 2. En conclusión

Dom F=**R**

En este ejemplo el denominador nunca es cero.

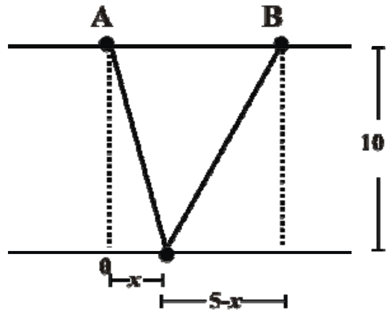
Comentario: Para los estudiantes que saben codificar expresiones en la calculadora pueden pensar el dominio como los valores x donde al usar su calculadora no arroja E (error). Si usted evalúa la función $f(x)=\sqrt{1-3x}$ en -0.5 va obtener un valor real, sin embargo si evalúa en 1(que no está en el conjunto $(-\infty,\frac{1}{3}]$=Dom f) obtendrá error, porque el radicando es un número negativo.

Ejercicio de desarrollo: .- Encontrar el dominio de cada función

a) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; **b)** $g(x)=\dfrac{4x+x^2}{x^2-x-2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$

APLICACIONES GENERALES.

Ejemplo 1.- Se quiere tender dos tuberías que salgan desde un mismo punto de la orilla un lago y lleguen 10 km. arriba a dos puntos diferentes A y B de una ciudad, los cuales están 5 km. distantes uno del otro. Suponga que la línea que une estos puntos corre paralela al lago. Determine los kilómetros totales de tubería a emplear en términos de la distancia que hay entre la proyección de punto A al otro extremo del lago y el punto desde el cual sale la tubería *x*.



Solución:

Por Pitágoras podemos ver que la distancia en kilómetros desde el punto *x* a A es:

$$\sqrt{x^2+10^2}$$

y la distancia desde *x* a B es

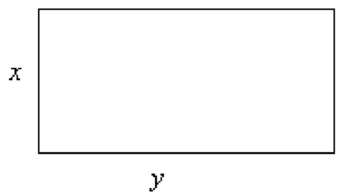
$$\sqrt{(5-x)^2+10^2}$$

La función buscada es la suma de estas dos distancias. En conclusión

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^2}+\sqrt{(5-x)^2+10^2}\ ,$$

donde $x\in[0,5]$.

Ejemplo 2.- Se quiere cercar un terreno rectangular con 200 metros de malla. Si x y y son las dimensiones de los lados. **a)** Exprese el área como función de x .**b)** Diga cuál es el dominio natural de esta función, tomando en consideración las restricciones físicas



Solución:

a) El área esta dada por

$$A=x\cdot y$$

En este caso la función área viene expresada en términos de las dos variable *x* y *y*. Sin embargo podemos sustituir *y* por una expresión que depende de *x*, debido a la relación entre *x*, *y* y el perímetro.

El perímetro del rectángulo está dado por $x+x+y+y$ y debe ser igual a 200.

$$x+x+y+y=200$$

Esto es

$$2x+2y=200$$

De aquí podemos expresar y en función de x , despejando

$$y=\frac{200-2x}{2}$$

$$y=100-x$$

Sustituyendo *y* en el área, tenemos finalmente

$$A(x)=x\cdot(100-x)$$

b) Es claro que *x* tiene que ser mayor que 0. Pero también *x* deberá ser menor que 100.
Así Dom *A*=(0,100)

APLICACIONES EN ECONOMÍA

Ejemplo 1.- La ecuación de demanda de un producto es $2p + 3q = 100$. El costo de producir cada artículo es de 3UM y los gastos fijos mensuales de la empresa son 120UM. Exprese la utilidad mensual **a)** en términos de la demanda *q*, **b)** en términos del precio *p*.

Solución:

En ambos casos tenemos que considerar:

1) Costos totales= Costos fijos+costos variables

$= 120 + 3q$

2) Ingreso= pq y

3) Utilidad= Ingreso-Costo

a) En esta parte tenemos que expresar la utilidad en términos de la demanda, para ello despejamos *p* de la ecuación de demanda:

$$p = \frac{100 - 3q}{2}$$

a fin de sustituirla en la ecuación de utilidad a plantear. De

Utilidad= Ingreso-Costo

obtenemos

Utilidad= $pq - (120 + 3q)$

Tenemos la utilidad en términos de *p* y *q*. Si sustituimos *q* en función de *p*, la utilidad queda expresada en términos de *q* como:

Utilidad= $\frac{100 - 3q}{2} q - 120 - 3q$

Como ahora quedó expresada la utilidad en función de q usamos la notación de función: $U(q)$

$$U(q) = \frac{100q - 3q^2 - 240 - 6q}{2}$$

$$U(q) = \frac{-3q^2 + 94q - 240}{2}$$

b) En esta parte tenemos que expresar la utilidad en términos del precio, para ello despejamos *q* de la ecuación de demanda:

$$q = \frac{100 - 2p}{3}$$

a fin de sustituirla en la ecuación de utilidad. En

Utilidad= $pq - (120 + 3q)$

sustituimos *q* en función de *p*, la utilidad queda entonces expresada en términos de *p* como:

Utilidad= $pq - 120 - 3q$

Utilidad= $p\frac{100 - 2p}{3} - 120 - 3\frac{100 - 2p}{3}$

Operamos en el lado derecho y usamos la notación de función en el lado izquierdo

$$U(p) = \frac{(p-3)(100 - 2p)}{3} - 120$$

$$U(p) = \frac{-2p^2 + 106p - 660}{3}$$

Ejemplo 2.- Un museo tiene como política admitir grupos grandes de 30 hasta 80 personas con la siguiente política de rebajas. Para grupos menores o iguales a 30 personas la tarifa es de 160UM, pero por cada persona adicional la tarifa por persona se reduce en 2UM. Exprese el ingreso del museo cuando recibe grupos de descuentos como función del número de persona por encima de 30.
Solución: En este caso la variable independiente es

x= números de personas por encima de 30

Así,

Número de personas del grupo=x+30

y

El precio de entrada por persona =160-2x

El ingreso viene dado por

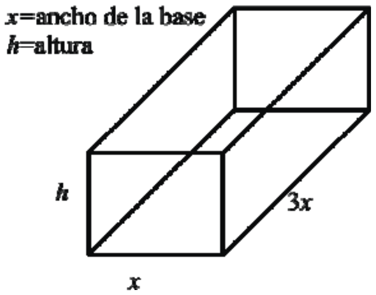
Ingreso=(número de personas en el grupo)(Tarifa por persona)

De aquí

$$I(x) = (x+30)(160-2x)$$

Tal como se define la función el dominio I=(0,80)

Ejemplo 3.- Se quiere construir un tanque de agua rectangular de 1.000m^3 de capacidad, sin tapa, donde el largo sea el triple del ancho. Se estima que la construcción del fondo es de 1.5UM por metro cuadrado y la de los lados el doble. Expresar el costo de construcción en función del ancho de la base.
Solución: Lo primero es obtener un dibujo como se muestra en la figura, mostrando las variables: ancho y altura, observe que el largo puede ser expresado en términos del ancho.



Observe que:

Costo total= Costo de la base+costo de los laterales

El costo de la base=(1,5)x(área de la base).
Es claro que área de la base es $x\cdot(3x)=3x^2$ m^2, así

Costo de la base =$1.5\cdot 3x^2 = 4.5x^2$

El área de los laterales= $x\cdot h + x\cdot h + 3x\cdot h + 3x\cdot h = 8xh$. De esta manera

El costo de los laterales=$3\cdot 8xh = 24xh$.

Costo total= $4.5x^2 + 24xh$

Esta expresión depende de x y h. Observe que nos piden el costo sólo en función de x, para conseguirlo usamos la condición

Volumen=1.000 Expresamos el volumen en términos de las variables.

$x\cdot(3x)\cdot h = 1.000$

$3x^2 h = 1.000$ Despejamos la variable h para luego sustituirla en la función de costo total

$$h = \frac{1.000}{3x^2}$$

Al sustituir, obtenemos el costo total sólo en función de x.

Costo total= $C(x) = 4.5x^2 + 24x\dfrac{1.000}{3x^2}$. Simplificando obtenemos

$$C(x) = 4.5x^2 + \frac{8.000}{x}$$

Comentario: La condición

Volumen=1.000 Expresada en términos de las variables puede ser escrita como:

$3x^2h = 1.000$

es llamada *la ecuación de restricción*, por ser una ecuación que debe cumplirse. Otros autores la llaman *la ecuación de ligadura* porque establece la relación que deben cumplir las variables. En muchos problemas encontramos la ecuación de restricción.

En el ejercicio del rectángulo, ecuación de restricción o ligadura era :

El perímetro=200. Escrita en términos de las variables quedaba

$x + x + y + y = 200$

Estas ecuaciones nos permiten expresar una variable en término de la otra.

En ocasiones existen una relación lineal entre las variables, esto no permite encontrar rápidamente una variable como función de la otra. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.- Un comerciante vende 100 unidades de un artículo a la semana si el precio es 55UM. El planea aumentar los precios y estima que por cada 5 UM de aumento en el precio la demanda bajará en 4 unidades. **a)** Exprese la demanda en función de p. **b)** Exprese el ingreso en función de p

Solución: **a)** Existe una relación lineal entre el precio y la cantidad, pues la razón de cambio es constante, esto es la demanda baja la misma cantidad frente a una variación de precio de 5UM, independientemente del nivel en que este el precio. Para determinar *q* como función de *p* usamos la ecuación punto-pendiente: $q - q_0 = m(p - p_0)$. La pendiente es variación en *q* sobre variación en *p*. Como la demanda disminuye encontramos que la pendiente es -4/5. El lector también puede encontrar la pendiente usando los puntos $(p_1, q_1) = (55{,}100)$ y $(p_2, q_1) = (60{,}96)$. Observe que en este caso la variable dependiente la consideramos *q* y mantenemos esta consideración en el resto del cálculo. Sustituyendo en $q - q_0 = m(p - p_0)$, tenemos $q - 100 = -4/5(p - 55)$. Despejando *q* obtenemos

$q(p) = -4/5p + 144$ Observe que hemos remarcado que q es función de *p*.

b) El ingreso $I = pq$, para expresar I en función de *p*, sustituimos *q* por la expresión del lado derecho que se acaba de obtener. De esta manera

$I(p) = p(-4/5p + 144)$ Podemos realizar la multiplicación para obtener:

$I(p) = -4/5p^2 + 144p$

EJERCICIOS

1) Sea $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Calcular $f(-3)$; $f(2 + \sqrt{2})$ y $f(5)$

2) Sea $f(x)= \sqrt{2x^2 + 1} - 3$. Calcular $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ y $f(2)$

3) Sea. $f(x) = \sqrt{x + 5}$ Calcular $f(-3)$; $f(0)$ y $f(5)$

4) Determine **a)** $f(2 + h)$ y **b)** $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$, para las siguientes funciones

4.1) $f(x) = 2 - 3x$; **4.2.)** $f(x) = 2x^2 - 3x$ **;** **4.3)** $f(x) = \dfrac{2}{x + 3}$

5) Para las siguientes funciones determine **a)** $f(x + h)$ y **b)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

5.1) $f(x) = 2x^2 - 3$; **5.2)** $f(x) = 3x - x^2$; **5.3)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **5.4)** $f(x) = \dfrac{1}{5 - x}$

6) Determine el dominio de las siguientes funciones:

6.1) $g(x)=\dfrac{x-1}{2x-3}$ **;** **6.2)** $f(x)=\sqrt{x+5}$ **;** **6.3)** $f(x)=\sqrt{3-x}$ **;** **6.4)** $f(x)=\dfrac{x}{1+2x^2}$ **;**

6.5) $f(u)=\dfrac{1}{1-2u^2}$ **;** **6.6)** $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$ **;** **6.7)** $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ **;** **6.8)** $g(x)=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+2x}$ **;**

6.9) $f(x)=\sqrt{2x-3}$ **;** **6.10)** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-4x}$**;** **6.11)** $h(x)=\left(4-x^2\right)^{-1/2}$ **;** **6.12)** $f(x)=\dfrac{x-1}{3}$**;**

6.13) $g(t)=\sqrt[3]{t-1}$

Respuestas: 1) 12; $-1+2\sqrt{2}$;12. **2)** 0; $\sqrt{6}/2-3$; 0 **3)** $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$;**4.1a)**-4-3h 4.1b)-3; **4.2b)** $2h+5$; **4.3a)** $\dfrac{2}{5+h}$; **b)** $-\dfrac{2}{5(5+h)}$ **5.1a)**$2(x+h)^2-3$; **5.1b**) $4x+2h$; **5.2b)** $3-2x-h$;

5.3) $f(x)=\dfrac{3}{x(x+h)}$; **5.4)** $\dfrac{1}{(5-x-h)(5-x)}$ **6.1) R**-{3/2}; **6.2)** $[-5,\infty)$;**6.3)** $(-\infty,3]$; **6.4) R;**

6.5) R-{ $\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2$ }; **6.6)** $(-\infty,-5]\cup[0,\infty)$ **6.7)** $[-3,1]$; **6.8) R**-{0,-1,-2}; **6.9)** $[3/2,\infty)$;
6.10) R-{ $0,2-2$ }; **6.11)** $(-2,2)$ **; 6.12) R; 6.13) R;**

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) En ciertos terrenos se estima que si se plantan 100 matas de aguacates por hectárea, se obtendrá una producción promedio de 400 aguacates por árbol en su edad adulta. Se estima que por cada árbol que se siembre de más hará que la producción promedio por árbol disminuya en 2 unidades. Exprese la producción total de una hectárea en función del número de árboles adicionales sembrados.

2) Un puesto de hamburguesas calcula que el costo de cada hamburguesa es 40UM cada una. Se estima que si las hamburguesas se venden a p UM cada una, los consumidores comprarán q=120-p de éstas al día. Exprese la utilidad diaria del puesto como una función del precio.

3)Una papelería puede obtener una resma de papel a un costo de 15UM por resma y estima que si vende la resma a p UM el ejemplar, se venderán aproximadamente q=20(25-p) al mes. Exprese la utilidad mensual de la papelería por la venta de resmas como una función de precio.

4) Un distribuidor de chaquetas de cuero adquiere las chaquetas a un costo promedio de 40UM la unidad. El detallista vende las chaquetas a 80UM cada una; a este precio, los consumidores compran 30 chaquetas al mes. El detallista planea reducir el precio para estimular las ventas y estima que por cada reducción de 5UM en el precio, se venderán 10 chaquetas más cada mes. Exprese la utilidad mensual del comerciante proveniente de la venta de chaquetas como una función del precio de venta.

5) Si una máquina se deprecia en un 2% de su valor original cada año, determine una función V que exprese el valor de la máquina V después que han transcurrido t años. **Respuesta**: **6)** Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es de 30UM y el de 20 unidades es 50UM. Suponga que el costo C está relacionado linealmente con la cantidad q a producir. **a)** Exprese el costo total como una función de q. **b)** Encuentre el costo de producir 35 unidades.

7) Una persona alquilo un vehiculo por un día y pagó 260UM por 120km de recorrido. Ese misma día otra persona alquiló el mismo tipo de vehiculo, su factura fue de 320UM por 160km. Suponiendo que la tarifa es una función lineal del número de km. recorridos, determine la tarifa de alquiler en función de los número de kilómetros recorridos.

8) En una tienda de fotocopias tiene una demanda de 20 mil copias al mes si el precio es de 50UM, pero si se fija un precio de 60UM se estima que la demanda será de 15mil copias. Determine la cantidad de copias que se demanda al mes, C, en función del precio suponiendo que existe una relación lineal entre la cantidad demandada y p.

Respuestas: **1)** $P(y) = -2y^2 + 200y + 40.000$ **; 2)** $U(p) = -p^2 + 160p - 4.800$ **;**

3) $U(p) = -20(p^2 - 40p + 375)$ **; 4)** $U(p) = -2(p^2 - 135p + 3.800)$ **; 5)** $V(t) = V_0 - 0.02V_0 t$ **;**

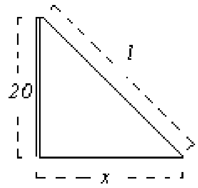
6) a) C=2q+10**; 7)** $T(x) = \frac{3}{2}x + 80$ **; 8)** $C(p) = -\frac{1}{2}p + 45$ miles

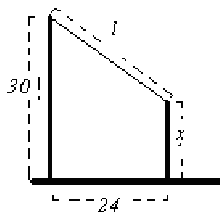
GENERALES

1) Se corta un alambre de 20cm. de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo. Si *x* representa el lado más corto. Expresar el área del rectángulo en función de *x*. **Respuesta**: *A*(*x*)=(10- *x*)*x*.

2)Desde un poste de 20metros de altura sale un trozo de cuerda que llega a nivel de piso *x* metros más allá. Si *l* representan la longitud de la cuerda. **a)** Exprese *l* como función de *x*. **b)** Exprese *x* como función de *l*.

Respuesta: a) *l*(*x*)= $\sqrt{x^2 + 400}$)

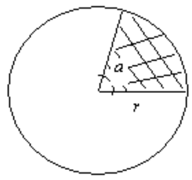




3) Desde un poste de 30 metros de altura sale un trozo de cuerda que llega a otro poste de altura *x* metros, 24 metros más allá. Si *l* representan la longitud de la cuerda. **a)** Exprese *l* como función de *x*.

b) Exprese *x* como función de *l*. **Respuesta**: a) *l*(*x*)= $\sqrt{(30-x)^2 + 24^2}$

4) Exprese el área de un sector circular de una circunferencia, de radio fijo *r,* en función de *a*, el ángulo del sector dado en grados. Ayuda: el área de un circulo = $\pi \cdot r^2$. **Respuesta**: *A*(*a*)=$\frac{a\pi \cdot r^2}{360}$

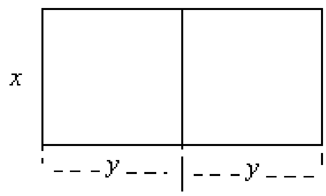


5) En un descampado se quiere cercar un terreno rectangular de 1.000m^2. Escriba la función perímetro en términos del ancho del rectángulo. **Respuesta:** $P(x) = 2x + 2000/x$

6) En ciertos terrenos se estima que si se plantan 600 naranjos por hectárea, se obtendrá una producción promedio de 300 naranjas por mata y que por cada árbol que se siembre de más hará que la producción promedio por árbol disminuya en 3 unidades. Exprese la producción promedio por árbol en función del número de árboles adicionales sembrados. **Respuesta**: $P(x) = (600 + x)(300 - 3x)$

7) Con 120 metros se quiere cercar 2 corrales idénticos como muestra la figura. **a)** Exprese el área total como función de *x* **b)** Diga cuál es el dominio natural de esta función, tomando en consideración las restricciones físicas.

Respuesta: $A(x) = 60x - 3x^2/2$



CIENCIAS NATURALES

1) El aire seco al subir se enfría. Suponga que a 200m. sobre el nivel del mar se tiene una temperatura de 23ºC y a 2 Km es de 15ºC. Expresar la temperatura en función de la altura, suponiendo que existe una relación lineal entre ellas. ¿Cuál es la temperatura a 1000m sobre el nivel del mar?

2) A nivel del mar el agua hierve a 100ºC . A una altitud de 1600m. sobre el nivel del mar el agua hierve aproximadamente 92ºC. Suponiendo que existe una relación lineal entre punto de ebullición y la altitud, calcule el punto de ebullición en función de la altitud. (Nota: realmente el punto de ebullición depende de la presión atmósferica, pero ésta se puede inferir por la altitud).

DISTINTOS TIPOS DE FUNCIONES

FUNCIONES POLINOMICAS

Una función f se llama función polinómica si puede ser escrita en la forma $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_n, c_{n-1}, \ldots c_0$ son números reales.

Si $c_n \neq 0$, entonces n es el grado de la función polinómica y c_n es el coeficiente principal. El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales.

Hay funciones polinómicas especiales, algunas de ellas son

a.- Función constante es una función de la forma $f(x)=k$, con k una constante. El grado es 0.
Por ejemplo $f(x)=2$. Es una función que siempre asume el valor 2. Por ejemplo $f(-1)=2$; $f(200)=2$

b.- Función lineal: es de la forma $f(x)=ax+b$, donde a y b son constantes, con $a \neq 0$. El grado es 1.
Por ejemplo $f(x)=4-\frac{x}{3}$ es una función lineal, donde $a=-\frac{1}{3}$

c.- Función cuadrática: es un polinomio de grado 2. Esto es $f(x)=ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$

Ejemplo 1.- Diga si las siguientes funciones son polinómicas o no. En caso afirmativo clasifíquelas de acuerdo al grado y señale el coeficiente principal.

a) $f(x) = -\frac{x}{3}$ es un polinomio de grado 1 o función lineal, con coeficiente principal $-\frac{1}{3}$

b) $g(x) = x^{-3} + x$ no es un polinomio porque el exponente de la x del primer término es negativo. Funciones que involucren expresiones de la forma $\frac{1}{x^n}$ tampoco son funciones polinómicas.

c) $F(x)= x^{1/2}$ no es polinómica porque el exponente de la x es fraccionario. Funciones que involucren expresiones $\sqrt[n]{x}$ tampoco son polinómicas.

d) $H(x) = \sqrt{2}x^3 - x - 1$ es una función polinómica de grado 3. El coeficiente del grado principal es $\sqrt{2}$.

FUNCIONES RACIONALES

Una función se llama función racional si puede ser escrita como un cociente de polinomios.

Ejemplo 1.- Determine si las siguientes funciones son funciones racionales

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+x-3}$. Es el cociente de polinomios y por tanto es una función racional.

b) $f(x) = x - x^{-1}$ es una función racional. Observe que puede ser reescrita como $f(x) = \frac{x-1}{x}$

c) $f(x) = 4x^2 - 2$. Como esta función puede ser reescrita como $f(x) = \frac{4x^2-2}{1}$ y 1 es un polinomio entonces es una función racional. Más generalmente:

Una función polinómica es una función racional

FUNCION DEFINIDA POR PARTES

En algunas ocasiones hace falta más de una fórmula para poder definir una función. El siguiente ejemplo ilustra una función definida por partes.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & si \quad -5\le x<0 \\ 0, & si \quad 0\le x<1 \\ 2+x, & si \quad 1\le x\le 5 \end{cases}$$

Claramente si f no está en ninguno de estos conjuntos de $x´s$ la función no está definida. En este ejemplo, el dominio de f es el intervalo [-5,5]. Si queremos evaluar la función, tenemos que determinar en que región está el valor a evaluar para usar la fórmula correspondiente. Este tipo de función, efectivamente, define una regla. La regla en este ejemplo es:

Si x está en el intervalo [-5,0) usamos la fórmula x^2 para evaluar la función.

Si x está en el intervalo [0,1) la función está definida por $f(x)=0$ y por último

Si x está en el intervalo [1,5] usamos la fórmula $2-x$ para evaluar la función

Ejemplo 1.- Para la función f definida arriba encontrar: **a)** $f(-1)$; **b)** $f(\frac{1}{2})$; **c)** $f(1)$.

Solución:

a) $f(-1)$. Observe que -1 está en el intervalo [-5,0), por tanto se usa la primera fórmula: $f(-1)=(-1)^2=1$.

b) $f(\frac{1}{2})$. Como $\frac{1}{2}$ está en el intervalo [0,1) se tiene que usar la segunda expresión. Por tanto $f(\frac{1}{2})=0$.

c) $f(1)$. Como $1\le 1\le 5$ se tiene que usar la tercera expresión. Por tanto $f(1)=2+1=3$.

Las funciones definidas por partes tienen muchas aplicaciones y usos en matemáticas.

Ejemplo 2.- El pago mensual para estar suscrito a un plan de llamadas de celulares es 20UM y contempla los primeros 50 minutos a una tarifa de 1.5UM y 3UM los minutos adicionales durante el mes. Sea x el número de minutos en llamadas de un celular con este plan. Escriba la función $C(x)$ costo total del plan dependiendo de x, número de minutos de llamadas al mes.

Solución: Observe que esta función la tenemos que definir en dos partes, dependiendo si $x\le 50$ o $x>50$. En ambos casos tenemos que considerar que el plan sale a 20 más el costo de las llamadas.

Es claro que si $x\le 50$, el costo total de estas llamadas será de $1{,}5\cdot x$. Sin embargo si $x>50$, tenemos que considerar que los primeros 50 minutos se les aplicó la tarifa de 1.5UM y los siguientes $x-50$ minutos se les aplico la tarifa de 3UM. Así el costo total de las llamadas en este caso es: $1.5\cdot 50+3(50-x)$. De estas observaciones tenemos que:

$$C(x)=\begin{cases} 20+1{,}5\cdot x & x\le 50 \\ 20+75+3(x-50) & x>50 \end{cases}$$

Simplificando queda

$$C(x)=\begin{cases} 20+1{,}5\cdot x & x\le 50 \\ -55+3x & x>50 \end{cases}$$

Comentario.- Para determinar cada parte también se pudo usar los conceptos de rectas y función lineal, ya que la tarifa aumenta de manera constante por cada aumento de una unidad de x. Por ejemplo en la segunda parte tenemos un punto de donde parte (50,95) y la pendiente 3.

FUNCION VALOR ABSOLUTO

La función $f(x)=|x|$ es llamada función valor absoluto. Esta función también la podemos escribir por partes:

$$f(x)=\begin{cases} -x, & si \quad x<0 \\ x, & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS.

1) Clasifique las siguientes funciones como polinómicas FP o no NFP, Racionales FR o no NFR. Justifique. En caso que sea polinómica diga el grado del polinomio y el coeficiente principal.

1.1) $f(x)=2x$ **;** **1.2)** $g(x)=\dfrac{x-1}{2x-3}$ **;** **1.3)** $g(x)=x^2+3x^5$ **;**

1.4) $f(x)=\sqrt{3-x}$ **;** **1.4)** $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ **;** **1.5)** $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}+3x$ ***;***

1.6) $f(x)=\sqrt{3}x-1$ **;** **1.7)** $g(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ **;** **1.8)** $h(x)=\sqrt{3x}-1$

2) Para la siguiente función determine su dominio y evalúe $f(-2)$ y $f(3)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 0 \\ x-1 & si \quad 0<x<4 \\ 3x & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

3) Para la siguiente función determine su dominio y evalúe $g(2)$ y $g(-1/2)$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & si \quad -2\leq x\leq 0 \\ 3x+7 & si \quad 0<x\leq 2 \end{cases}$$

Respuestas

1) FP sólo 1.1; 1.3 y 1.6 ; NFR: sólo 1.4 y 1.8; **2)** Dom=**R ;** 3; 2 **3**) Dom =[-2,2]; 13; -1;

PROBLEMAS

1) Una compañía de buses adoptó la siguiente política de precios para grupos que desean contratar sus vehículos. A los grupos de no más de 40 personas se les cobrará una cantidad fija de 2400UM (40x60). Los grupos que tienen entre 40 y 80 personas pagarán 60UM y las personas adicionales a 40 tendrán un descuento de menos 5UM. La tarifa más baja de la compañía es de 50UM por persona, se ofrecerá a grupos de más de 80 personas. Exprese el ingreso de la compañía de buses como función del tamaño del grupo.

Respuesta: $I(x)=\begin{cases} 2400 & 0\leq x\leq 40 \\ 55x+200 & 40<x\leq 80 \\ 50x & x>80 \end{cases}$

2) Un museo cobra la admisión a grupos de acuerdo a la siguiente política. Los grupos con menos de 50 personas pagan 3.5UM por persona, mientras que los grupos de 50 personas o más pagan una tarifa reducida de 3UM por persona. **a)** Exprese la cantidad que pagará un grupo por su admisión como una función del tamaño del grupo. **b)** ¿Cuánto dinero ahorrará un grupo de 49 personas en el costo de admisión si puede incluir un miembro adicional? **Respuesta**: a) $P(x)=\begin{cases} 3.5x & 0\leq x\leq 50 \\ 3x & x>50 \end{cases}$;

b) 21.5UM

3) Un camionero está ofreciendo las patillas a 10UM cada kilo si compran menos de 10 kilos, a 8UM el kilo si compran entre 10 y 50 kilos y las deja a 6UM si compran más de 50 kilos. Determine el precio total de adquisición de las patillas en función del número de kilos que comprará el cliente.

Respuesta: $I(x) = \begin{cases} 10x & 0 \le x < 10 \\ 8x & 10 \le x \le 50 \\ 6x & x > 50 \end{cases}$

4) A fin de regular el consumo de electricidad la alcaldía de una ciudad fijo las siguientes tarifas. Los primeros 200HWh se pagará 3UM el KWh, para los siguientes 400 KW h pagará 5UM el KW y 8 de allí en adelante. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad de KWh consumidos al mes.

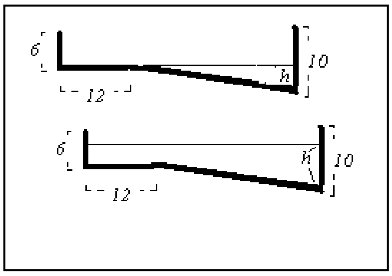
Respuesta: $V(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 200 \\ 5x - 400 & 200 < x \le 600 \\ 8x - 2200 & x > 600 \end{cases}$

5) La contaminación atmosférica en una ciudad varía de acuerdo a la hora del día. Sea *t* el número de horas después de las 6:00A.M. La función $C(t)$ da el índice de contaminación atmosférica en función de *t*.

$$C(t) = \begin{cases} 3 + 3t & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 12 + 2t & si \quad 4 < t \le 12 \\ 36 - 2t & \quad 12 < t \le 16 \end{cases}$$

¿Cuáles son los niveles de contaminación a las 7:00a.m.; 12m y a las 7p.m.?
Respuesta: 6; 24; 10

6) Una piscina mide 36 metros de largo por 15 de ancho. En las figuras tenemos un corte longitudinal de la piscina. Como se podrá observe los primeros 12 metros es totalmente horizontal. Luego empieza una declinación como lo muestra la figura. Sea *h* el nivel del agua medido en el lado derecho desde el fondo de la piscina. Exprese el volumen del agua como una función de *h*. (*Observe que tiene que definir una función por partes, para h menor que 4 y para h entre 4 y 10.*



Respuesta:

$$v(h) = \begin{cases} 45h^2 & si \quad h \le 4 \\ 720 + 540(h-6) & si \quad 4 < h \le 10 \end{cases}$$

GRAFICAS DE FUNCIONES

La representación gráfica entre x y $f(x)$ puede ayudar a interpretar mejor las relaciones entre x y $f(x)$.

La gráfica de una función f es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ donde x está en el dominio de f. Observe que la gráfica de una función es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Las técnicas de esta sección no son las más apropiadas para graficar, sin embargo nos permitirá establecer la gráfica de las funciones elementales $x^2, x^3, \sqrt{x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La técnica consiste en darle valores a x y calcular el valor $y = f(x)$. Es claro que los valores a escoger deben estar en el dominio de la función, luego estos puntos son representados en el plano y finalmente se hace un trazo suave que una estos puntos. La escogencia de los valores x se hace a conveniencia: que sea fácil calcular el valor de y y que nos de una idea de la forma de la gráfica.

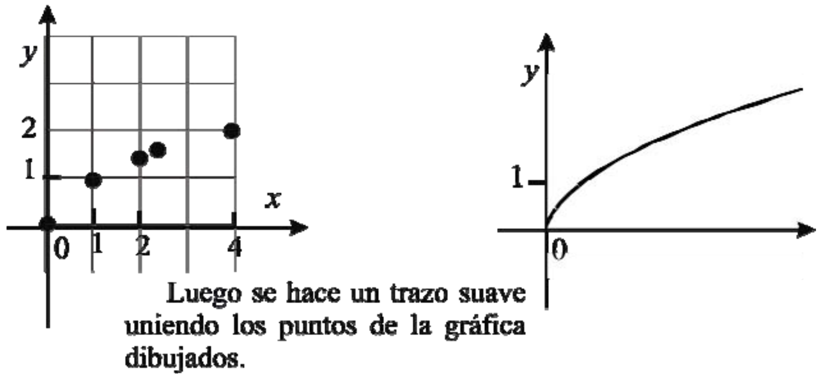
Ejemplo 1.- Considere $f(x) = \sqrt{x}$. **a)** Calcular el dominio de *f*. **b)** Trazar la gráfica de *f*.

Solución:

a) El dominio de *f* en este caso son los x tales que $x \geq 0$.

b) Como se esta interesado en el trazo de la función y resulta imposible conseguir todos los puntos de la gráfica, sólo se determinarán algunos puntos de ella, los necesarios para hacerse una idea de la forma de la gráfica. Damos valores a x para obtener el valor de y a través de la formula $y = \sqrt{x}$

x	0	1	2	9/4	4
y	0	1	$\sqrt{2}$	3/2	2



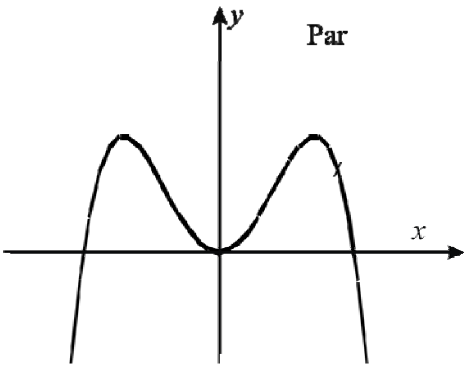
De nuevo insistimos en que éste no es el mejor método para graficar funciones. A lo largo de este capítulo daremos algunas técnicas que facilitará determinar más rápidamente la forma y las características más importantes de la función. Posteriormente se estudiarán otras técnicas para graficar.

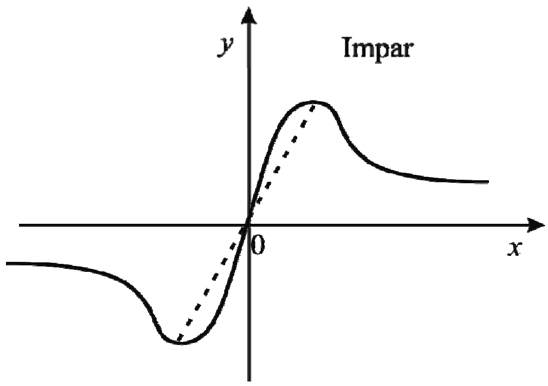
SIMETRÍAS

Para graficar funciones es útil tomar en cuenta las posibles simetrías. Esto se determina estudiando si la función es par, impar o ninguna de las anteriores.

Definición.- Una función es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x perteneciente al Dominio de f e impar si $f(-x) = -f(x)$.

Observe que si una gráfica es par y (x,y) es un punto de la gráfica entonces $(-x,y)$ también está en la gráfica. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Es decir, si doblamos el papel a lo largo del eje y entonces el trozo de la gráfica de la derecha coincide con el de la izquierda.





Similarmente vemos que si f es impar y (x,y) es un punto de la gráfica de f entonces $(-x,-y)$ es también un punto de la gráfica de f. La gráfica de una función impar permanece igual tras la rotación de 180º en torno al origen.

Ejemplo 1.- Para cada una de las siguientes funciones determine si es par o impar o ninguna de las anteriores. **a)** $f_1(x)=2x^2+2$; **b)** $f_2(x)=3x^3-x$ **c)** $f_3(x)=3x+1$

Solución: En todos los casos debemos evaluar la función en $-x$.

a) $f_1(-x)=2(-x)^2+2=2x^2+2=f_1(x)$, por tanto la función es par

b) $f_2(-x)=3(-x)^3-(-x)=-3x^3+x=-(3x^3-x)=-f_2(x)$, por tanto la función es impar.

c) $f_3(-x)=3(-x)+1=-3x+1$, lo cual es distinto de $f_3(x)$ y de $-f_3(x)$, por tanto la función no es ni par ni impar.

Recuerde: Para determinar la paridad de la función se evalúa f en $-x$. De ahí uno pasa a determinar cual relación se cumple: $f(-x)=f(x)$ o $f(-x)=-f(x)$ o ninguna de las anteriores.

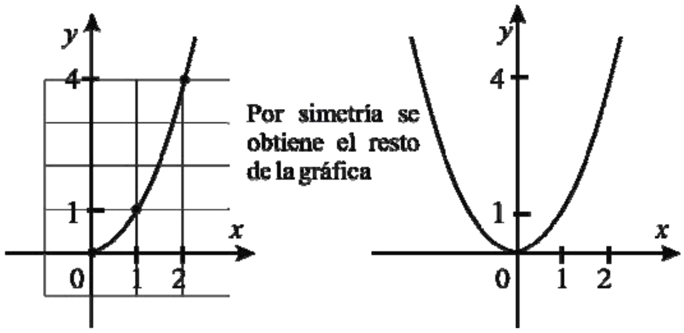
Ejercicio de desarrollo.- Para cada una de las siguientes funciones determine si es par o impar o ninguna de las anteriores. **a)** $f_1(x)=\sqrt{x^2+1}$; **b)** $f_2(x)=4x^3-x^2$

La simetría es una característica importante en una gráfica, y esto hay que resaltarlo, pero también nos puede ahorrar trabajo, pues con la mitad de la gráfica podemos obtener por simetría el resto.

Ejemplo 2.- Bosquejar la gráfica de $f(x)=x^2$.

Solución: El dominio de la función son todos los reales. La función es par $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Así evaluaremos la función sólo en algunos números no negativos. El resto de la gráfica se obtiene por simetría.

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

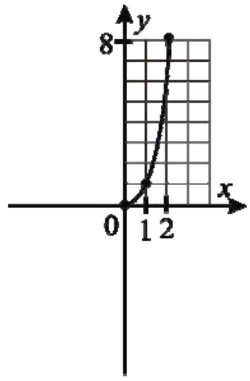


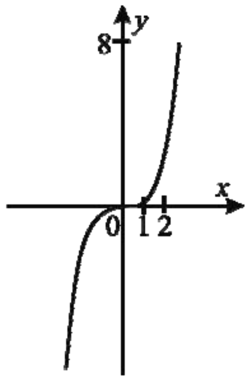
Ejemplo 3.- Bosquejar la gráfica de $f(x)=x^3$

Solución: El dominio de la función son todos los reales En este caso la función es impar: $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

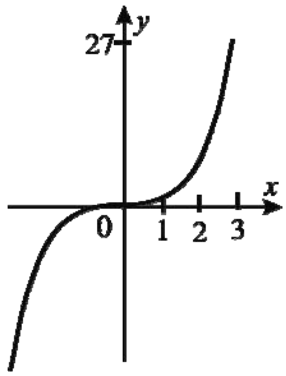
Así evaluaremos la función sólo en algunos números no negativos

x	0	1	2	3	4
y	0	1	8	27	64





Se lleva estos puntos al plano cartesiano y se hace un trazo suave que una estos puntos, luego se usa la simetría al origen.



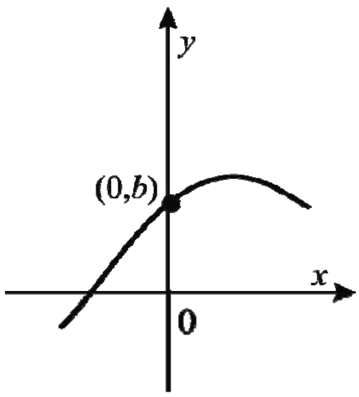
Observe que los valores de y son bastante altos comparados con los de x. Podemos usar una escala menor en el eje y para poder graficar la función.

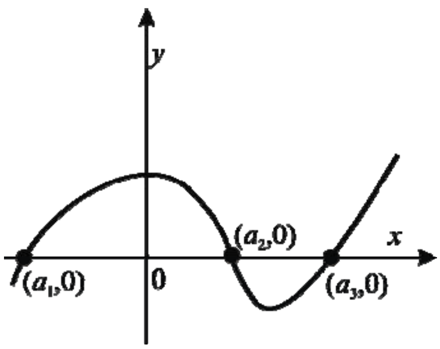
INTERSECCIONES CON LOS EJES

Las intersecciones con los ejes es una característica que se toma en cuenta en muchas aplicaciones.

La intersección con el eje y es el punto donde la gráfica de la función corta el eje y.

Para obtenerla colocamos x=0 en $y=f(x)$ dando un valor de y=b. El valor ***b* es** conocido como **ordenada en el origen** y el punto (0,b) es el punto en el cual la gráfica corta el eje y.





Las intersecciones con el eje x son los puntos donde la gráfica de f corta el eje x.

Estos puntos son donde la coordenada y es 0, entonces para obtener estos punto planteamos

$$f(x)=0$$

y despejamos x.

Ceros de una función.- Los ceros de una función son los valores de x que satisfacen la ecuación $f(x)=0$

Ejemplo 3.- Calcular las intersecciones con los ejes de las siguientes gráficas

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Solución:

a) ***Intersección con el eje y*:** Tenemos que evaluar la función en *x*=0 para obtener la ordenada en el origen

$$y = 0^2 - 2 = -2$$

Así la ordenada en el origen es -2 y la gráfica corta el eje *y* en el punto (0,-2).

***Intersección con el eje x*:** Tenemos que plantear la ecuación *y*=0 para conseguir las abscisas en el origen:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Así las abscisas en el origen son $x = \pm\sqrt{2}$ y la gráfica corta el eje *x* en los puntos $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.

b) ***Intersección con el eje y*:** Tenemos que evaluar la función en *x*=0 para obtener la ordenada en el origen

$$f(0) = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$$

Concluimos que la ordenada en el origen es $\sqrt{3}$ y la gráfica corta el eje *y* en el punto (0, $\sqrt{3}$).

***Intersección con el eje x*:** Tenemos que plantear la ecuación *y*=0 para obtener las abscisas en el origen

$$\sqrt{x+3} = 0$$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

De esta manera la abscisa en el origen es $x = -3$ y la gráfica corta el eje *x* en el punto $(-3,0)$. También decimos que $x = -3$ es un cero de la función.

Ejercicio de desarrollo.- Para cada una de las siguientes funciones determine las intersecciones con los ejes

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} + 3$ **b)** $f_2(x) = 4x^3 - x^2$

Ejemplo 4.- Determine simetrías, intersecciones con los ejes y bosqueje la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución: El dominio de esta función son todos los reales menos el cero. Analicemos ahora las simetrías. Para ello evaluamos $f(-x)$

$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Concluimos que la función es impar *y* por tanto simétrica con respecto al origen.

Veamos ahora intersecciones:

Para obtener **el corte con el eje *y*** deberíamos evaluar *f* en 0, pero la función no está definida en 0, (0 no esta en el Dominio de la función), pues la división entre 0 no está definida. Así no hay corte con el eje *y*.

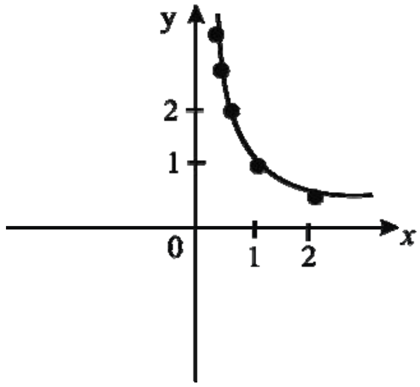
Para conseguir **el corte con el eje *x*** deberíamos plantear $f(x) = 0$, esto es

$$\frac{1}{x} = 0\,,$$

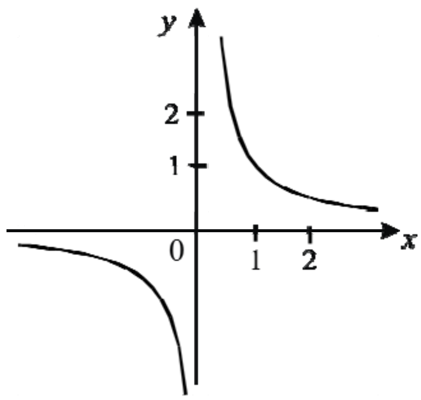
pero esta ecuación no tiene solución. Entonces la gráfica de *f* tampoco tiene intersección con eje *x*.

Evaluemos la función en algunos valores claves. Aquí es importante conocer el comportamiento de la función para valores muy altos y valores cercanos a cero.

x	0.001	0.01	0.1	½	1	2	5	100
y	1000	100	10	2	1	½	1/5	0.01



Como la gráfica es simétrica con respecto al origen entonces obtenemos finalmente:



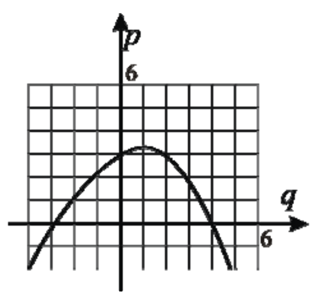
Ejercicio de desarrollo.- Grafique las siguientes funciones. Recuerde simetrías, cortes y tabla de valores.

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 3$

b) $f_2(x) = 4x^3 - x^2$

Ejercicio de desarrollo.- La figura de al lado contiene la grafica de una función *h*. Utilice la grafica para

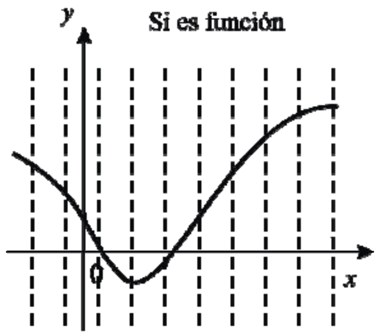
a) Estimar los ceros de la función
b) Estimar $h(-2)$ y $h(0)$



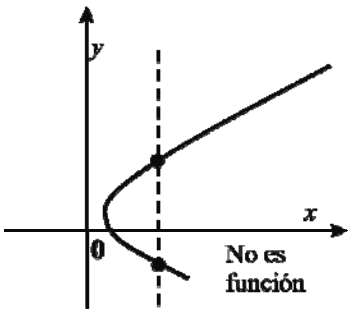
PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Recordemos que en ocasiones a una función se la puede definir a través de una ecuación en dos variables. Esto es válido siempre *y* cuando para cada *x* en la ecuación corresponda un solo valor de *y*. Por ejemplo la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no define una función pues al despejar *y*, obtenemos para una misma *x* dos valores de *y:* $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Una manera alternativa para determinar si una ecuación define una función o no es a través del gráfico de la ecuación mediante la prueba de la recta vertical.

Una ecuación en dos variables *x* y *y* define a *y* como función de *x* si cada recta vertical corta la gráfica de la ecuación en a lo sumo un punto.

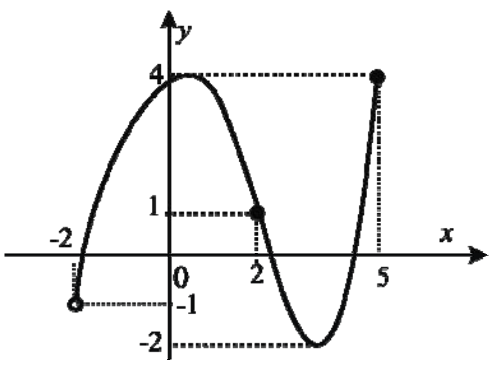


Si una recta vertical corta en dos puntos o más la gráfica de la ecuación entonces la ecuación no define a *y* como una función de *x.*



Si una ecuación define a *y* como función de *x* y *y* no está dada explícitamente (no está despejada), diremos que *y* es una función implícita de *x.*

DOMINIO Y RANGO A TRAVES DE LA GRAFICA DE LA FUNCIÓN



La figura muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Se puede observar que $f(2) = 1$.

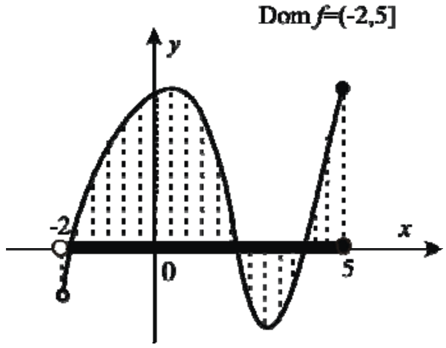
El 2 es un elemento del dominio de *f*. El dominio de la función es el conjunto (-2,5], pues allí la función está definida, ya que todos estos elementos tienen asignados un valor *y* y cualquier otro valor de *x* fuera de este intervalo no tiene asignado ninguna imagen.

También decimos que 1 es la imagen de 2, el 1 es un elemento del rango del *f*. En la gráfica podemos ver que el rango de *f* es el conjunto [-2,4], pues estos puntos y sólo estos son imagen de alguna *x*.

Geométricamente podemos determinar el dominio y el rango de una función

Observe que el dominio de f es la proyección del gráfico sobre el eje *x*.

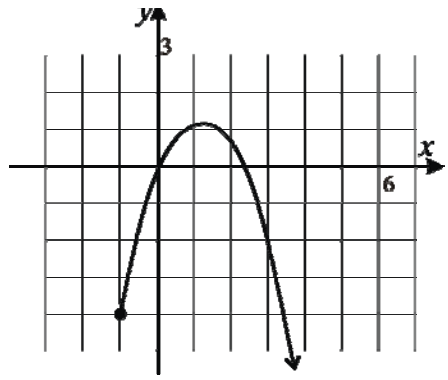
Se deja al lector deducir como obtener el



Ejercicio de desarrollo.- La figura de al lado contiene la grafica de la función $h(x)=\sqrt{x+1}-x^2+2x-1$ obtenida gracias a un software de computación. Utilice la gráfica para

- **a)** Estimar el dominio y el rango de la función
- **b)** Estimar los ceros de la función
- **c)** Estimar $h(3)$ y $h(0)$
- **d)** Estimar el conjunto solución de la desigualdad en x

$\sqrt{x+1}-x^2+2x-1>0$



Ayuda para d: Estime el conjunto de las *x*´s de la curva tales que sus coordenadas *y* son positivas: $y>0$. **Respuesta:** (0,2.35)

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Ejemplo 1.- Grafique la siguiente función definida por partes. Diga el dominio y el rango de la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & si \quad x<0\\ 1 & si \quad 0<x<2\\ x-1 & si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$

Solución.- El dominio es el conjunto donde está definida la función, en este caso $(-\infty,0)\cup(0,4]$. Para trazar la gráfica de la función haremos tres tablas de valores correspondientes a las tres partes de la función. Se tomarán los valores extremos de los intervalos de las partes así no estén contenidos en las partes. Valores dentro de paréntesis indicará que la función no toma este valor pero podemos conseguir valores de esa parte de la función que se aproximan al punto tanto como se quiera.

PRIMERA PARTE: x en $(-\infty,0)$

Si $x<0$, entonces $f(x)=-x^2$, esto resulta un trozo de parábola.

Recordemos que normalmente se toman como valores de *x* los extremos del intervalo a graficar y si hace falta, algún punto extra. En este caso no hay extremo izquierdo, se tomaron dos valores en el interior de la región: -2 y -1. En este parte 0 es el extremo derecho, evaluamos 0: $f(0)=-0^2=0$. De nuevo remarcamos que el punto $(x,y)=(0,0)$ no está en la gráfica pero la gráfica se aproxima a este punto, en el momento de graficar este punto se señalará con un círculo agujereado y se llevará la gráfica hasta este punto. Para recordar que este punto no está en la gráfica en la tabla de valores lo colocamos entre paréntesis.

x	y
$\vdots$	$\vdots$
-2	-4
-1	-1
(0)	(0)

TABLA DE LA PRIMERA PARTE: x en $(-\infty,0)$

Dibujamos estos puntos en el plano cartesiano donde se realizará la gráfica de la función, recordando que el punto (0,0) deberá colocarse con un circulo agujereado y se unirán estos puntos con un trazo suave, terminando en el lado derecho y en el lado izquierdo se colocará una flecha para indicar que la grafica continua.

SEGUNDA PARTE: x en $(0,2)$

Si x está entre 0 y 2 los valores de la función son siempre 1. De nuevo se insiste que el punto (0,1) no está en la gráfica, para indicar esto colocamos un círculo agujereado en este punto, es necesario calcular el valor del extremo para indicar que la función arranca desde allí en esta parte (o bien termina). El punto (2,1) no pertenece a está parte de la gráfica, pero luego verificaremos que pertenece a la gráfica por ser un punto de la tercera parte.

x	y
(0)	(1)
(2)	(1)

TABLA DE LA SEGUNDA PARTE: x en $(0,2)$

Dibujamos estos puntos en el plano donde se está realizando la grafica de la función y se unen estos puntos mediante un segmento de recta que termina justo en los puntos (0,1) y (2,1). Recuerde que en esta parte la grafica corresponde a un trozo de recta.

TERCERA PARTE: x en $[2,4]$

Por último, si x está entre 2 y 4 entonces $f(x)=x-1$. La representación gráfica es un trozo de recta, es suficiente evaluar la función en los extremos de los intervalos para conseguir esta parte de la gráfica.

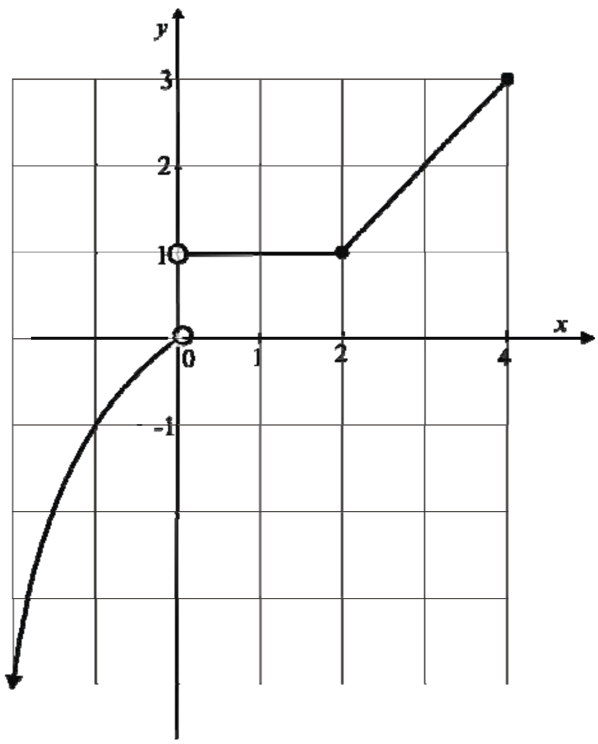
x	y
2	1
4	3

TABLA DE LA TERCERA PARTE: x en $[2,4]$

De nuevo se grafican los puntos y se unen, en este caso como la representación es una recta, los unimos mediante un segmento de recta que va de (2,1) hasta (4,3).

Comentarios: El punto (2,1) está incluido en la gráfica porque está en la tabla de valores de la tercera fórmula.

La flecha en la parte izquierda de la curva indica que la gráfica continúa. El punto relleno en la derecha indica que la gráfica termina allí y ese punto pertenece a la gráfica



Por medio de la gráfica podemos determinar el rango de la función *f*, recuerde que es el conjunto de valores *y* que son imagen de algún *x* en el dominio. En este caso

Rango *f*= $(-\infty,0)\cup[1,3]$

Ejercicio de desarrollo.
Grafique la siguiente función definida por partes. Diga el dominio y el rango de la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x & si \quad -1<x\leq 1 \\ 2x+1 & si \quad 1<x<3 \\ 6-x & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

(Recuerde: Realizar una tabla de valores por cada parte, deberá incluir, de ser posible, los valores de los extremos. Si un extremo de un intervalo no está en la parte colocar un círculo agujereado.

Las tres partes se representan en una misma gráfica pues el todo es la gráfica de la función. Use flecha para indicar que la gráfica continua indefinidamente y el punto relleno o agujereado para indicar que la gráfica termina allí, alcanzándose ese valor o no.)

EJERCICIOS

1) Clasifique las siguientes funciones como par, impar o ninguna de las anteriores.

1.1) $f(x)=2x$**;** **1.2)** $g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-3}$**;** **1.3)** $f(x)=\sqrt{x^2+5}$**;**

1.4) $g(x)=x^2-3x^4$**;** **1.5)** $f(x)=x^3-x-1$**;** **1.6)** $g(x)=x^4+4x^2-4$**;**

1.7) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x^3}$**;** **1.8)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3-2x}$**;** **1.9)** $f(x)=(x^4-2x^2-1)(\sqrt{x^2-5})$**;**

1.10) $f(x)=(x^5-2x^3)(x^3-x)$

2) Calcule las intersecciones con los ejes de la gráfica de las siguientes funciones

2.1) $f(x)=2x$**;** **2.2)** $g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-3}$**;** **2.3)** $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ **;**

2.4) $g(x)=x^2-3x^4$**;** **2.5)** $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-3$**;** **2.6)** $f(x)=x(x-3)(x-4)(x-7)$**;**

2.7) $f(x)=x^3-3x^2-4x$**;** **2.8)** $g(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$**;** **2.9)** $g(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}+1$**;**

2.10) $h(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

3) Consiga simetrías, intersecciones con los ejes y bosqueje las gráficas de las siguientes funciones

3.1) $f(x)=-x+3$ **;** **3.2)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$**;** **3.3)** $f(x)=\sqrt{x^2+5}$**;**

3.4) $g(x)=x^4-2x^2$**;** **3.5)** $f(x)=-2x^3-1$

4) Grafique las siguientes funciones definidas por partes. Diga el dominio y el rango de la función

4.1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad -1<x\leq 0 \\ x & si \quad 0<x<3 \\ -1 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$ **4.2)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ 2x & si \quad |x|\leq 1 \\ -1 & si \quad x>1 \end{cases}$

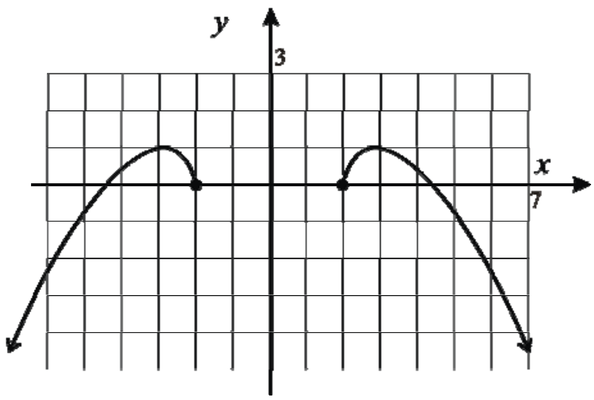
4.3) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & si \quad -1<x\leq 0 \\ x^2 & si \quad 0<x<2 \\ x+1 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ **4.4)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2} & si \quad 0\leq x<3 \\ 3-x & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

5) Diga si las siguientes ecuaciones definen o no una función a través de la prueba de la recta vertical.
5.1) $y^2+4x^2-1=0$ **5.2)** $x+xy-1=0$ **5.3)** $|y|+2x=1$ **5.4)** $yx^2-1=0$

6)a) Demuestre que si *f* es un polinomio tal que los coeficientes de grados pares son 0 entonces la función es impar y si *g* es un polinomio tal que los coeficientes de grados impares son 0 entonces la función es par. **b)** Demuestre que si *f* y *g* son pares entonces: $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$, son pares y $\frac{f}{g}$ es par donde este definida. Asuma que los dominios de *f* y *g* coinciden. **c)** Demuestre que si *f* y *g* son impares entonces: $f+g, f-g$ son impares y $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son **pares en su dominio. d)** Sea *f* una función no negativa. Demuestre que si *f* es par entonces $\sqrt{f}$ es par. Realice de nuevo el ejercicio 1 con estos resultados.

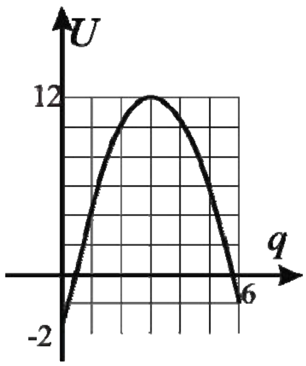
7) La figura de al lado contiene la grafica de la función $g(x)=\sqrt{x^2-4}-x^2/4+1$ obtenida gracias a un software de computación. Utilice la grafica para

- **a)** Estimar el dominio y el rango de la función
- **b)** Estimar los ceros de la función
- **c)** Estimar $g(3)$ y $g(0)$
- **d)** Resolver la desigualdad en *x:*
  $\sqrt{x^2-4}-x^2/4+1<1$



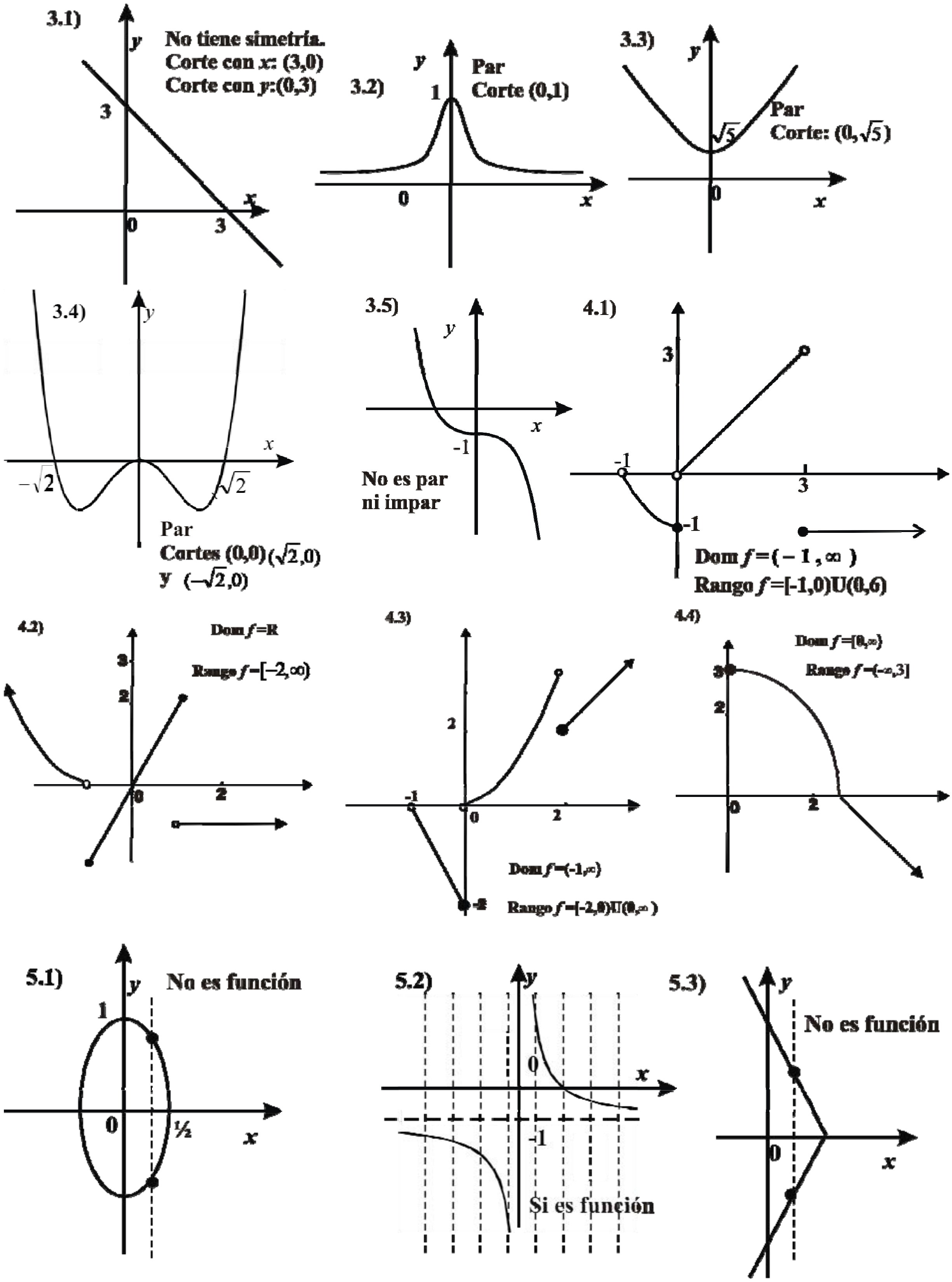
Ayuda para d: Determine el conjunto de las *x´*s de la curva tales que sus coordenadas *y* son menores que 1: $y<1$.

8) La figura de al lado contiene la gráfica de la utilidad en función de *q,* la cantidad de artículos producidos y vendidos en una fábrica. La variable *q* está medida en miles de unidades y la Utilidad en millones de UM
Utilice la grafica para estimar
a) Los niveles de producción en que la utilidad es igual 8 millones UM.
b) Los niveles de producción en que la utilidad es mayor a 10 millones UM.



Ayuda para b: Determine el conjunto de las *q´*s de la curva tales que sus coordenadas *U* son mayores que 10.

Respuestas
1.1) I; **1.2)**P; **1.3)** P;**1.4)** P; **1.5)** ni par ni impar;**1.6)** P; **1.7**) ni par ni impar; **1.8**)impar
1.9) P; **1.10)**P; **2.1)(**0,0) ; **2.2)** (0,1/3), (1,0) y(-1,0) **2.3)** (0, $\sqrt{5}$) ; **2.4)(**0,0), ($\frac{\sqrt{3}}{3}$,0)
y (-$\frac{\sqrt{3}}{3}$,0) ; **2.5)** (0,-1) ($\sqrt{5}/2$,0), ($-\sqrt{5}/2$,0) ; **2.6**) (0,0)(3,0),(4,0) y(7,0)
2.7)(0,0),(4,0),(-1,0); **2.8**) (0,0); **2.9)** (0,1), (1,0) y (-4,0); **2.10) (**0,6), (1,0), (-2,0) y (3,0)



7) a) Dom$f$= $(-\infty,2]\cup[2,\infty)$ **;** Rango g= $(-\infty,1]$ *;***b)** -4.4; -2; 2 y 4.4 **; c)** $g(3) = 0.99$ y $g(0)$ no está definida, $0 \notin \text{Dom } g$ **d)** $(-\infty,-2.8)\cup(2.8,\infty)$*;* **8a)** 1.5 y 4.5 miles de artículos; **b)** (2,4): entre 2 y 4 mil artículos.

OPERACIONES CON FUNCIONES

A menudo se definen nuevas funciones a partir de otras. Por ejemplo suponga que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ representan el número de mujeres y hombres respectivamente trabajando en un país en el momento *t*. La suma $f(t)+g(t)$ representa la cantidad total de personas trabajando en el momento *t*.

Podemos considerar la suma como una nueva función que la representaremos como *f+g* o *(f+g)*, definida por

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

Igualmente podemos definir *f-g*, *fg* y $\frac{f}{g}$ como siguen:

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

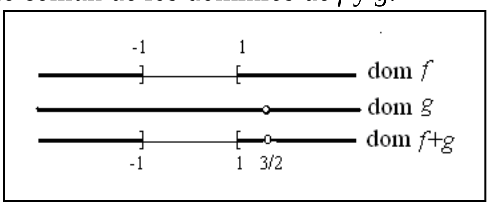
Los dominios de *f+g*, *f-g y fg* son la parte común del dominio de *f* y *g*, esto es la intersección de ambos dominios, pues debe estar definida para *f* y *g* simultáneamente. El dominio de $\frac{f}{g}$ es igualmente la parte común de los dominios menos los *x´*s tales que $g(x)=0$, esto es con el fin de evitar la división entre 0. En notación conjuntista el dominio de la función cociente esta dado por:

$$Dom\frac{f}{g} = Dom(f\cdot g)-\{x/g(x)=0\}$$

Ejemplo 1.- Sean $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=\frac{x-1}{2x-3}$. Encuentre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y establezca su dominio.

Solución: El dominio de *f* es el conjunto $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$]. El Dom *g*=**R-**{3/2}
Los dominios de de *f+g*, *f-g y fg* son la intersección o parte común de los dominios de *f* y *g*.
Esto es:

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(f\cdot g)$$
$$=\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = (-\infty,-1]\cup[1,\tfrac{3}{2})\cup(\tfrac{3}{2},\infty)$$



Por otro lado

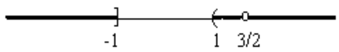
$$(f+g)(x) = \sqrt{x^2-1}+\frac{x-1}{2x-3}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x^2-1}-\frac{x-1}{2x-3}$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x^2-1}\,.\,\frac{x-1}{2x-3}\,.$$

Para el cociente tenemos que considerar aquellos puntos tales que $g(x)=0$, esto es $\frac{x-1}{2x-3}=0$, la solución de esta ecuación es x=1 (cuando el numerador es cero). Así que este punto lo tenemos que quitar de la parte común de los dominios de *f* y *g*. De aquí concluimos que:

Dom $\frac{f}{g}$ = $(-\infty,-1]\cup(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$



y

$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\frac{x-1}{2x-3}}=\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

Recuerde

Dom $\frac{f}{g}$ = Dom $(f+g)-\{x/g(x)=0\}=$

$=(-\infty,-1]\cup[1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$-$\{1\}$

$=(-\infty,-1]\cup(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$

Observación. Si usamos esta última fórmula para obtener el dominio nos daría que 3/2 estaría en el dominio de f/g, pero recuerde que para definir f/g tiene que tener sentido evaluar la función tanto en *f* como en *g* y en este caso *g* no está definida en 3/2.

Recuerde:

1) Dom $(f+g)$= Dom $(f-g)$= Dom $f\cdot g$ =Dom $f\cap$ Dom g

2) Dom $\frac{f}{g}$ = Dom $(f+g)-\{x/g(x)=0\}$

Ejercicio de desarrollo.- Dadas las funciones $f\,(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=x^3-3x^2+2x$, determinar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y establezca el dominio de cada una.

Si una función la podemos interpretar como suma, diferencia o multiplicación de dos funciones, podemos usar lo dado arriba para calcular el dominio de ella. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 2.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{1-x}-\frac{2}{x^2-4}$ **b)** $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{7-2x}$.

Solución:

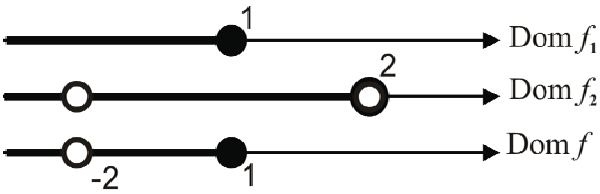
a) La función *f* la podemos interpretar como la diferencia de

$f_1(x)=\sqrt{1-x}$ y $f_2(x)=\frac{2}{x^2-4}$.

Observe que la función se ha descompuesto en dos partes donde la función presenta problemas diferentes. El dominio de f debe ser la parte común del dominio de f_1 y el dominio de f_2 a fin de que no existan problemas a la hora de evaluar f.

El dominio de f_1 es el intervalo $(-\infty,1]$.

El dominio de f_2 es el conjunto **R**-{-2,2}

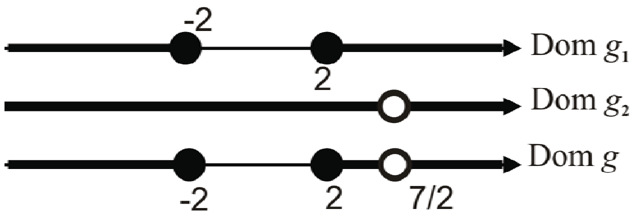


La intersección entre estos dos subconjuntos es:
Dom $f_1 \cap$ Dom f_2 $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$.
De aquí que Dom f= $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$.

b) La función g la podemos interpretar como la multiplicación de $g_1(x)=\sqrt{x^2-4}$ y $g_2(x)=\dfrac{1}{7-2x}$.

El dominio de g_1 es el conjunto $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

El dominio de g_2 es el conjunto **R**-{7/2}



La intersección o parte común entre estos dos subconjuntos es:
Dom $g_1 \cap$ Dom g_2 $(-\infty,-2]\cup[2,7/2)\cup(7/2,\infty)$.

Remarcamos que: El dominio de g es la intersección de los dominios de g_1 y de g_2, pues para estos valores y sólo en estos no existe problemas a la hora de evaluar g. Concluyendo:

$$\text{Dom } g = (-\infty,-2]\cup[2,7/2)\cup(7/2,\infty)$$

Observación: El ejercicio anterior se pudo resolver interpretando la función g como un cociente.

Ejercicio de desarrollo Calcular el dominio de la siguiente función:

$$h(x)=\sqrt{3x-x^2}+\frac{2}{x^2-4}$$

EJERCICIOS

1) Para cada uno de los siguientes pares de funciones encuentre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Determine para cada una de ellas su dominio. Simplifique tanto como sea posible

1.1) $f(x)=2x$ **y** $g(x)=\dfrac{x-1}{2x-3}$ **;**

1.2) $f(x)=\sqrt{x+5}$ **y** $g(x)=x^2$ **.**

1.3) $f(x)=\sqrt{3-x}$ **y** $g(x)=\sqrt{x-1}$ **;**

1.4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ **y** $g(x)=x^2-1$**.**

1.5) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ **y** $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ **;**

1.6) $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ **y** $g(x)=x+1$**.**

1.7) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ **y** $g(x)=\dfrac{2}{x+2}$ **;**

1.8) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$ **y** $g(x)=x^2$.

2) Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2-1$. Encuentre

2.1) $(f+g)(1)$ **2.2)** $(f-g)(4)$ **2.3)** $(fg)(0)$ **2.4)** $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

3) Calcule el dominio de las siguientes funciones.

3.1) $f(x)=\sqrt{x+1}-x$ **;** **3.2)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-3}$ **;** **3.3)** $g(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{x}$

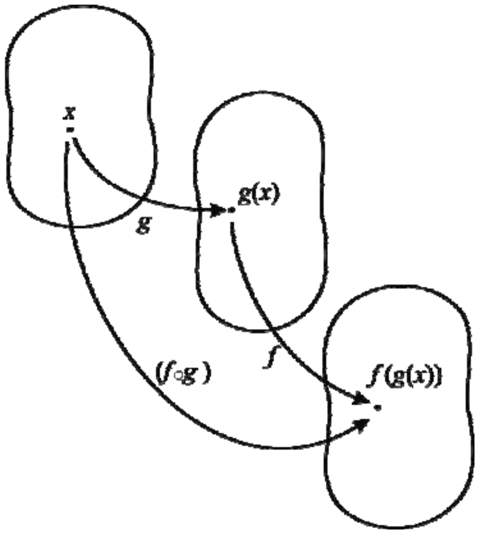
3.4) $h(x)=\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}$ **;** **3.5)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x}-\dfrac{1}{x+1}$ **;** **3.6)** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

Respuestas:

1.1) $(f+g)(x)=\dfrac{4x^2-5x-1}{2x-3}$; $(f-g)(x)=\dfrac{4x^2-7x+1}{2x-3}$; $(f\cdot g)(x)=\dfrac{2x(x-1)}{2x-3}$; $(\frac{f}{g})(x)=\dfrac{2x(2x-3)}{x-1}$;
Dom $(f\pm g)=$ **R**-{3/2}, Dom $(f/g)=$ **R**-{1,3/2}, **1.2)** Dom $(g+f)=[-5,\infty)$;
Dom $(f/g)=[-5,0)\cup(0,\infty)$; **1.3)** $(f\pm g)(x)=\sqrt{3-x}\pm\sqrt{x-1}$; $(f\cdot g)(x)=\sqrt{(3-x)(x-1)}$;
$(\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$; Dom $(f\pm g)=[1,3]$; Dom $(f/g)=(1,3]$ **1.4)** $(f+g)(x)=\dfrac{2x^3+x^2-2x}{1+2x}$;
$(f-g)(x)=\dfrac{-2x^3-x^2+2x+2}{1+2x}$; Dom $(f\pm g)=$ **R**-{-1/2},Dom $(f/g)=$ **R**-{-1,1,-1/2},
1.5) $(f+g)(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x+1)}$; $(f-g)(x)=\dfrac{-2x+1}{(x+2)(x+1)}$; $(\frac{f}{g})(x)=\dfrac{(x^2-1)}{(x+2)x}$;
Dom $(f\pm g)=$ **R**-{-1,-2}, Dom $(f/g)=$ **R**-{-1,-2,0}, **1.6)** Dom $(f\pm g)=$ **R**-{1/2},Dom $(f/g)=$ **R**-{-1,1/2},
1.7) Dom $(f\pm g)=$ Dom $(f/g)=$ **R**-{-2,2}, **1.8))** Dom $(g+f)=(-\infty,0]\cup[4,\infty)$;
Dom $(f/g)=(-\infty,0)\cup[4,\infty)$.

2.1) 0; **2.2)** 30 **2.3)**0; **2.4)** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$, 3.**1)** $[-1,\infty)$; **3.2)** $[-1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$ **3.3)** $[-1,0)\cup(0,1]$ **3.4)** $[0,1]$;
3.5) **R**-{ $-\sqrt{3},-1,0,\sqrt{3}$ }; **3.6)** $(-\infty,1)$

FUNCION COMPUESTA



Imaginemos que se tiene una cantidad en función de una variable *y* y está variable también puede ser expresada en términos de una segunda variable *x*, entonces podríamos estar interesados en expresar la cantidad directamente en función de *x*. Por ejemplo la utilidad depende de la demanda *q* del mercado y a su vez la demanda depende del precio *p* que se coloca al consumidor. En definitiva podemos expresar la utilidad también en términos del precio *p*.

La situación descrita tiene que ver con la operación entre funciones conocida como la composición, la cual da como resultado la función compuesta. Veamos más precisamente su definición.

Definición.- Dadas dos funciones *f* y *g* , se define la función compuesta *f* con *g*, denotada por $f \circ g$, como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $(f \circ g)$ es el conjunto de todos los *x* del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f .

También $f \circ g$ se llama la función *f* compuesta con *g*, o sencillamente la composición entre *f* y *g* quedando claro el orden de la composición por la sola notación.

Para calcular $(f \circ g)$ primero se puede sustituir $g(x)$, y luego se evalúa *f* en la fórmula de $g(x)$, esto es $f(g(x))$. En este caso decimos que *f* es la función externa y *g* es la función interna.

La función $(f \circ g)$ en general es distinta a la función $(g \circ f)$, en esta última se evalúa g en f , esto es $g(f(x))$. En los ejemplos se remarcará esta observación.

El dominio puede ser expresado a través de operaciones conjuntistas como:

$$Dom(f \circ g) = \{x \,/\, x \in Dom(g) \quad y \quad g(x) \in Dom(f)\}$$

El siguiente esquema nos puede ayudar a recordar las contenciones.

El dominio de la composición es el conjunto de los *x* en el dominio de la interna tal que el rango de valores de la interna está en el dominio de la externa.

Ejemplo 1.- Sean $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $g(x) = 2x - 1$. Encuentre las siguientes funciones y determine su dominio. **a)** $f \circ g$ **b)** $g \circ f$

Solución: Se puede verificar que *Dom f*=[-1, ∞) y *Dom g*=**R**.

a) Calculemos primero $(f \circ g)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Se sustituye primero $g(x)$

$= f(2x-1)$ Se evalúa f en $2x$-1

$= \sqrt{1+(2x-1)}$ Se simplifica

$= \sqrt{2x}$

Para calcular el dominio tomamos en consideración el dominio de g, en este caso todos los reales y nos restringimos a aquellas x´s tales $g(x)$ está en $[-1, \infty)$=dom f. Esto es:

$g(x) \geq -1$

$2x\text{-}1 \geq -1$

Observe como la expresión:
"$g(x)$ está en $[-1, \infty)$"
Se paso en términos de desigualdad

La solución de está desigualdad es $x \geq 0$. De aquí *Dom* $f\circ g=[0, \infty)$.

b) Calculemos primero $(g \circ f)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Se sustituye primero $f(x)$

$=g(\sqrt{1+x})$ Se evalúa g en $\sqrt{1+x}$

$=2\sqrt{1+x}$ -1

Para calcular el dominio tomamos en consideración el dominio de f, en este caso $[-1, \infty)$ y nos restringimos a aquellas x´s tales $f(x)$ están en el dominio de g. Pero como dominio de g son todos los reales queda *Dom* $g\circ f=[-1, \infty)$.

El esquema para calcular el dominio en este caso queda

En fórmulas tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} &Dom(g \circ f) = \{x / x \in Dom(f) \quad y \quad f(x) \in Dom(g)\} \\ &= \{x / x \in [-1,\infty) \quad y \quad g(x) \in R\} \\ &= [-1,\infty) \end{aligned}}$$

Comentario.- Observe con estos ejemplos que efectivamente

$$\boxed{(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)}$$

Ejemplo 2.- Sean $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $h(x) = x^2$. Encuentre las siguientes funciones y determine su dominio: **a)** $f \circ h$; **b)** $h \circ f$

Solución.- Se puede verificar que *Dom f*=[-1, ∞) y *Dom h*=**R**.

a) Calculemos primero $f \circ h$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2) = \sqrt{1+x^2}$$

Calculemos el dominio de esta composición:

En fórmulas tenemos

$$Dom\left(f \circ h\right) = \{x / x \in Dom(h) \quad y \quad h(x) \in Dom(f)\} =$$

$$= \{x / x \in R \quad y \quad x^2 \in [-1, \infty)\}$$

$$= \{x / x^2 \geq -1\} = \mathbf{R}$$

Note que la desigualdad cuadrática $x^2 \geq -1$ es trivial, su solución es **R.**

El dominio de $(f \circ h)(x) = \sqrt{1+x^2}$, en este caso coincide con el dominio de su fórmula, pero no siempre es así como ilustra la otra parte del ejemplo.

b) Calculemos la función $h \circ f$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(\sqrt{1+x}) = (\sqrt{1+x})^2 = 1+x$$

Calculemos el dominio de esta composición:

En fórmulas tenemos

$$Dom\left(h \circ f\right) = \{x / x \in Dom(f) \quad y \quad f(x) \in Dom(h)\} =$$

$= \{x / x \in [-1, \infty) \quad y \quad \sqrt{1+x} \in R\}$. Recuerde que $\sqrt{1+x} \in R$ siempre se cumple

$$= \{x / x \in [-1, \infty)\} = [-1, \infty)$$

Observación.- El dominio de la función definida por la fórmula $1+x$, la cual es la misma fórmula que $\left(h \circ f\right)(x)$, es **R** diferente al dominio de $\left(h \circ f\right)(x)$ el cual es $[-1, \infty)$.

No podemos calcular el dominio de una composición a través de la fórmula con que se define la función. Veamos otro caso, donde el dominio de la fórmula no coincide con el dominio de la función.

Ejemplo 3.- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Encuentre $f \circ f$ y determine su dominio

Solución.- Se puede verificar que *Dom f*=$\mathbf{R} - \{0\}$.

Calculemos primero $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Ejercicio de desarrollo.- Sean $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $h(x) = \dfrac{2x}{4+x^2} - 1$ y $g(x) = 1-3x$. Encuentre las siguientes funciones y determine su dominio: **a)** $f \circ g$; **b)** $g \circ f$; **c)** $h \circ g$; **c)** $g \circ h$

En ocasiones es conveniente ver una función *h* como la composición de dos funciones. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.- Exprese las siguientes funciones como la composición de dos funciones.

a) $h(x)=\sqrt{1+3x}$; **b)** $H(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$

Solución.- Este tipo de ejercicio trata de proponer *f* y *g* tal que *h* puede ser expresada como la composición de estas dos funciones. Esto es : $(f\circ g)(x)=h(x)$. Para resolver este tipo de ejercicio debemos considerar el orden de las operaciones que se hacen.

a) En este caso podemos interpretar 1+3*x* lo primero que se hace y luego se extrae la raíz. Así que una posibilidad para expresarlo como composición de dos funciones es definir $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=1+3x$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(1+3x)\\ &= \sqrt{1+3x}=h(x)\end{aligned}$$

Comentario: Normalmente la función $g(x)=1+3x$ es llamada la función interna y $f(x)=\sqrt{x}$ la función externa.

b) De nuevo este ejercicio, dependiendo como interpretemos la función, puede tener varias respuestas. A fin que el estudiante verifique su respuesta deberá realizar la composición. Una forma conveniente y muy frecuente de ver esta función como composición de dos funciones es reescribiendo primero la función como:

$$H(x)=(2x-1)^{-2}$$

Ahora interpretamos que $2x-1$ como la parte más interna y que luego se eleva a la -2.

Así que una posibilidad para expresarlo como composición de dos funciones es definir $f(x)=x^{-2}$ y $g(x)=2x-1$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x-1)\\ &= (2x-1)^{-2}=H(x)\end{aligned}$$

Recuerde verificar a fin de chequear su respuesta

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Se ha estimado que la demanda, *q*, de gasolina en una región en función del precio es

$$q(p)=\frac{54.000}{1+2p}$$

miles de litros por mes. Se prevé que el precio de la gasolina aumente en función del tiempo a un valor por litro de $p(t)=0.02t^2+0.1t+10$ UM en el mes *t*.

- **a)** Expresar la demanda mensual en función del tiempo *t*.
- **b)** ¿Cuál será el consumo de gasolina dentro de un año?

Solución:

a) Como la demanda es función del precio a través de la relación $q(p)=\frac{54.000}{1+2p}$

y el precio del tiempo por la relación $p(t)=0.02t^2+0.1t+10$

Entonces la función compuesta está dada:

$$(q\circ p)(t)=q(p(t))=\frac{54.000}{1+2p(t)}=\frac{54.000}{1+2(0.02t^2+0.1t+10)}$$

$$q(p(t))=\frac{54.000}{0.04t^2+0.2t+21}$$

expresa la demanda mensual en función del tiempo.

b) Como *t* está dado en términos de meses, debemos evaluar la fórmula anterior en *t*=12 .

$$q(p(12))=\frac{54.000}{0.04(12)^2+0.2\cdot 12+21}=\frac{54.000}{29{,}16}=1851.8 \text{ miles de litros de gasolina}$$

Ejemplo 2.- Un incendio en una sabana se propaga en forma de círculo. Si el radio de este círculo aumenta a una velocidad de 30 m/h, exprese el área total en función del tiempo *t* en horas.

Solución: El área en función del radio es:

$$A(r)=\pi\cdot r^2$$

Por otro lado el radio en el momento *t*=0 es 0, y al cabo de *t* horas lo podemos deducir a través de la relación:

$$v=\frac{r}{t},$$

donde $v=30$, así el radio en función del tiempo es:

$$r=30t\ .$$

Para obtener el área de la región incendiada tenemos que realizar la composición entre la $A(r)$ y $r(t)$. De esta manera obtenemos

$$A(r(t))=\pi\cdot\left(r(t)\right)^2=\pi\cdot(30t)^2$$

$$A(t)=900\pi\cdot t^2$$

EJERCICIOS

1) Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2-1$. **a)** Encuentre $(f\circ g)(-2)$; **b)** Encuentre $(g\circ f)(2)$; **c)** Verifique que $(g\circ f)(x)=x-1$; **d)** ¿Puede evaluar $(g\circ f)(-2)$?

2) Sean $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$. **a)** Calcule el dominio de $h(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}$; **b)** Verifique que $(f\circ g)(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}$; **c)** ¿-1 pertenece al dominio de $(f\circ g)$?

3) Para cada uno de los siguientes pares de funciones encuentre $f\circ g$, $g\circ f$ y $f\circ f$
Determine para cada una de ellas su dominio. Simplifique tanto como sea posible.

3.1) $f(x)=2x$ **y** $g(x)=\dfrac{x-1}{2x-3}$**;**

3.2) $f(x)=\sqrt{x+5}$ **y** $g(x)=x^2$**;**

3.3*) $f(x)=\sqrt{3-x}$ **y** $g(x)=\sqrt{x-1}$**;**

3.4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ **y** $g(x)=x^2-1$**;**

3.5) $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ **y** $g(x)=x+1$**;**

3.6) $f(x)=x-1$ **y** $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$**;**

3.7) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ **y** $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$**;**

3.8*) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ **y** $g(x)=1+\sqrt{x^2-1}$**.**

4) Expresе las siguientes funciones como la composición de dos funciones, no triviales.

4.1) $f(x)=\dfrac{1}{(1+2x)^2}$ **;**

4.2) $g(x)=(2x+1)^5$ **;**

4.3) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **;**

4.4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sqrt{x+1}}$ **;**

4.5) $h(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^3$

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

5) El ingreso mensual de un comerciante por vender cortinas de baño está dado en función de *p* por

$$I=200p-5p^2$$

Si la demanda en función del precio es $q=200-5p$. Exprese el ingreso en términos de *q*.

6) El ingreso mensual de un comerciante por vender resmas de papel está dado en función de la demanda por : $I=150q-2q^2$. Si la demanda del artículo está dada por la relación $2q+p=150$. Exprese el ingreso en términos de *p*.

PROBLEMAS DE CIENCIAS NATURALES

7) Un barco deja una mancha circular de aceite que se va expandiendo en forma circular. El radio de la mancha sigue el modelo $r(t)=0.5(\sqrt{t}+\sqrt[3]{t})cm.$ donde *t* es medido en minutos a partir que comenzó el derrame. Encontrar el área en función del tiempo.

8) Se ha estimado que la contaminación por monóxido de carbono depende en ciertas zonas del planeta del tamaño de la población modelada por la la relación:

$$C(p)=\frac{\sqrt{2000+0.5p}}{10} \text{ partes por millón}$$

donde *p* está dado en miles de habitantes. Estudios demográficos han estimado que dentro de *t* años la población de una ciudad será de

$$p(t)=700+3t^2$$

Exprese el nivel de contaminación en función del tiempo. ¿Cuándo llegará el nivel de monóxido a 6 ppm?

Respuestas:

1) a) $\sqrt{3}$ **; b) 1; d)** No, porque -2 no está en el domino de *f*.

2) a) $\mathbf{R}-\{-\frac{3}{2}\}$; **c)** No porque *g* no puede ser evaluada en -1. (-1 no está en el dominio de *g* y por consiguiente no está en el dominio de $(f\circ g)$

3.1) $(f\circ g)(x)=2\frac{(x-1)}{2x-3}$; $(g\circ f)(x)=\frac{2x-1}{4x-3}$; $(f\circ f)(x)=4x$; Dom $(f\circ g)=$**R**-{3/2}; Dom $(f\circ f)=$**R**; Dom $(g\circ f)=$**R**-{3/4}; **3.2)** $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+5}$; $(g\circ f)(x)=x+5$; $(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x+5}+5}$; Dom $(f\circ g)=$**R**; Dom $(g\circ f)=[-5,\infty)$]; Dom $(f\circ f)=[-5,\infty)$;

3.3) $(f\circ g)(x)=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$; $(g\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}-1}$; $(f\circ f)(x)=\sqrt{3-\sqrt{3-x}}$; Dom $(f\circ g)=$[1,10]; Dom $(g\circ f)=(-\infty,2$]; Dom $(f\circ f)=$[-6,3];

3.4)) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2x^2-1}$; $(g\circ f)(x)=\frac{1}{(1+2x)^2}-1$; $(f\circ f)(x)=\frac{1+2x}{3+2x}$; Dom $(f\circ g)=$**R**-{ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ }; Dom $(g\circ f)=$**R-{**-1/2}; Dom $(f\circ f)=$**R**-{-1/2,1/2} **3.5)** $(f\circ g)(x)=\frac{1}{-2x-1}$; $(g\circ f)(x)=\frac{2x-2}{2x-1}$; $(f\circ f)(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$; Dom $(f\circ g)=$**R**-{-1/2}; Dom $(f\circ f)=$**R**-{-1/2}; Dom $(g\circ f)=$**R**-{1/2}; **3.6**) Dom $(f\circ g)=$**R**-{-1}; Dom $(f\circ f)=$**R**; Dom $(g\circ f)=$**R**-{0}

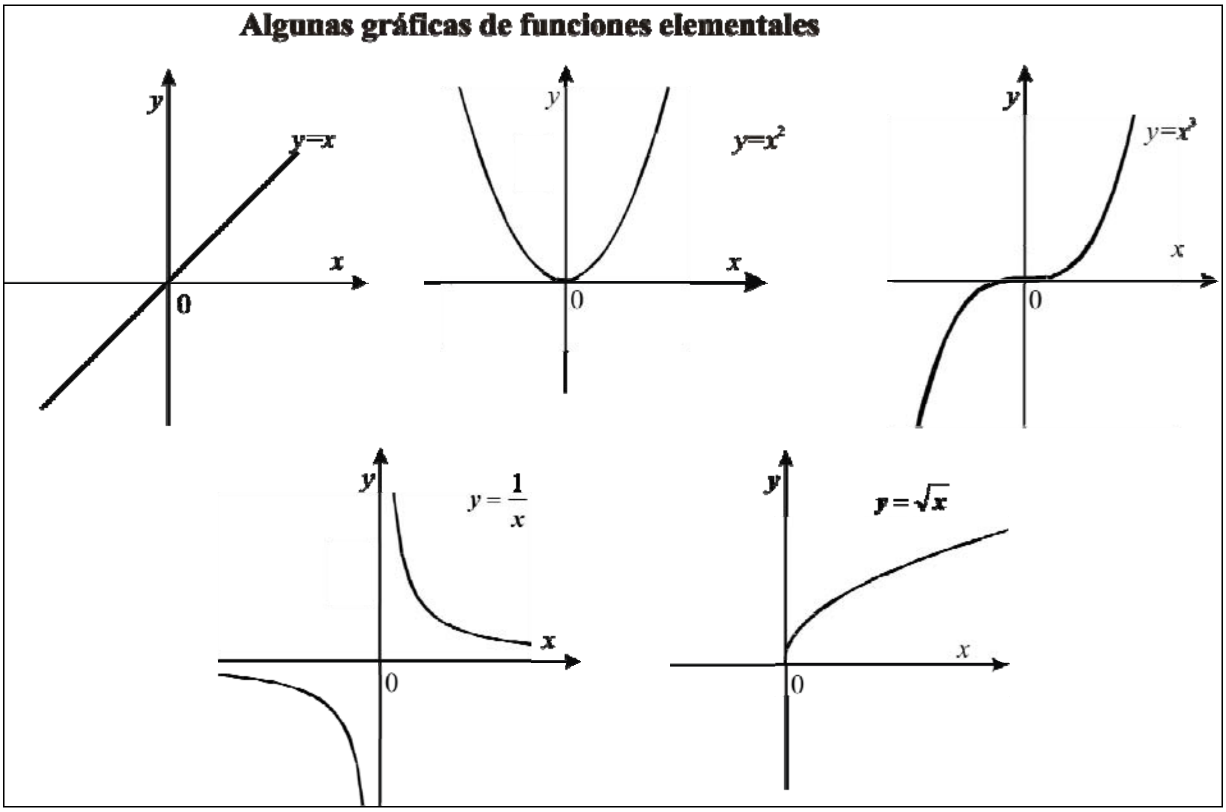
3.7) $(f\circ g)(x)=\frac{x+1}{x+2}$; $(f\circ f)(x)=\frac{2-x}{3-2x}$; $(g\circ f)(x)=\frac{1}{3-x}$; Dom $(f\circ g)=$**R**-{-1,-2}; Dom $(f\circ f)=$**R**-{2,3/2}; Dom $(g\circ f)=$**R**-{2,3};

5) $I(q)=40q-0.2q^2$ **6)** $I(p)=75p-0.5p^2$.

OPERACIONES GEOMETRICAS DE GRAFICAS

En esta sección estudiaremos como graficar funciones a partir de las gráficas de funciones conocidas mediante operaciones geométricas de traslación, reflexión, contracción y alargamiento.

Anteriormente se ha obtenido el trazo de una serie de gráficas muy usadas en el cálculo. Estas gráficas conviene siempre tenerlas en mente. Ellas serán la base para graficar una familia de funciones.



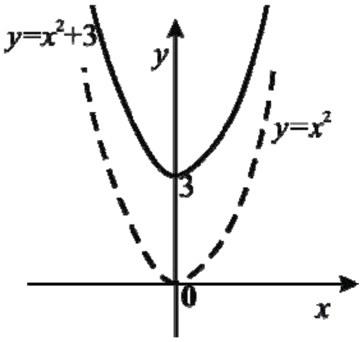
Suponga que la gráfica de $y = f(x)$ es conocida y c una constante. A continuación veremos como obtener las gráficas de $y = f(x)+c$; $y = f(x+c)$; $y = -f(x)$ y $y = cf(x)$ a partir de la gráfica de *f*.

1.- Función $y = f(x)+c$, con $c > 0$. Si un punto (x, y) está en la gráfica de $y = f(x)$, entonces $(x, y+c)$ está en la gráfica de $y = f(x)+c$. De aquí que la gráfica de $y = f(x)+c$ es la gráfica de $y = f(x)$ trasladada verticalmente *c* unidades hacia arriba.
2.- $y = f(x)-c$, $c > 0$. Por un razonamiento análogo, la nueva gráfica se consigue trasladando verticalmente la original *c* unidades hacia abajo.

Ejemplo 1.- Bosquejar $y = x^2 + 3$

Solución:

Las ordenadas de esta gráfica son 3 unidades más que las ordenadas de la gráfica de $y = x^2$, para cada x. Esto hace que la gráfica de $y = x^2 + 3$ este 3 unidades por arriba de la gráfica de $y = x^2$



3.- $y = f(x+c)$, $c > 0$. Observe que esta nueva función asume los mismos valores y de $y = f(x)$ pero en la abscisas $x - c$. Esto significa que la gráfica está desplazada c unidades a la izquierda de la gráfica $y = f(x)$.

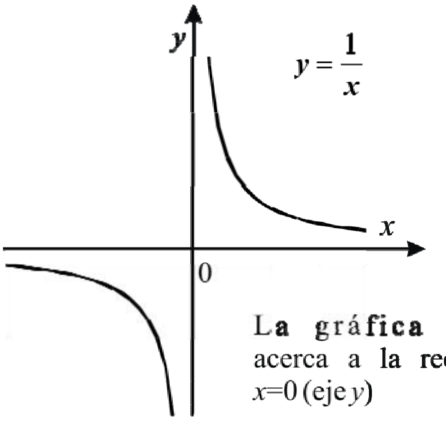
4.- $y = f(x-c)$, $c > 0$. Similarmente la nueva función tiene las mismas y que $y = f(x)$ pero asumiendo estos valores en $x + c$. Esto significa que la gráfica de $y = f(x-c)$ está c unidades a la derecha de la gráfica de $y = f(x)$.

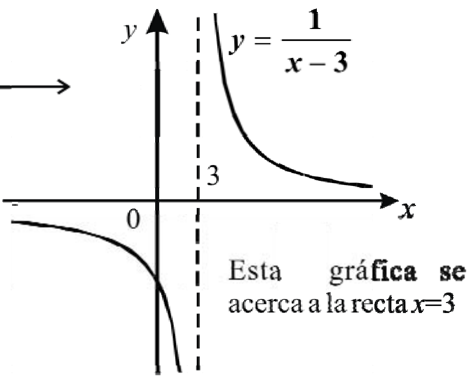
Ejemplo 2.- Trazar la gráfica de las siguientes funciones. Determine geométricamente el dominio y rango de la función

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$; **b)** $y = x + 2$

Solución:

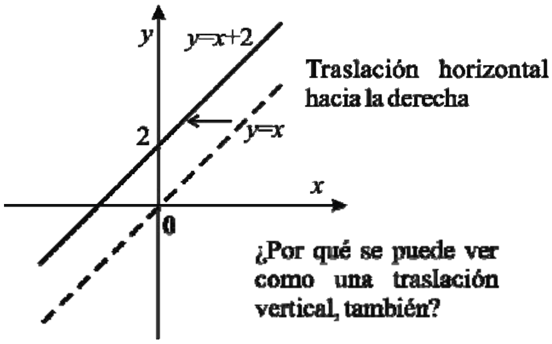
a) La gráfica $y = \dfrac{1}{x-3}$ es la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ trasladada 3 unidades a la derecha. Se recomienda al trabajar con la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ trasladar el eje que corresponda como una recta punteada. En este caso se traslada la recta vertical x=0 tres unidades a la derecha





De la gráfica de $y = \dfrac{1}{x-3}$, vemos claramente que x=3 es el único punto de la gráfica que no tiene imagen (al proyectar la gráfica sobre el eje x el único valor que no está en esta proyección es x=3). Por tanto el dominio de f es el conjunto **R**-{3}.

b)

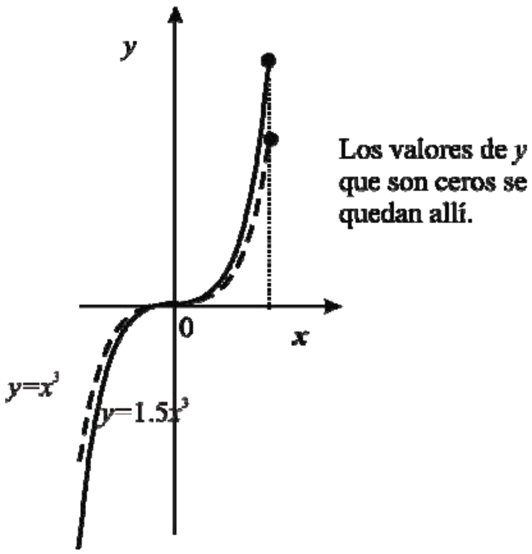


b) La gráfica $y = x + 2$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = x$ 2 unidades a la izquierda. Es claro que el dominio de $y = x + 2$ es **R.**

5.- $y = cf(x)$, $c > 0$**.** Pensemos por ejemplo que c=2. Entonces las nuevas coordenadas y serán el doble que las de $y = f(x)$. Si c=1/2 entonces las nuevas ordenadas serán la mitad de las de $y = f(x)$. En general si $c > 1$, la gráfica se alarga y si $0 < c < 1$ la gráfica se comprime.

Ejemplo 3.- Graficar y=1.5x^3.
Solución:

La gráfica de $y = 1.5x^3$ se obtiene por un estiramiento vertical de la gráfica de $y = x^3$. Si para cada abscisa, la ordenada era y, ahora la nueva ordenada es una vez y media la y.

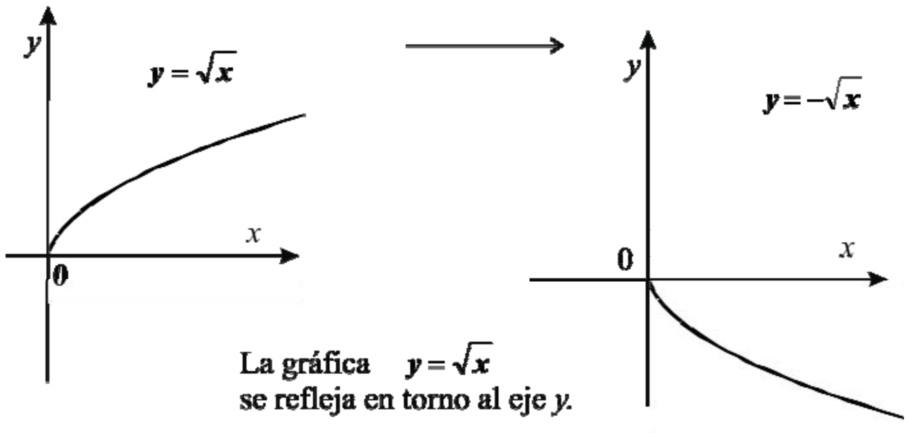


Ejercicio de desarrollo: Trazar la gráfica de las siguientes funciones. Determine geométricamente el dominio y rango de la función

a) $y = \sqrt{x}/2$ **b)** $y = \sqrt{x} - 3$ **c)** $y = \sqrt{x+1}$

6.- $y = -f(x)$**.** Observe que las ordenadas de la gráfica de está función tienen las mismas magnitudes pero de signo contrario que las de $y = f(x)$, para cada x. Así por ejemplo si un punto sobre la gráfica de f tiene coordenadas (a,b), (considere b positivo y luego considérelo negativo) entonces el punto $(a,-b)$ está en la gráfica de $y = -f(x)$. Geométricamente esto es una reflexión en torno al eje x.

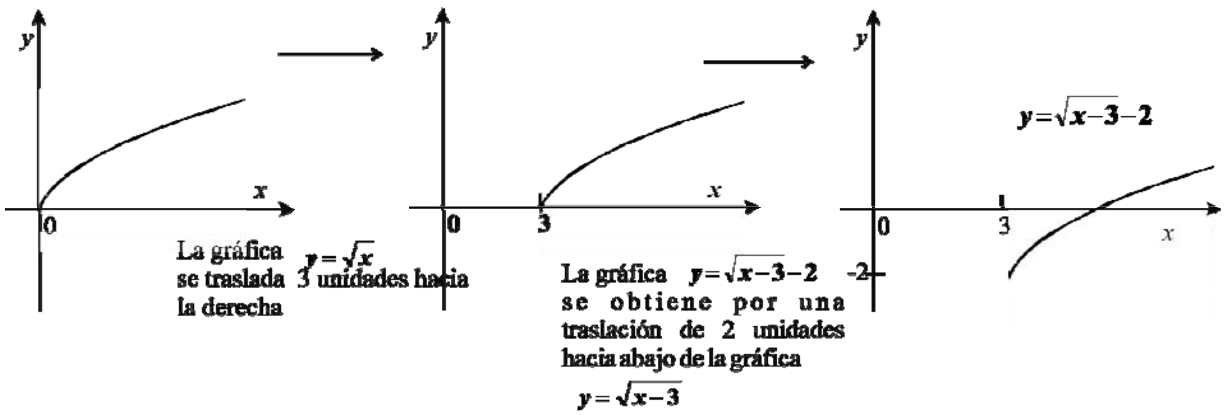
Ejemplo 5.- Graficar $y = -\sqrt{x}$.
Solución: La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es una reflexión en torno al eje x de la gráfica de $y = \sqrt{x}$



El siguiente ejemplo ilustra cómo puede ser obtenida la gráfica de algunas funciones a través de varias operaciones geométricas.

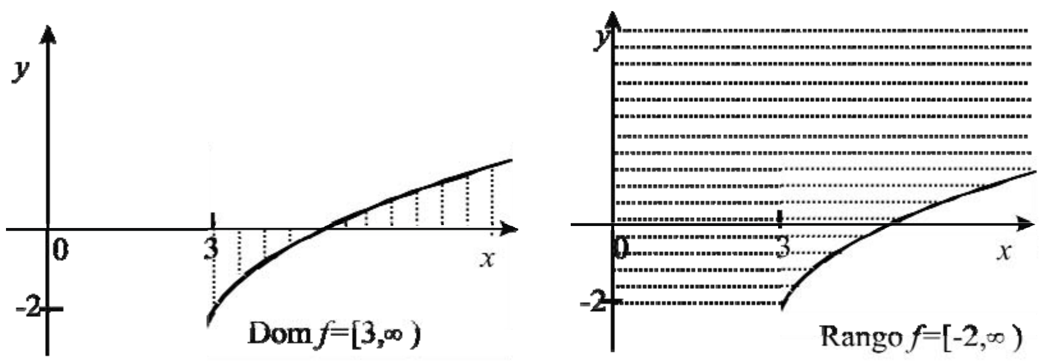
Ejemplo 6.- Graficar $y = \sqrt{x-3} - 2$. Determine el dominio y el rango de la función por medio de la gráfica.

Solución.-Para obtener esta gráfica primero obtendremos la de $y = \sqrt{x-3}$ y a partir de ésta haremos una traslación vertical 2 unidades hacia abajo para obtener la gráfica $y = \sqrt{x-3} - 2$.



Recordemos que el dominio de una función lo podemos determinar a partir de la gráfica de la función proyectando la gráfica sobre el eje *x*. El rango similarmente es la proyección sobre el eje *y*. De la figura vemos claramente que:

$$Dom \;\; f = [3, \infty) \quad Rango \;\; f = [-2, \infty)$$



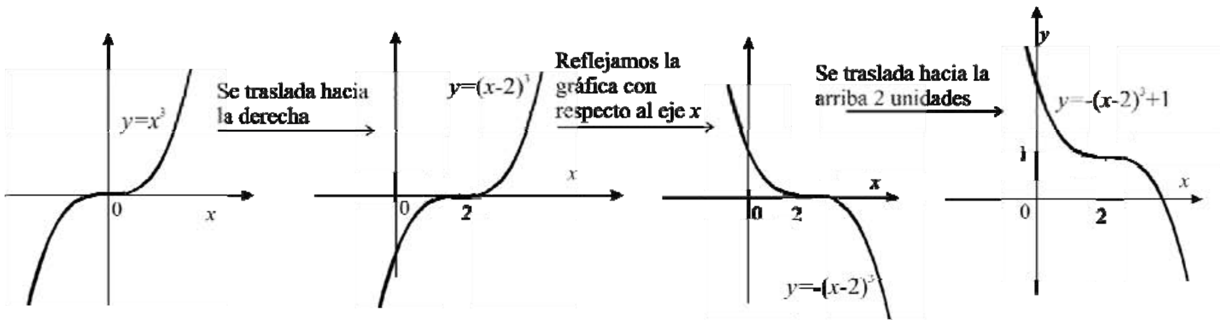
La siguiente es una tabla resumen con las operaciones geométrica más importantes.

Nueva función	Efecto geométrico	Ejemplo sobre $f(x)=\sqrt{x}$	Ejemplo sobre $f(x)=\frac{1}{x}$
$y=f(x)+k,\;\; k>0$	La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia arriba.	$y=\sqrt{x}+3=3+\sqrt{x}$	$y=\frac{1}{x}+3$
$y=f(x)-k,\;\; k>0$	La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia abajo.	$y=\sqrt{x}-3$	$y=\frac{1}{x}-3$
$y=f(x+k),\;\; k>0$	La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia la izquierda.	$y=\sqrt{x+3}$	$y=\frac{1}{x+3}$
$y=f(x-k),\;\; k>0$	La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia la derecha..	$y=\sqrt{x-3}$	$y=\frac{1}{x-3}$
$y=\frac{1}{k}f(x),\;\; k>1$	Se contrae la gráfica de $y=f(x)$ verticalmente.	$y=\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}=0.5\sqrt{x}$	$y=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}x=0.5x$
$y=kf(x),\;\; k>1$	Se expande la gráfica de $y=f(x)$ verticalmente. La nueva coordenadas *y* son *k* veces la anterior.	$y=3\sqrt{x}$	$y=3\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$
$y=-f(x),$	Se refleja la gráfica de $y=f(x)$ en torno al eje *x*.	$y=-\sqrt{x}$	$y=-\frac{1}{x}$
$y=f(-x),$	Ejercicio	Ejercicio	Ejercicio

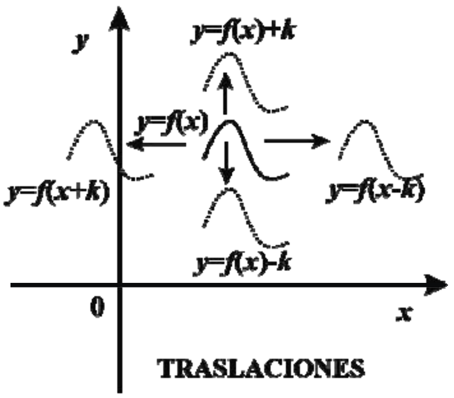
Ejemplo 7.- Graficar $y=1-(x-2)^3$

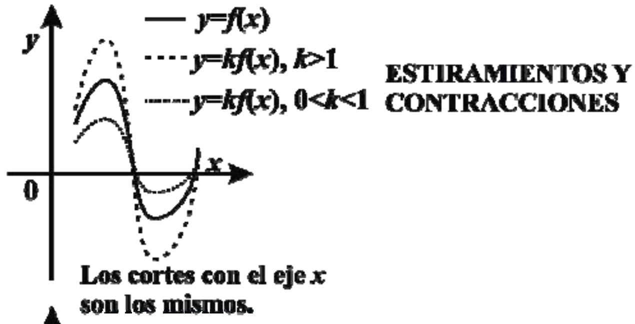
Solución: Esta función la reescribimos como $y=-(x-2)^3+1$

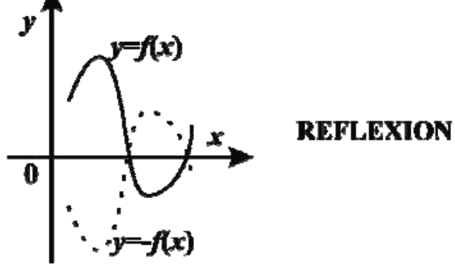
En la siguiente secuencia de planos mostramos los pasos para obtener la gráfica de la función.



A continuación mostramos unos gráficos resumiendo las transformaciones dadas en esta sección







Comentario: Cuando tenemos varias operaciones se recomienda primero considerar la operación más interna de la *x*: sumar o restar una constante a la variable *x* (si la hay) luego las multiplicaciones por constantes, incluye el cambio de signo y por último la suma de constantes.

Ejercicio de desarrollo: Trazar la gráfica de las siguientes funciones. Determine geométricamente el dominio y rango de la función

a) $y = 2 + \dfrac{1}{1-x}$ **b)** $y = -2 + 3(x+1)^3$

(**Sugerencia:** Reescriba la función . Considere $\dfrac{1}{1-x} = -\dfrac{1}{x-1}$. Cuando la gráfica de la función tiene asíntotas se recomienda hacer una traslación punteada de las asíntotas si la gráfica se traslada).

EJERCICIOS:

1) Diga cómo es la gráfica de $y = f(-x)$ con respecto a la gráfica de $y = f(x)$. Justifique

2) Diga cómo es la gráfica de $y = |f(x)|$ con respecto a la gráfica de $y = f(x)$. Justifique

3) Utilice las gráficas de las funciones elementales y la técnica de transformación para graficar las funciones dadas. Determine es el dominio y el rango de cada función a partir de la gráfica.

3.1) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$**;** **3.2)** $f(x) = -(x-2)^3$**;** **3.3)** $f(x) = 2|x+1|$**;**

3.4) $f(x) = -x^2 + 1$**;** **3.5)** $f(x) = \dfrac{-1}{x+2}$**;** **3.6)** $f(x) = \sqrt{-x}$ **;**

3.7) $f(x) = (x+3)^3 + 2$ **;** **3.8)** $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - 4$ **;** **3.9)** $f(x) = -\sqrt{1-x}$ **;**

3.10) $f(x) = 3 - (x-2)^2$**;** **3.11)** $f(x) = \dfrac{2}{x-4} - 1$**;** **3.12)** $f(x) = \dfrac{2}{4-x}$

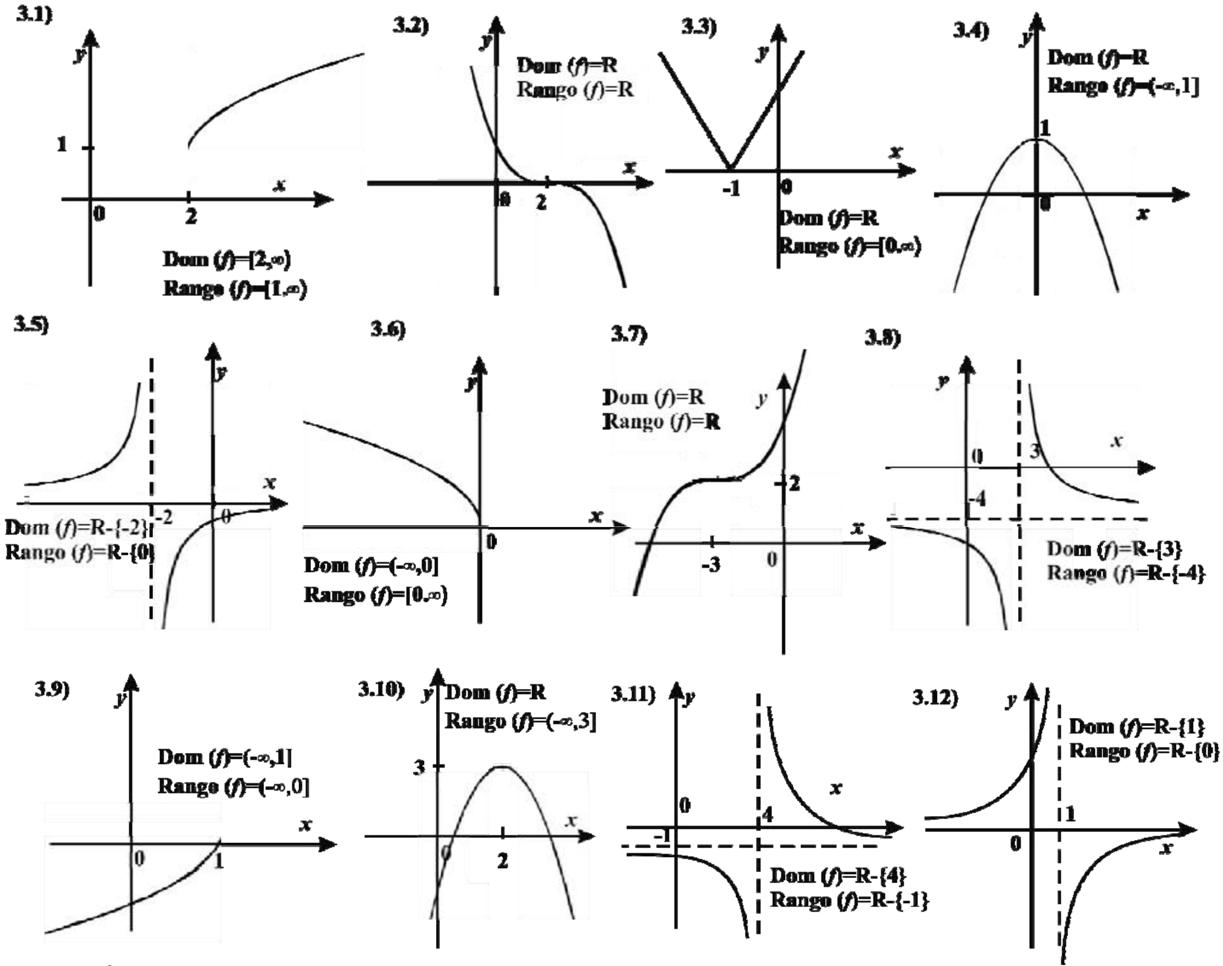
4) Trazar la gráfica de las siguientes funciones definidas por partes usando el bosquejo de las gráficas elementales en las partes.

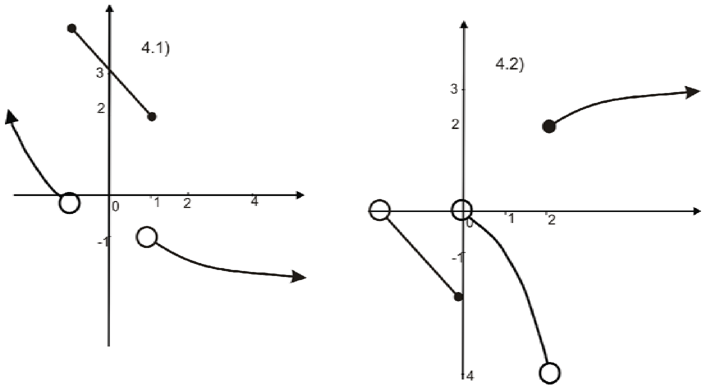
4.1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -1 \\ 3 - x & si \quad |x| \leq 1 \\ -\sqrt{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$ **; 4.2)** $f(x) = \begin{cases} -x-2 & si \quad -1 < x \leq 0 \\ -x^2 & si \quad 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+2} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ **; 4.3)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ -(x-2)^3 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

5) Establezca geométricamente las soluciones de la desigualdad $(x+3)^3+2\geq 0$

Ayuda: Grafique la función $f(x)=(x+3)^3+2$ mediante operaciones geométricas. Precise la grafica determinando el punto de corte con el eje x, (esto es resolviendo la ecuación $(x+3)^3+2=0$) y haciendo pasar la grafica por este punto. Luego la soluciones de la desigualdad $(x+3)^3+2\geq 0$ es el conjunto de las x´s donde la y es positiva, donde $y=(x+3)^3+2$.

Respuestas: **1)** Una reflexión con respecto al eje *y*. **2)** Sólo se refleja en torno al eje *x* las imágenes negativas.





RESOLUCION GEOMÉTRICA Y ANALÍTICA DE SISTEMAS NO LINEALES

Existe una gran variedad de sistemas de ecuaciones no lineales. En esta sección mostraremos como obtener una solución aproximada mediante la graficación de las ecuaciones del sistema. También daremos recomendaciones analíticas para resolver de manera exacta algunos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas,

Ejemplo 1.- Resolver el siguiente sistema $\begin{cases} y - x^2 + 2 = 0 \\ y + 2x = 6 \end{cases}$ **a)** analíticamente; **b)** geométricamente

Solución: a) Para resolver este sistema la recomendación es despejar una de las variables y sustituirla en la otra ecuación. Si hay una ecuación lineal, siempre podemos despejar cualquiera de las variables y sustituirla en la otra. Despejamos *y* en la segunda ecuación: $y = 6 - 2x$ y la sustituimos en la primera:

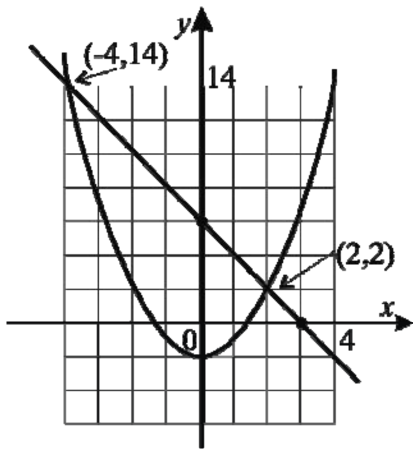
$$(6 - 2x) - x^2 + 2 = 0$$

Quedo una ecuación de segundo grado, la cual resolvemos por factorización

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2 \text{ y } x = -4 .$$

Ahora cada solución de *x* encontrada la sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones y obtenemos así para cada *x* su *y* correspondiente.

- Para $x = 2$: Sustituimos en la segundad ecuación $y = 6 - 2 \cdot 2 = 2$. Así que una solución es $(2,2)$.
- Para $x = -4$: Sustituimos en la segunda ecuación $y = 6 - 2 \cdot (-4) = 14$. Así que la otra solución es $(-4,14)$



b) Se grafica las dos ecuaciones lo más preciso posible. En el eje *y* se ha escalado de 2 en 2 unidades. En el eje *x* se ha mantenido la escala unitaria por considerarlas las mejores escalas
La recta se ha graficado determinando cortes con los ejes. La parábola $y = x^2 - 2$ se ha graficado a partir de la gráfica de $y = x^2$. Siempre es conveniente obtener algún punto más sobre la grafica. En este caso al dar el valor *x*=2 obtenemos que y=2, así el punto $(2,2)$ está sobre la grafica de $y = x^2 - 2$. En la gráfica se puede estimar las intersecciones de las dos curvas, ellas coinciden con las soluciones analíticas $(-4,14)$ y $(2,2)$.

En conclusión: El sistema tiene dos soluciones dadas por $(x_1, y_1) = (2,2)$ y $(x_2, y_2) = (-4,14)$

Ejemplo 2.- La ecuación de oferta de un determinado artículo está dado por $p = \sqrt{q + 12} + 2$ y la de demanda por $p + q = 20$. Encontrar el punto de equilibrio de este artículo: **a)** resolviendo el sistema de ecuaciones; **b)** graficando la curva de oferta y demanda y estimando el punto de intersección.

Solución: a) Debemos resolver el siguiente sistema no lineal: $\begin{cases} p = \sqrt{q + 12} + 2 \\ p + q = 20 \end{cases}$

Para resolver este sistema se sigue la recomendación: despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en la otra ecuación. Así despejamos *p* en la segunda ecuación: $p = 20 - q$ y la sustituimos en la primera

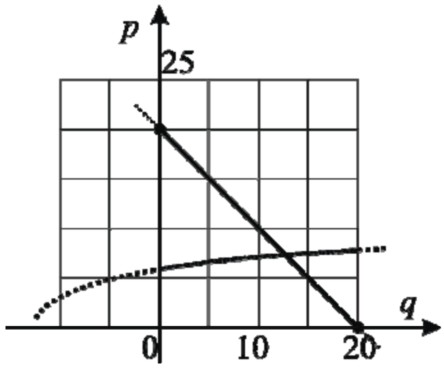
$$20 - q = \sqrt{q + 12} + 2$$

Quedo una ecuación con radicales. Para este tipo de ecuación se recomienda dejar solo el término con radical en cualquier lado de la ecuación y elevar al cuadrado ambos lados, tomando en previsión que al elevar al cuadrado podemos estar agregando solución.

$$18-q=\sqrt{q+12}$$
$$(18-q)^2=\left(\sqrt{q+12}\right)^2$$
$$18^2-36q+q^2=q+12$$
$$q^2-37q+312=0$$
$$q=\frac{37\pm\sqrt{121}}{2}$$
$$q=24 \text{ y } q=13$$

- Para la primera q tenemos un precio de $p=20-24=-4$. Esta solución se elimina.
- Para q=13, obtenemos un precio de $p=20-13=7$. Así que el punto de equilibrio está dado por (13,7).

b) En la gráfica está dibujada las curvas de demanda y oferta, Se graficó las dos ecuaciones lo más preciso posible. En los dos ejes se ha escalado de 5 en 5 unidades.
La recta se ha graficado determinando cortes con los ejes. La ecuación $p=\sqrt{q+12}+2$ se ha graficado a partir de la gráfica de $p=\sqrt{q}$ por operaciones geométricas. Recordemos que siempre es conveniente obtener algún punto más sobre la grafica. En este caso al dar el valor x=20 obtenemos que y=7.65, así el punto (20,7.65) está sobre la grafica. En la grafica se puede estimar las intersecciones de las dos curvas, ellas coinciden con las soluciones analíticas



EJERCICIOS

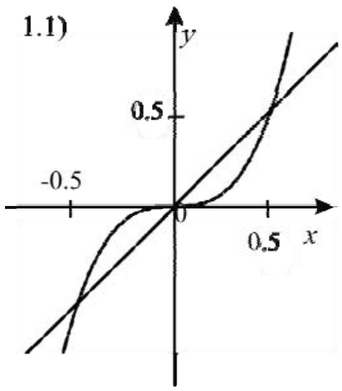
1) Resolver los siguientes sistemas analíticamente y geométricamente

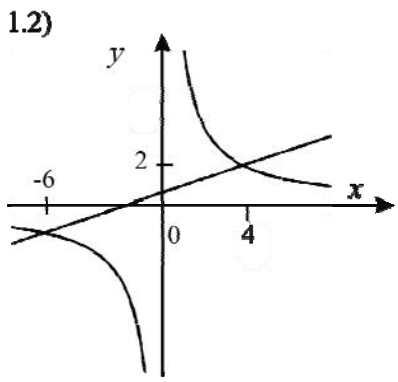
1.1) $\begin{cases} y-4x^3=0 \\ y-x=0 \end{cases}$ **1.2)** $\begin{cases} x=\dfrac{8}{y} \\ 3y-x=2 \end{cases}$ **;** **1.3)** $\begin{cases} y-\sqrt{x}+6=0 \\ y+x=6 \end{cases}$

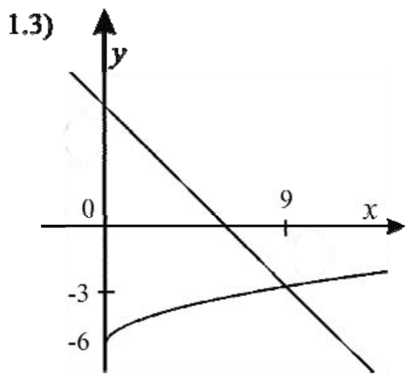
2) Encuentre el punto de equilibrio para las siguientes:

2.1) $\begin{cases} D: p=\dfrac{2000}{q+300} \\ O: p=\dfrac{q}{100}+2 \end{cases}$ **2.2)** $\begin{cases} D: p+\dfrac{q}{100}=3 \\ O: 10p=\sqrt{300+q} \end{cases}$

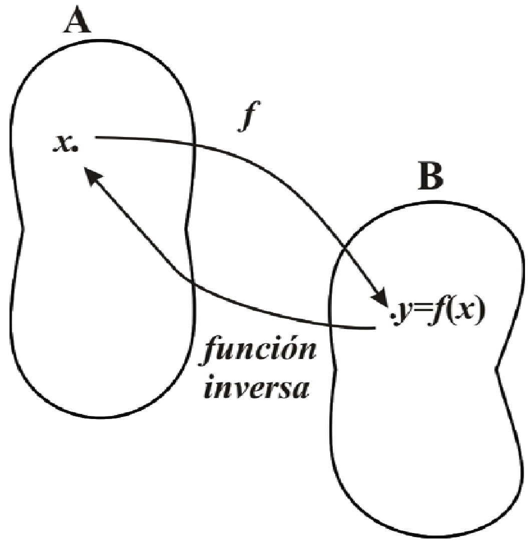
Respuestas: 1.1) $(0,0);(\frac{1}{2},\frac{1}{2});(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ **; 1.2)** $(4,2);(-6,-\frac{4}{3})$ **; 1.3)** $(9,-3)$ **2.1)** $(200,4)$ **2.2)** $(100,2)$







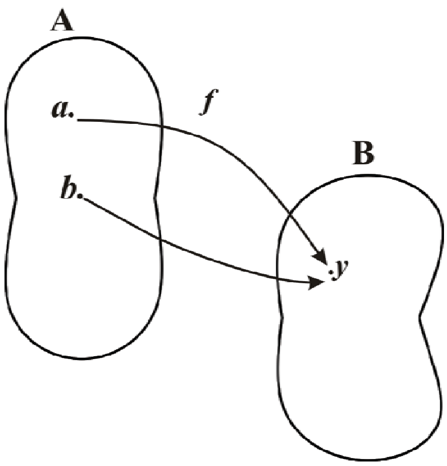
FUNCION INVERSA



En esta sección estamos interesados en definir la función inversa de una función, es decir aquella función que hace regresarnos al *x* de partida.

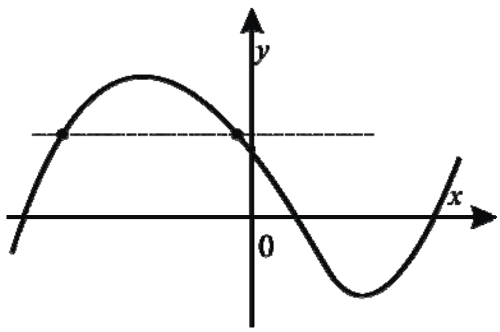
Muchas veces tenemos el precio *p* en función de la demanda existente. Al expresar la demanda *q* en función del precio *p* estamos obteniendo la función inversa de la anterior

No todas las funciones se les pueden definir una función inversa.



Por ejemplo si hay un *y* que es imagen de dos puntos *a* y *b*, no vamos a poder definir una función que diga plenamente cómo es el regreso al conjunto de salida, sin dejar de ser función.

La existencia de la función inversa de *f* la podemos establecer mediante la gráfica de la función. Si existe una recta horizontal que corta la gráfica en dos puntos entonces no existe la función inversa.



Una función *f* tiene inversa si toda recta horizontal corta la gráfica de *f* a lo sumo en un punto. Una función con esta característica la llamaremos biunívoca.

Definición.- Sea *f* una función biunívoca y *g* una función cuyo dominio es el rango de *f*. Diremos que g es la inversa de *f* si

a) $g(f(x)) = x$ para todo *x* en el dominio de *g*.

b) $f(g(x)) = x$ para todo *x* en el rango de *f*.

La función inversa se suele representar por f^{-1}

(f^{-1} no debe confundirse con $y=\dfrac{1}{f(x)}$, f^{-1} es un símbolo para nombrar la función inversa y que recuerda el origen de la función recién definida).

Para conseguir la función inversa es aconsejable en un principio seguir los siguientes pasos:

Paso 1.- Realizar la prueba de la recta horizontal para ver si tiene inversa.
Paso 2.- Despejar *x* en función de *y* en la ecuación *y=f(x)*, para obtener una función

$$x=f^{-1}(y)$$

Paso 3.- Intercambiar *x* e *y* para escribir $y=f^{-1}(x)$
Paso 4.- Verificar:

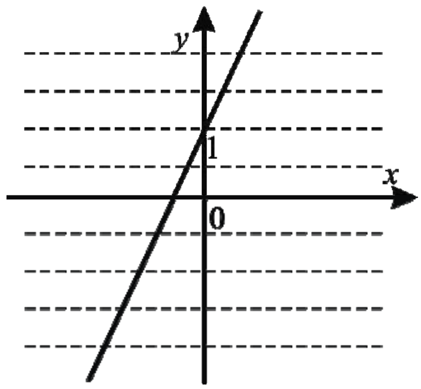
a) $f^{-1}(f(x))=x$ para todo *x* en el dominio de *f*.

b) $f(f^{-1}(x))=x$ para todo *x* en el dominio de f^{-1}.

Ejemplo 1.- Determinar la función inversa de $f(x)=3x+1$, si existe.

Solución:

Paso 1.- Observamos que en la gráfica de *f* cualquier recta horizontal corta a la gráfica en a lo sumo un punto. Por tanto podemos proseguir para conseguir la inversa.



Paso 2.- Despejar *x* de la ecuación *y=f(x*).

$$y=3x+1$$
$$y-1=3x$$
$$x=\frac{y-1}{3}$$

Paso 3.- Intercambiar *x* e *y*.

$$y=\frac{x-1}{3}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$$

Paso 4.- Verificamos

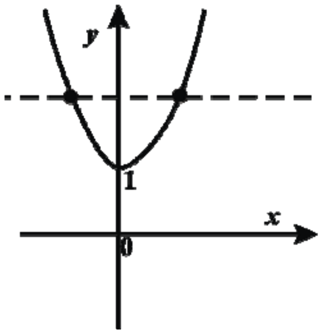
1.- $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+1)=\dfrac{(3x-1)+1}{3}=x$

2.- $f(f^{-1}(x)) = f(\dfrac{x-1}{3})=3\dfrac{x-1}{3}+1=x-1+1=x$

Conclusión: $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ es la función inversa de $f(x)=3x+1$.

Ejemplo 2- Determinar la inversa si existe de $f(x)=x^2+1$

Solución:



Como existe una recta horizontal que corta a la gráfica de $y = x^2 + 1$ en 2 puntos entonces concluimos que la función no tiene inversa

Ejercicio de desarrollo: Determinar, si existe, la inversa de las siguientes funciones

a) $y = 2\sqrt{x} + 1$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

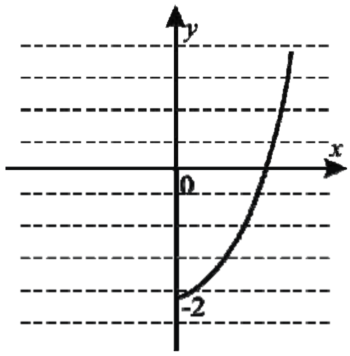
Ejemplo 3- Determinar, si existe, la inversa de $h(x) = x^2 - 2$, para $x \geq 0$

Solución:

Paso 1.- Graficamos la función. Tome en cuenta en este caso que la función está definida para los *x* mayores o iguales a cero.

Por este motivo la gráfica resulta ser la mitad de la parábola

Observamos que cualquier recta horizontal corta a la gráfica en a lo sumo un punto. Por tanto la función tiene inversa.



Paso 2.- Despejar *x* de la ecuación $y = h(x)$.

$y = x^2 - 2$

$y + 2 = x^2$

$x = \pm\sqrt{y+2}$

Como la *x* es positiva, desechamos la raíz negativa. Así

$x = \sqrt{y+2}$

Paso 3.- Intercambiar *x* e *y*.

$y = \sqrt{x+2}$

$h^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$

Paso 4.- Verificamos $h^{-1}(h(x))$

$h^{-1}(h(x)) = \sqrt{h(x)+2} = \sqrt{(x^2+2)-2} = x$

Realizamos la otra verificación

$h(h^{-1}(x)) = (h^{-1}(x))^2 - 2 = \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - 2 = (x^2+2) - 2 = x$

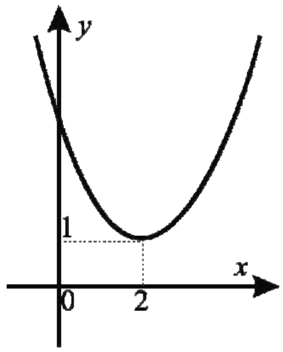
Conclusión: $h^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$ es la función inversa de $h(x) = x^2 - 2$, para $x \geq 0$

Comentarios:
1) Observe que si la función no tuviese el dominio restringido, entonces la función no hubiese tenido inversa. Esto se hubiese podido concluir graficando la función, pero sin necesidad de graficar, al despejar, tendríamos dos valores de *x* para una sola *y*.

Es decir, *del despeje podemos concluir si hay inversa o no, dependiendo si conseguimos una sola x para cada y del rango o no.*

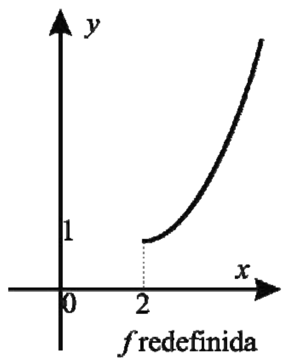
2) Una función que no tiene inversa, podemos eventualmente redefinirla restringiendo el dominio de tal forma que la nueva función con dominio restringido si tiene inversa.

Por ejemplo, la función $f(x)=(x-2)^2+1$, no tiene inversa. Sin embargo podemos restringir el dominio de la función. Si redefinimos la función ahora con dominio $[2,\infty)$, está nueva función con la misma fórmula pero con diferente dominio a la primera si tiene inversa. El lector puede chequear que es:



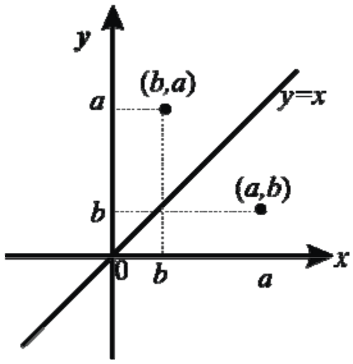
$$f^{-1}(x)=+\sqrt{x-1}+2$$

El signo + se toma por ser el ala derecha de la parábola.



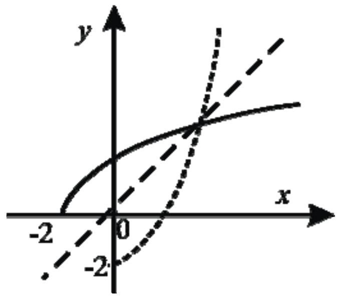
Ejercicio de desarrollo.- Determine la función inversa. En caso que no existe, redefina la función haciendo una restricción del dominio de f a fin de poder definir la función inversa y calcúlela.
a) $f(x)=-(x-5)^3$; **b)** $f(x)=1+|x-3|$;

GRAFICA DE LA FUNCION INVERSA



Observe que si (a,b) está en la gráfica de f entonces (b,a) está en la gráfica de f^{-1}. Estos dos puntos son simétricos con respecto a la recta $y=x$. En general, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y=x$.

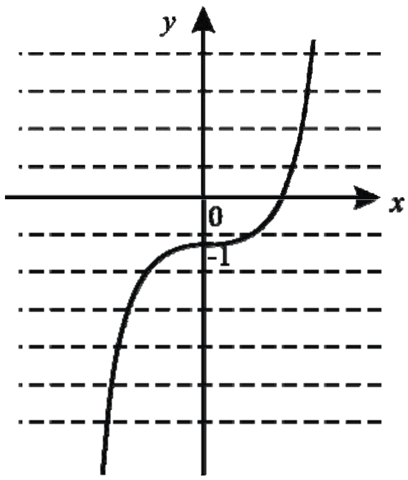
Al lado hemos graficado $y = x^2 - 2, \quad x \geq 0$ y su inversa $y = \sqrt{x+2}$ en el mismo sistema de coordenadas. Vemos que efectivamente las gráficas son simétricas con respecto a la recta $y=x$.



Entonces si tenemos la gráfica de f podemos obtener la gráfica de f^{-1} a través de la reflexión con respecto a la recta $y=x$.

Ejemplo 4.- Determinar, si existe, la inversa de $f(x) = x^3 - 1$. En caso que exista, graficar la función y la inversa en un mismo sistema de coordenadas.

Solución:



Paso 1.- La función tiene inversa, pues cada recta horizontal corta la gráfica en a lo sumo un punto.

Paso 2.- Despejar x de la ecuación $y= f(x)$

$$y = x^3 - 1$$

$$y + 1 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y+1}$$

Observe de nuevo que el paso 1 no era necesario, pues sin duda para cada y existe un solo x.

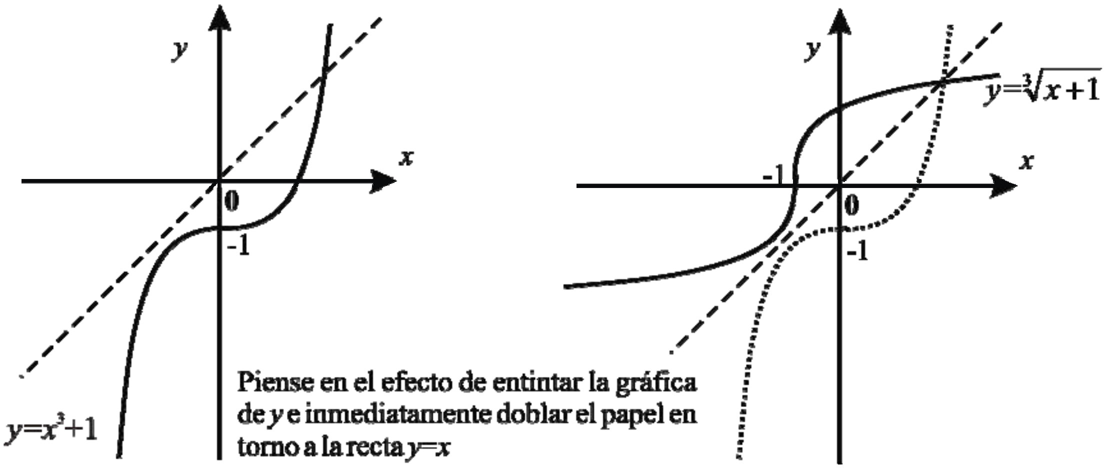
Paso 3.- Intercambiar x e y.

$$y = \sqrt[3]{x+1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

El paso 4 no es un paso necesario, es sólo la verificación del despeje.

A continuación presentamos las gráficas de *f* y su inversa f^{-1} .



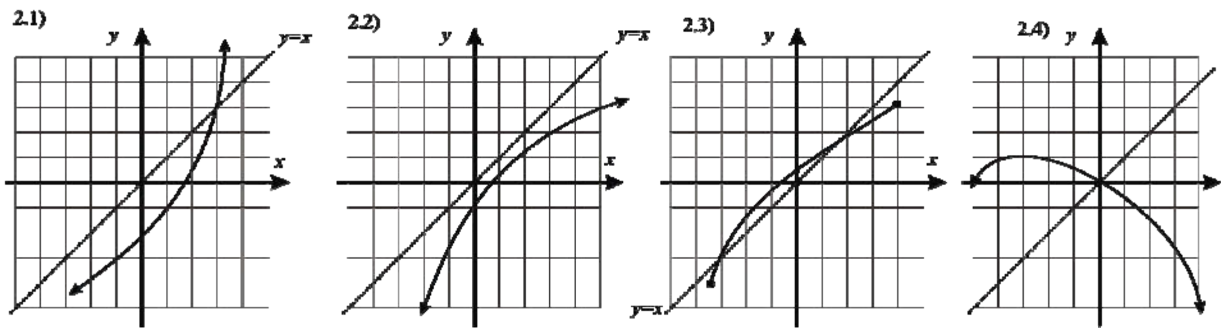
Ejercicio de desarrollo: Determinar, si existe, la inversa de $y=(x-1)^2+1$ **.** En caso que no exista redefinir la función restringiendo el dominio a fin que tenga inversa, conseguir la inversa de la nueva función restringida, graficar la función y la inversa en un mismo sistema de coordenadas.
(Seguramente a usted no le cuesta hacer una reflexión sobre un eje horizontal, así que para graficar también recomendamos rotar su hoja de papel de tal manera que la recta *y=x* quede horizontal en su visual y luego proceda hacer la reflexión)

EJERCICIOS

1) Diga si las siguientes funciones tienen función inversa. En caso afirmativo encuéntrela. Verifique que efectivamente es la inversa.

1.1) $y=-(x+1)^3$ **;** **1.2)** $y=-\dfrac{1}{x-3}$ **;** **1.3)** $y=\sqrt{x-1}$ **;** **1.4)** $y=-x^2-1, \quad x\geq 0$

2) A partir de de las siguientes gráficas de funciones, determine cuál de ellas es biunívoca, en caso afirmativo trace la gráfica de la función inversa.



3) Para cada una de las funciones dadas abajo determine la función inversa si existe. Grafique la función y su inversa en el mismo sistema de coordenadas. Verifique que efectivamente f^{-1} es la inversa de *f*.

3.1) $y=(x+2)^3$ **;** **3.2)** $y=\dfrac{1}{5+x}$ **;** **3.3)** $y=|x|+2$ **;**

3.4) $y=(x-1)^2, \quad x\geq 1$**;** **3.5)** $y=-\sqrt{x-2}$ **;** **3.6)** $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+2$

4) Determine la función inversa. En caso que no existe, redefina la función haciendo una restricción del dominio de f a fin de poder definir la función inversa y calcúlela. Dibuje f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

4.1) $f(x)=(x\ \ +1)^2$ **;** **4.2)** $f(x)=-(x-2)^2-1$**;** **4.3)** $f(x)=|x-1|$**;**

4.4) $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}$**;** **4.5)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **;** **4.6)** $f(x)=-x^2+2$

5) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

5.1) ( ) $f\circ g=g\circ f$

5.2) ( ) El dominio de $f+g$ es igual al dominio de $f+2g$

5.3) ( ) Si el rango de f son todos los reales entonces el rango de $(f)^2$ son los reales no negativos.

5.4) ( ) La suma de dos funciones pares es par

5.5) ( ) El producto de dos funciones impares es impar

5.6) ( ) La función $F(x)=(x-1)^3$ es impar

5.7) ( ) La función $F(x)=(x-1)^3$ es un polinomio

5.8) ( ) Hay funciones cuyas gráficas no cortan el eje y

5.9) ( ) Una ecuación define una función si cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la ecuación en a lo más un punto.

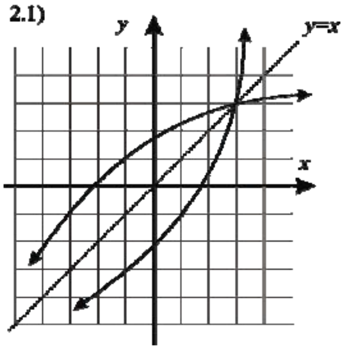
5.10) ( ) El dominio de $f+g$ es igual al dominio de f/g **.**

5.11) ( ) El dominio de la función $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ son todos los *x* que satisfacen la desigualdad $1+\sqrt{x-2}\geq 0$

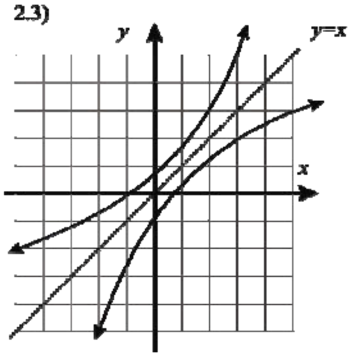
5.12) ( ) Suponga que el punto (a,a) es un punto sobre la grafica de *f* una función que tiene inversa, entonces ese punto también está sobre la grafica de la inversa de *f*.

Respuestas:1.1) $y=\sqrt[3]{x}-1$ **1.2)** $y=-\dfrac{1}{x}+3$; **1.3)** $y=x^2+1$; **1.4)** $y=\sqrt{-x-1}$;

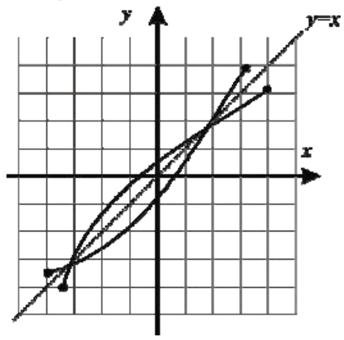
2.1)



2.3)



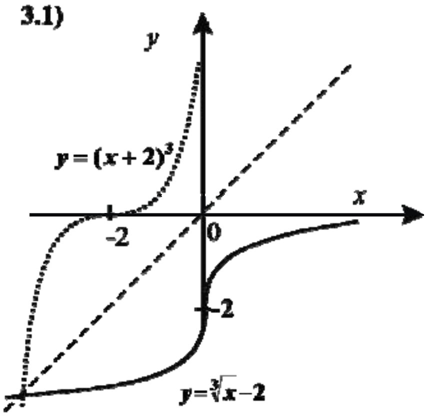
2.3)



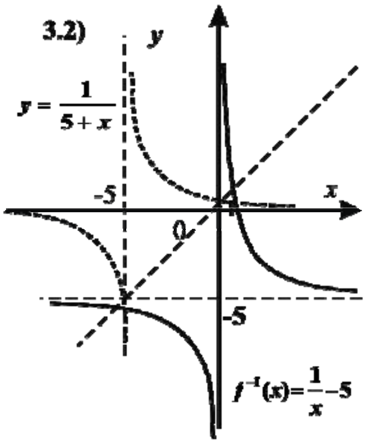
2.4)

No tiene inversa

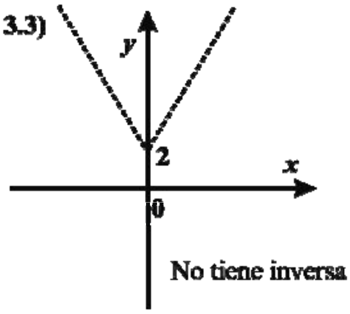
3.1)



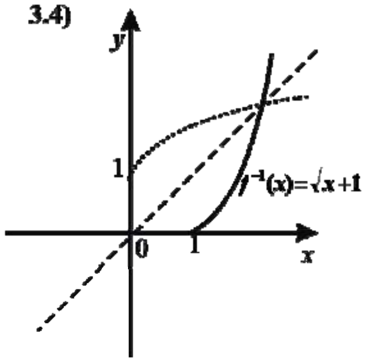
3.2)



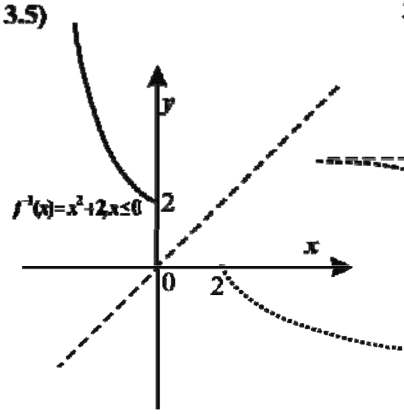
3.3)



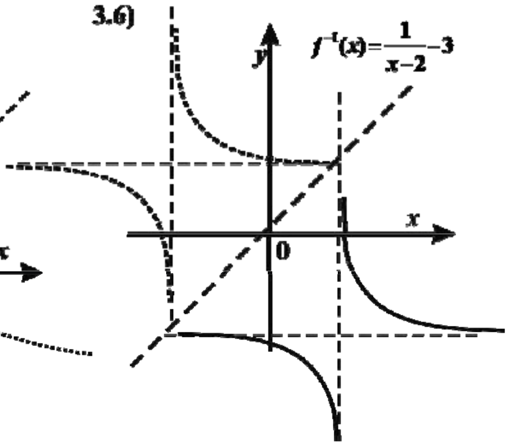
3.4)



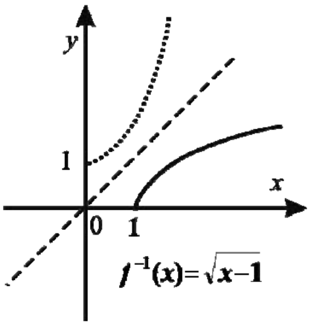
3.5)



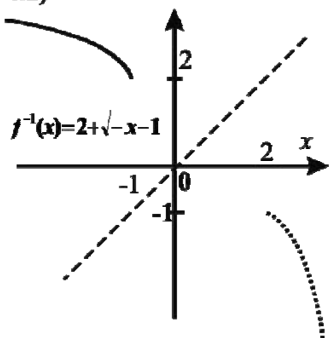
3.6)



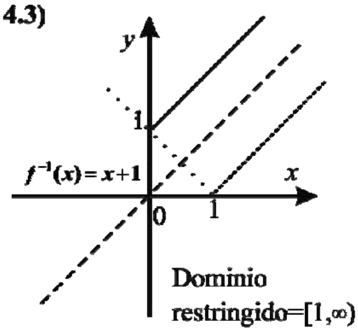
4.1)



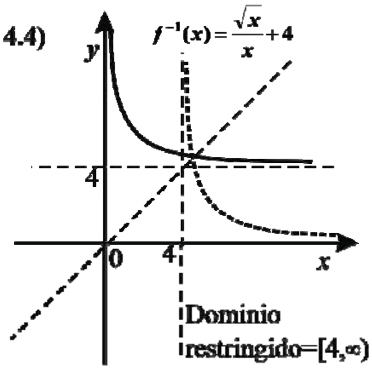
4.2)



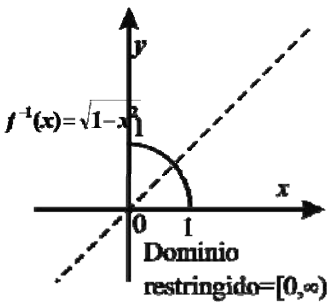
4.3)



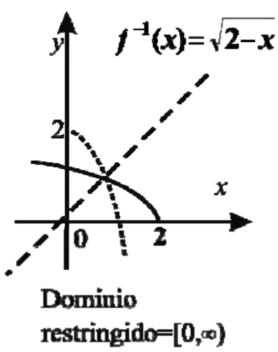
4.4)



4.5)



4.6)



5.1) (F) En general es falso, para justificar se puede tomar dos funciones tal que no cumple la igualdad, por ejemplo $f(x)=2x$ **y** $g(x)=x^2$**.** Tenemos entonces que $(f\circ g)(x)=2x^2$ y $(g\circ f)(x)=4x^2$

5.2) (V) Dom g **=**Dom $2g$ **.** Por consiguiente Dom $f\cap$ Dom g = Dom $f\cap$ Dom $2g$

5.3) (V) Pues al elevar al cuadrado todos los valores se transforman en positivos.

5.4) (V) Sean f y g pares, veamos que la función suma es par

$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$

5.5) (F) Es par. Sean f y g impares, veamos que la función multiplicación es par

$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$.

Tambien se puede justificar dando un ejemplo $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$ entonces $(f\cdot g)(x)=x^4$ es par

5.6) (F) Al evaluar la función en $x=-2$ y en $x=2$: $F(-2)=(-2-1)^3=-8$ y

$F(2)=(2-1)^3=1$ por tanto $F(-2)\neq F(2)$ la función no es impar.

5.7) (V) Al desarrollar el cubo la función $F(x)=(x-1)^3$ puede ser reescrita como

$F(x)=x^3-3x^2+3x-1$

5.8) (V) La gráfica de $F(x)=1/x$ no corta el eje *y*.

5.9) (F) La proposición fuese cierta si se refiriera a cualquier recta vertical.

5.10) (F) En el dominio de f/g hay que quitar $\{x/g(x)=0\}$.

5.11) (F) El dominio de la función $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ son todos los *x* que satisfacen la desigualdad $x-2\geq 0$.

5.12) (V) Al intercambiar *x* por *y* queda el mismo punto.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una función f se llama cuadrática si puede ser escrita de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde *a,b* y *c* son números reales con $a \neq 0$.

El dominio de esta función son todos los reales y su representación gráfica es una parábola. Son innumerable la cantidad de ejemplos prácticos donde está involucrada la función cuadrática, es por ello que merece especial atención.

La idea para graficar cualquier función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es llevarla a la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ completando cuadrados. La gráfica de esta última sabemos que es una dilatación, posible reflexión con el ejes x y traslaciones de la gráfica de $y = x^2$.

Ejemplo 1.- Expresar la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Graficar.

Solución: Primero sacamos el coeficiente de x^2 en los dos primeros términos de factor común: $f(x) = 2(x^2 + 2x) + 5$. La idea es sumar y restar un número para que junto con la expresión $x^2 + 2x$ sean el desarrollo de $(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$

Observe que el término $2x$ corresponde a $-2hx$. Así que $2x = -2hx$, de donde $h = -1$. El término que falta para completar el desarrollo del cuadrado es $(-1)^2 = 1$

$f(x) = 2(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1) + 5$ Sustituimos el trinomio por el cuadrado perfecto.

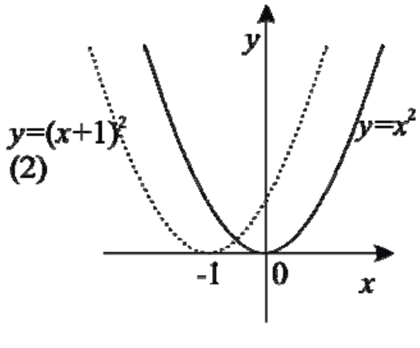
$f(x) = 2\left((x-(-1))^2 - 1\right) + 5$

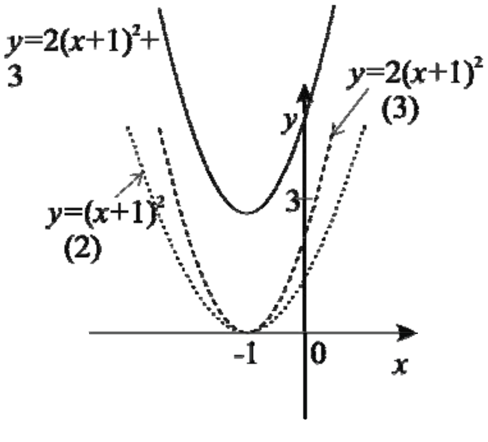
Se aplica la propiedad distributiva.

$f(x) = 2(x-(-1))^2 - 2 + 5$

$f(x) = 2(x-(-1))^2 + 3$

La gráfica de está función la podemos obtener por desplazamiento a la izquierda de una unidad (2), luego un estiramiento vertical (3) y finalmente una traslación hacia arriba de de tres unidades (4).





Ejemplo 2.- Expresar la función $f(x)=-x^2+6x-5$ en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$. Graficar.

Solución: Primero sacamos el coeficiente de x^2 en los dos primeros términos de factor común:

$$f(x)=-(x^2-6x+h^2-h^2)-5$$

El término $-6x$ corresponde a $-2hx$. Así que $-6x=-2hx$, de donde $h=3$.

El término que falta para completar cuadrados es $(3)^2=9$

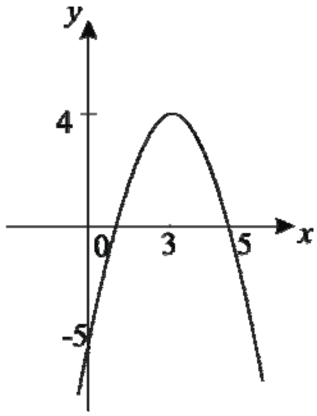
$$f(x)=-(\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9)-5$$

$$f(x)=-\left((x-3)^2-9\right)-5$$

Se aplica la ley distributiva

$$f(x)=-(x-3)^2+9-5$$

$$f(x)=-(x-3)^2+4$$



La gráfica de está función puede ser obtenida por una traslación horizontal hacia la derecha de tres unidades, luego una reflexión de esta gráfica en torno al eje x y por último una traslación vertical de cuatro unidades hacia arriba.

Comentario: Una vez que sacamos a de factor común en los dos primeros términos, resulto en ambos casos que h es la mitad del coeficiente en x con signo cambiado. Efectivamente en el primer ejemplo se tenía $f(x)=2(x^2+2x)+5$ y $h=-1$, en el segundo ejemplo $f(x)=-(x^2-6x)-5$ y $h=3$.

Ejercicio de desarrollo: Expresar la función $f(x)=3x^2+6x+5$ en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$. Graficar.

A continuación se hacen varias observaciones, algunas de las cuales el lector habrá podido darse cuenta a lo largo de estos ejemplos y que se pudiese establecer como resultados a fin de ahorrar trabajo. Se puntualizan

Observaciones:

1) Si $a>0$ la parábola abre hacia arriba. Si $a<0$ la parábola abre hacia abajo.
2) (0, c) es el corte con el eje y
3) En la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$, h es la coordenada x del vértice y k es la coordenada y del vértice.

A partir de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ se puede hacer un desarrollo teórico a fin de obtener una fórmula para *h*. Primero se saca *a* de factor común de los dos primeros términos.

$$f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

El término $\frac{b}{a}x$ corresponde a $-2hx$. Así que $\frac{b}{a}x=-2hx$, de donde $h=-\frac{b}{2a}$. El término que falta para completar cuadrados es $(\frac{b}{2a})^2$

$$f(x)=a(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x-(-\frac{b}{a})\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2)+c$$

$$f(x)=a\left[\left(x-(-\frac{b}{2a})\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$

Se aplica la ley distributiva

$$f(x)=a\left(x-(-\frac{b}{2a})\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c\,.$$

Así la coordenada *x* del vértice es $h=-\frac{b}{2a}$. En vez de identificar *k* en el desarrollo anterior, es preferible en la práctica evaluar *f* en $h=-\frac{b}{2a}$.

Estas observaciones nos permiten hacer las siguientes recomendaciones

Recomendaciones para graficar una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$:

1.- Si $a>0$ la parábola abre hacia arriba.
Si $a<0$ la parábola abre hacia abajo.

2.- Calcular la coordenada *x* del vértice por medio de $x_v=-\frac{b}{2a}$.
Para calcular la coordenada *y* se evalúa *f* en $-\frac{b}{2a}$. Esto es $y_v=f(x_v)$

3. Para la intersección con el eje *x* plantear la ecuación $f(x)=0$ y resolver esta ecuación en *x*.
La intersección con el eje *y* es el punto (0,*c*).

4.- Llevar estos puntos al plano: vértice y cortes y tomar en cuenta **1** para bosquejar la gráfica. Recuerde que la parábola es simétrica en torno a la recta $x=-\frac{b}{2a}$.

Ejemplo 3.- Graficar $f(x)=2x^2-8x+6$

Solución: Tomamos en cuenta las recomendaciones.

1.- Como $a=2>0$ la parábola abre hacia arriba.

2.- Calculamos ahora la coordenada *x* del vértice, observe que en este caso $b=-8$

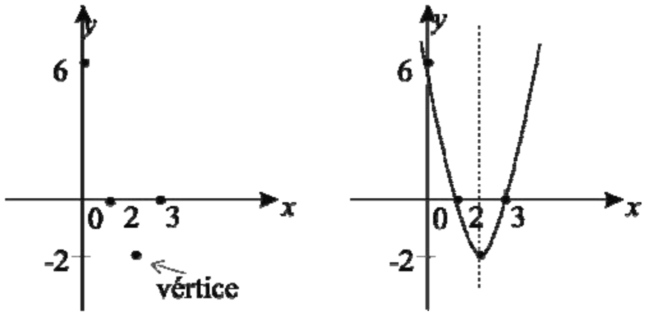
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$. Pasamos ahora a calcular la coordenada *y* del vértice.

$y_v = f(x_v) = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = -2$. En conclusión el vértice es $(x_v, y_v) = (2,-2)$

3. Para las intersecciones con el eje *x* planteamos: $2x^2 - 8x + 6 = 0$, esta ecuación cuadrática tiene como solución *x*=1 y *x*=3. Así los puntos de cortes con el eje *x* son (1,0) y (3,0).

(0,6) es el corte con el eje *y*.

4.- Se llevan estos puntos a un plano cartesiano, se traza el eje de simetría de la parábola, tomando en cuenta que la parábola abre hacia arriba, hacemos el bosquejo recordando la simetría de la curva y haciéndola pasar por los puntos marcados.



Ejercicio de desarrollo: Consiga el vértice y los puntos de intersecciones con los ejes de la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 - 12x + 4$. Obtenga la grafica de *f*

Ejemplo 4.- Resolver gráficamente la desigualdad $x^2 + 5x + 6 \geq 0$.

Solución: La idea para resolver este tipo de ejercicio es definir primero la función $y = x^2 + 5x + 6$, Observe que la cuestión ahora es conseguir los *x´s* para los cuales $y \geq 0$, esto se puede revolver graficando pues el conjunto solución son los *x´s* donde la gráfica está por encima del eje *x* (tienen la coordenada *y* positiva).

A continuación se graficara $y = x^2 + 5x + 6$. Como *a*>0 la parábola abre hacia arriba. Para localizar el vértice planteamos:

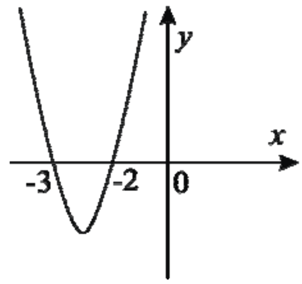
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} = -2.5$. $y_v = f(x_v) = (-2.5)^2 + 5(-2.5) + 6 = -0.25$

Para los cortes con el eje *x*, planteamos

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+3)(x+2) = 0$

$x = -2$ ó $x = -3$



El corte con el eje *y* es (0,6). Con estas informaciones podemos graficar.

En la figura se puede apreciar que todos los *x´s* de los puntos de la grafica que tienen la coordenada *y* positiva son: $(-\infty,-3] \cup [-2,\infty)$.

Estos son los *x´s* que satisfacen la desigualdad $y = x^2 + 5x + 6 \geq 0$.

En conclusión: La solución de la desigualdad $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ está dada por el conjunto $(-\infty,-3] \cup [-2,\infty)$

Ejercicio de desarrollo.- Resolver gráficamente la desigualdad $-3x^2 + 5x + 2 < 0$.

MAXIMOS Y MINIMOS EN FUNCIONES CUADRÁTICAS

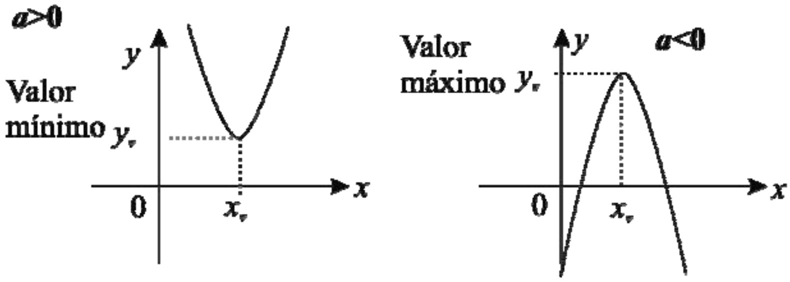
En muchas ocasiones es de interés localizar el valor máximo de una función. En una función cuadrática cuya gráfica abre hacia abajo este máximo se alcanza en el vértice de la parábola.

Alternativamente también se puede estar interesado en el valor mínimo de una función cuadrática cuya gráfica abre hacia arriba.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $x_v = -\frac{b}{2a}$ la coordenada *x* del vértice

-Si $a < 0$ entonces *f* alcanza un valor máximo en x_v. Este valor máximo de f es $y_v = f(x_v)$

-Si $a > 0$ entonces *f* alcanza un valor mínimo en x_v. Este valor mínimo de f es $y_v = f(x_v)$



Comentario: Es claro que si $a > 0$ no hay un valor máximo de f pues la función toma valores arbitrariamente altos.

Ejemplo 1.- Encontrar el valor máximo o mínimo según corresponda de las siguientes funciones
a) $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$; **b)** $g(x) = 3x^2 + 12x + 4$

Solución: **a**) Como $a = -2 < 0$ la parábola abre hacia abajo, por lo tanto la función alcanza un máximo. Para conseguir el valor máximo primero calculamos la coordenada *x* del vértice.

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{2}$

El valor máximo es $f(\frac{3}{2}) = -2(\frac{3}{2})^2 + 6(\frac{3}{2}) + 1 = \frac{11}{2}$ y remarcamos que se alcanza en $x_v = \frac{3}{2}$.

b) Como $a = 3 > 0$ la parábola abre hacia arriba, por lo tanto la función alcanza un mínimo. Para conseguir el valor mínimo primero calculamos la coordenada *x* del vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (3)} = -2$$

Ahora el valor mínimo de *g* es $y = g(-2)$

$$g(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 4 = -8$$

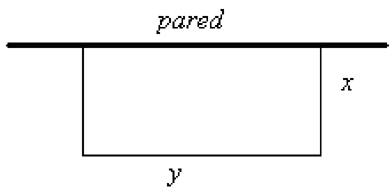
En conclusión: El valor mínimo de la función *g* es -8 y se alcanza en $x = -2$.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar el valor máximo o mínimo de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$.

APLICACIONES

Problemas en que se busca los valores máximos y mínimos de una cantidad que depende de otra están presentes en muchas aplicaciones. Cuando la variable a optimizar es una función cuadrática de la variable independiente entonces podemos determinar estos máximos o mínimos calculando el vértice de la gráfica de la función. Posteriormente se verá una técnica que abarca otro tipo funciones. Estos problemas pertenecen a una disciplina de las Matemáticas comúnmente llamada Optimización y se trata básicamente de determinar el valor máximo de una cantidad que es función de una o más variables.

Ejemplo 1.- Una persona tiene 25 metros de malla para construir un corral rectangular. La persona piensa usar una pared existente para delimitar el corral. **a)** Exprese el área como función de x **b)** Calcule las dimensiones del corral que tiene área máxima



Solución:

a) Observe que el área esta dada por

$$A = x \cdot y$$

En este caso viene expresada en términos de las dos variable x y y . Sin embargo podemos sustituir y por una expresión que depende de x, debido a la relación entre x, y y la cantidad de malla a utilizar. Esta relación viene dada por

$$x + x + y = 25$$

Esto es

$$2x + y = 25$$

De aquí podemos expresar y en función de x , despejando

$$y = 25 - 2x$$

Sustituyendo y en el área, tenemos finalmente A como función de x

$$A(x) = x \cdot (25 - 2x) .$$

Conviene observa que el Dom $A = (0,12.5)$

b) En **a**) se obtuvo que el área es una función cuadrática de x. La llevamos a la forma canónica.

$$A(x) = 25x - 2x^2$$

Como a<0, entonces $A(x)$ alcanza un máximo en x_v , él cual está dado por

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2 \cdot (-2)} = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Pasamos ahora a calcular la dimensión y, la cual puede ser obtenida de la relación $y = 25 - 2x$.

Al sustituir x por 6,25 obtenemos y= 12,5.

Concluyendo las dimensiones que hacen máxima el área son 6,25x12,5.

Adicionalmente podemos decir que el área máxima es 78,125m^2, la cual se obtuvo evaluando la función Área en 6,25.

Estos pasos deberán ser tomados en cuenta a fin de resolver problemas de máximos y mínimos

1.- Leer el problema hasta comprenderlo, este atento que se pide optimizar.
2.- Realice uno ó varios dibujos de la situación que muestre como se relacionan los elementos que varían. Escoja nombres a las variables de interés. Si hay varias variables involucradas vea como se relacionan. Formule una ecuación que plantee las relaciones entre las variables. Esta ecuación se suele llamar de ligadura (porque establece la relación entre las variables), otros autores la llaman de restricción.
3.-Exprese como función la cantidad que se quiere optimizar en términos de sus variables. Si necesita 2 o más variables despeje las demás variables en términos de una sola, usando la ecuación de ligadura (o restricción) y sustitúyala en la función a optimizar. Determine el dominio de la función de acuerdo a la naturaleza del problema
4.- Si la función resultante en el punto anterior es cuadrática, determine el máximo o mínimo calculando el vértice.
5.- Responda las preguntas del problema

Recapitulemos estos pasos analizando el primer ejemplo. Era claro que se estaba interesado en maximizar el área y determinar las dimensiones del terreno con área máxima. Esta área depende de dos variable x y y Como hay dos variable se busco una ecuación que las relacione, ésta resulto $2x + y = 25$, esta es la ecuación de restricción o de ligadura, se despejo una de las variable y se sustituyó en la función a maximizar $A = x \cdot y$, pasando ahora a depender de una variable y resultando la función a maximizar una función cuadrática. Para conseguir el máximo se determino el vértice de la parábola. Observe como muchas veces se está interesado en averigua donde se alcanza el máximo que en el propio valor máximo.

Ejemplo 2.- Un distribuidor adquiere balones a un costo de 4UM la unidad. Cuando el precio de venta es de 10UM se venden 4000 unidades en un mes. Se quiere subir los precios y se estima que por cada aumento de 1UM en el precio se venderán 200 balones menos. **a)** ¿Qué precio se deberá fijar con el fin de obtener la utilidad máxima? **b)** ¿Cuál es la utilidad máxima?
Solución: Es claro que el problema se basa en maximizar la función utilidad, ella hay que determinarla pero primero vamos a establecer la variable.
Una variable muy frecuente para modelar este problema es

x= Número de incrementos de 1UM.

Así

q=número de balones vendidos por mes

puede ser expresado en términos de x como:

$$q = 4000 - 200x\,.$$

Observe que si x=0 no hay incrementos y las ventas son 4000, si x=1 entonces se dejan de vender 200 balones, esto es 3800, así puede continuar.
En términos de x, el precio está dado por

$$p = 10 + 1 \cdot x$$

Alternativa 1: En este caso obtendremos la utilidad total en base a la utilidad por balón

Utilidad por cada balón=precio-costo unitario

Así

Utilidad por cada balón = $p - c_u = 10 + 1 \cdot x - 4 = 6 + x$

y la utilidad total en términos de x está dada por

$$\textit{Utilidad total} = q \cdot (\textit{utilidad por balón}) = (4000 - 200x)(6 + x)$$

$$\textit{Utilidad total} = 200(20 - x)(6 + x)$$

Como la utilidad total es una función cuadrática con $a< 0$ existe un máximo y se localiza en el vértice. Escribimos la utilidad en la forma canónica para así emplear la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$

$$U(x) = 200(120 - 6x + 20x - x^2) = 200(120 + 14x - x^2)$$
$$= 24.000 + 2.800x - 200x^2 .$$

Entonces el máximo se alcanza en

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2800}{2\cdot(-200)} = 7 .$$

a) Recordemos que x representa incrementos de 1 UM, no el precio. El precio donde se alcanza la máxima utilidad es: $p = 10 + 1\cdot 7 = 17$

b) El valor máximo de la utilidad es :

$$y_v = U(x_v) = 200(20-7)(6+7) = 200\cdot 13^2 = 33.800UM$$

Alternativa 2: Se basa en obtener utilidad total

$$Utilidad \quad total = Ingreso \quad total - \cos to \quad total$$

$$Ingreso\ total = p\cdot q = (10 + x)(4000 - 200x)$$
$$Costo\ total = 4\cdot q = 4(4000 - 200x) .$$

Así

$$Utilidad \quad total = (10 + x)(4000 - 200x) - 4(4000 - 200x)$$

$$= 200(20 - x)(6 + x) .$$

El punto donde esta función alcanza su máximo es el mismo que el de la función $f(x) = (20 - x)(6 + x) = 120 + 14x - x^2$ y es:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2\cdot(-2)} = 7 .$$

Así la utilidad máxima es

$$y_v = U(x_v) = 200(20-7)(6+7) = 200\cdot 13^2 = 33.800UM$$

Comentario.- Observe que el vértice de esta función o cualquier otra cuadrática ocurre en el punto medio de los cortes. En este caso $\mathrm{U} = 200(20 - x)(6 + x)$, los cortes ocurren en x=20 y en x=-6. El punto medio, promedio de de estas coordenadas, ocurre efectivamente en $x_v = \frac{20 + (-6)}{2} = 7$

Ejemplo 3.- El costo total por producir q unidades de un artículo está dado por $C(q) = 70q - \frac{1}{5}q^2 + \frac{1}{200}q^3$ **a)** ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo? **b)** ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

Solución: Es claro del enunciado del problema que la función a minimizar es el costo promedio. Esta función hay que determinarla a partir de la función de costo total
El costo promedio $\overline{C}$, está definido por

$$\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Pasamos entonces a determinarla a partir de la función costo total.

$$\overline{C}(q)=\frac{70q-\frac{1}{5}q^2+\frac{1}{200}q^3}{q}=70\frac{q}{q}-\frac{1}{5}\frac{q^2}{q}+\frac{1}{200}\frac{q^3}{q}$$

$$\overline{C}(q)=70-\frac{1}{5}q+\frac{1}{200}q^2$$

a) Esta función es cuadrática con $a>0$, así alcanza un mínimo en

$$q_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{1}{5}}{2\cdot(\frac{1}{200})}=\frac{100}{5}=20\,.$$

El nivel de producción en que se alcanza el costo promedio mínimo es 20. Es decir cuando se producen 20 unidades se alcanza el mínimo costo promedio por unidad.

b) El costo promedio mínimo es

$$\overline{c}_{\min}=\overline{C}(q_v)=70-\frac{1}{5}20+\frac{1}{200}(20)^2=32$$

Ejemplo 4.- Se estima que en un terreno si se plantan 200 matas de aguacates, la producción promedio será de 300 kilos por árbol y que por cada árbol menos que se siembre la producción aumentará en 3 kilos por árbol. **a) ¿**Cuál es el número de árboles que debe plantarse en el terreno a fin de obtener la máxima cosecha posible del terreno? **b)** ¿Cuál es la producción máxima posible?

Solución: La cantidad que se quiere maximizar es el tamaño de la cosecha que llamaremos la producción total.

Procedimiento 1:

Una variable que puede ser usada para modelar este problema es

x= Número de árboles que se dejan de plantar

Así tenemos que

Números de árboles a plantar$=200-x$ y

La producción promedio por árbol la podemos expresar como

Producción por árbol$=300+3x$ kilos

De esta manera

La producción total=(número de árboles a plantar) x (*producción por árbol)*

$$=(200-x)\cdot(300+3x)$$

La llevamos a la forma canónica para determinar donde se alcanza el máximo y llamaremos P la producción total.

$$P(x)=60000+300x-3x^2$$

a) La función producción es una función cuadrática que alcanza un máximo, para ver donde se alcanza calculamos el vértice

$$x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{300}{2\cdot(-3)}=50$$

Entonces hay que sembrar $200-50=150$ árboles en ese terreno para alcanzar la máxima cosecha por árbol.

b) Para conseguir el valor máximo simplemente evaluamos la función producción en *x*=50 *la*

$$P(50)=60000+300(50)-3(50)^2$$

$La\ \ producción\ total = 67.500$ kilos es la máxima producción posible

Procedimiento 2: Básicamente se basa en escoger como variable la natural:
x = Número de matas a sembrar en el terreno.
En este caso, si y es la producción promedio de cada mata entonces existe una relación lineal entre las variables cuya pendiente es -3 (¿por qué?). El punto $(x, y) = (200,300)$ cumple con esta relación. Usamos este punto y la pendiente para establecer la ecuación que relaciona x con y

$$y - 300 = -3(x - 200) \quad \text{de aquí}$$

$$y = -3x + 900$$

Tenemos entonces que

La producción total=(número de árboles a plantar) x (*producción por árbol)*

Así, con las variables que estamos trabajando y llamando la producción total P, queda:

$$P = x \cdot y$$
$$P(x) = x(-3x + 900)$$

Esta es una función cuadrática que la llevamos a su forma canónica

$$P(x) = -3x^2 + 900x$$

El lector puede chequear que el vértice se alcanza en $x = 150$ y este es precisamente el número de matas a sembrar.

b) Para obtener la producción máxima evaluamos la función P en 150,

$P(150) = 67.500$ Kilos es la máxima producción.

EJERCICIOS

1) Graficar las siguientes funciones utilizando la técnica de completación de cuadrados:

1.1) $f(x) = -x^2 - 10x - 24$ **;** **1.2)** $f(x) = 4x^2 - 4x - 1$**;** **1.3)** $f(x) = -3x^2 - 6x$

2) Graficar las siguientes funciones utilizando la fórmula del vértice y cortes con los ejes.

2.1) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ **;** **2.2)** $f(x) = 1 - 3x + 2x^2$**;** **2.3)** $f(x) = x(2x + 1)$**;**

2.4) $f(x) = (x + 4)(x - 1)$ **;** **2.5)** $f(x) = 5x - 6 - (x + 2)(x - 1)$ **;** **2.6)** $f(x) = 2(x + 2)^2 + x$

3) Encuentre los máximos o mínimos de las siguientes funciones cuadráticas según corresponda.

3.1) $f(x) = -2x^2 + 3$**;** **3.2)** $f(x) = (x + 3)(x + 1) + 8x$**;**

3.3) $f(x) = 3 - 10x - 5x^2$**;** **3.4)** $f(x) = 2x^2 - 3x$ **;** **3.5)** $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3/2$

4) Resolver gráficamente las siguientes desigualdades:

4.1) $2x^2 + 3x + 1 < 0$; **4.2)** $x^2 + 3x - 10 > 0$ **4.3)** $x^2 + 3x + 3 > 0$

4.4) $2x^2 + 3x + 2 \leq 0$; **4.5)** $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

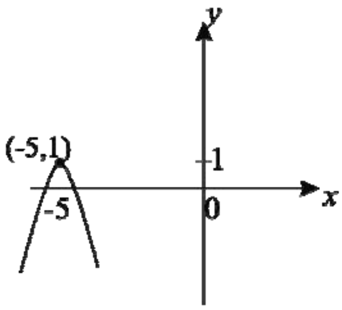
5) Expresar las siguientes funciones en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

5.1) $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$**;** **5.2)** $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ **;** **5.3)** $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

6) Encuentre los cortes con el eje *x* de una función cuadrática que alcanza un mínimo en (-3,1)

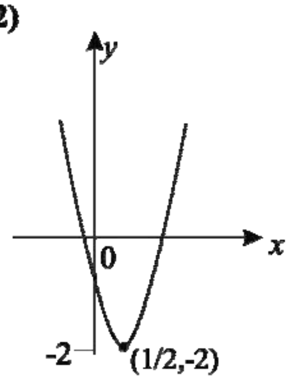
Respuestas:

1.1)



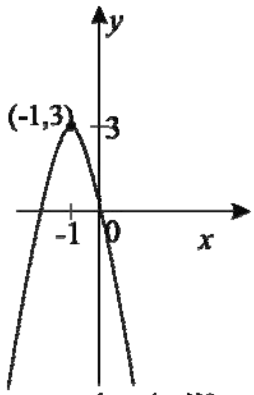
$y = -(x-(-5))^2 + 1$

1.2)



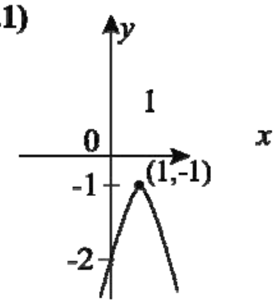
$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

1.3

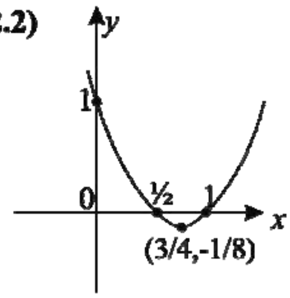


$y = -3(x-(-1))^2 + 3$

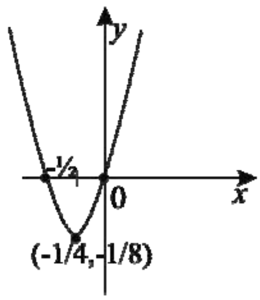
2.1)



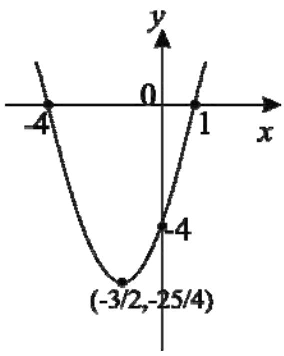
2.2)



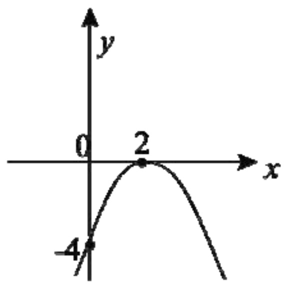
2.3)



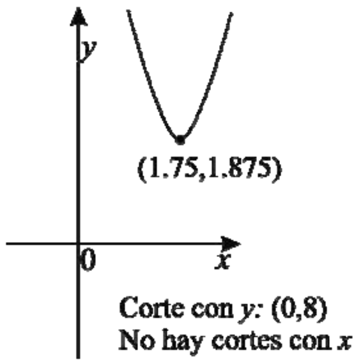
2.4)



2.5)



2.6)



Respuestas: 3.1) max 3 en x=0; **3.2)** min -33 en x=-6; **3.3)** max 8 en x=-1; **3.4**)min-1.125 en x=3/4 **3.5)**max 1.5 en x=1; **4.1)** (-1,-1/2); **4.2)** $(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$ **4.3)R; 4.4)** $\varnothing$; **4.5)** [1,4];

5.1) $f(x)=-4\left(x-(-\frac{1}{4})\right)^2+\frac{5}{4}$**; 5.2)** $f(x)=3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$**; 5.3)** $f(x)=2\left(x-(-\frac{5}{4})\right)^2-\frac{18}{16}$

6) No hay cortes.

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) El costo promedio por unidad al producir q unidades de un artículo es $\bar{c}(q)=30-0.1q+0.005q^2$ ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo? **Respuesta:** 10 unidades

2) Un museo admite grupos grandes de 30 hasta 60 personas con la siguiente política de rebajas: Para grupos menores o iguales a 30 personas la tarifa es de 160UM, pero por cada persona adicional la tarifa por persona se reduce en 2UM. ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cuál el ingreso del museo es máximo?(Observe que si el grupo es de 31 la tarifa por persona es 158, pero si el grupo es de 32 la tarifa es de 156) **Respuesta:** 55 personas

3) El costo total por producir q unidades de un artículo está dado por

$$c(q)=30q-0.3q^2+0.01q^3$$

a) ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo?

b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo? **Respuesta: a)** 15, **b)** 27.75UM.

4) Una disquera puede reproducir un CD a un costo de 10UM cada uno y estima que si vende a un precio de p UM cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente 90-p CD cada mes. **a)** Expresar la utilidad mensual como una función del precio. **b)** Determinar el precio para el cual la utilidad de la casa discográfica es máxima? **c)** ¿Cuál será esa utilidad? **Respuesta: a)** (p-10)(90-p) ; **b)**50 UM; **c)** 1.600UM

5) La función de demanda para el fabricante de un producto es p=f(q)=200-2q, donde p es el precio por unidad cuando q unidades son demandadas. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante. **Respuesta:** q=50 unidades

6) Un kiosko de comida rápida prepara hamburguesas a un costo de 2UM cada una. Las hamburguesas se han vendido a 5UM cada uno y a ese precio, los consumidores han comprado 4000 al mes. El dueño planea incrementar el precio de las hamburguesas y estima que por cada UM de aumento en el precio se venderán 200 hamburguesas menos. **a)** Exprese la utilidad mensual como función del precio. **b)** Dibuje la gráfica de la función utilidad. ¿Qué precio corresponde a la utilidad máxima? **Respuesta:** $U(p)=(p-2)(5000-200p)$; **b)** p=13.5UM.

7) Una tienda de deporte puede obtener un balón de fútbol a un costo de 20UM por pelota y estima que si se fija el precio de venta en p UM la unidad entonces la demanda será 40(22-p) balones al mes. ¿Qué precio deberá fijarse al consumidor a fin de obtener la máxima utilidad? **Respuesta:** p=21

8) Los costos fijos mensuales de una fábrica de morrales son 4000UM y el costo variable por unidad es de 14UM. La fabrica puede vender q unidades a un precio de p por unidad, en donde $p=50-\frac{q}{10}$. ¿Cuántos morrales deberán producirse y venderse al mes de modo de obtener **a)**Ingresos máximos. **b)** Utilidad máxima **Respuesta: a)** 180 unidades **b**) 250 UM

9) Una fábrica de lavadoras vende 5000 lavadoras al mes si el precio es de 400UM cada una y estima que por cada incremento de 1UM las ventas bajarán en 4 lavadoras. Si la fábrica tiene costos fijos mensuales de 40.000UM y el costo variable por lavadora es 200UM. **a) ¿**Qué precio deberá fijarse a cada lavadora de modo que la utilidad sea máxima? **b)** ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima? **Respuesta: a)** 800UM **b)** 2600000 UM

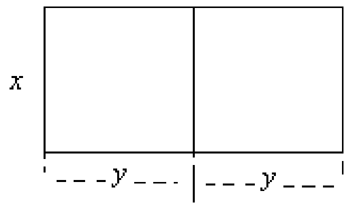
10) En ciertos terrenos se estima que si se plantan 100 matas de mangos por hectárea se obtendrá un valor de la cosecha por árbol de 500 UM en su edad adulta. Se estima que por cada árbol que se siembre de más hará que el valor promedio por árbol disminuya en 4 UM. **a)** Exprese el valor total de la cosecha de una hectárea en edad adulta en función del número de árboles adicionales sembrados. **b)** ¿Cuál es el número de árboles que debe plantarse por hectárea a fin de obtener el valor máximo posible de la cosecha por hectárea? **c)** ¿Cuál es este valor máximo? **Respuesta: a)** $V = 50.000 + 100x - 4x^2$; **b)** 112,5 P(13)= 50624; P(12) =50624 se deben sembrar 112; **c)** 50.624

11) Un productor puede vender 200 unidades de un artículo al mes a un precio de 15UM y 300 unidades a un precio de 10UM **a)** Exprese la demanda q mensual como función del precio asumiendo que existe una relación lineal entre ellas a partir de una producción de 100UM. **b)** Exprese los ingresos como función de q. **c)** Si el costo de producir un artículo es 5UM. Exprese la utilidad como función de p. **d)** ¿Cuál es el precio que hay que fijar a cada artículo a fin de obtener la máxima utilidad? ¿Cuál es el nivel de producción en que se alcanza la utilidad máxima? **e)** ¿Cuál es la utilidad máxima? **Respuesta: a)** $q = -20p + 500$; **b)** $I = -20p^2 + 500p$; **c)** $u = -20p^2 + 600p - 2500$; **d**) $p = 15$ UM y q=200 **e)** 7000UM

12) Un agricultor puede vender el saco de apio a 30UM el primero de septiembre, el precio del apio empieza a disminuir a una tasa aproximada de 0.5 UM por semana. Para la fecha del 1 de septiembre él tiene 120 sacos y estima que su cosecha aumentará en tres sacos por semana. ¿Cuándo le convendrá vender su cosecha? **Respuesta:** dentro de 10 semanas

PROBLEMAS GENERALES

1) Con 200 metros se quiere cercar 2 corrales idénticos como muestra la figura. **a**) Exprese el área total como función de x **b)** Calcule las dimensiones de los corrales que tiene área máxima **Respuesta:**100/3m.x25m.



2) El número de kilómetros K, que puede viajar un automóvil con un litro de gasolina depende de la velocidad. Para una cierta marca de automóvil se estima que la cantidad de kilómetros está dada por el siguiente modelo: $K(v) = \dfrac{-v^2 + 190v}{1400}$, donde v es la velocidad y el modelo se ha demostrado apropiado para velocidades menores de 180km/seg. Calcule la velocidad más rendidora.

3) La tasa de crecimiento de una población está dada por: $y = 1.3x(130.000 - x)$ individuos por año, donde x es el tamaño actual de la población. Estime el tamaño de la población donde la tasa de crecimiento es más alta. (En el modelo $y = 1.3x(130.000 - x)$ 130.000 representa el tamaño tope de la población. Este modelo está sustentado en que la tasa de crecimiento es directamente proporcional al tamaño de la población y a la diferencia entre el tope de crecimiento de la población y el tamaño existente)