ECUACIONES

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con área $1.200\,m^2$ tal que la base es el doble de la altura?

Una persona recibe un salario de 100UM más un 4% sobre las ventas mensuales. Otra persona no recibe salario pero en cambio se le da una bonificación del 8% sobre las ventas mensuales. ¿Cuál es el nivel de ventas para el cuál las dos personas reciben el mismo ingreso al mes?

Estos tipos de problemas pueden ser resueltos planteando una ecuación. Podremos analizar posteriormente que si *x* representa el nivel de ventas mensuales donde se alcanza la igualdad de ingresos entonces la ecuación que resuelve este problema está dada por: $100 + 0.04x = 0.08x$.

Las ecuaciones son protagonistas en las resoluciones de muchos problemas de aplicaciones pero también son piezas claves para conseguir ciertos resultados en cálculo. Es por consiguiente una herramienta que el estudiante debe dominar.

Una ecuación en una variable es un enunciado de igualdad entre dos expresiones algebraicas en la variable.

Ejemplo 1.- Los siguientes son ejemplos de ecuaciones

a) $2x = 10$

b) $t^2 = -2t + 3$

c) $1 - \sqrt{2r + 1} = 0$

d) $\dfrac{5x-1}{x-1} + \dfrac{1}{x} = 0$

e) $x(x+1) - (x+1) = 0$

Estos son ejemplos de ecuaciones en una variable. En los ejemplos **a**, **d** y **e** la variable es *x*. En **b** la variable es *t* y en **c** la variable es *r*. Las expresiones que están al lado del signo de igualdad se llaman miembros de una ecuación.

Se dice que *a* es una solución o raíz de una ecuación si es un valor de *x* que hace que la ecuación sea una proposición verdadera.

5 es una **raíz o una solución** de la ecuación del ejemplo **a**, por cierto es la única solución.

1 y -3 son raíces de la segunda ecuación.

Resolver una ecuación consiste en encontrar todos los valores de *x* que son solución de la ecuación. El conjunto de todas las soluciones es llamado el conjunto solución. A veces se usa la terminología incógnita para referirse a la variable.

Para resolver una ecuación normalmente realizamos una serie de pasos, de acuerdo a la característica de la ecuación. Debemos estar claros si los pasos que realicemos nos conducen a una ecuación con las mismas soluciones o no que la original. Si después de realizar operaciones en las ecuaciones obtenemos otra con las mismas soluciones que la original diremos que ambas ecuaciones **son equivalentes.**

Existen operaciones que garantizan que vamos a obtener ecuaciones **equivalentes a la original** como:

1) Sumar o restar el mismo polinomio a ambos lados de la ecuación.

2) Multiplicar o dividir por una constante distinta de cero ambos miembros de la ecuación.

3) Sustituir una expresión por otra equivalente.

Hay operaciones que pueden **agregar solución**:

1) Multiplicar por un polinomio ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo: Si en la ecuación $2x = 10$ cuya única solución es 5, multiplicamos por (x-1) ambos lados de la ecuación, nos queda la ecuación

$$2x(x-1) = 10(x-1),$$

Esta última ecuación tiene como soluciones 5 y 1. Se agregó una solución.

2) Elevar al cuadrado o a una potencia par ambos lados de una ecuación.

Ejemplo: Si en la ecuación $x = 1$, cuya solución es explícita: 1, elevamos ambos miembros al cuadrado nos queda $x^2 = 1$, el lector puede verificar que las soluciones de esta última son -1 y 1. De nuevo se agregó una solución: -1 que no satisface la original. Las ecuaciones $x^2 = 1$ y $x = 1$ no son equivalentes.

No siempre se agrega solución, Por ejemplo la ecuación $\sqrt{x} = 1$ tiene como única solución 1. Si se eleva al cuadrado ambos miembros queda la ecuación $x = 1$ donde la solución es explícita y la misma que la original. Las ecuaciones $\sqrt{x} = 1$ y $x = 1$ son equivalentes.

En algunos métodos de resolución hay que realizar estas operaciones. En este caso se debe verificar siempre las soluciones encontradas para ver si fueron soluciones añadidas. En el caso de multiplicar por un polinomio, las posibles soluciones añadidas son las raíces del polinomio. Observe como al multiplicar en la ecuación $2x = 10$ por $(x-1)$ a ambos lados de la ecuación se agregó la solución 1, efectivamente este polinomio se hace cero en 1. Así que en el caso que se multiplique por un polinomio simplemente se verifica que las soluciones encontradas tengan sentido en la ecuación original. En el caso de elevar al cuadrado se tienen que verificar las soluciones en la ecuación original.

Hay operaciones que pueden **quitar** soluciones a la ecuación original como:

Dividir por un polinomio a ambos miembros.

La operación de dividir entre un polinomio debe ser evitada, pues se pueden perder soluciones. Es frecuente en los estudiantes resolver la ecuación de la siguiente manera:

CUIDADO!!
Al cancelar puede perder soluciones

$$x^2 = x$$
$$x^{\cancel{2}} = \cancel{x} \cdot 1$$
$$x = 1$$

Al cancelar, realmente se está dividiendo ambos lados por x

La ecuación original $x^2 = x$ tiene dos soluciones: 0 y 1. Al cancelar o dividir entre un polinomio en la variable se perdió la solución 0.

En esta sección aprenderemos a resolver ciertos tipos de ecuaciones. Un primer paso para resolver una ecuación es reconocer que tipo es y entonces aplicar las recomendaciones del caso. El ejemplo 1 nos da una muestra de las ecuaciones a estudiar en este tema:

a) $2x = 10$ es una ecuación lineal

b) $t^2 = -2t + 3$ es una ecuación cuadrática

c) $1 - \sqrt{2r+1} = 0$ es una ecuación con radicales

d) $\frac{5x-1}{x-1} + \frac{1}{x} = 0$ es una ecuación racional

También se enseñarán estrategias que pueden servir para resolver una cierta variedad de ecuaciones.

ECUACIONES LINEALES

Definición.- Diremos que una ecuación es lineal en la variable x si puede escribir en la forma:
$$ax + b = 0$$
con a y b constantes y $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones lineales se deberá realizar una serie de operaciones que conduzcan a ecuaciones equivalentes a la original hasta obtener una ecuación de la forma $x = c$ cuya solución es explícita. Normalmente se dice que la x debe quedar despejada en un lado de la ecuación. Veamos el siguiente ejemplo que ilustra como vamos obteniendo ecuaciones equivalentes:

Ejemplo 1.- Resolver $4x = 2x - 5$

Solución: Cuando las expresiones algebraicas de cada miembro de la ecuación son términos en x y constantes, agrupamos los términos constantes de un lado y los términos en x en el otro lado. El siguiente procedimiento no es el más usual pero nos permite entender métodos más expeditos. Este método se basa en la regla de oro de la resolución de ecuaciones: lo que se le hace a un miembro de la ecuación se le hace al otro para mantener la igualdad.

$4x - 2x = 2x - 5 - 2x$ Restamos $2x$ ambos miembros

$2x = -5$

$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2}$ Dividimos por 2 ambos miembros

$x = \frac{-5}{2}$

Recomendación:
Trabaje cada ecuación en la siguiente línea, esto le permitirá contrastar la ecuación que está escribiendo con la anterior. Deje suficiente espacio entre una ecuación y la siguiente

De aquí, $x = -\frac{5}{2}$ es la única solución de la ecuación $4x = 2x - 5$.

Comentario: Como se puede observar en este ejemplo restar una expresión a ambos lados de una ecuación es equivalente a pensar que una expresión que está sumando pasa restando al otro miembro. De manera similar, si una expresión está dividiendo todo un miembro de la ecuación, entonces pasa multiplicando. Por otro lado si la expresión está multiplicando a todo un miembro de la ecuación pasa dividiendo al otro miembro.

Ejemplo 2.- Resolver $x - 1 = 3(x - 5)$

Solución: Se resuelven primero los paréntesis para luego agrupar las x´s de un lado y las constantes del otro. En general, es conveniente eliminar los paréntesis. Para ello aplicamos la propiedad distributiva en el lado derecho:

$x - 1 = 3(x - 5)$

Pasamos el 15 sumando al otro lado, equivalentemente sumamos 15 a ambos lados.

$x - 1 = 3x - 15$

$x - 1 + 15 = 3x$

Agrupamos los términos en x en el lado derecho, para ello pasamos el x restando al otro lado, equivalentemente restamos x a ambos lados

$14 = 3x - x$

$14 = 2x$

$\frac{14}{2} = x$

Pasamos el 2 dividiendo al otro lado, equivalentemente dividimos por 2 a ambos lados.

$x = 7$

Ejemplo 3.- Resolver $\frac{x-1}{2}-\frac{1}{6}=3$

Solución: Cuando existen denominadores numéricos podemos multiplicar ambos lados por el m.c.m. de los denominadores. Con ello se eliminan los denominadores y se evita de esta forma sumar fracciones que puede ser más tedioso. En este caso el m.c.m. de los denominadores es 6.

$6\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{6}\right)=3\cdot 6$ Se eliminan los paréntesis, distribuyendo el 6

$6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot\frac{1}{6}=18$ Se simplifica

$3\cdot(x-1)-1=18$ Se distribuye el 3

$3x-3-1=18$ Se agrupan los términos constantes en el lado derecho

$3x=22$

$x=\frac{22}{3}$

Tres consejos se han dado en esta sección para resolver ecuaciones lineales, que en general se siguen en orden.
Primero: Si existen denominadores numéricos, elimínelos multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores.
Segundo: Resuelva los paréntesis de acuerdo con las reglas enseñadas.
Tercero: Agrupe los términos en *x* en un miembro y las constantes en otro para finalmente despejar *x*.

Hay que reiterar que estos son sólo consejos prácticos muy generales, seguramente en casos particulares existan otros procedimientos más rápidos.

ECUACIONES LITERALES O EN VARIAS VARIABLES

En algunas ecuaciones nos conseguimos una o varias constantes representadas por letras, por ejemplo: $x(a+1)=3x-b$. La incógnita o variable a despejar es x, las letras a y b representan números.

Para despejar la variable se siguen recomendaciones similares a las dadas arriba.
- **1)** Si existen denominadores numéricos, elimínelos multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores.
- **2)** Resuelva **los paréntesis donde está la variable** de acuerdo con las reglas enseñadas. Esta estrategia hará que ambos lados de la ecuación quede expresado en términos en *x* y en términos que no dependen de *x*.
- **3)** Agrupe los términos en *x* en un miembro y las constantes en otro.

Agregamos un último paso
- **4)** Saque de factor común *x* y pase dividiendo el factor de *x*

Resolvamos el siguiente ejemplo siguiendo estas recomendaciones

Ejemplo 1.- Resolver la ecuación $(1+y)a-y=2y(a+3)$

Solución: Se resuelve el primer paréntesis (la variable a despejar está dentro de este paréntesis)

$a+ya-y=2y(a+3)$ Colocamos los términos con *y* en el lado izquierdo y los que no dependen de *y* en el otro lado.

$ya - y - 2y(a+3) = -a$ En el lado izquierdo sacamos **factor común** y

$y(a-1-2(a+3)) = -a$ Pasamos a dividir el factor de y.

$y = \dfrac{-a}{a-1-2(a+3)}$ Podemos simplificar el denominador

$y = \dfrac{-a}{-a-7}$ Se saca menos de factor común y se usa la ley de cancelación.

$$y = \frac{a}{a+7}$$

En otras ocasiones tenemos dos o más variables que están relacionadas a través de una ecuación y se quiere expresar una variable en términos de la(s) otra(s).

Ejemplo 2.- En la relación $C = \frac{5}{9}(F-32)$**,** despeje F.

Solución: Seguimos las recomendaciones:
Multiplicamos por 9 ambos lados de la ecuación

$9C = 5(F-32)$ Se elimina los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$9C = 5F - 5\cdot 32$ La variable a despejar es F, el término con F se deja a un lado de la ecuación

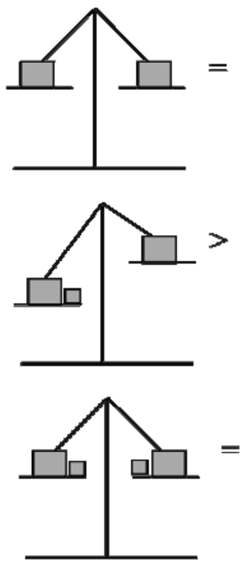
$9C + 5\cdot 32 = 5F$ Se despeja la F

$F = \dfrac{9C + 5\cdot 32}{5}$ Se usa la propiedad $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

Comentario.- Como ya se dijo anteriormente, pueden existir estrategias particulares en cada ecuación que hacen más rápido el despeje. En esta situación podemos multiplicar por $9/5$ ambos lados de la ecuación y obtenemos: $\frac{9}{5}C = F - 32$ y ahora resulta trivial despejar F.

> Recuerde en todo caso la regla de oro del despeje:
>
> *Lo que le haga a todo un miembro se lo hace al otro miembro.*
>
> y tenga en cuenta si la transformación le llevó a una ecuación equivalente a la anterior.



Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $ax + 1 = 3\dfrac{x+b}{a}$**;** **b)** $\dfrac{x}{a-1} = \dfrac{3x}{a+1} - b$

EJERCICIOS

1) Determine si las siguientes ecuaciones son equivalente o no.

1.1) $x = 3$; $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{x-2}$; **1.2)** $x - 1 = 6$; $(x-1)x = 6 \cdot x$; **1.3)** $x^3 = x^2$; $x = 1$

2) Resolver las siguientes ecuaciones

2.1) $3 - 2x = 7$; **2.2)** $5 - 2(x-2) = 13$; **2.3)** $2x - 1 = 4(x-3)$;

2.4) $x - \frac{1}{2} = \frac{x-2}{4}$; **2.5)** $\frac{x+1}{3} + \frac{x+4}{6} = 2$; **2.6)** $\frac{z-1}{2} - \frac{z-1}{3} + \frac{z-1}{4} = 0$;

2.7) $\frac{3-x}{6} - \frac{x-1}{3} = 3 - x$; **2.8)** $\sqrt{3}x - 3 = x$; **2.9)** $(3x-1)^2 = (3x-1)(3x+1)$;

2.10) $\frac{1-3(3-4x)}{3} = 0$ **2.11)** $(1+\sqrt{2})t = 0$; **2.12)** $3(z-1) - 2(3-2z) = 3$;

2.13) $\frac{3}{4}(z-1) + 2(1-z) = 5$; **2.14)** $\sqrt{2}z - \frac{2}{3}(1-z) = 3$; **2.15)** $\frac{2(1-3z)}{3} = 0$;

2.16) $\frac{1}{3}(3x-1) = 2[1-(2x+1)]$; **2.17)** $\frac{(2x-1)(x+4)}{2} - (x-4)(x-3) - 1 = 0$

3) Despeje la variable indicada en las ecuaciones dadas:

3.1) $P = \frac{kV}{T}$; despeje *V;* **3.2)** $\frac{X-\mu}{\sqrt{\pi}\sigma} = 1.96$; despeje *X*

3.3) $A = h\frac{(b+B)}{2}$; despeje *B;* **3.4)** $S = 2xy + 2xz + yz$; despeje *y*

3.5) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = x - 4$; despeje *x;* **3.6)** $(2x-1)(3y-2) = 2$; despeje *y*

3.7) $S = \frac{a-rn}{1-r}$; despeje *n*

Respuestas:

1.1) Equivalentes; **1.2)** No, 0 es solución de la segunda pero no de la primera; **1.3)** No, 0 es solución de la primera pero no de la segunda.

2.1)-2; **2.2)**-2; **2.3)** 11/2; **2.4)** 0; **2.5)**2; **2.6)**1; **2.7)** 13/3; **2.8)** $\frac{3(1+\sqrt{3})}{2}$; **2.9)** 1/3; **2.10)** $\frac{2}{3}$; **2.11)** 0;

2.12)12/7; **2.13)**-3; **2.14)** $\frac{11}{3\sqrt{2}+2}$; **2.15)** $\frac{1}{3}$; **2.16)** 1/15; **2.17)** $\frac{10}{7}$

3.1) $V = \frac{PT}{k}$; **3.2)** $X = \mu + 1.96\sqrt{\pi}\sigma$; **3.3)** $B = -b + \frac{2A}{h}$; **3.4)** $y = \frac{S-2xz}{2x+z}$; **3.5)** $x = \frac{2}{3}y + 8$;

3.6) $y = \frac{4x}{3(2x-1)}$

APLICACIONES

Una gran variedad de problemas que surgen en la práctica se pueden resolver usando ecuaciones. No hay una regla básica para resolverlos frente a la gran variedad de problemas que se pueden plantear. Sin embargo podemos dar algunas sugerencias de trabajo que puedan ayudar al lector.

Pasos recomendados para resolver problemas de ecuaciones

1.- Lea el problema detenidamente si hace falta varias veces, hasta que sea capaz de decir que se quiere conseguir y de que información o datos dispone.

2.- Represente una de las cantidades desconocidas en términos de una variable, x suele ser la más usada. Si hay otra cantidad desconocida intente escribirla en términos de su variable (probablemente necesite algún dato del problema).

3.-Un dibujo o esquema siempre ayuda aclarar situaciones.

4.-Plantear una ecuación. Para ello busque las expresiones verbales que deben ser iguales. Escriba estas expresiones en término de su variable. Esto es, pase de la expresión verbal a la algebraica.

5.- Resuelva la ecuación. Puntualice o remarque la respuesta.

6.- Responda en palabras cada pregunta del problema

El paso probablemente que presente más dificultad es el cuarto. Puede descomponer este paso en los siguientes

4.1 Busque las dos expresiones verbales que deben ser iguales.

4.2 Describa cada una de las partes de sus expresiones verbales en términos de su variable

4.3 Escriba ahora la ecuación como una igualdad de dos expresiones algebraicas en su variable.

Veamos algunos ejemplos:

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

Ejemplo 1.- El precio de un par de zapatos en rebaja es de 25UM. Si la rebaja fue de 20% ¿Cuál era el precio de los zapatos antes de la rebaja?

Solución:

LA VARIABLE

La variable natural aquí es

p=precio del par de zapatos antes de la rebaja

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

Precio de los zapatos rebajados=25

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Ahora debemos expresar *Precio de los zapatos rebajados* en términos de p. Aquí usamos el hecho que tienen una rebaja del 20%. El 20% de p es 0.2p, así el precio rebajado es

$$p-0.2p\,.$$

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Así planteamos la ecuación

$$p-0.2p=25$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Esta ecuación la resolvemos usando los métodos de esta sección

$$0.8p=25$$

$$p=\frac{25}{0.8}=\frac{125}{4}=31{,}25$$

RESPUESTA VERBAL

El precio antes de la rebaja era de 31,25UM.

Ejemplo 2.- Una persona tiene 15.000UM para invertir. Se le ofrecen dos bonos: uno paga 6.% y el otro de mayor riesgo paga el 8.25% anual. Si la persona quiere al cabo de un año un interés del 7% en promedio ¿Cuánto debe invertir en cada bono?

Solución:

En este problema hay dos cantidades desconocidas, cuánto se debe invertir en el bono de 6% y cuánto se debe invertir en el bono de 8.25.

LA VARIABLE

Elegimos

x= cantidad a invertir en el bono de 6%.

CANTIDADES DESCONOCIDAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Observe que podemos expresar la otra cantidad en términos de x

15.000-x= cantidad a invertir en el bono de 8.25%.

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

Interés del primer bono+Interés del segundo bono=el 7% de 15.000

Debemos describir cada uno de los términos de esta ecuación en términos matemáticos que dependan solo de la variable.

<u>Interés del primer bono</u>*:* x UM a un interés del 6% genera al cabo de un año: $0.06\cdot x$ UM

<u>Interés del segundo bono</u>*:* 15.000- x UM a un interés del 8.25% genera al cabo de un año: $0.0825\cdot(15.000-x)$ UM

<u>15.000 UM a un interés del 7% genera al cabo de un año:</u> $0.07\cdot 15.000=1050$ UM

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Así debemos plantear

$$0.06\cdot x+0.0825\cdot(15.000-x)\ =1.050$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Pasamos entonces a resolver esta ecuación.

$$-0.0225x+1237{,}5=1050$$
$$0.0225x=187{,}5$$
$$x=8333{,}33$$

RESPUESTA VERBAL

En conclusión: debe invertir $8333{,}33$ UM en el bono que paga 6% y 6666,66UM en el que paga 8.25%

CONCEPTOS DE UTILIDAD, INGRESO Y COSTO

La utilidad de una empresa sobre su producto es la diferencia entre la cantidad que recibe de las ventas y los costos.

Utilidad=Ingreso-Costo

Esto lo expresamos como

$$U = I - C$$

donde

U=Utilidad,
I=Ingreso por vender q artículos
C=costo total de producción de q artículos

Normalmente, para encontrar el ingreso se usa la ecuación

Ingreso=(precio unitario)x(número de unidades vendidas)

Si se producen y se venden q unidades, entonces esto lo podemos expresar en formulas

$$I = p \cdot q$$

donde p=precio unitario

El costo total de producir q productos se interpreta como la suma de dos costos: Costo fijo y costo variable.

Costo total=Costo Fijo+Costo Variable

CT=CF+CV

El costo fijo (CF) no depende de la cantidad a producir. El alquiler, algunos servicios, etc son parte del costo fijo.

El costo variable si depende del número de unidades a producir. Los costos de materiales y mano de obra son parte del costo variable. Si el costo de producir una unidad es c_u, llamado **costo variable por unidad,** frecuentemente se modela el costo variable como

$$\text{Costo variable} = c_u \cdot q$$

En principio usaremos este modelo que asume que los costos unitarios permanecen constantes independientemente de la cantidad de artículos a producir.

Así la fórmula de arriba también puede ser escrita como:

$$\text{Costo total=CF+}\, c_u \cdot q$$

Comentario: Observe que la parte correspondiente al costo variable en el lado derecho de esta igualdad depende de la variable.

Ejemplo 1.- Una compañía de pastillas de frenos para carros tiene mensualmente gastos fijos de 2.500UM. El costo de fabricar cada juego de pastillas es de 12UM. El fabricante colocará en el mercado cada juego de pastillas a un promedio de 15UM. ¿Cuántos juegos de pastillas deberá producir y vender con el fin de obtener utilidades de 15.000UM al mes?

Solución:

LA VARIABLE

En este caso la cantidad desconocida es la cantidad de pastillas a producir. Definimos

q= la cantidad de pastillas a producir.

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

Se quiere
Utilidad=15.000UM

Ahora la Utilidad la podemos expresar en términos de nuestra variable a través de la relación:

Utilidad=Ingreso total -Costo total

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Queda entonces que el Ingreso total por vender q unidades es:

Ingreso total=15q

El costo variable por unidad es 12UM, el costo variable es $c_u \cdot q = 12q$ y el costo fijo es 2.500UM, así de CT=CF+CV queda:

Costo total=2.500+12q

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Ingreso total-Costo total=15.000

$$15q - (2.500 + 12q) = 15.000$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Resolviendo la ecuación planteada tenemos

$$15q - 2.500 - 12q = 15.000$$

$$3q = 17.500$$

$$q = 17.500/3 \approx 5833{,}3$$

RESPUESTA VERBAL

Se deberá fabricar 5833 pastillas para obtener una ganancia cercana a 15.000UM.

PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

Ejemplo 1.-Una población tiene 20.000 habitantes, si el ritmo de crecimiento ha sido del 5%. ¿Cuál era su población hace un año?

Solución:

LA VARIABLE

Una variable natural aquí es
p=tamaño de la población hace un año

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

Las siguientes expresiones verbales son iguales

Población actual=20.000

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Ahora debemos expresar *Población actual* en términos de p. Aquí usamos el hecho que p ha aumento en un 5%. El 5% de p es 0.05p, así que la población actual es

$$p + 0.05p\ .$$

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Ahora planteamos la ecuación

$$p + 0.05p = 20.000$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Resolvemos la ecuación planteada

$$1.05p = 20.000$$

$$p = \frac{20.000}{1.05} \approx 19048 \text{ hab}$$

RESPUESTA VERBAL

El tamaño de la población era aproximadamente de 19048 habitantes hace un año.

PROBLEMAS DE ECONOMIA

Para cada problema escriba una ecuación que lo solucione. Especifique claramente el significado de su variable y resuelva la ecuación planteada dando verbalmente la solución al problema.

1) El costo de adquisición de un producto es 5.6UM. ¿Qué precio deberá fijarse a fin de obtener una ganancia de 25% sobre el precio de venta? **Respuesta:** Precio a fijar es 7.47 UM

2) Un fabricante de un cierto artículo puede vender todo lo que produce a un precio de 6UM cada uno. Si existen mensualmente unos gastos fijos de 1.200UM y el costo de fabricación por artículo es 4UM. ¿Cuántos artículos debería producir y vender con el fin de obtener utilidades de 15.000UM al mes? **Respuesta:** Deberá producir 8100 artículos

3) Una persona tiene 25.000UM para invertir en dos bonos, uno paga 5% y el otro de mayor riesgo paga el 6.5% anual. Si la persona quiere al cabo de un año una utilidad debido a los intereses de 1500UM. ¿Cuánto debe invertir en cada bono? **Respuesta:** En el de 5% debe invertir 8333,3

4) Una línea aérea sabe que en promedio un 10% de las reservaciones de una ruta no se hacen efectivas. El tipo de avión que cubre la ruta tiene 106 puestos. ¿Cuántas reservaciones deberá hacer la aerolínea a fin de que en promedio se monten 103 pasajeros? **Respuesta:** Número de reservaciones 114,4=114

5) Un fabricante de cuadernos vende cada gruesa de cuadernas a 20UM. El costo variable por unidad de cada gruesa es de 15UM. Los costos fijos mensuales son de 9000UM. El fabricante desea saber cuántas gruesas deberá producir y vender al mes con el fin de obtener utilidades 1000UM **Respuesta:** 2000 gruesas. (Comentario: una gruesa de cuadernos son 144 cuadernos)

6) Suponga que una compañía ofrece un puesto en ventas y deja que el empleado elija entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga 1200UM más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una sola comisión del 7% sobre sus ventas. **a)** ¿Cuál deberá ser el nivel de ventas para que el primer método de salario tenga una remuneración de 2000UM **b**) ¿Cuál deberá ser el nivel de ventas para que el segundo método de salario tenga una remuneración de 2000UM **c)** ¿cuál es el nivel de ventas para que los métodos de salarios tengan la misma remuneración?
Respuesta: 40.000UM; 28.571; 24.000

7) Un negocio adquirió 100 computadoras a un costo de 1200UM cada una. Se han vendido 55 máquinas con una ganancia del 20% sobre el costo. ¿Cómo debería fijarse el precio de las restantes a fin que la ganancia total sea del 35%? **Respuesta:** 1840UM

8) Un fabricante de un artículo tiene gastos mensuales fijos de 6.000 UM. Si el costo de cada unidad (incluye mano de obra y material) es 20UM y el fabricante vende cada uno en 40UM. ¿Cuántos artículos debe producir y vender al mes a fin de tener utilidades de 30.000UM? **Respuesta:** 1800

9) Un fabricante tiene 2000 unidades de un producto cuyo precio unitario es 15UM. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en 15%. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2000 unidades sea igual a 32.000UM. ¿Cuál es el número de unidades que puede ser vendido este mes? **Respuesta:** 1111 unidades

10) El costo de adquisición de un equipo de sonido es de 120UM. ¿Qué precio se debe colocar a la etiqueta de tal manera que cuando se haga una rebaja del 20% el comerciante reciba una ganancia del 20% sobre el costo de adquisición? **Respuesta:** Deberá colocarle un precio de 180 UM

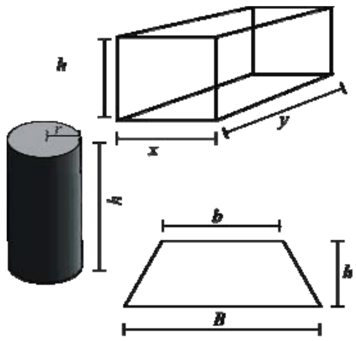
11) Un carpintero ha pactado con un cliente que tiene que pagarle 120UM por la construcción de una biblioteca. Este precio incluye el IVA. ¿Cuál es el precio sin IVA de la biblioteca? Asuma el IVA del 11%? **Respuesta:** El precio sin IVA es 108,1UM

12) El precio de un celular con el IVA del 14% era de 250UM ¿Cuál es el precio del celular con el IVA del 11%? **Respuesta:** El precio del celular con el IVA del 11% es 243,42UM
13) Un fabricante tiene 2500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de 5UM. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en 0.5 UM. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades sea igual a 13.100UM. ¿Cuál es el número de unidades que pueden ser vendidas este mes? **Respuesta:** Pueden ser vendidas 1300 unidades

14) Plantee la ecuación verbal que resuelve cada uno de los siguientes problemas. Luego escriba la ecuación en términos de su variable
Una fábrica de morrales escolares piensa producir un único modelo para el próximo año escolar y ha estimado el costo de cada morral en 3UM. Los gastos fijos mensuales de su empresa son de 50.000UM al mes. El piensa vender los morrales en 10UM. ¿Cuántas unidades debe producir y vender a fin que
1) la utilidad sea el doble que los gastos fijos mensuales?; **2)** los ingresos sean el doble que los costos? **3)** la utilidad sea igual a los costos; **4)** la utilidad sea un 10% más de los costos totales? **5)** los costos totales sean la mitad que el ingreso? **Respuestas: 1)** U=100.000; $10q-(50.000+3q)=100.000$ **2)** I=2CT; $10q=2(50.000+3q)$ **3)** U=CT ; $10q-(50.000+3q)=(50.000+3q)$; **4)** U=CT+10% de CT; $10q-(50.000+3q)=(50.000+3q)+0.1(50.000+3q)$ **5)** CT=I/2.

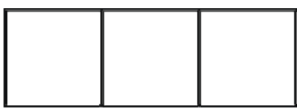
PROBLEMAS VARIADOS:

1) Se necesita preparar una solución de 30ml con una concentración de 2% de un soluto X. Si se tiene disponibles presentaciones de 1% y 5%. ¿Qué cantidad de cada uno debe usar para tener la solución requerida? **Respuesta** 22,5 de la del 1%



2) **a)** Demuestre que el área de la superficie de una caja rectangular es
$A=2x\cdot y+2x\cdot h+2y\cdot h$.
b) Despeje *h*
3) El volumen de un cilindro es $V=\pi\cdot r^2h$. Despeje *h*
4) El área de un trapecio es $A=\frac{1}{2}h(b+B)$. Despeje *h*

5) En los tres primeros parciales un alumno obtuvo como calificaciones 10, 12, 09. ¿Cuánto deberá sacar en el siguiente examen para obtener un promedio igual a 11.5? **Respuesta** 15
6) El promedio de los tres primeros parciales fue 14,25. ¿Cuánto deberá sacar en el último parcial para obtener un promedio de 15.5? **Respuesta** 19,25



7) Se quiere hacer tres corrales cuadrados como muestra el dibujo, para ello se disponen de un presupuesto de 180UM. Si el metro lineal de cerca interior cuesta 1 UM y el de cerca exterior 2UM. ¿Cómo deben ser las dimensiones de los corrales que usan todo el presupuesto? **Respuesta**: 20/3 metrosx20/3metros.
8) Un comerciante tiene dos tipos de cafés, el primero, lo vende a 16UM el kilo, el segundo lo vende a 22UM el kilo. Quiere hacer una mezcla para venderla a 19,5UM sin tener ninguna utilidad adicional. ¿Que porcentaje de café de cada tipo debe tener la mezcla? **Respuesta:** 41.6% del malo.
9) La ley establece que las personas mayores de 60 años pagan la mitad del valor del pasaje aéreo y los niños tienen un descuentos del 40%. Una familia con papá, mamá, tres niños y dos abuelos mayores de 60 pagó en total 3.300 UM. ¿Cuál es el precio del pasaje normal? **Respuesta:** 687,5 UM

PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

1) Una ciudad tenía 220.000 habitantes hace 2 años. ¿Cuál será la población dentro de un año, si ha estado creciendo a un ritmo del 3%?
2) Si una población tiene actualmente 250.000habitantes y ha estado creciendo a un ritmo del 2% anual. ¿Cuál era su población hace un año?

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN PARA RESOLVER ECUACIONES. PRODUCTO CERO.

Este es un método de resolución de ecuaciones que permite resolver una gran variedad de ecuaciones. Se basa en la propiedad de los números reales en que si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$. Este método es aplicable si luego de transformar la ecuación original en otra ecuación donde el cero esté en un miembro de la ecuación, el otro miembro sea fácil de factorizar.

Puntualicemos los pasos para resolver ecuaciones por este método:
1.- Se lleva a la forma *expresión*=0,
2.- Se factoriza la *expresión*

$$expresión= (fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k)$$

Así la ecuación queda escrita como

$$(fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k)=0$$

3.- Se usa el razonamiento que si un producto es cero

$$(fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k)=0$$

entonces algunos de los factores es cero. Por consiguiente se plantean tantas ecuaciones como factores, todas las ecuaciones igualadas a cero.

$$fact.1=0; \quad fact.2=0; \quad \ldots \quad fact.k=0$$

4.-Se resuelven todas las ecuaciones planteadas. Las soluciones de la ecuación original son las soluciones de todas las ecuaciones planteadas de los factores, excepto aquellas donde no tienen sentido evaluar la ecuación original

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones
a) $x^2-4x\ -5=0$**;** **b)** $x^3-2x^2+x=0$**;** **c)** $2x^3-3x^2-8x-3=0$
Solución:
a) Primero factorizamos $x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$(x-5)=0$ ó $(x+1)=0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x=5$ ó $x=-1$

Así que el conjunto solución de esta ecuación es {5,-1}.

b) Primero factorizamos $x^3-2x^2+x=0$ usando primero factor común.

$x(x^2-2x+1)=0$

$x(x-1)^2=0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x=0$ ó $(x-1)=0$ ó $(x-1)=0$ Alternativamente podemos pensar $\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{0}$

$x=0$ ó $x=1$ ó $x=1$

Así que el conjunto solución de esta ecuación es {0,1}.

c) Usamos la técnica de factorización para resolver la ecuación $2x^3-3x^2-8x-3=0$, pero para ello debemos factorizar el lado izquierdo. Usamos Ruffini para factorizar.

	2	−3	−8	−3
−1		−2	5	3
−−	−−	−−	−−	−−
	2	−5	−3	0
3		6	3	
−−	−−	−−	−−	−−
	2	1	0	

De esta tabla obtenemos

$$P(x) = (2x+1)(x-3)(x+1)\,.$$

Así que la ecuación de arriba es equivalente a

$$(2x+1)(x-3)(x+1) = 0\,.$$

Planteamos

$$(2x+1) = 0\,; \qquad (x-3) = 0\,; \qquad (x+1) = 0$$

Es inmediato ver que las soluciones de estas ecuaciones son $-\frac{1}{2}, 3$ y -1. Como cada una de estas soluciones pueden ser evaluadas en la ecuación original entonces son soluciones de la original.

Así que el conjunto solución de la ecuación original es $\left\{-\frac{1}{2}, 3, 1\right\}$

Ejemplo 2.- Resolver las siguientes ecuaciones

a) $x^3 = 2x$ **; b)** $(x-1) = 2x(x-1)$

Solución:

a) Observe que en esta ecuación $x^3 = 2x$ no podemos simplificar las *x*, pues perdemos solución, (eliminar las *x* es lo mismo que dividir entre x). Si pasamos restando todo al lado izquierdo, dejando en el lado derecho el cero, podemos aplicar la técnica de factorización

$x^3 - 2x = 0$ Factorizamos

$x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ ó $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x = 0$ ó $x - \sqrt{2} = 0$ ó $x + \sqrt{2} = 0$ Resolvemos cada una

$x = 0$ ó $x = \sqrt{2}$ ó $x = -\sqrt{2}$

Así que el conjunto solución de la ecuación $x^3 = 2x$ es $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

b) Podemos hacer un comentario similar al ejercicio pasado, así que aplicamos la técnica de factorización, con el primer paso que es dejando de un lado el 0

$(x-1) = 2x(x-1)$

$(x-1) - 2x(x-1) = 0$ Factorizamos sacando de factor común $(x-1)$

$(x-1)(1-2x) = 0$ Planteamos 2 ecuaciones

$(x-1) = 0$ ó $(1-2x) = 0$ **Recuerde:** Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x=1$ ó $x=\frac{1}{2}$

Así el conjunto solución de la ecuación $(x-1)=2x(x-1)$ es $\left\{\frac{1}{2},1\right\}$.

El siguiente ejemplo pretende ilustrar que este método se aplica no sólo a ecuaciones polinómicas.

Ejemplo 3.- Resolver las siguientes ecuaciones $x(x+1)^{1/2}-3(x+1)^{3/2}=0$.

Solución:

a) $x(x+1)^{1/2}-3(x+1)^{3/2}=0$. Primero factorizamos sacando factor común $(x+1)^{1/2}$

$(x+1)^{1/2}(x-3(x+1))=0$

$(x+1)^{1/2}(x-3x-3)=0$

$(x+1)^{1/2}(-2x-3)=0$. Planteamos 2 ecuaciones

$(x+1)^{1/2}=0$ ó $(-2x-3)=0$

Para resolver la primera ecuación elevamos ambos miembros al cuadrado

$\left((x+1)^{1/2}\right)^2=0^2$ ó $x=-\frac{3}{2}$

$x+1=0$ ó $x=-\frac{3}{2}$

$x=-1$ ó $x=-\frac{3}{2}$.

Siempre se debe chequear que ambas soluciones tengan sentido en la ecuación original, en este caso $x=-\frac{3}{2}$ lo descartamos como solución porque al evaluar en la ecuación original obtenemos expresiones que no son reales. Así que la única solución de la ecuación original es $x=-1$.

.

Ejercicio de desarrollo Resolver las siguientes ecuaciones

a) $x^2-4x+3=0$ **b)** $(x+2)^2-3(x+2)^3=0$

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones por factorización

1.1) $x^2-6x+8=0$; **1.2)** $(x-1)(x+2)(x+4)=0$; **1.3)** $x^3-x^2-12x=0$;

1.4) $x^2\sqrt{x}=\sqrt{x}$; **1.5)** $(x-1)^3=(x-1)^2$; **1.6)** $x^3=x(x+2)$;

1.7) $(x-2)(x-1)^3-2(x-2)^2(x-1)^2=0$; **1.8)** $(x-2)(x^2-3)^{1/2}+4(x^2-3)^{3/2}=0$;

1.9) $3x^3-2x^2-7x-2=0$; **1.10)** $5x^4-24x^3+30x^2-8x-3=0$

Respuestas:

1.1) 2,4; **1.2)** 1,-2,-4; **1.3)**-3,0,4; **1.4)** -1,0,1; **1.5)** 1,2; **1.6)** 0,-1,2; **1.7**) 1,2,3; **1.8**) $-2,\frac{7}{2},\sqrt{3},-\sqrt{3}$,

1.9) $-\frac{1}{2}$,2 y -1. **1.10)** $-\frac{1}{5}$,3 y 1

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $\boldsymbol{\frac{P}{Q}=0}$

En la sección pasada vimos como la propiedad de los números reales concerniente a un producto igualado a cero nos llevaba a un método de resolución de ecuaciones**.** En esta sección queremos ver el método cuando un cociente es cero.

Veamos primero la propiedad en los números reales:

Si $b \neq 0$, tenemos que $\frac{a}{b}=0$ si y sólo si $a=0$.

Si tenemos una ecuación de la forma $\frac{P}{Q}=0$, entonces $P=0$, donde P es una expresión en la variable *x*. Las soluciones de $\frac{P}{Q}=0$ son todas las soluciones de $P=0$ que tienen sentido evaluarlas en $\frac{P}{Q}=0$. Esto quiere decir que no haya división entre cero o un radical de índice par con radicando positivo

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $\frac{x^2-2}{x-2}=0$; **b)** $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$;

c) $\frac{2}{2x-1}=0$

Solución:

a) Las soluciones de $\frac{x^2-2}{x-2}=0$ son las soluciones de $x^2-2=0$ siempre y cuando tengan sentido en la original. Esto es, que las raíces no se anulen en el denominador. Las soluciones de $x^2-2=0$ son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. Estas son soluciones de la ecuación original.

b) Las soluciones de $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$ son las soluciones de $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ siempre y cuando tenga sentido en la ecuación original.

La ecuación $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ la resolvemos por factorización:

$x(x+1)\big((x+1)-x\big)=0$ Se sacó $x(x+1)$ de F.C.

$x(x+1)\big((x+1)-x\big)=0$

$x(x+1)\cdot 1=0$ Planteamos dos ecuaciones

$x=0$ ó $(x+1)=0$.

Así que la ecuación $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ tiene como soluciones $x=0,-1$. En este caso tenemos que $x=0$ satisface la ecuación original $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$, sin embargo $x=-1$ no tiene sentido en esta ecuación, pues $\frac{0}{0}$ no está definido. Por tanto la ecuación original tiene una única solución dada por $x=0$.

c) En la ecuación $\frac{2}{2x-1}=0$, planteamos $2=0$, esta ecuación no tiene solución, por tanto la ecuación original tampoco.

Ejemplo 2.- Resolver la ecuación $1-\frac{2}{x-2}=0$

Solución: Esta ecuación no es de la forma $\frac{P}{Q}=0$, sin embargo lo podemos llevar a esta forma sumando los términos del lado izquierdo.

$$\frac{x-2-2}{x-2}=0$$

Las soluciones de esta última están contenidas en las soluciones de $x-4=0$, cuya solución $x=4$ efectivamente satisface la original. Por tanto $x=4$ es la única solución de $1-\frac{2}{x-2}=0$.

(Otra forma de resolver esta ecuación es trabajando con la ecuación equivalente $1=\frac{2}{x-2}$,
Como $x-2$ está dividiendo pasa multiplicando al otro lado, equivale a decir que multiplicamos por $x-2$ ambos lados, queda entonces $x-2=2$ cuya solución es la misma que la anterior).

Ejercicio de desarrollo.- Resolver la ecuación $\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-x}{x-1}-2x\right)=0$

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones identificándolas con la forma $\frac{P}{Q}=0$

1.1) $\frac{x^2-8x}{x+1}=0$**;** **1.2)** $\frac{\sqrt{4}}{x-1}=0$**;** **1.3)** $\frac{2(x-1)(x+2)^3-3(x-1)^2(x+2)^2}{(x+2)^6}=0$**;**

1.4) $\frac{1}{x}-4x=0$; **1.5)** $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=0$; **1.6)** $2\sqrt{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=0$

Respuestas:

1.1) $\frac{x^2-8x}{x+1}=0$**; 1.2)**No tiene solución; **1.3)** 1,7 **; (**el -2 no es solución**) 1.4)** $-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$ (0 no es solución); **1.5)** 1;-1 (0 no es solución); **1.6)** 1/3

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $x^k = d$, con d constante

Este tipo de ecuación es bastante frecuente. La recomendación para resolverla es:

> Tomar raíz con índice k a ambos lados, considerando que para k par está la solución negativa también. Así
>
> $$\begin{cases} x = \sqrt[k]{d} & si \quad k \quad es \quad impar \\ x = \pm\sqrt[k]{d} & si \quad k \quad es \quad par, \quad d \geq 0 \end{cases},$$
>
> Si k es par y d<0 la ecuación no tiene solución

-Justificación para el caso *k*=3

$x^3 = d$ se escribe como

$x^3 - d = 0$, se factoriza

$(x - \sqrt[3]{d})(x^2 + \sqrt[3]{d}x + (\sqrt[3]{d})^2) = 0$ se plantean dos ecuaciones

$(x - \sqrt[3]{d}) = 0$ y $(x^2 + \sqrt[3]{d}x + (\sqrt[3]{d})^2) = 0$

La primera tiene como solución $x = \sqrt[3]{d}$. Se puede verificar que la segunda no tiene soluciones reales.

-Justificación para el caso *k*=2

- Si d es negativo es claro que la ecuación $x^2 = d$ no tiene solución pues cualquier número real al elevarlo al cuadrado da mayor o igual a cero, nunca podrá ser negativo.
- Si d es positivo entonces usamos el método de factorización

  $x^2 = d$ se escribe como

  $x^2 - d = 0$, se factoriza (lo pensamos como $x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0$)

  $(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0$ se plantean dos ecuaciones

  $(x - \sqrt{d}) = 0$ y $(x + \sqrt{d}) = 0$

La primera tiene como solución $x = \sqrt{d}$ y la segunda tiene como solución $x = -\sqrt{d}$.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones **a)** $x^2 = 4$; **b)** $x^3 = -81$; **c)** $x^6 = -2$;

Solución:

a) Tomamos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación: $x^2 = 4$. Recuerde que como el índice es par se agrega la positiva y la negativa. Así las soluciones son: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

b) Al tomar raíz cúbica en ambos lados de $x^3 = -81$ queda $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-81}$. Por tanto $x = -3 \cdot \sqrt[3]{3}$.

c) Como 6 es un índice par, la ecuación $x^6 = -2$ no tiene solución real, efectivamente $x = \sqrt[6]{-2} \notin R$.

Ejemplo 2.- Resolver las siguientes ecuaciones **a)** $6x^6 - 2 = 0$; **b)** $(y+1)^3 = 7$;

Solución: a) La ecuación $6x^6 - 2 = 0$, la llevamos a la forma $x^k = d$, despejando x^6.

$6x^6 = 2$

$$x^6 = \frac{1}{3}$$

Ahora tomamos raíz a ambos lados y considerando que al ser el índice de la raíz par se tiene la raíz positiva y la negativa.

$$x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$$

b) La ecuación $(y+1)^3 = 7$ no es exactamente de esta forma, pero igual se puede resolver usando la recomendación con respecto a $(y+1)^3$. Se toma raíz cúbica a ambos las de la ecuación.

$$\sqrt[3]{(y+1)^3} = \sqrt[3]{7}$$

$$(y+1) = \sqrt[3]{7}$$

$$y = \sqrt[3]{7} - 1$$

Así que la solución de esta ecuación es $y = \sqrt[3]{7} - 1$.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver la ecuación $9(z+3)^2 - 4 = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS.

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es resuelta frecuentemente usando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con los métodos vistos anteriormente podemos justificar esta fórmula, llevando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ a otra equivalente de la forma $(x+d)^2 = k$.

1.- Dejamos los dos primeros términos de un lado de la ecuación y el término constante del otro lado.

$$ax^2 + bx = -c$$

2.- Dividimos ambos términos por a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}.$$

3.- La idea ahora es completar cuadrados. Esto es sumar en ambos miembros una misma cantidad de tal manera que el miembro izquierdo sea el desarrollo de un producto notable de la forma

$(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. El término $\frac{b}{a}x$ debe ser el término $2dx$, así que $\frac{b}{a} = 2d$

De aquí $d = \frac{b}{2a}$. Así que debemos sumar a ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$ Restando las fracciones del lado derecho obtenemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

4.- Esta última tiene la forma anteriormente vista con potencia par. Tomamos raíz cuadrada a ambos lados, considerando que tenemos potencia par.

$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ Se despeja x

$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Finalmente obtenemos la fórmula de la ecuación de segundo grado o fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La cantidad b^2-4ac es llamada el discriminante.

Es claro que

- Si $b^2-4ac<0$ la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene solución.
- Si $b^2-4ac=0$ la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene una única solución ($x=\frac{-b}{2a}$)
- Si $b^2-4ac>0$ la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones distintas.

El método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas puede resultar más rápido que usar la ecuación de segundo grado cuando se puede aplicar, pero no siempre se puede o resulta fácil la factorización.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $2x^2-x-6=0$; **b)** $(y+1)(y+4)=2y$
Solución:
a) Como no se puede conseguir una factorización de una manera rápida en el lado izquierdo de la ecuación $2x^2-x-6=0$ es preferible usar la ecuación de segundo grado, identificando $a=2$; $b=-1$ y $c=-6$.

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2(-6)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}$$

Así que las soluciones están dadas por $x_1=\frac{1+7}{4}=2$ y $x_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}$.

Observación: El método escogido fue apreciativo, pudimos haber factorizado por Ruffini, pero en el momento consideramos que podíamos emplear más tiempo que usando la fórmula de segundo grado.

b) Observamos que la ecuación $(y+1)(y+4)=2y$ es de segundo grado, pues al desarrollar el producto vemos que aparece un término cuadrático. Así que realizamos operaciones para llevar esta ecuación a la forma canónica. Primero realizamos el producto del lado izquierdo.

$$y^2+5y+4=2y$$

$$y^2+3y+4=0$$

No podemos factorizar rápidamente, usamos entonces la fórmula de segundo grado para resolver esta ecuación, identificando $a=1$; $b=3$ y $c=4$

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 4}}{2}$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Como el discriminante es negativo la ecuación no tiene solución real.

Comentario: En este ejemplo no hay factorización posible.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación $(x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 8)(x^2 - 2x - 3) = 0$.
Solución: Resolvemos esta ecuación por el método de factorización, como un producto está igualado a cero entonces uno de los tres factores es cero. Así pues planteamos tres ecuaciones

$(x^2 - 3x + 1) = 0$ ó $(2x^2 - 8) = 0$ ó $(x^2 - 2x - 3) = 0$

Las tres ecuaciones son de segundo grado, pero cada una tiene su manera conveniente de resolverla. La primera la resolvemos por la fórmula de segundo grado, la segunda despejando x^2 y tomando más o menos raíz y la tercera la resolvemos por factorización.

- La ecuación $(x^2 - 3x + 1) = 0$ tiene dos soluciones

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- La ecuación $(2x^2 - 8) = 0$ es equivalente a $x^2 = 4$, cuyas soluciones son $+2$ y -2.
- La ecuación $(x^2 - 2x - 3) = 0$ la resolvemos por el método de factorización:

  $(x-3)(x+1) = 0$ Planteamos dos ecuaciones

  $(x-3) = 0$ ó $(x+1) = 0$

  Las soluciones de estas ecuaciones son $x = 3$ y $x = -1$.

En conclusión, el conjunto solución de la ecuación $(x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 8)(x^2 - 2x - 3) = 0$ es $\left\{-2, -1, 2, 3, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ejercicio de desarrollo- Resolver la ecuación $(2x^2 - 3x + 1)\left(\frac{2 - 3x^2}{x - 2}\right) = 0$.

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones identificándolas con la forma $x^k = d$

1.1) $x^3 + 8 = 0$**;** **1.2)** $x^2 + 8 = 0$**;** **1.3)** $64x^6 - 1 = 0$**;**
1.4) $(x+1)^4 = 16$**;** **1.5)** $9x^2 - 25 = 0$**;** **1.6)** $8(x+2)^3 - 1 = 0$**;**
1.7) $(x+3)^4 = 0$**;** **1.8)** $x^2 + 1 = 3x^2$**;** **1.9)** $y^3 = \frac{2y^3 - 1000}{3}$**.**

2) Resolver las siguientes ecuaciones

2.1) $2 - 3x + 4x^2 = 0$**;** **2.2)** $x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$**;** **2.3)** $x^3 - 4x^2 - x = 0$**;**
2.4) $(x^2 - 4x + 1)^4 = 0$**;** **2.5)** $(x^2 - 25)(x^2 - 2x - 3) = 0$**;** **2.6)** $(x+2)^2 - 4x = 0$**.**

Respuestas:

1.1) $\sqrt[3]{-8}$; **1.2)** No tiene solución; **1.3)** $\pm\frac{1}{2}$; **1.4)** $1, -3$; **1.5)** $\pm\frac{5}{3}$; **1.6)** $-\frac{3}{2}$; **1.7)** -3;
1.8) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; **1.9)** -10; **2.1)** No tiene soluciones reales; **2.2)** $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$ **2.3)** $0; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}$;
2.4) $2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$; **2.5)** $5; -5; 3; -1$; **2.6)** No tiene soluciones reales.

ECUACIONES CON RADICALES

Las ecuaciones con radicales son aquellas donde la incógnita está dentro del radical.

Por ejemplo la ecuación $\sqrt{x^2+3}+3=x$ la llamaremos de esta manera porque la variable está dentro del signo radical. La ecuación $\sqrt{2}x+3=x^2$ no la consideramos una ecuación con radical porque la variable no está dentro de la raíz.

> Para resolver este tipo de ecuación se recomienda los siguientes pasos:
> **1)** Dejar el término con el radical solo de un lado de la ecuación.
> **2)** Elevar ambos miembros a la potencia del índice. Estar pendiente si hay planteado un producto notable.
> **3)** Simplifique e identifique la ecuación resultante para resolverla de acuerdo a la recomendación. Recuerde que al elevar a una potencia par puede estar agregando soluciones extrañas, en este caso hay que verificar las soluciones en la original.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $\sqrt[3]{x-3}-2=0$; **b)** $\sqrt{x^2+3}+3=x$; **c)** $x-4\sqrt{x+3}+6=0$
Solución: Todas estas ecuaciones son con radicales.
Recuerde: que en este tipo de ecuación el primer paso de la recomendación es dejar solo el radical

a) $\sqrt[3]{x-3}-2=0$ Se deja solo el radical

$\sqrt[3]{x-3}=2$; Se eleva al cubo ambos miembros

$(\sqrt[3]{x-3})^3=2^3$

$x-3=8$ Quedó una ecuación lineal que resolvemos

$x=11$

b) $\sqrt{x^2+3}+3=x$ Se deja solo el radical

$\sqrt{x^2+3}=x-3$;

$\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2=(x-3)^2$ Se eleva al cuadrado ambos miembros

$x^2+3=x^2-6x+9$ El lado derecho es el desarrollo de un producto notable

$6x=6$ Se simplificó

$x=1$.

Como elevamos al cuadrado pudimos agregar solución. Se procede a comprobar la solución en la ecuación original

Comprobación: Veamos si $x=1$ satisface la ecuación $\sqrt{x^2+3}+3=x$
Lado izquierdo de la ecuación: $\sqrt{1^2+3}+3=\sqrt{4}+3=5$.
Lado derecho: 1.
Como $5\neq 1$, entonces $x=1$ no es solución de la ecuación, fue añadida al elevar al cuadrado. **La ecuación no tiene solución**.

c) $x-4\sqrt{x+3}+6=0$ Se deja solo el radical

$x+6=4\sqrt{x+3}$ Se eleva al cuadrado ambos miembros

$(x+6)^2=\left(4\sqrt{x+3}\right)^2$

$x^2 + 12x + 36 = 4^2\left(\sqrt{x+3}\right)^2$ En el lado izquierdo se desarrolló un producto notable

$x^2 + 12x + 36 = 16(x+3)$ Se aplica la propiedad distributiva

$x^2 + 12x + 36 = 16x + 48$ Quedó una ecuación cuadrática que se resuelve por la resolvente

$x^2 - 4x - 12 = 0$ (Se pudo resolver también por factorización)

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$x = 6$ y $x = -2$.

Como elevamos al cuadrado pudimos agregar solución. Se procede a comprobar la solución en la ecuación original.

Comprobación: Veamos si $x = 6$ satisface la ecuación $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$

Lado izquierdo: $6 - 4\sqrt{6+3} + 6 = 12 - 4\sqrt{9} = 0$.

Lado derecho: 0

Como $0 = 0$, entonces $x = 12$ si es solución de la ecuación

Veremos si $x = -2$ satisface la ecuación $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$

Lado derecho: $-2 - 4\sqrt{-2+3} + 6 = 4 - 4\sqrt{1} = 0$.

Lado izquierdo: 0

Como $0 = 0$, entonces $x = -2$ también es solución de la ecuación

Como conclusión la ecuación dada tiene dos soluciones; -2 y 6

Ejemplo 2.- Resolver $(\sqrt{x+1} - 2)(2\sqrt{x^2+1} - 2) = 0$

Solución: Se resuelve por el método de factorización planteando dos ecuaciones

$(\sqrt{x+1} - 2) = 0$ ó $(2\sqrt{x^2+1} - 2) = 0$

Las dos son ecuaciones con radicales donde se debe aislar el radical:

- Resolvemos la primera ecuación

  $\sqrt{x+1} = 2$ Se eleva ambos miembros al cuadrado

  $x + 1 = 4$

  La solución de esta última es $x = 3$ la cual satisface la ecuación $(\sqrt{x+1} - 2) = 0$

- Resolvemos la segunda ecuación

  $2\sqrt{x^2+1} = 2$

  $(2\sqrt{x^2+1})^2 = 4$

  $4(x^2+1) = 4$

  $x^2 + 1 = 1$

  $x = 0$ Dejamos al lector verificar que satisface la ecuación original

  Las únicas soluciones de $(\sqrt{x+1} - 2)(2\sqrt{x^2+1} - 2) = 0$ son $\{0, 3\}$

Comentario final: Una ecuación de la forma $\left(p(x)\right)^{n/m} = k$, donde $p(x)$ es una expresión en x y k una constante, la podemos resolver rápidamente elevando ambos miembros al inverso del exponente: $\frac{m}{n}$.

- En el caso n impar tenemos $\left((p(x))^{n/m}\right)^{m/n}=k^{m/n}$

$$p(x)=k^{m/n}$$

Esta última ecuación la identificamos y la resolvemos de acuerdo a las recomendaciones.

- Si n es par entonces k no puede ser negativo y al tomar raíz de índice par consideramos las dos raíces: $p(x)=\pm k^{m/n}$. Esta última ecuación la identificamos y la resolvemos de acuerdo a las recomendaciones

Recuerde que si m es par entonces podemos estar agregando solución. (Observe que la ecuación $(p(x))^{n/m}=k$ puede ser escrita como $\sqrt[m]{(p(x))^n}=k$ o bien como $\left(\sqrt[m]{p(x)}\right)^n=k$, en ambas ecuaciones realizamos dos operaciones consecutivas para llegar a la forma $p(x)=k^{m/n}$.)

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación $\sqrt[3]{(x-2)^2}=4$

Solución: La escribimos con exponente fraccionario:

$$(x-2)^{2/3}=4$$
$$\left((x-2)^{2/3}\right)^{3/2}=\pm 4^{3/2}$$
$$x-2=\pm\left(4^{1/2}\right)^3$$
$$x=8+2 \quad \text{ó} \quad x=-8+2$$
$$x=10 \quad \text{ó} \quad x=-6$$

Ejercicio de desarrollo.- Resolver la siguiente ecuación $(\sqrt{2x^2+8}-3)(\sqrt[3]{x^2-2}+3)=0$;

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

1.1) $2\sqrt{x-1}-2=0$; **1.2)** $\sqrt{3x^2+6}+3=6x$; **1.3)** $3x+4\sqrt{x+2}+6=0$;

1.4) $\sqrt[3]{x^2-16}+1=0$; **1.5)** $(x-2)^{1/5}=0$; **1.6)** $(x-2)^{2/5}=1$;

1.7) $\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}=0$; **1.8)** $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}-4=0$; **1.9)** $\sqrt{x^2+3x+1}-x=0$.

2) Resolver las siguientes ecuaciones:

2.1) $(\sqrt{x+4}-2)\cdot(x^2-4)=0$; **2.2)** $\left(\sqrt{3x^2-6}\right)\left(2x^3-54\right)=0$;

2.3) $(x+1)^2(4\sqrt{x+2}+6)=0$; **2.4)** $(2\sqrt{x-1}-x)(2x^2+8)(\sqrt[3]{3x}-1)=0$;

2.5) $\sqrt{x+1}-3\left(\sqrt{x+1}\right)^3=0$; **2.6)** $\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x+3}\right)\left(\frac{3(x+1)^2-27}{x-3}\right)=0$.

Respuestas:

1.1) 2; **1.2)** 1, (1/11 no es solución); **1.3)** -2;(- $\frac{2}{9}$ no es solución); **1.4)** $\sqrt{15};-\sqrt{15}$ **1.5)** 2;

1.6) $1,3$; **1.7)** 0; **1.8)** $-\frac{5}{16}$; **1.9)** $-\frac{1}{3}$; **2.1)** $0,-2,2$; **2.2)** $\pm\sqrt{2},3$; **2.3)** -1; **2,4)** 2; $\frac{1}{3}$; **2.5)** -1;-2/3;

2.6) 2,-4 (3 no es solución porque no tiene sentido en la ecuación original)

RESOLUCIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS*

Las ecuaciones en formas cuadráticas son las que se pueden llevar a la forma

$$a(Expresión)^2+b(Expresión)+c=0$$

donde *Expresión* es una expresión en la variable. Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

a) $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}-3=0$. **(**Reescriba como $\frac{1}{(x-1)^2}-2\frac{1}{x-1}-3=0$ para comprobar)

b) $2x^6-x^3-1=0$ **(**Reescriba como $2\left(x^3\right)^2-x^3-1=0$ **)**

c) $x+3\sqrt{x}+2=0$ **(**Reescriba como $\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+2=0$ **)**

> Los pasos recomendados para resolver la ecuación
> $a(Expresión)^2+b(Expresión)+c=0$ son:
>
> **1)** Hacer el cambio de variable y= *expresión* en la ecuación original
>
> **2)** Resolver la ecuación cuadrática que quedó en y : $ay^2+by+c=0$.
>
> **3)** Si existen soluciones de la ecuación anterior, entonces se plantean y se resuelven las ecuaciones :
>
> $$Expresión=y_1 \text{ y } Expresión=y_2$$
>
> donde $y_1,\ y_2$ son las soluciones de $ay^2+by+c=0$. Las soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}-3=0$; **b)** $2x^6-x^3-1=0$; **c)** $x+3\sqrt{x}+2=0$

Solución: Todas estas ecuaciones se pueden identificar como formas cuadráticas. Observe que cada una tiene otras alternativas para resolverlas, (la primera en una forma racional, la segunda se puede hacer por factorización y la tercera puede ser vista como una ecuación con radicales), pero para cada una de ellas recomendamos usar la técnicas de formas cuadráticas.

a) Resolvemos por los pasos de la recomendación

1) En la ecuación $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}-3=0$ se hace el cambio $y=\frac{1}{x-1}$, de aquí $y^2=\frac{1}{(x-1)^2}$ quedando

$y^2-2y-3=0$ Efectivamente quedó una ecuación cuadrática

2) Se resuelve la ecuación cuadrática, en este caso lo hacemos por factorización.

$$(y-3)(y+1)=0$$

$$y-3=0 \text{ ó } y+1=0$$

$$y=3 \text{ ó } y=-1$$

3) Se sustituye y por $\frac{1}{x-1}$. Quedan ecuaciones racionales en x que se resuelven

$$\frac{1}{x-1}=3 \text{ ó } \frac{1}{x-1}=-1$$

$$1=3(x-1) \text{ ó } 1=-1(x-1)$$

$$1=3x-3 \text{ ó } 1=-x+1$$

$$x=\frac{4}{3} \text{ ó } x=0$$

Como conclusión la ecuación dada tiene dos soluciones: 4/3 y 0

b) **1)** En la ecuación $2x^6 - x^3 - 1 = 0$ se hace el cambio de variable $y = x^3$, de aquí $y^2 = x^6$. Resulta $2y^2 - y - 1 = 0$

2) Esta ecuación cuadrática la resolvemos por la formula de segundo grado

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y = 1 \text{ ó } y = -\frac{1}{2}$$

3) Ahora se sustituye y por x^3

$$x^3 = 1 \text{ ó } x^3 = -\frac{1}{2}$$ Se extrae raíz cúbica a ambos miembros

$$x = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ ó } x = \sqrt[3]{-1/2}$$

Como conclusión la ecuación dada tiene dos soluciones: 1 y $\sqrt[3]{-1/2}$. No hace falta comprobar.

c) **1**) En la ecuación $x + 3\sqrt{x} + 2 = 0$ se hace el cambio de variable $y = \sqrt{x}$, así $y^2 = x$. Resulta

$$y^2 + 3y + 2 = 0$$

2) Esta ecuación cuadrática se resuelve por factorización

$$y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$(y+2)(y+1) = 0$$

$$(y+2) = 0 \text{ ó } (y+1) = 0$$

$$y = -2 \text{ ó } y = -1$$

3) Se sustituye y por $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} = -2 \text{ ó } \sqrt{x} = -1$$ Ecuación con radicales, se eleva ambos miembros al cuadrado

$$x = (-2)^2 = 4 \text{ ó } x = (-1)^2 = 1$$

Como en el proceso se elevó al cuadrado se tiene que comprobar si las soluciones satisfacen la original.

El lector puede chequear que ninguna de las dos soluciones satisface la ecuación original. Ni siquiera satisfacen $\sqrt{x} = -2$ ni $\sqrt{x} = -1$.

Como conclusión la ecuación dada no tiene soluciones.

Insistimos: Esta ecuación también la podemos clasificar como una ecuación con radicales y resolverla siguiendo las indicaciones dadas.

Ejercicio de desarrollo Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x-3} - x + 3 = 0$; **b)** $(x+1)^2 - 2(x+1) + -3 = 0$

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones de formas cuadráticas

1.1) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ **;** **1.2)** $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + 2 = 0$ **;**

1.3) $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 - \frac{2x}{x+2} - 3 = 0$ **;** **1.4)** $2x^{2/3} - x^{1/3} - 1 = 0$ **.**

Respuestas: 1.1) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\sqrt{2}$; **1.2)**-2;-3/2; **1.3)** -1;-3; **1.4)** $1; -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Las ecuaciones fraccionarias son aquellas donde hay términos fraccionarios y la incógnita está en el denominador.

Por ejemplo la ecuación $\frac{2}{x-1}+3=x$ la llamaremos de esta manera porque la variable está en el denominador. La ecuación $\frac{x}{2}+3=x^2$ no la consideramos una ecuación fraccionaria porque la variable no está en el denominador.

Identificaremos dos tipos de técnicas para resolver ecuaciones fraccionarias.

1) Las ecuaciones escritas como un solo término igualado a cero: $\frac{P}{Q}=0$**,** se plantea numerador igual a cero. Por ejemplo $\frac{2x-1}{x-1}=0$, se resuelve $2x-1=0$, como la solución $x=\frac{1}{2}$ tiene sentido en la original, en este caso el denominador no se anula, entonces ésta es la solución de la ecuación.

2) Ecuaciones más generales, por ejemplo $\frac{4}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}=1$, donde aparecen en el numerador y denominador expresiones polinomicas las llamaremos ecuaciones **racionales**.

> Los siguientes **pasos** son recomendados para resolver **ecuaciones racionales** con más de un término:
>
> **1)** Factorice los denominadores y calcule m.c.m. de los denominadores
> **2)** Multiplique ambos lados por el m.c.m. de los denominadores a fin de eliminarlos. (no se olvide de distribuir antes de simplificar),
> **3)** Identifique la ecuación resultante y resuelva de acuerdo a la recomendación del caso.

Este atento que se pueden agregar como soluciones extrañas las raíces de los denominadores, las que se eliminan como soluciones, pues no se puede dividir entre cero.

Recuerde: que para resolver la ecuación de la forma $\frac{P}{Q}=0$, se usaba el argumento que una fracción es cero si el numerador es 0, así se plantea la ecuación $P=0$ y las soluciones de esta última son soluciones de la original siempre y cuando tenga sentido en la original.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones racionales: **a)** $\frac{2x}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$**;**

b) $\frac{2}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x}$ **; c)** $-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x-x^2}$ **; d)** $\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x^2-2x}+\frac{1}{x}$**;**

Solución: Todas estas ecuaciones son racionales con más de un término. Seguimos la recomendación de multiplicar ambos lados de la igualdad por el m.c.m. de los denominados.

a)

1)Se factoriza los denominadores a fin de conseguir el m.c.m.

$$\frac{2x}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}.$$

Así el m.c.m. de los denominadores es $(x-2)(x-1)$.

2) Multiplicamos ambos miembros por el m.c.m.

$$(x-2)(x-1)\left(\frac{2x}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2}{x-2}\cdot(x-2)(x-1)$$ Se distribuye el m.c.m.

$$(x-2)(x-1)\frac{2x}{(x-2)(x-1)}-(x-2)(x-1)\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}\cdot(x-2)(x-1)$$ Se simplifica

$$2x-(x-2)=2(x-1)$$

3) La ecuación resultante es lineal, la resolvemos siguiendo las recomendaciones

$$2x-x+2=2x-2$$

$$x=4$$

Recordemos que al multiplicar por el m.c.m. podemos eventualmente agregar dos soluciones que son las raíces del m.c.m. $\{1,2\}$. Como 4 no está en estos valores entonces $x=4$ es una solución a la ecuación original.

b)

1) Factorizamos primero los denominadores $\frac{2}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x}$.

Así el m.c.m. de los denominadores es $x(x-1)$.

2) Multiplicamos ambos miembros por el m.c.m.

$$x(x-1)\left(\frac{2}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{x-2}{x}\cdot x(x-1)$$ Se distribuye el m.c.m

$$x(x-1)\frac{2}{x(x-1)}-x(x-1)\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x}\cdot x(x-1)$$ Se simplifica

$$2-x=(x-2)(x-1)$$

3) Resultó una ecuación cuadrática,

$$2-x=x^2-3x+2$$

$$x^2-2x=0$$ resolvemos por factorización

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \quad \text{o} \quad x-2=0$$

$$x=0 \quad \text{o} \quad x=2$$

Las posibles soluciones que se pudiesen agregar son donde el m.c.m. es cero: $x(x-1)=0$. Estas son $\{0,1\}$. El 0 entonces es una solución agregada al multiplicar la ecuación original por el m.c.m. (no es solución de la original porque no se puede dividir entre 0). Como 2 no está en el conjunto $\{0,1\}$ si es solución. **Como conclusión la ecuación dada tiene una solución:** x=2

c)

1) Se factoriza primero los denominadores $-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x(1-x)}$.

El m.c.m. de los denominadores es $x(1-x)$.

2) Multiplicamos ambos miembros por el m.c.m.

$$x(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x(1-x)}\right)x(1-x)$$ Se distribuye el m.c.m

$$-x=\frac{1}{x}x(1-x)+\frac{3}{x(1-x)}\cdot x(1-x)$$ Se simplifica

$-x=(1-x)+3$

3) Resultó una ecuación inconsistente: 0=4

Como conclusión la ecuación dada no tiene una solución.

d)

1) Se factoriza los denominadores, queda la ecuación $\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x(x-2)}+\frac{1}{x}$, el m.c.m. de los denominadores es $x(x-2)$

2) Multiplicamos ambos miembros por el m.c.m.

$$x(x-2)\frac{2}{x-2}=\left(\frac{4}{x(x-2)}+\frac{1}{x}\right)\cdot x(x-2) \qquad \text{Se distribuye el m.c.m}$$

$$2x=\frac{4}{x(x-2)}\cdot x(x-2)+\frac{1}{x}\cdot x(x-2) \qquad \text{Se simplifica}$$

$$2x=4+(x-2)$$

3) Resultó una ecuación lineal, al despejar x obtenemos $x=2$

Las posibles soluciones que se pudiesen agregar son donde el m.c.m. es cero: $x(x-2)=0$. Estas son $\{0,2\}$. 2 entonces es una solución agregada al multiplicar la ecuación original por el m.c.m. (no es solución de la original porque no se puede dividir entre 0).

Como conclusión la ecuación dada no tiene una solución.

Para ecuaciones más generales que las racionales podemos seguir las sugerencias de éstas. Recuerde que cuando hay radicales hay que verificar que la solución tenga sentido en la original.

Ejemplo 2.- Resolver la ecuación $\sqrt{x+1}-\frac{2x}{\sqrt{x+1}}=0$

Solución:

El m.c.m. de los denominadores es $\sqrt{x+1}$. Multiplicamos izquierda y derecha por él.

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-\frac{2x}{\sqrt{x+1}}\right)=0\cdot 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Al distribuir, el denominador se simplifica}$$

$$(\sqrt{x+1})^2-2x=0$$

$$(x+1)-2x=0$$

$$-x+1=0$$

La solución es $x=1$, la cuál es solución de la ecuación original.

Comentario.- Equivalentemente esta ecuación la podemos resolver sumando las fracciones e igualando a cero el numerador

Ejemplo 3.- Resolver las siguientes ecuaciones racionales: **a)** $\frac{4}{x-1}=0$; **b)** $\frac{9x^2-4}{x-1}=0$

Solución:

a) Esta ecuación se resuelve con el planteamiento que una fracción $\frac{P}{Q}$ es 0 si el numerador P es 0. En este caso se plantearía que $4=0$, lo cual no es cierto por tanto la ecuación no tiene solución.

Usando la recomendación general para resolver ecuaciones fraccionarias llegamos al mismo resultado, se multiplica ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores

$$\frac{4}{x-1}=0$$

$$(x-1)\frac{4}{x-1}=0\cdot(x-1)$$ Se simplifica el denominador

$$4=0$$

Como conclusión la ecuación dada no tiene una solución.

b) Como en la ecuación $\frac{9x^2-4}{x-1}=0$ se plantea cuando una fracción es cero, ya sabemos que esto ocurre si el numerador es cero. Así que planteamos de una vez:

$$9x^2-4=0$$

Esta es una ecuación cuadrática la cual resolvemos despejando x^2

$$x^2=\frac{4}{9}$$ Ahora tomamos más o menos la raíz.

$$x=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}.$$

$$x=\pm\frac{2}{3}$$

Siempre hay que chequear que la solución encontrada este bien definida en la ecuación original, esto es, que el denominador no se haga cero, lo cual efectivamente ocurre en este caso.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $-\frac{1}{1+x}+\frac{2}{x}=-\frac{4}{x+x^2}$; **b)** $-\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-2}=0$.

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones racionales:

1.1) $\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x-2}$; **1.2)** $\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=\frac{x+4}{x^2-4}$; **1.3)** $-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x-x^2}$;

1.4) $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-3}$; **1.5)** $4+\frac{4}{3x-7}=0$; **1.6)** $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=4$;

1.7) $\frac{x^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}=1$; **1.8)** $\frac{3x-1}{2x-7}=\frac{6x}{4x-1}$; **1.9)** $\frac{8x^3-1}{x-7}=0$;

1.10) $\frac{8}{x^2-3}=0$.

2) (Ecuaciones literales) Despejar *x* en cada una de las siguientes ecuaciones:

2.1) $y=\frac{3}{x-1}+4$; **2.2)** $y=-\sqrt{x-1}-2$; **2.3)** $y=\frac{3x+5}{x+1}$; **2.4)** $y=2(x-1)^3-5$.

Respuestas: 1.1) $-\frac{5}{2}$ **; 1.2)** -6 ; **1.3)** no tiene soluciones;**1.4)** no tiene solución (2 y 3 son añadidas);

1.5) 2; **1.6)** $\frac{5}{4}$,3; **1.7)** 0; **1.8)** $-\frac{1}{35}$; **1.9)** $\frac{1}{2}$; **1.10)** No tiene solución

2.1) $x=\frac{3}{y-4}+1$; **2.2)** $x=(y+2)^2+1$; **2.3)** $x=\frac{5-y}{y-3}$; **2.4)** $x=\sqrt[3]{\frac{y+5}{2}}+1$.

Ejercicio de desarrollo.- Indique como resolvería cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{2}-\frac{2x-5}{4}=3$; **b)** $2(x-1)^3-16=0$; **c)** $5(x-1)^3-(x-1)=0$; **d)** $\frac{3x^2}{4}=x^4$;

e) $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}-\frac{2\sqrt{x+3}}{5}=0$; **f)** $2\sqrt{x^2-1}-\frac{x+1}{2}=0$; **g)** $\frac{5x^5-3}{2}=x^5$; **h)** $2\left(1-\sqrt{x}\right)=x-1$;

i) $\left(x^{-1}+2x^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3x^2-1}{3x+1}\right)=0$; **j)** $5x^4-5x^3+5x^2-5=0$; **k)** $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x}=0$;

l); $(\frac{16x^3-2}{x^2-9})(2\sqrt{x^2+5}-6)=0$; **m)** $(\frac{x\sqrt{x+2}-4}{2})(3x^2+30)=0$; **n)** $\frac{4}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}=1$;

ñ) $\frac{(x^2-1)(2x-1)-(x^2-1)(2x-1)^2}{(x-1)^4}=0$; **o)** $2(x-1)^{1/2}-\frac{(x+1)^{-1/2}}{2}=0$

p) $\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{3-x}\right)\cdot\left(4-2(3-x)^{-1/3}\right)=0$

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

1.1) $\sqrt{3x^2-2}+3x^2-8=0$; **1.2)** $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x^2+4x+3}=\frac{-1}{3}$;

1.3) $(x^2-1)(x^4-3x^2-4)=0$; **1.4)** $(x^{2/5}-4x^{1/5}+4)(x^3-8)=0$;

1.5) $(x^6-4x^3-5)(x^2-9)=0$; **1.6)** $\frac{(3-x)^2}{4}=4$;

1.7) $\sqrt{-2-6x}-6x=8$; **1.8)** $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{-x}{x+1}$;

1.9) $(x-2)^4=2(x-2)^3$; **1.10)** $\left(\frac{2}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{x-3}{x^2-x-2}\right)=0$;

1.11) $x^4-4x^3+2x^2+4x-3=0$; **1.12)** $3(x+1)^{-1}+x(x+1)^{-2}=0$;

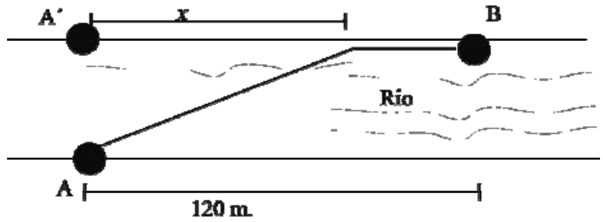
Respuestas:

1.1) $\pm\sqrt{2}$; 1.**2)** $\frac{-13\pm\sqrt{145}}{2}$; **1.3)** $\pm1,\pm2$; **1.4)** 2 ; **1.5)** $\pm3,-1,\sqrt[3]{5}$; **1.6)**-1,7

1.7) -1; **1.8)** No tiene solución**; 1.9)** 4,2; **1.10)** 3; **1.11)** 1,-1 y 3 (1 con multiplicidad 2, esto es, en la expresión factorizada, el factor *x*-1 está elevado al cuadrado); **1.12)** $-\frac{3}{4}$;

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Se desea instalar un cable desde un punto A en la orilla de un río a otro punto B del otro lado del río 100 metros más abajo. El cable que va por debajo del río cae en un punto *x* metros más allá del punto A como muestra el dibujo. ¿Cómo debe ser tendido el cable para usar exactamente los 120 metros, si el ancho del río es 30m?



Solución:

LA VARIABLE

Recuerde que
x= número de metros de A´ al punto donde cae el cable submarino:B

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

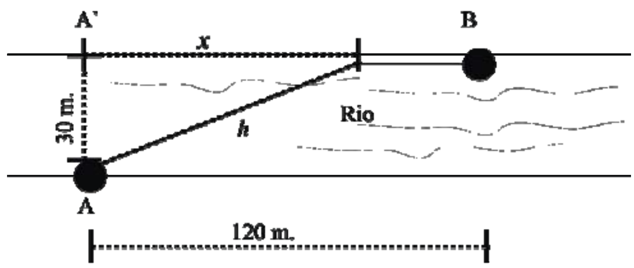
Metros de cable submarino + Metros de cable aéreo. =120

CANTIDADES DESCONOCIDAS EN TERMINOS DE LA VARIABLE

Las cantidades desconocidas son la cantidad de metros aéreo y la cantidad de cable submarino. El cable aéreo va del punto *x* al punto B. La cantidad de metros aéreo de B al punto *x* es 100-*x*

El cable submarino va del punto A al punto B. Podemos usar Pitágoras para calcular la cantidad, *h*, de metros de cable submarino, pues el segmento AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo AA´B.

Recordemos Pitágoras: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$,
En nuestro caso $c_1 = 30$ y $c_2 = x$.
Así sustituyendo y despejando en la ecuación de Pitágoras obtenemos La cantidad de metros de cable submarino $h = \sqrt{900 + x^2}$.



ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Sustituyendo en las expresiones verbales que deben ser iguales tenemos:

$$\sqrt{900 + x^2} + (100 - x) = 120$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Esta es una ecuación con radicales, la cual resolvemos según la recomendación, primero dejando solo el radical:

$\sqrt{900 + x^2} = 20 + x$ Se aísla el radical

$(\sqrt{900 + x^2})^2 = (20 + x)^2$ Se eleva al cuadrado ambos lados

$900 + x^2 = 400 + 40x + x^2$ Quedó una cuadrática que se reduce a lineal

$500 = 40x$

$x = 12{,}5m.$

RESPUESTA VERBAL

Se concluye entonces que el cable submarino debe ser tendido del punto A al otro lado del río a 12,5 metros del punto A`.

Ejemplo 2.- Se sabe que dos obreros hacen un trabajo de manera conjunta en 4 horas. Si cada uno trabajará solo, el segundo obrero tardaría 2 horas más que el primero. ¿Cuánto tardaría cada obrero si tuviese que realizar el trabajo solo?

Solución:

LA VARIABLE

Definimos la variable
x= tiempo que tarda el primer obrero en realizar todo el trabajo solo.

CANTIDADES DESCONOCIDAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

x+2=tiempo que tarda el segundo obrero en realizar todo el trabajo solo

Podemos pensar ahora el problema como la cantidad o fracción de trabajo que hace cada uno por hora.

El primer obrero realiza $\frac{1}{x}$ fracción del trabajo por hora y $4\cdot\frac{1}{x}=\frac{4}{x}$ fracción del trabajo en 4 horas.

El segundo obrero realiza $\frac{1}{x+2}$ fracción del trabajo por hora y $\frac{4}{x+2}$ fracción del trabajo en 4 horas.

Cuando trabajaron juntos cada uno laboró 4 horas, el aporte del tiempo completo de estos dos trabajadores da el trabajo completo.

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

Recuerde que el problema se está enfocando desde el punto de vista de la cantidad o fracción del trabajo total. El trabajo total es 1. Así

FRACCIÓN DE TRABAJO QUE APORTA EL PRIMER OBRERO + **FRACCIÓN DE TRABAJO QUE APORTA EL SEGUNDO OBRERO** =1

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=1$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Esta es una ecuación racional. Se multiplica por el m.c.m. de los denominadores. Trasformándose en la ecuación

$$4(x+2)+4x=x^2+2x$$

la cual es una ecuación de segundo grado. La solución positiva da $x=3+\sqrt{17}$.

RESPUESTA VERBAL

Así que el primer trabajador hace el trabajo sólo en aproximadamente 6,12 horas, en términos de minutos esto es 6 horas con 6 minutos aproximadamente y el segundo en 8,12 horas.

Una buena escogencia de la variable nos ayudará a escribir las cantidades desconocidas de una manera sencilla. El siguiente ejemplo se repite en muchos contextos.

Ejemplo 3.- Se estima que si se siembran 100 matas de alcachofas en un terreno la producción por mata será de 80UM al año y cada mata adicional que se siembre hará que la producción por mata disminuya en 0.25UM. ¿Cuántas matas deberán plantarse a fin de tener unos ingresos de 9000UM anuales?

Solución: Veamos primero las expresiones que deben ser iguales para luego escoger la variable**.**

EXPRESIONES QUE DEBEN SER IGUALES

La igualdad a plantear en este caso es

Ingreso=9.000

El ingreso en este caso lo podemos expresar como:

Ingreso=(Nº de matas a sembrar)x(producción por mata)

LA VARIABLE

Una variable que ayuda a plantear una ecuación de manera conveniente está dada por

x=número de matas adicionales a sembrar

CANTIDADES DESCONOCIDAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Podemos expresar cada uno de los factores del ingreso en términos de la variable *x*.

Nº de matas a sembrar=100+x

Producción por mata=80-0.25x

ESCRIBIR LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Sustituyendo el ingreso en términos de la variable *x* queda:

$$(100+x)(80-0.25x)=9000$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

Es una ecuación cuadrática, la llevamos a la forma canónica

$$8000-25x+80x-0.25x^2=9000$$

$$0.25x^2-55x+1000=0$$

$$x=\frac{55\pm\sqrt{55^2-4\cdot 0.25\cdot 1000}}{0.5}$$

$$x=\frac{55\pm 45}{0.5}$$

Hay dos soluciones positivas: $x=20$ y $x=200$. Recordemos que *x* es el número de matas adicionales a sembrar.

RESPUESTA VERBAL

Deberán sembrarse 120 matas a fin de tener unos ingresos de 9000UM. No sería muy razonable sembrar 300 que es otra posibilidad para tener ingresos de exactamente de 9000UM

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

1) Los costos fijos de una industria por producir un artículo son de 200UM al mes y el costo variable por unidad es de 50UM. Si el ingreso por vender *q* artículos está dado por $140q-q^2$ ¿Qué nivel de producción da una utilidad de 1200UM? **Respuesta:** 20 o 70 unidades.

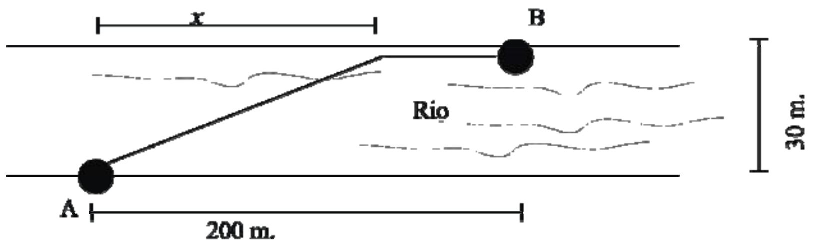
2) Una fábrica de un producto tiene costos fijos de 800UM al mes y el costo variable por unidad es de 2.5UM. La fábrica estima que si vende *q* unidades de este producto el ingreso será de $150\sqrt{q}$. Determine el nivel de producción para obtener utilidades de 1000UM **Respuesta:** 275 o 1885 un.

3) Para mantener mensualmente una fábrica de alimentos concentrados se necesita 800 UM. El costo de fabricación de la única presentación del alimento es de 3UM cada saco. Se sabe por experiencia que

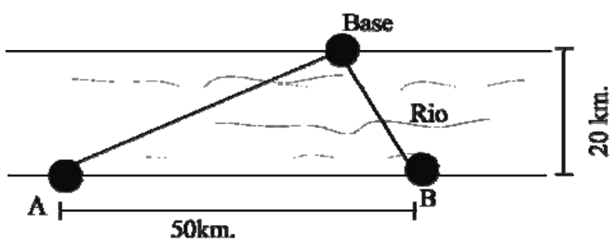
si fija un precio de p UM al saco entonces el números de sacos a ser vendidos es q donde $p = 12 - q/200$. ¿Qué precio deberá fijar la fabrica a fin de obtener utilidades de 2000 UM al mes? ¿Cuál será el número de sacos vendidos?
Respuesta: 10 UM con una venta de 400 sacos, otra posibilidad 5UM con una venta de 1400 sacos.
4) Se estima que si en una hectárea se siembran 60 matas de aguacates la producción por árbol al cabo de unos años será de 450 Kg anuales y que por cada árbol adicional que se siembre la producción por árbol disminuirá en 5 kg. ¿Cuántos árboles deberá plantarse por hectárea a fin de tener una producción de 28000 kilos anuales? **Respuesta:** 70 o 80 árboles.
5) El ingreso mensual por la venta de un artículo está dado por $I = 600p - 3p^2$, donde p es el precio de venta del artículo. ¿Qué precio mayor que 50UM se deberá colocar en el mercado para que el ingreso sea de 18000UM? **Respuesta:** 163.1UM
6) Un barbero tiene el corte a 10UM. A ese precio le acuden mensualmente un promedio de 300 clientes. El quiere subir los precios y estima que por cada aumento de 1UM pierde 10 clientes ¿Qué precio deberá fijar a fin de tener un ingreso de 4.000 UM al mes? **Respuesta:** 20UM
7) Un gimnasio tiene 500 clientes. La cuota actual es de 30UM. Se piensa subir los precios y se estima que por cada aumento de 1UM se pierden 5 clientes. ¿Qué precio deberá fijar el gimnasio con el objetivo de tener unos ingresos de 20.000UM al mes? **Respuesta:** 50 o 80UM
8) Se adquieren 120 impresoras a un precio total de 4000UM. Las primeras 30 impresoras se venden a un promedio de 70UM cada una. ¿Cuál debe ser el precio que se debe establecer a las restantes para tener una ganancia total de 5000UM? **Respuesta:** 230/3 UM

PROBLEMAS GENERALES

1) Se desea instalar un cable desde un punto A en la orilla de un río a otro punto B del otro lado del río 200 metros más abajo. El ancho del río es 30m. El cable que va por debajo del río cae en un punto x metros más allá del punto A como muestra el dibujo.



El precio del metro de cable submarino es de 3,6UM y el aéreo 2UM ¿Cómo sebe ser tendido el cable para gastar exactamente 500 UM? **Respuesta:** debe caer a 4,64 metros más abajo de A o 40 metros)
2) Una malla de 1000 metros lineales se desea cortar en dos trozos que se usarán para cercar dos terrenos cuadrados separados ¿Cómo debe ser cortado el alambre para que un terreno tenga el doble del área del otro? (**Ayuda:** Si el lado del cuadrado de área menor es x, el de área mayor es $\sqrt{2}x$.)
Respuesta: El cuadrado pequeño necesita $1000(\sqrt{2}-1)$ m.
3) Un terreno rectangular tiene un área de $1000m^2$ y su diagonal mide $50m$ ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? Sug. La altura h, puede ser expresado en términos de la base ,b, $h = 1000/b$.)
Respuesta: $10\sqrt{5}x20\sqrt{5}m$)
4) Se tiene dos bases a una distancia la una a la otra de 50 km. las cuales corren paralelas a un río de 20 km de ancho. Del otro lado del río se quiere establecer un centro de control de tal manera que la distancia del centro de control a la base A sea el doble que del centro a la base B¿Dónde se debe situar el centro de control?

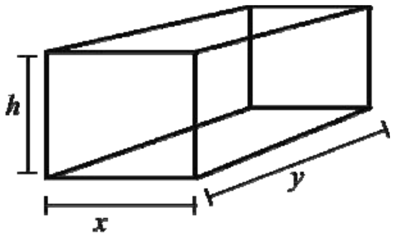


Respuesta: A 40 km. de la base A

5) Un aserradero quiere cortar vigas rectangulares de un tronco con 40cm de diámetro de tal manera que el área de la sección transversal de la viga sea de 768cm^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la viga? (Sug. La altura h, de la viga puede ser expresado en términos de la base ,*b*, de la viga $h = 768/b.$) **Respuesta:** 24x32cm^2.

6) Repita el problema anterior cuando se necesitan vigas de 800cm^2. **Respuesta:** $20\sqrt{2}x20\sqrt{2}$

7) Repita el problema 5) cuando se necesitan vigas de de 900cm^2. **Respuesta:** No tiene solución

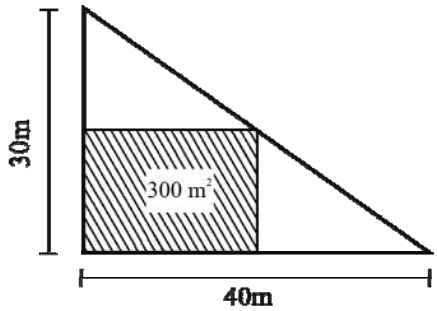


8) El área de la superficie de una caja de base cuadrada está dada por $A = 2x^2 + 4x \cdot h$. Si se quiere construir una caja con 24cm^2 de superficie y una altura de 3cm, ¿Cómo deben ser escogidas las dimensiones de la base?
Respuesta: $\sqrt{21} - 3$ cm.

9) Dos tuberías llenan un tanque en 2 horas. Si solo estuviera trabajando la primera tubería necesitaría 3 horas más que usando sólo la segunda tubería. ¿Cuánto tiempo demoraría cada tubería en llenar ellas solas el tanque? **Respuesta:** 3 y 6 horas

10) En un tanque existen dos tuberías. Si sólo se usa la primera tubería llenaría el tanque en 6 horas. La segunda necesitaría 3 horas trabajando ella sola. ¿Cuánto tiempo demoraría las dos tuberías en llenar conjuntamente el tanque? **Respuesta:** 2 horas

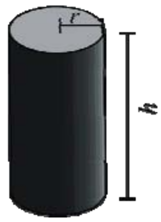
11) Se quiere disponer de un terreno rectangular de 300 m^2 dentro de un terreno triangular de base 40 y altura 30metros, como muestra el dibujo.
Encuentre las dimensiones del terreno. Sugerencia. Use triángulos semejantes. **Respuesta:** 20 la base y 15m. la altura.



12) Un tanque de agua tiene forma cúbica. El tanque se vacía en una hora. a un promedio de 100lts/seg. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque? **Respuesta:** Cada lado mide $100 \cdot \sqrt[3]{360}$ cm

13) Se van a realizar parcelamientos de terrenos rectangulares de $1200m^2$ todos con iguales dimensiones. Si se quiere que el ancho sea tres veces la profundidad, como deben ser escogidas las dimensiones de los terrenos? **Respuesta:** 20m. de ancho x 20/3m. de profundidad

14) El volumen de un cilindro es
$V = \pi \cdot r^2 h$. Despeje *r*



15) Una caja mide 5 cm de altura y de largo cinco cm. más que de ancho. Su volumen es 1500cm^3. Calcular el largo y el ancho. **Respuesta** 15 de ancho y 20 de largo.

PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

1) La población de cierto país se estima por la fórmula: $C_t = 10 + \dfrac{6}{t+1}$ millones de habitantes dentro de *t* años. **a)** ¿Cuándo la población tendrá 18 millones de habitantes? **b)** ¿Dentro de cuántos años se espera que la población tenga un aumento de 500.000 habitantes en ese año? (**Respuesta:** a) Nunca; b) dentro de 2 años).

2) El modelo de crecimiento de una determinada población *P* se ha estimado por medio de $P = 18 + \sqrt{2t+1}$ miles de habitantes, donde *t* es el número de años a partir del presente año. ¿Cuándo la población tendrá 21.000 habitantes? **Respuesta**: dentro de 4 años

3) Un modelo de crecimiento poblacional está dado por $P_n = P_0(1+r)^n$, donde P_n es el tamaño de la población dentro de *n* años, P_0 la población inicial y *r* la tasa de crecimiento anual. Despeje *r*.

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Resuelva cada ecuación:

1.1) $2x+\sqrt{2x-4}-4=0$**;** **1.2)** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$; **1.3)** $3x^{-4}+2x^{-2}-1=0$

1.4) $(y-3)^2-(y-3)=0$**;** **1.5** $(3x^3+24)(\sqrt{2x^2+1}+6)(2x^2-32)=0$**;**

1.6) $\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{x-2}$**;** **1.7)** $(x+2)^{-2}-3(x+2)^{-1}+2=0$**;**

1.8) $(z^2-4)^4-2(z^2-4)^3=0$**;** **1.9)** $z^4(z^3-8)^3-2z(z^3-8)^4=0$**;**

1.10) $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2-x}=0$**;** **1.11)** $t^4+2t^3-7t^2-20t-12=0$**;**

1.12) $\dfrac{\sqrt{8x+1}-3}{x-7}=0$**;** **1.13)** $(2x^3-54)(\dfrac{x-1}{x^2-4})(\sqrt{x^2+5}-3)=0$**;**

1.14) $(2x^3-8x)(x^3+3x^2-x-3)=0$**;** **1.15)** $(8x^3-2x)(x^2+1)(4x^3+1)=0$**;**

1.16) $\dfrac{3}{x+1}=0$; **1.17)** $(2x^3-54)(x\sqrt{x+2}-4)(\dfrac{2x^2+50}{x-3})=0$

2) Diga cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

2.1) ( ) Una ecuación lineal tiene una y sólo una solución

2.2) ( ) Una ecuación cuadrática tiene dos y sólo dos soluciones distintas.

2.3) ( ) $x=1$ es solución de la ecuación $\dfrac{x\cdot(x-1)}{x^2-3x+2}=0$

2.4) ( ) Si $x\cdot(x+1)=x$ entonces la única solución de esta ecuación es $x=-1$

2.5) ( ) Si se divide ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucra la variable entonces se pierde solución.

2.6) ( ) El precio de venta de un artículo es 4UM. Si el costo fijo es 3000UM y el costo variable por unidad es 3, entonces la utilidad total por producir y vender q artículos está dada por $U=4q-2970$

2.7) ( ) La rebaja de una tienda indica que todos los artículos se rebajarán 10UM sobre el precio de la etiqueta y luego a este precio se le hará otra rebaja del 30%. Se quiere determinar el precio que hay que colocar en la etiqueta para que un cliente pague 110UM por unas pantuflas. Entonces la solución de la ecuación 0.70p-7 =110 determina el precio de la etiqueta.

2.8) ( ) La ecuación $\dfrac{1}{x}=0$ no tiene solución.

2.9) ( ) Existen ecuaciones cúbicas con exactamente dos soluciones diferentes.

2.10) ( ) Si $(x-1)(2x-1)=1$ entonces $(x-1)=1$ ó $(2x-1)=1$

3) Despeje la variable indicada en las ecuaciones dadas:

3.1) $y=\dfrac{ax}{1-x}$**;** despeje *x;* **3.2)** $ax^3+1=(y+2)^2$**;** despeje *x*

3.3) $y=\dfrac{1}{ax+b}$**;** despeje *x;* **3.4)** $y=-\dfrac{3}{2x-1}-3$**;** despeje *x*

3.5) $y=3-2\sqrt{2x-a}$; despeje *x;* **3.6)** $y=3-\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^5}}$; despeje *x*

3.7) $x^3(y+1)=x+y$; despeje *y;* **3.8)** $4\sqrt{x}+3xy-y=y\left(\sqrt{x}+3x\right)$; despeje *x*

Respuestas: 1.1) 2, la otra es extraña; **1.2)** $27,-8$; **1.3)** : $\pm\sqrt{3}$; ; **1.4)** $3,4$
1.5) $-2,\pm 4$; **1.6)** 5/3; **1.7)** $-1,-5/2$; **1.8)** $\pm 2,\pm\sqrt{6}$ (las dos primeras con multiplicidad 3);**1.9)** $2;2\sqrt[3]{2};0$;**1.10)** 4, 1 es extraña; **1.11)** -2,3 y-1(-2 con multiplicidad 2); **1.12)** 1**; 1.13)** 1, 3, (± 2 no son soluciones);
1.14) 0, ± 2; ± 1 y -3**; 1.15)** $\pm\frac{1}{2}$,0 y $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; **1.16)** No tiene solución;
1.17) 2 (3 no es solución, pues no tiene sentido en la ecuación original);

2.1) (V) Una ecuación lineal es la que puede ser escrita en la forma $ax+b=0$ con $a\neq 0$ y la única solución es $x=-b/a$
2.2) (F) Puede también tener dos soluciones iguales o no tener solución.
La ecuación $x^2-2x+1=0$ tiene a *x*=1 como solución con multiplicidad 2
2.3) (F) La expresión $\frac{x\cdot(x-1)}{x^2-3x+2}$ no puede ser evaluada en $x=1$, 0/0 no está definida.
2.4) (F) No se puede cancelar las *x* porque se puede perder solución. La ecuación tiene como solución a $x=0$ y a $x=-1$
2.5) (F) Se puede perder. Si se divide la ecuación $x\cdot(x^2+1)=x^2+1$ entre x^2+1 no se pierde solución. Si divido $x\cdot(x+1)=x$ entre *x* si se pierde solución.
2.6) (F) La utilidad total por producir y vender q artículos está dada por $U=4q-(3000-3q)$**.** Si eliminado el paréntesis y agrupamos términos semejantes la utilidad queda expresada por $U=q-3000$
2.7) (V) Si p es el precio de la etiqueta, primero se considera la rebaja 10UM sobre el precio de la etiqueta, este da $p-10$ 10-p y sobre este precio se toma la rebaja del 30%: $p-10-0.3(p-10)$ esta expresión es igual a $0.7p-7$ y es el precio a pagar que es igual= a 110.
2.8) (V) Una fracción es cero sólo si el numerador es cero, pero 1 nunca es cero.
2.9) (V) La ecuación $(x-3)(x-4)^2=0$ es una ecuación cúbica con exactamente dos soluciones diferentes, x=3 es una solución con multiplicidad 1 y x=4 es una solución con multiplicidad 2.
2.10) (F) Sería cierto si la ecuación estuviera igualada a cero y el lado izquierdo expresado como un producto. La técnica de factorización se usa cuando es de la forma $P\cdot Q=0$**.**
Las soluciones de $(x-1)(2x-1)=1$ son 0 y 3/2, las soluciones de $(x-1)=1$ ó $(2x-1)=1$ son 2 y 1: no son equivalentes

3.1) $x=\frac{y}{y+a}$**; 3.2)** $x=\sqrt[3]{\frac{(y+2)^2-1}{a}}$**; 3.3)** $x=\frac{1-yb}{ya}$**; 3.4)** $x=\frac{y}{2(y+3)}$**;**
3.5) $x=\frac{(y-3)^2+4a}{2}$;**3.6)** $x=\sqrt[5]{\frac{4}{(3-y)^3}}$;**3.7)** $y=\frac{x-x^3}{x^3+1}$;**3.8)** $x=\left(\frac{y}{y-4}\right)^2$

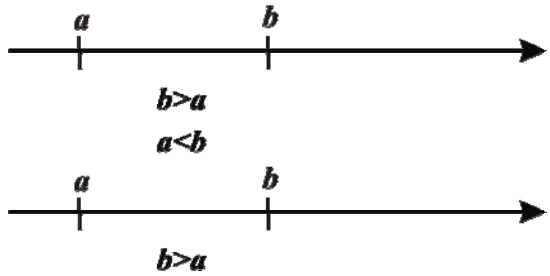
DESIGUALDADES

En las próximas secciones trataremos el tema de desigualdades, también llamadas inecuaciones. Una desigualdad en una variable es una proposición que relaciona dos expresiones en la variable a través de cualquiera de los signos de desigualdad: $(<,>,\geq,\leq)$. Por ejemplo $2x+1>4$ es una desigualdad en la variable x.

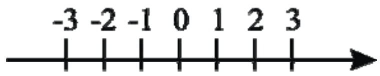
Las desigualdades surgen de planteamientos de determinados problemas, como por ejemplo, en una industria ¿cuántas unidades deberá producirse de un artículo si se desea tener utilidades semanales mayores a 10.000UM? También son importantes en la resolución de determinados planteamientos matemáticos.

Repasemos algunos conceptos y resultados que nos serán de utilidad

Sean *a* y *b* dos números reales.
Al situarlos en la recta real, si *a* está a la izquierda de *b* entonces decimos que *a* es menor que *b* o equivalentemente podemos decir también que *b* es mayor que *a*.
Ejemplo: $-3<-1$, $1<3$, $-1<0$ y $1>0$.



El símbolo $\leq$ significa menor o igual, en una expresión como $a \leq b$ significa que $a<b$ ó *a*=*b*.
El símbolo $\geq$ tiene un significado equivalente.



La expresión $a>0$ es equivalente a decir que *a* es positivo.

Similarmente

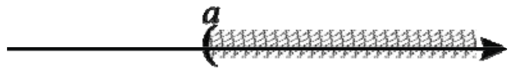
La expresión $a<0$ es equivalente a decir que *a* es ____________________ .

En una desigualdad en una variable decimos que un número *c* es una solución si al sustituir la variable por el número produce un enunciado cierto. Por ejemplo, en la desigualdad $2x+1>4$, *x*=3 es una solución pues al sustituir *x* por 3 en la desigualdad se tiene $2\cdot 3+1>4$, esto es $7>4$, lo cual es una proposición verdadera. Por otro lado *x*=1 no es solución pues al sustituir en la desigualdad se obtiene $2\cdot 1+1>4$, esta proposición es equivalente a $3>4$, lo cual es un enunciado falso.

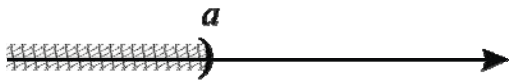
Resolver una desigualdad es conseguir todas las soluciones. La mayoría de las desigualdades que se presentan tienen infinitas soluciones. El conjunto formado por todas las soluciones de una desigualdad se llama el conjunto solución. Dos desigualdades son equivalente si tiene el mismo conjunto solución. Muchas veces tendremos que hacer transformaciones a la desigualdad para resolverla, debemos entonces asegurarnos que las operaciones que se hagan produzcan desigualdades equivalentes.

El conjunto solución de las desigualdades $x>a, x<a, x\leq a$ y $x\geq a$ son evidentes:

$x > a$. La solución es el intervalo (a,∞)



$x < a$. La solución es el intervalo$(-\infty,a)$



$x \geq a$. La solución es el intervalo $[a,\infty)$

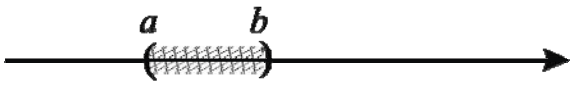
$x \leq a$. La solución es el intervalo$(-\infty,a]$

Remarcamos que el corchete,], significa que ese extremo está en el conjunto solución y el paréntesis,), significa que no está.

Normalmente llamamos infinito al símbolo ∞, este símbolo colocado en un extremo de un intervalo va a significar que el intervalo continua sin fin de ese lado. Reiteramos ∞ no es un número es un símbolo.

La expresión $a < x < b$ quiere decir que $a < x$ y $x < b$.
Observe que son dos desigualdades que se tienen que cumplir simultáneamente.

El conjunto de las x que satisfacen está proposición es el intervalo abierto (a,b).



Si tenemos una expresión como por ejemplo

$$-3 < x < 1,$$

normalmente la podemos leer como: “x está entre -3 y 1.”

Para que una doble desigualdad $a < x < b$ tenga sentido se tiene que cumplir que $a < b$.

Ejercicio de desarrollo.- Completar los espacios en blanco a fin que el texto tenga concordancia.

La expresión $a\_\_x\_\_b$ quiere decir que

$a\_\_x$ ___ $x\_\_b$.

El conjunto de las x que satisfacen está proposición es el intervalo $[a,b]$

Observación: Cuando escribimos un intervalo debemos asegurarnos que el número mayor es el extremo derecho del intervalo y el menor es el extremo izquierdo

DESIGUALDADES LINEALES

En esta sección trataremos las desigualdades lineales en una variable. Precisamos este concepto.

Definición.- Una desigualdad lineal en la variable x es una proposición que puede ser escrita de la forma $cx+b>0$, (o bien $\geq$) donde c y b son constantes con $c \neq 0$. Resolver una desigualdad es conseguir todos los valores x que satisfacen esta relación.

La manera para resolver desigualdades lineales es llevarla a otra equivalente de la forma $x>a$ o cualquiera de las otras tres formas cuya solución es evidente: $x<a, x \geq a$ ó $x \leq a$. Para llevarla a alguna de estas tres formas debemos tener en cuenta ciertas reglas que enunciamos a continuación.

Regla 1.- Cuando un número real c se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera:

Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$ y $a-c<b-c$

Ejemplo 1.- a) 2<9, entonces 2+4<9+4.

b) La desigualdad 3x+1>2 es equivalente a 3x+1**-**1>2**-**1. Observe que esta expresión es equivalente a su vez a $3x>1$. Normalmente esta regla la usamos como se indica:

Aplicación de la regla 1.- Si un número está sumando en un lado de la desigualdad pasa al otro lado restando sin cambiar el sentido de la desigualdad. Similarmente si un número está restando pasa al otro lado sumando sin cambiar el sentido de la desigualdad.

Regla 2.- Cuando multiplicamos o dividimos por un número real c **positivo** a ambos lados de una desigualdad, **el sentido** de la desigualdad **no se altera**:

2A.- Si $a<b$ entonces $ac<cb$ y $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

Cuando multiplicamos o dividimos por un número real ***c*** **negativo** a ambos lados de una desigualdad, **el sentido** de la desigualdad **se cambia**:

2B.- Si $a<b$ entonces $ac>cb$ y $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

Ejemplo 2.-

a) $-5<4$ por la regla 2 tenemos que efectivamente $\frac{-5}{-5}>\frac{4}{-5}$, esto es $1>-\frac{5}{4}$. También $-5(-2)>4(-2)$: es decir $10>-8$, lo cual sabemos es cierto y no la desigualdad en el otro sentido.

b) La desigualdad $-3x<1$ es equivalente $\frac{3x}{-3}>\frac{1}{-3}$, es decir $x>-\frac{1}{3}$.

c) La desigualdad $\frac{x}{2}>4$ es equivalente a $2\frac{x}{2}>2 \cdot 4$, es decir $x>8$

Aplicación de la regla 2.- Si un número positivo está multiplicando (dividiendo) un lado de la desigualdad pasa al otro lado dividiendo (multiplicando) sin cambiar el sentido de la desigualdad.
Si un número NEGATIVO está MULTIPLICANDO (dividiendo) un lado de la desigualdad pasa al otro lado dividiendo (multiplicando) y el sentido de la desigualdad SE INVIERTE.

Observe como utilizando la regla 2 logramos transformar en el ejemplo 2b y 2c desigualdades lineales en otras equivalentes cuya soluciones son evidentes. Veamos ejemplos más complicados para resolver desigualdades lineales. Nuestra técnica se traduce en dejar sola la variable *x*.

Ejemplo 3.- Resolver $3(x-1)\leq 9$.
Solución:
Alternativa 1: Una estrategia a emplear es resolver primero los paréntesis distribuyendo el 3.

$$3x-3\leq 9\,.$$

Luego dejamos los términos en *x* en un lado y las constantes en el otro lado.
El 3 está restando pasa sumando sin alterar el sentido de la desigualdad

$$3x\leq 9+3$$

Ahora 3 está multiplicando, pasa dividiendo sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x\leq \frac{12}{3}$$

$$x\leq 4\,.$$

Expresaremos la solución en términos de intervalos y geométricamente:
Conjunto solución $=(-\infty,4]$

Alternativa 2:
Esta alternativa pretende ilustrar que los procedimientos analíticos sugeridos en el despeje no son la única alternativa para despejar la variable.
Como 3 está multiplicando todo el miembro izquierdo entonces pasa dividiendo sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x-1\leq 3$$

1 está restando entonces pasa sumando sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x\leq 3+1$$

$$x\leq 4\,.$$

Está claro que el conjunto solución concuerda con el calculado anteriormente, este es el todos los números menores o iguales a 4.

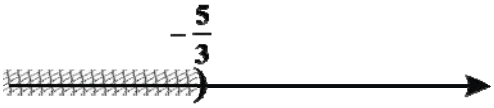
Ejemplo 4.- Resolver $-3x-1>4$. Dar la solución por intervalos y geométricamente.
Solución: 1 está restando pasa sumando:

$$-3x>5$$

-3 esta multiplicando, pasa dividiendo y por ser un número negativo, invierte el sentido de la desigualdad:

$$x<-\frac{5}{3}\,.$$

Así la solución de esta desigualdad es el intervalo $(-\infty,-\frac{5}{3})$, representada geométricamente por:



Ejemplo 5.- Resolver $4-3(x-2)\geq 2(x+3)$.
Solución: Resolvemos primero los paréntesis y luego agrupamos los términos en x de un lado y luego las constantes del otro lado:

$$4-3x+6\geq 2x+6$$

$$-3x+10\geq 2x+6$$

$$10-6\geq 2x+3x$$

$$4\geq 5x$$

$$\frac{4}{5}\geq x.$$

Esta expresión la podemos leer alternativamente como $x\leq\frac{4}{5}$. La solución es $(-\infty,\frac{4}{5}]$.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver $1-\frac{3}{2}(x-1)>2$. Dar la solución por intervalos y geométricamente.

DESIGUALDADES TRIVIALES

Algunas desigualdades triviales tienen como solución el conjunto vacio $\varnothing$ o bien toda la recta real **R**.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $\frac{1}{2}(1-2x)-3\leq 2-x$
Solución: Se recomienda en el caso de desigualdades con fracciones, al igual que se hacía con ecuaciones, multiplicar por el m.c.m. de los denominadores ambos lados de la desigualdad a fin de evitar trabajar con fracciones. En este caso el m.c.m. de los denominadores es 2

$$2\left[\frac{1}{2}(1-2x)-3\right]\leq 2[2-x]$$ Se distribuye el 2 y luego se simplifica.

$$(1-2x)-6\leq 4-2x$$

$$-5\leq 4$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier valor de *x*. Por tanto el conjunto solución es **R.**

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $5-2x\leq 2(2-x)$
Solución: Esta desigualdad es equivalente a

$$5-2x\leq 4-2x.$$

Esta última es equivalente a

$$5 \leq 4$$

Como no existe ningún x que satisfaga esta desigualdad entonces el conjunto solución es el vacío $\emptyset$. Alternativamente se dice que la desigualdad no tiene solución.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver

a) $\frac{x-3}{4} - \frac{1-x}{3} \geq 1$; **b)** $\frac{3x-1}{3} + \frac{1-2x}{2} \geq 0$; **c)** $2\left(\frac{x+1}{2} - 1\right) \geq x$

APLICACIÓN DE DESIGUALDADES EN EL CÁLCULO

Será importante posteriormente determinar para determinadas expresiones algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

Ejemplo 1.- Determine para cada expresión algebraica cuáles son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

a) $x - \sqrt{3-2x}$ **;** **b)** $\frac{2x}{\sqrt[4]{3x+6}}$

Solución:

a) Para que la expresión $x - \sqrt{3-2x}$ sea un número real el radicando debe ser mayor o igual a 0. En notación matemática esto es:

$$3 - 2x \geq 0$$

Esto es una desigualdad lineal la cual resolvemos:

$$-2x \geq -3$$

$$x \leq \frac{-3}{-2}$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

En conclusión: $x - \sqrt{3-2x}$ está bien definida y es un número real en $(-\infty, \frac{3}{2}]$.

b) Tenemos también una raíz con índice par. Así que el radicando debe ser mayor o igual a cero a fin que sea un número real, pero no olvidemos que no podemos dividir entre 0, (la división entre 0 no está definida). $\sqrt[4]{3x+6} = 0$, si y sólo si $3x + 6 = 0$.

Así pues, la expresión $\frac{2x}{\sqrt[4]{3x+6}}$ está bien definida y es un número real para aquellos valores de x que satisfacen la desigualdad: $3x + 6 > 0$, cuya solución es $(-2, \infty)$.

En conclusión: $\frac{2}{\sqrt[4]{3x+6}}$ está bien definida y es un número real en $(-2, \infty)$.

Ejercicio de desarrollo.- Determine para cada expresión algebraica cuáles son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

a) $(x+1) \cdot \sqrt[3]{3-x}$ **;** **b)** $\frac{\sqrt{3-5x}}{3}$

DESIGUALDADES DE LA FORMA $a < cx + d < b$.

Ya hemos visto que este tipo de expresión es equivalente a:

$$a < cx + d \quad \text{y} \quad cx + d < b$$

Se pueden resolver ambas desigualdades y luego determinar la parte común de ambos conjuntos solución. Pero en general, es preferible resolverla simultáneamente. Ambos procedimientos lo ilustraremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $7 \leq 2(3-x) \leq 9$

Solución:

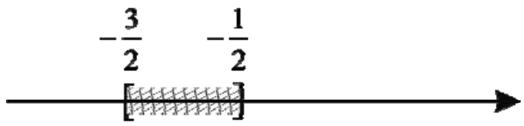
Alternativa 1: (Se trabaja simultáneamente las dos desigualdades.)

Esta alternativa se basa en el principio: La operación que se realiza a un miembro se realiza a los otros dos miembros.

Despejaremos la x de la expresión del medio, optamos por distribuir el 2.

$7 \leq 2(3-x) \leq 9$	Resolvemos los paréntesis
$7 \leq 6-2x \leq 9$	Se resta 6 a cada miembro de las desigualdades
$7-6 \leq 6-2x-6 \leq 9-6$	
$1 \leq -2x \leq 3$	Dividimos cada miembro entre -2,
$-\frac{1}{2} \geq x \geq -\frac{3}{2}$	Recuerde que el sentido de las desigualdades se invierte

Podemos reescribir estas desigualdades de derecha a izquierda como $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$. Conviene recordar que esta desigualdad se lee: x está entre $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Así el conjunto solución es el intervalo cerrado $\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$. La solución geométrica es



La siguiente forma de trabajar es sin duda más laboriosa.

Alternativa 2*: Resolver por separado y luego determinar la intersección de los conjuntos solución

Esta doble desigualdad es equivalente a

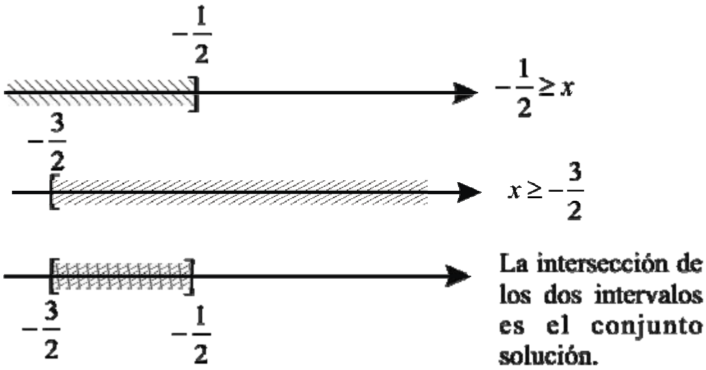
$7 \leq 2(3-x)$ y $2(3-x) \leq 9$

Se resuelve cada una

$7 \leq 6-2x$	y	$6-2x \leq 9$	
$7-6 \leq -2x$	y	$-2x \leq 9-6$	
$1 \leq -2x$	y	$-2x \leq 3$	Se pasa -2 dividiendo
$\frac{1}{-2} \geq x$	y	$x \geq \frac{3}{-2}$	El sentido de la desigualdad se invierte
$-\frac{1}{2} \geq x$	y	$x \geq -\frac{3}{2}$	

El conjunto solución es la intersección de ambas soluciones. Gráficamente es la parte común de los conjuntos solución:

$$\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$$



Ejercicio de desarrollo.-

Resolver $3<\frac{2}{3}-2x<5$

MÁS DESIGUALDADES DOBLES *

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $2x\leq 1-x\leq 9$

Solución: Cuando la variable aparece en dos o más miembros de la desigualdad se resuelve usando la alternativa 2, esto es separando estas expresiones en dos desigualdades cuyas soluciones hay que interceptar. La desigualdad $2x\leq 1-x\leq 9$ es equivalente a que

$$2x\leq 1-x \quad \text{y} \quad 1-x\leq 9$$

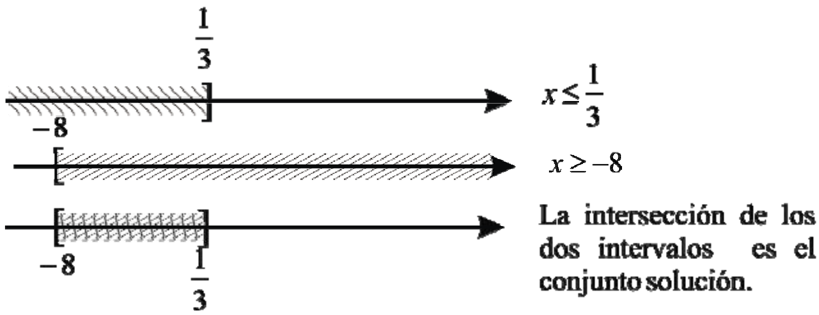
Resolvemos ambas sin olvidar que luego se tiene que calcular la intersección de los conjuntos soluciones, esto es, conseguir la parte común de ambos conjuntos.

$$2x+x\leq 1 \quad \text{y} \quad -x\leq 9-1$$

$$3x\leq 1 \quad \text{y} \quad -x\leq 8$$

$$x\leq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x\geq -8$$

Graficar el conjunto solución de ambas desigualdad es un buen procedimiento para conseguir la intersección o parte común de los conjuntos soluciones



Concluyendo: el conjunto solución de la desigualdad $2x\leq 1-x\leq 9$ es el intervalo $[-8,\frac{1}{3}]$

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $x+5\leq 2x+1\leq 3$

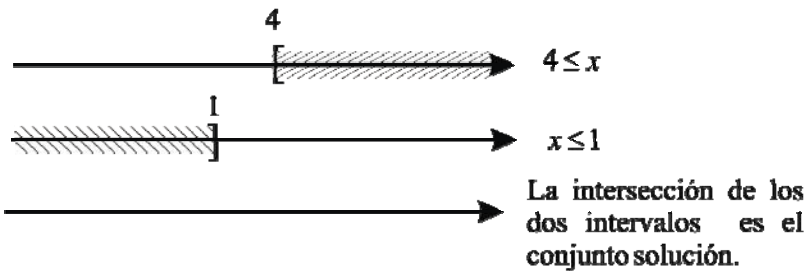
Solución: La desigualdad es equivalente a

$$x+5\leq 2x+1 \quad \text{y} \quad 2x+1\leq 3$$

Resolviendo

$$4\leq x \quad \text{y} \quad x\leq 1.$$

Graficamos ambas desigualdades:



Como vemos el conjunto solución es el vacío: $\varnothing$, pues no hay puntos comunes entre $[4,\infty)$ y $(-\infty,1]$.

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

Las recomendaciones para resolver problemas de desigualdades son similares a los de ecuaciones. En el siguiente ejemplo especificaremos las partes.

Ejemplo 1.-Un fabricante de un cierto artículo puede vender todo lo que produce a un precio de 5UM cada uno. Si existen mensualmente unos gastos fijos de 1.000UM y el costo variable por unidad es de 3UM. ¿Cuántas unidades debería producir y vender con el fin de obtener utilidades de al menos 1.500UM al mes?

Solución: Como en todo problema debemos definir claramente la variable de interés.

LA VARIABLE

En este caso definimos
q = número de artículos a producir y vender.

EXPRESIONES QUE CUMPLEN UNA RELACIÓN DE DESIGUALDAD

La expresión: *obtener una utilidad de al menos* 1.500*UM* la podemos escribir en términos de desigualdad como

$$\text{Utilidad} \geq 1.500$$

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

La expresión Utilidad debe ser escrita en términos de la variable. Para ello usamos

Utilidad= Ingreso- Costo Total

Describiremos cada término del lado derecho en términos de q

El costo total de producir q artículos es el costo fijo 1.000 más el costo variable que es 3 por número de artículos a producir. Es decir:

$$C_{total} = C_{fijo} + C_{\text{var}\,iable}$$

$$C_{total} = 1000 + 3q$$

El ingreso total es $5q$ (precio por cantidad). Como

Utilidad= Ingreso- Costo Total

$=5q-(1000+3q)$

Así

Utilidad= $2q$-1.000

ESCRIBIR LA DESIGUALDAD EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Sustituyendo en $\text{Utilidad} \geq 1.500$ se obtiene

$$2q - 1000 \geq 1.500$$

RESOLVER LA DESIGUALDAD

$$2q \geq 2.500$$

$$q \geq 1.250$$

RESPUESTA VERBAL

El fabricante deberá producir y vender por lo menos 1.250 artículos para obtener una utilidad de al menos 1500UM.

Ejemplo 2.- Una compañía de teléfonos ofrece dos planes para llamadas nacionales donde el valor del minuto es de 50UM. El primer plan vale 13.000UM al mes más el valor de los minutos consumidos. El segundo plan vale 26.000UM al mes y le rebajan un 25% al valor de los minutos consumidos ¿Cuál debe ser el consumo en minutos para que convenga el segundo plan?

Solución: Definimos nuestra variable de interés como:

LA VARIABLE

x =número de minutos consumidos al mes.

EXPRESIONES QUE CUMPLEN UNA RELACIÓN DE DESIGUALDAD

Para que un cliente le convenga el segundo plan debe cumplirse que

Costo del plan 2< Costo del plan 1

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Debemos expresar el valor de cada plan en términos de x. Es claro que:

El costo del plan 1=13.000+50x.

El plan 2 tiene un 25% de descuento en el valor de los minutos. Esto es $50x - 0.25 \cdot 50x = 0.75 \cdot 50x = 37.5x$. Así

El costo del plan 2=26.000+37.5x.

Una vez que se ha logrado expresar ambos planes en términos de x podemos sustituir en nuestra desigualdad verbal y obtener la desigualdad algebraica.

ESCRIBIR LA DESIGUALDAD EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Sustituimos ahora en la desigualdad planteada

Costo del plan 2< Costo del plan 1

$26.000+37.5x<13.000+50x$

RESOLVER LA DESIGUALDAD:

$13.000<12.5x$

$1040<x$

RESPUESTA VERBAL

Un cliente con un consumo mayor a los 1040 minutos al mes le conviene más el plan 2

Ejercicio de desarrollo.- Un comerciante adquirió 1000 computadoras portátiles a un costo de 800UM cada una. Quiere promocionar las primeras ventas vendiendo cada una a 1400 UM. y el resto de las máquinas las venderá a 1900UM. ¿De qué tamaño tiene que ser el lote que venda a 1400UM a fin que la utilidad sea al menos el costo total?

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes desigualdades:

1.1) $2x+1>5$; **1.2)** $2x+1\leq 2-x$; **1.3)** $-\frac{1}{2}x+1\geq -\frac{3}{2}$;

1.4) $4-3x>4$; **1.5)** $\frac{1}{3}(1-2x)<4$; **1.6)** $2(3-x)\leq 5-4x$;

1.7) $\frac{x-3}{3}-2<5x$; **1.8)** $-3(x-1)>4(1-x)$; **1.9)** $4x-\frac{1}{3}<5-2(3-x)$;

1.10) $\frac{1}{3}-2t<\frac{5+t}{2}$; **1.11)** $\frac{3}{2}\geq x-2\geq -\frac{3}{2}$; **1.12)** $4\geq 1-3x\geq 2$;

1.13) $2<\frac{1}{3}-2x<5$; **1.14)** $2\leq 3(3-2x)\leq 5$; **1.15)** $5>\frac{-3x-1}{2}>4$;

1.16) $1\leq \frac{1}{3}-2x<3$; **1.17)** $\frac{1}{4}-\frac{t}{3}<\frac{5+t}{2}$; **1.18)** $5-2t\geq \frac{2-4t}{2}$;

1.19) $\frac{6x-1}{3}-2>2x$; **1.20)** $0\leq \frac{1-2t}{2}\leq \frac{1}{3}$

2*) Resuelva las siguientes desigualdades:

2.1) $1<2-x<2x$; **2.2)** $1\leq x-2\leq 3x-4$; **2.3)** $3x-1\geq x-2\geq -5$

2.4) $2x\leq 3x-1\leq x+3$; **2.5)** $2x\leq 3x-1\leq x-3$;

3) Determine para cada expresión algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

3.1) $\sqrt{\frac{1}{2}+3x}+5$; **3.2)** $\sqrt[4]{1-\frac{3x}{2}}$; **3.3)** $\frac{2-x}{\sqrt{1-x}}$; **3.4)** $\frac{\sqrt[3]{1+3x}}{4}$

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) Una persona desea invertir 20.000UM en dos bonos, una paga el 6% anual y el otro, de mayor riesgo, paga el 7.5% anual. Determine el monto mínimo que deberá colocar a la tasa de 7.5% para obtener por concepto de intereses anuales al menos 1.440 UM. **Respuesta:** 16.000 UM

2) El costo de mantener una cuenta corriente en el banco A es 12UM por mes más 0.1 UM por cheque girado. El banco B cobra 10 UM por mes más 0.14UM por cheque girado. ¿A qué tipo de clientes le conviene abrir la cuenta con el banco A? **Respuesta:** quienes emiten más 50 cheques.

3) Una compañía invierte 30.000UM de sus fondos a dos tasas de interés anual: 5% y 6.75%. Desea una ganancia anual de al menos 6.5%. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa de 6.75%? **Respuesta:** 25.714

4) Un fabricante tiene 2.500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de 4UM. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en 0.5 UM. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2.500 unidades no sea menor que 10.750UM. ¿Cuál es el número máximo de unidades que puede ser vendido este mes? **Respuesta:** 1000 unidades

5) Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted puede elegir entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga 12.600UM más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una sola comisión del 8% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método? **Respuesta*:*** Para ventas menores de 210.000 anuales.

6) Una compañía fabricará un total de 10.000 unidades de su producto entre las plantas A y B. La información disponible aparece a continuación

	PLANTA A	PLANTA B
Costo unitario por mano de obra y material	5 UM	5.50 UM
Costos fijos	30.000UM	35.000UM

Entre las dos plantas la compañía ha decidido asignar no más de 117.000 UM para costos totales. ¿Cuál es el número de unidades que puede producir la planta A? **Respuesta:** Entre 6000 y 10.000

7) Un fabricante de cartuchos de video vende cada uno a 20UM. El costo de fabricación es de 15UM. Los costos fijos mensuales son de 8000UM. El fabricante desea saber en su primer mes cuántas unidades deberá vender a fiN de obtener utilidades? **Respuesta:** Más de 1600 cartuchos.

8) Una fábrica de bicicletas suele comprar las gomas del manubrio para la fabricación de las bicicletas a un precio de 3UM cada par. La fábrica está pensando en elaborar sus propias gomas. Estima que si las fabrica entonces los costos fijos de la empresa aumentarán 2300UM y el costo de fabricación de cada par será de 2.2UM. ¿Cuáles son los niveles de producción de bicicletas para los cuales el ahorro por la fabricación sea de al menos 1.200 UM? **Respuesta:** 4.375 bicicletas o más.

9) Un comerciante adquirió el mes pasado 200 MP3 a un precio de 100UM c/u. El quiere promocionar los primeros artículos que logre vender a un precio de 150UM, las restantes las venderá a 200 ¿Qué cantidad máxima de MP3· deberá colocar a precio promocional con el fin de obtener utilidades de al menos 17.000UM? **Respuesta.** Tiene que vender como máximo 60 MP3 a un precio de de 150UM

Respuestas

1.1) $(2,\ \infty)$; **1.2)** $(-\infty,\frac{1}{3}]$; **1.3)** $(-\infty,5]$ **1.4)** $(-\infty,0)$; **1.5)** $(-\frac{11}{2},\infty)$;

1.6) $(-\infty,-\frac{1}{2}]$;**1.7)** $(-\frac{9}{14},\infty)$;**1.8)** $(1,\ \infty)$; **1.9)** $(-\infty,-\frac{1}{3})$; **1.10)** $(-\frac{13}{15},\infty)$; **1.11)** $[\frac{1}{2},\frac{7}{2}]$

1.12) $[-1,-\frac{1}{3}]$; **1.13)** $(-\frac{7}{3},-\frac{5}{6})$; **1.14)** $[\frac{2}{3},\frac{7}{6}]$; **1.15)** $(-\frac{11}{3},-3)$; **1.16)** $(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}]$;

1.17) $(-\frac{27}{10},\infty)$ **1.18)R ;** **1.19)** $\varnothing$; **1.20)** $[\frac{1}{6},\frac{1}{2}]$;

2.1) $(\frac{2}{3},1)$; **2.2)** $[3,\infty)$; **2.3)** $[-\frac{1}{2},\infty)$; **2.4)** $[1,2]$; **2.5)** $\varnothing$

3.1) $[-\frac{1}{6},\infty)$; **3.2)** $(-\infty,\frac{2}{3}]$; **3.3)** $(-\infty,1)$; **3.4) R.**

DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

Una desigualdad en la variable *x* se llama cuadrática cuando la podemos escribir en la forma $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0), donde *a,b* y *c* son constantes con $a\neq 0$.

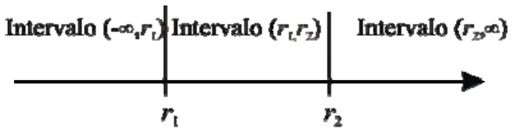
Introducimos un método muy novedoso para encontrar las soluciones de este tipo de desigualdad. Para resolver esta desigualdad, es decir encontrar las *x´*s que la satisfacen, escribimos el lado izquierdo como el producto de dos expresiones lineales, esto es, factorizamos y examinamos el signo de los factores en los intervalos definidos por las raíces de los factores.

Observe que resolver una desigualdad del tipo

$$(x-r_1)(x-r_2)>0$$

lo podemos interpretar como encontrar los valores de x tales que *el producto de los signos de los factores es positivo.*

Por otro lado $(x-r_1)$ cambia de signo sólo en r_1. Efectivamente $x-r_1>0$ (léase $(x-r_1)$ positivo) si y sólo si $x>r_1$. Así que los únicos candidatos a cambio de signo en $(x-r_1)(x-r_2)$ son las raíces: r_1, r_2. Estos dos puntos definen tres intervalos en la recta real donde los factores no cambian de signo.



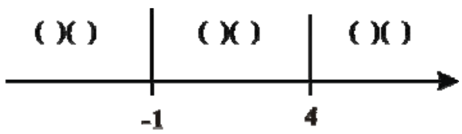
Es suficiente tomar un valor de prueba dentro de cada intervalo para averiguar el signo de cada factor en ese intervalo. Luego se multiplican los signos de los factores para obtener el signo de $(x-r_1)(x-r_2)$. Finalmente se averigua donde el producto de los signos dio positivo.

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $(x+1)(x-4)>0$,

Solución:

Primero señalamos las raíces de los factores en la recta real; en este caso –1 y 4. Estos números particionan la recta real en tres intervalos: $(-\infty,-1)$, (-1,4) y $(4,\infty)$. Reiteramos que en cada uno de estos intervalos el signo de cada factor será el mismo.

Colocaremos encima de cada intervalo dos pares de paréntesis en donde irá el signo del primer factor $(x+1)$ dentro del primer par de paréntesis y el signo del segundo factor dentro del segundo paréntesis.



Entonces para determinar el signo de cada factor en cada intervalo usaremos valores de prueba pertenecientes a cada intervalo

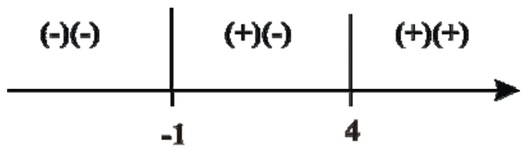
- Para el intervalo $(-\infty,-1)$, podemos tomar como valor de prueba $x_p=-10$

$x_p+1=-9$, pero sólo nos interesa el signo "-", igualmente

$x_p-4=-14$, sólo colocaremos el "-". Colocamos dentro de cada par en el primer intervalo menos y menos

- En el intervalo (-1,4) podemos tomar como valor de prueba $x_p = 0$, en este caso

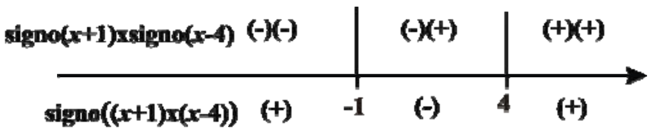
$x_p + 1 = 1$ y colocamos "+" dentro del primer par de paréntesis y
$x_p - 4 = -4$ y colocamos "-" en el segundo par



- En el intervalo $(4,\infty)$ podemos tomar como valor de prueba $x_p = 5$, en este caso

$x_p + 1 = 6$ y colocamos "+" y $x_p - 4 = 1$ y colocamos "+"

Debajo de cada intervalo colocaremos un par de paréntesis y dentro el signo resultante de la multiplicación de signos de los factores en el intervalo respectivo.



La solución a nuestra desigualdad $(x+1)(x-4) > 0$ se basa en que intervalos el producto de los signos es positivo, así concluimos que la solución es el conjunto $(-\infty,-1) \cup (4,\infty)$.

Observaciones.-
1.- La expresión $(x+1)(x-4)$ evaluada en cualquier punto x del intervalo $(-1,4)$ da como resultado un número negativo. Un punto fuera de este intervalo la expresión es no negativa. Así la solución de la desigualdad $(x+1)(x-4) < 0$ es el conjunto de todos los x tal que al evaluar la expresión es un número negativo, (así se lee "< 0") por consiguiente la solución de esta desigualdad es el intervalo $(-1,4)$.
2.- Es claro que el conjunto solución de la desigualdad $(x+1)(x-4) \leq 0$ incluye los puntos donde alguno de los dos factores es cero. Es por ello que el conjunto solución es el intervalo cerrado $[-1,4]$

Nuestro método se basa en la desigualdad de la forma $(x-r_1)(x-r_2) > 0$ (<0; ≤ 0 ó ≥ 0). Si no está de está forma hay llevarla. Concretemos los pasos para resolver desigualdades cuadráticas más generales

Pasos a seguir para resolver desigualdades cuadráticas
1.- Escribir la desigualdad en su forma canónica: $ax^2 + bx + c > 0$ (<0; ≤ 0 ó ≥ 0).

2.- Factorizar el lado izquierdo. En caso que no se pueda la solución es trivial: **R o** $\varnothing$.

3.- Colocar las raíces de los factores en la recta real.

4.- Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces.

5.- Tomar valores de prueba dentro de cada intervalo, evaluar los factores en los valores de prueba y colocar el signo resultante en el paréntesis respectivo del factor.

6.- Debajo de cada intervalo definido por los factores colocar un par de paréntesis, realizar la multiplicación de signo de arriba y colocar el resultado en el paréntesis de abajo.

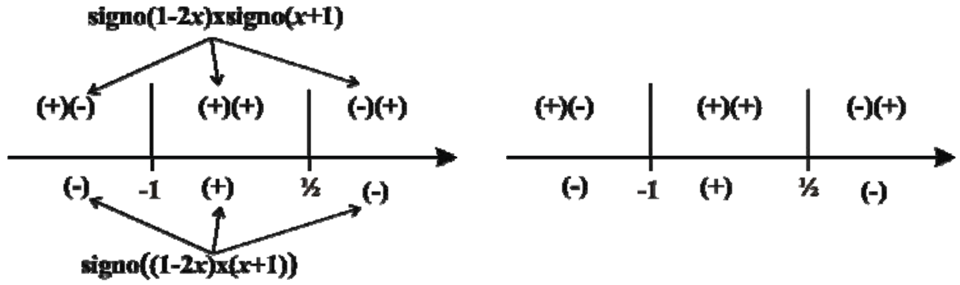
7.- Responder la pregunta. Por ejemplo si la desigualdad factorizada es <0, colocar los intervalos en donde el signo dio negativo. Análogamente en los demás casos.

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $1 \geq 2x^2 + x$.
Solución:
Paso 1: $-2x^2 - x + 1 \geq 0$.
Paso 2: (Factorizar): Vamos a factorizar usando el método de las raíces. Usted puede chequear que las raíces de $-2x^2 - x + 1 = 0$ son –1 y ½. Así $-2x^2 - x + 1 = -2(x - 1/2)(x + 1)$.

Vamos a escribir nuestro polinomio como el producto de dos factores. El –2 lo distribuimos en (x-1/2), para obtener finalmente:

$$-2x^2 - x + 1 = (-2x + 1)(x + 1)$$

(Compruebe que la factorización por Ruffini da el mismo resultado).
Paso 3: Colocar las raíces de los factores en la recta real. Estas son –1 y 1/2
Paso 4: Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces
Paso 5: Evaluar cada uno de los factores en los valores de prueba. En nuestro caso (1-2x) es el primer factor y (x+1) segundo factor. Como valores de prueba se pueden tomar –2, 0 y 1 respectivamente.



Paso 6: Colocar el signo resultante de cada multiplicación
Paso 7: Como nuestra desigualdad, $-2x^2 - x + 1 \geq 0$, es equivalente a $(1 - 2x)(x + 1) \geq 0$, el conjunto solución será el intervalo donde el producto es positivo, este es [-1,1/2]. Observe que en este caso se incluye los extremos del intervalo por haber una igualdad en la desigualdad.
Conjunto Solución=[-1,1/2]

Comentario: Observe como efectivamente $(1 - 2x)$ cambia de signo en su raíz: $\frac{1}{2}$ y $(x + 1)$ cambia de signo en su raíz: -1.

Puede ahorrarse trabajo si toma en cuenta que un factor cambia de signo sólo en su raíz.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver la desigualdad $x^2 \leq 4x$.

DESIGUALDADES CUADRÁTICAS TRIVIALES

Algunas desigualdades resultan triviales. Un tipo de ellas es cuando la expresión cuadrática no tiene raíces reales y por consiguiente no se puede factorizar.

Ejemplo 1- Resolver la desigualdad $0 \geq x^2 + 1$.
Solución: Observe que el lado derecho no se puede factorizar. Esta desigualdad tiene una solución trivial: **R** o $\emptyset$. Hay una manera lógica para determinar cual conjunto. Como $x^2 + 1$ es un número estrictamente positivo, pues es la suma de dos números positivos. Así nunca va a ser menor que 0. Por tanto la solución es el conjunto vacío.

Comentario: 1) $x^2+1\geq 0$ tiene como solución **R**.
2) Ya sabemos que si no se puede factorizar como producto de dos polinomios de segundo grado, entonces la solución es **R** ó $\emptyset$. Una manera de determinar cuál de las dos soluciones es consiste en tomar un valor de prueba: x_0. Si x_0 satisface la desigualdad entonces la solución es **R**, (no puede ser vacio $\emptyset$) . Si x_0 no satisface la desigualdad entonces la solución es $\emptyset$, (no puede ser **R**) .

Ejemplo 2- Resolver las siguientes desigualdades: **a)** $x^2+x+1\leq 0$; **b)** $-x^2+2x-4\leq 0$.
Solución:
a) No se puede factorizar. La solución es trivial. Se toma como valor de prueba $x_p=0$ y se evalúa en la desigualdad: $0^2+0+1\leq 0$. Como esta desigualdad no se satisface entonces la solución es $\emptyset$**.**
b) No se puede factorizar. La solución es trivial. Se toma como valor de prueba 0 y se evalúa en la desigualdad: $-0^2+2\cdot 0-4\leq 0$. Como esta desigualdad se satisface entonces la solución es **R .**

Otro tipo de desigualdad cuadráticas trivial tiene como solución **R-**$\{x_0\}$ o $\{x_0\}$. Son desigualdades que pueden ser escritas en la forma: **a)** $(x-x_0)^2>0$ ó **b)** $(x-x_0)^2\leq 0$

Es claro que la solución de **a)** es **R-**$\{x_0\}$ y la de **b)** la solución es $\{x_0\}$.

Ejemplo 3.- - Resolver la desigualdad $2x\leq x^2+1$.
Solución: Esta desigualdad puede ser escrita en forma canónica como

$x^2-2x+1\leq 0$. Al factorizar tenemos

$(x-1)^2\leq 0$

La única solución es cuando se hace 0 el lado izquierdo y ello ocurre cuando $x=1$. Remarcamos que el lado izquierdo por estar elevado al cuadrado es mayor o igual a cero, nunca menor a cero.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes desigualdades:
a) $x^2\leq -2$**;** **b)** $x^2+4x+4>0$**;** **c)** $x^2\leq 6x-9$**;** **d)** $x^2\leq -3x-2$**.**

OTROS TIPOS DE DESIGUALDADES QUE CONDUCEN A DESIGUALDADES CUADRÁTICAS*

Otras formas de desigualdades caen en el caso de las desigualdades cuadráticas.

Ejemplo 1- Resolver la desigualdad $\frac{3x^2}{x^2+2} \le 2$.

Solución: Primero tenemos que hacer el lado derecho de la desigualdad 0, para ello pasamos el 2 restando y expresaremos el lado izquierdo en una sola fracción:

$$\frac{3x^2}{x^2+2} - 2 \le 0$$

Se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{3x^2 - 2(x^2+2)}{x^2+2} \le 0$$

$$\frac{x^2-4}{x^2+2} \le 0$$

El denominador es siempre positivo, así que el signo depende de x^2-4. Es decir la desigualdad es equivalente a $x^2-4 \le 0$. Esto es una desigualdad cuadrática a la que le aplicaremos los pasos dados.

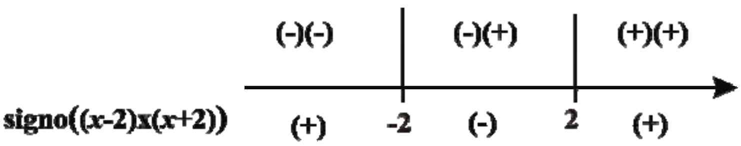
2. .- Factorizar el lado izquierdo, como producto de dos factores.

$$(x-2)(x+2) \le 0$$

3 .- Colocar las raíces de los factores en la recta real. En este caso -2 y 2

4.- Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces.

5.- Tomar valores de prueba, evaluar los factores en los valores de prueba y colocar el signo resultante en el paréntesis respectivo del factor.



6.- Debajo de cada intervalo definido por los factores colocar un par de paréntesis, realizar la multiplicación de los signos de arriba y colocar el resultado en el paréntesis de abajo.

7.- Como la desigualdad original es equivalente a $(x-2)(x+2) \le 0$. Así la solución de nuestra desigualdad es el intervalo [-2,2].

Ejercicio de desarrollo.- Resolver desigualdad $1 \le \frac{2}{x^2+2x+2}$

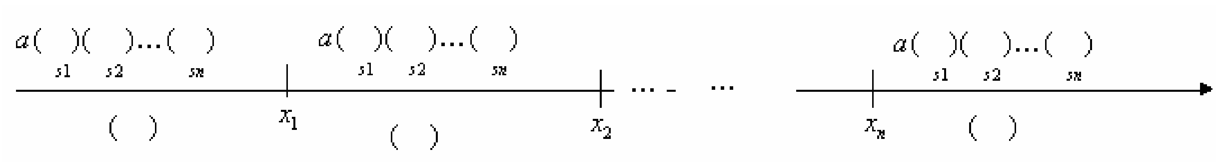
RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES POLINOMICAS POR EL MÉTODO DE MULTIPLICACIÓN DE SIGNOS.*

Se puede extender el método vistos a desigualdades polinómicas de mayor potencia, incluso a desigualdades racionales. Si una desigualdad polinómica puede ser escrita de manera factorizada como:

$$a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\geq 0,$$

se procede de manera análoga como antes.

Se colocan las raíces en la recta real y se toman valores de pruebas a evaluar en cada uno de los paréntesis a fin de conocer el signo de los factores en cada uno de los intervalos definidos por las raíces, luego se hace la multiplicación de signos para conocer el signo de producto, para finalmente conseguir el conjunto solución en base al sentido de la desigualdad con respecto al cero.



Nota: Debe considerar también el signo de *a*

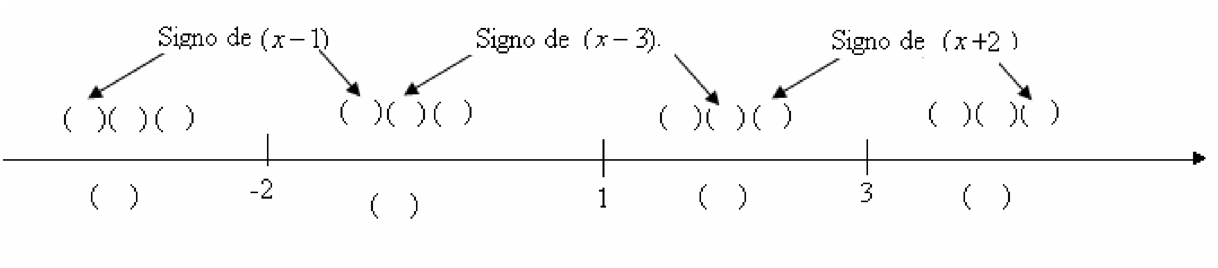
Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $x^3-2x^2<5x-6$.
Solución: Recuerde escribirlo en forma canónica, es decir el cero en el lado derecho, no importa el sentido de la desigualdad

$$x^3-2x^2-5x+6<0$$

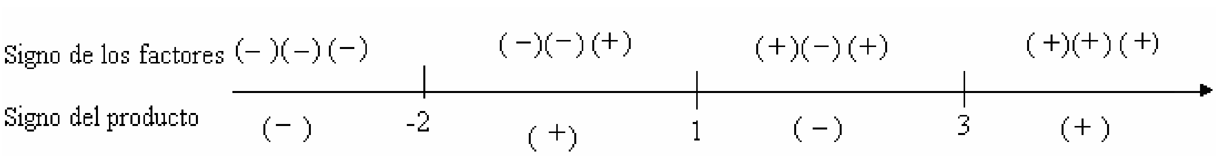
Se factoriza:

$$(x-1)(x-3)(x+2)<0\ .$$

Se colocan las raíces en la recta real.



Se determina el signo de cada factor en cada intervalo a través de un valor de prueba dentro del intervalo. Recuerde que el primer paréntesis se deja para el primer factor, el segundo para el segundo y así. Posibles valores de prueba para este ejercicio son -3, 0, 2 y 4 para el primer, segundo, tercer y cuarto intervalo respectivamente. El lector puede chequear.



Así como la desigualdad original es equivalente a $(x-1)(x-3)(x+2)<0$, el conjunto solución está dado por la unión de los intervalos donde este producto da negativo.
Conjunto solución: $(-\infty,-2)\cup(1,3)$.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver desigualdad $x^3-2x^2\leq x-2$

DESIGUALDADES RACIONALES*

Para resolver la desigualdad $\frac{x}{x+4}>1$ la primera idea que surge es despejar *x*, pero esta idea puede resultar muy complicada. Para despejar *x* hay que multiplicar ambos miembros por $x+4$, en este caso necesitaríamos condicionar por $x+4$ mayor a cero (el sentido de la desigualdad queda igual) y por $x+4$ menor que cero (en este caso el sentido de la desigualdad cambia). Evidentemente podemos terminar el ejercicio con estas ideas. Pero también podemos aplicar las siguientes ideas las cuales recurren a las operaciones con signos. El primer paso es llevarlo a la forma a la forma $\frac{p}{q}>0$, pasando el 1 restando y luego ejecutando la diferencia de fracciones:

$$\frac{x}{x+4}-1>0$$

$$\frac{x-(x+4)}{x+4}>0$$

$$\frac{-4}{x+4}>0$$ Al multiplicar por "-" ambos lados de la desigualdad queda.

$$\frac{4}{x+4}<0$$

El numerador es siempre positivo, el denominador es negativo si y solo si $x+4<0$, esto es cuando $x<-4$. Así que esta fracción es negativa cuando $x<-4$. En definitiva llegamos a que la solución de $\frac{x}{x+4}>1$ es el intervalo $(-\infty,-4)$ por un método distinto a despejar *x*.

No siempre resulta tan fácil resolver una desigualdad racional. Si quisiéramos aplicar el método de los signos el primer paso es llevarlo a la forma a la forma $\frac{p}{q}>0$ (o cualquiera de las otras tres formas con 0 en un lado de la desigualdad), considere pasar todos los términos a un solo miembro y luego sumar y restar fracciones para ello. Luego debe expresar p y q factorizados. El resto es similar a como se procedió anteriormente.

Ejemplo 3.- Resolver la desigualdad $1\geq\frac{3}{x^2-1}$.

Solución: Antes que nada hay que darse cuenta que la expresión no está definida en -1 y 1 pues la división entre cero no lo está.
Primero pasamos todo de un solo lado a fin de conseguir el cero en el lado derecho.

$$1-\frac{3}{x^2-1}\geq 0$$

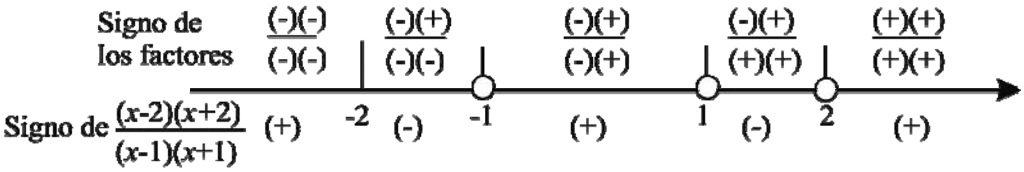
Se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1}\geq 0$$

Se factoriza numerador y denominador

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}\geq 0$$

Ahora colocamos lar raíces de los factores en la recta real y tomamos valores de prueba, el lector debe darse cuenta como se ha indicado los paréntesis en la misma forma que la expresión.



Los círculos de -1 y 1 son para recordarnos que la expresión no está definida en estos valores. Como nuestra desigualdad es equivalente a $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$, buscamos los intervalos donde este producto y cociente de signo positivo: $(-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$. Observe como se ha suprimido -1 y 1 en la respuesta.

Conjunto solución: $(-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes desigualdades:

a) $x^3 > (3x+28)x$ **b)** $\frac{2x}{2x+1} > \frac{x-1}{2x+1}$

MÉTODO EXPEDITO PARA RESOLVER DESIGUALDADES RACIONALES $\frac{p}{q} > 0$ *

Como ya hemos visto en todos estos ejemplos, el método para resolver estas desigualdades es factorizar el numerador y el denominador, conseguir las raíces reales de ellos y colocarlas en la recta real. Estas raíces dividen la recta real en intervalos donde $\frac{p}{q}$ mantiene el signo en cada intervalo. Así que resulta suficiente conseguir todas las raíces de *p* y *q* colocarlas en la recta real y entonces averiguar el signo dentro del intervalo: tomando valores de prueba y evaluándolos directamente en $\frac{p}{q}$. Es crucial no omitir ni una sola raíz. En el siguiente ejemplo procedemos de esta manera.

Ejemplo 4.- Resolver la desigualdad $\frac{x^3-1}{x^3-4x} \leq 0$.

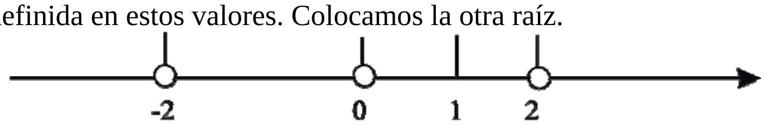
Solución: Conseguimos las raíces de x^3-1 y x^3-4x. La primera ecuación tiene como raíz *x*=1 ($x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}$). La segunda la resolvemos por factorización

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$ (Entonces $x=0$ ó $(x^2-4)=0$)

De aquí rápidamente concluimos que las raíces de x^3-4x son 0,2 y -2.

Antes de continuar hay que recordar que la expresión no está definida en 0, -2 y 2 pues la división entre cero no lo está. Colocamos en círculos estos valores en la recta real para recordarnos que la expresión no está definida en estos valores. Colocamos la otra raíz.

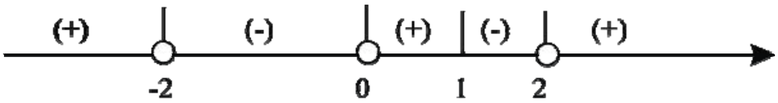


En cada uno de los intervalos obtenidos tomamos un valor de prueba y lo evaluamos en $\frac{x^3-1}{x^3-4x}$.

Tomando sólo en cuenta el signo del número obtenido

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x_p=-3$: $sign\left(\frac{(-3)^3-1}{(-3)^3-4(-3)}\right)=(+)$

- En $(-2,0)$ tomamos $x_p = -1$: $sign\left(\dfrac{(-1)^3-1}{(-1)^3-4(-1)}\right) = (-)$
- En $(0,1]$ tomamos $x_p = 0.5$: $sign\left(\dfrac{(0.5)^3-1}{(0.5)^3-4(0.5)}\right) = (+)$
- En $[1,2)$ tomamos $x_p = 1.5$: $sign\left(\dfrac{(1.5)^3-1}{(1.5)^3-4(1.5)}\right) = (-)$
- En $(2,\infty)$ tomamos $x_p = 33$: $sign\left(\dfrac{(3)^3-1}{(3)^3-4(3)}\right) = (+)$



En conclusión: el conjunto solución es donde el signo de $\dfrac{x^3-1}{x^3-4x}$ es negativo o cero. Este conjunto es $(-2,0)\cup[1,2)$.

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes desigualdades:

1.1) $x^2+x-2>0$; **1.2)** $x^2+x<0$; **1.3)** $x^2-7x+12>0$;
1.4) $16x^2 \geq 9x$; **1.5)** $x^2 \leq 16$; **1.6)** $x^2 > -2x$;
1.7) $x(x-2)>3$; **1.8)** $4-x^2 \geq 0$; **1.9)** $(3-5x)(1-2x)\leq 0$;
1.10) $2x^2+x-2>x^2+2x$; **1.11)** $x^2-1<x-3$; **1.12)** $x<2(x+2)^2$;
1.13) $16-15x \geq x^2$; **1.14)** $2x^2+3x-5\leq 0$; **1.15)** $x(x+1)>-1$;
1.16) $\dfrac{3t+3}{(t+1)^2}\leq 1$; **1.17)** $(2-x)(x-1)\leq 1-x$; **1.18)** $4x \leq 2(x+2)(x-1)$;
1.19) $2x^2+2x-(x^2+x+6)>0$; **1.20)** $x^2+x-2(x^2+3x)>0$;
1.21) $x(x-4)+4\leq 0$; **1.22)** $(3x-2)(3x+2)-(3x+2)^2 \leq 0$

2) Resolver las siguientes inecuaciones:

2.1) $x^3+2x-x-2\geq 0$; **2.2)** $t^3+3t^2+2t<2(t^2+3t+2)$; **2.3)** $-x^3+3x-2>0$;
2.4) $\dfrac{(x+3)}{(x-4)(x+5)}\geq 0$ **2.5)** $\dfrac{x^2-4}{x+5}\geq 0$; **2.6)** $\dfrac{4}{3x+1}>1-3x$;
2.7) $\dfrac{x}{x+1}<\dfrac{-x}{x+2}$; **2.8)** $\dfrac{2t}{t^2-4t+3}\leq\dfrac{t+1}{1-t}$; **2.9)** $\dfrac{2x+5}{2x^2+x}\geq\dfrac{1}{x}-2$;

Respuestas:

1.1) $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$; **1.2)** (-1,0) **1.3)** $(-\infty,3)\cup(4,\infty)$; **1.4)** $(-\infty,0]\cup[9/16,\infty)$; **1.5)** [-4,4]; **1.6)** $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$; **1.7)** $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$; **1.8)** $[-2,2]$ **1.9)** [1/2,3/5]; **1.10)** $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$; **1.11)** vacio **1.12) R**; **1.13)** [-16,1]; **1.14)** [-5/2,1]; **1.15) R**; **1.16)** $(-\infty,-1)$ U $[2,\infty)$; **1.17)** $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$; **1.18)** $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$; **1.19)** $(-\infty,-3)$ U $(2,\infty)$; **1.20)** $(-5,0)$; **1.21)** $\{2\}$; **1.22)** $[-2/3,\infty)$; **2.1)** $[-2,-1]\cup[1,\infty)$; **2.2)** $(-\infty,-2)\cup(-1,2)$ **2.3)** $(-\infty,-2)$; **2.4)** $(-5,-3]\cup(4,\infty)$; **2.5)** $(-5,-2]\cup[2,\infty)$; **2.6)** $(-\frac{1}{3},\infty)$; **2.7)** $(-2,-\frac{3}{2})\cup(-1,0)$; **2.8)** $([-\sqrt{3},1)\cup[\sqrt{3},3)$; **2.9)** $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\infty)$

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Se estima que el costo total de producir q unidades diarias de un artículo es $C=0.4q^2+3q+10$ UM y que cuando el precio por unidad es p las ventas serán de q unidades, donde $p=9-0.1q$ UM. ¿Cuáles son los niveles de producción donde se obtienen utilidades?

Solución.-

LA VARIABLE

q= cantidad de unidades que se producen y venden

EXPRESIONES QUE CUMPLEN UNA RELACIÓN DE DESIGUALDAD

Queremos una utilidad mayor que 0. En términos de desigualdad:

Utilidad>0

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Debemos expresar la utilidad en términos de la variable

Utilidad=Ingreso total-Costo total

El costo total en este caso lo dan directamente. Debemos encontrar el ingreso total a través de

Ingreso total $=qp$

Sustituimos p de $p=9-0.1q$ y obtenemos

Ingreso=$q(9-0.1q)$

ESCRIBIR LA DESIGUALDAD EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Ingreso total-Costo total>0

$$q(9-0.1q)-(0.4q^2+3q+10)>0$$

$$-0.5q^2+6q-10>0 \qquad \text{Se simplifica}$$

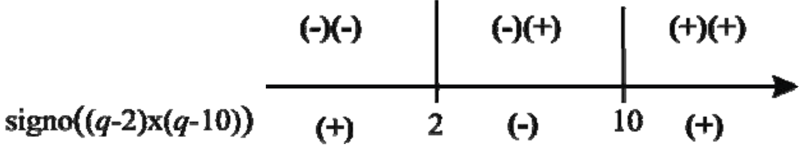
RESOLVER LA DESIGUALDAD

Esta es una desigualdad cuadrática, la resolvemos usando la técnica vista, pero antes la multiplicamos por -2, nos queda entonces

$$q^2-12q+20<0.$$

Factorizando obtenemos

$(q-10)(q-2)<0$, Colocamos las raíces



El conjunto solución es aquél donde el signo del producto es negativo

RESPUESTA VERBAL

El nivel de producción deberá estar entre 2 y 10 unidades diarias.

Ejemplo 2.- Un fabricante puede producir cada balón de fútbol a un costo de 40UM la unidad. Se ha estado vendiendo 2.000 balones en el año al precio de 50UM cada balón. El industrial quiere subir los precios y estima que por cada aumento de 1UM en el precio, las ventas bajan en 50 balones. ¿Qué precio deberá fijarse a cada balón con la finalidad de lograr una utilidad de por lo menos 30.000UM?
Solución:

LA VARIABLE

Una variable de uso frecuente para describir situaciones análogas como ésta la podemos definir como

x= número de incrementos de 1UM en el precio

EXPRESIONES QUE CUMPLEN UNA RELACIÓN DE DESIGUALDAD

Se quiere conseguir el rango de balones a producir y vender para que la utilidad sea de al menos 30.000. Es decir

$$Utilidad \geq 30.000$$

Debemos ahora expresar la utilidad en términos de la variable. Tenemos que

Utilidad=(nºde balones vendidos) x (utilidad por balón)

ESCRIBIR LAS EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Si se hace un aumento de xUM, esto es x incrementos de 1UM, se venderán $2000 - x \cdot 50$. Factorizando esta última tenemos que

nºde balones vendidos =50(40-x)

Por otro lado

Precio por balón= $50 + 1 \cdot x$

La utilidad por balón es la diferencia entre el precio de venta y el costo unitario de 20UM. Queda entonces:

Utilidad por balón= (50+x)-40
=x+10

De aquí podemos expresar la utilidad total en términos de nuestra variable como:

$$Utilidad=(50(40-x))(x+10).$$

ESCRIBIR LA DESIGUALDAD EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE

Al sustituir en la desigualdad $Utilidad \geq 30.000$, obtenemos

$$50(40-x)(x+10) \geq 30.000$$

RESOLVER LA DESIGUALDAD

Para resolver esta desigualdad la identificamos como una cuadrática.
Desarrollando

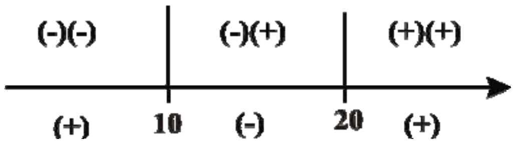
$(40 - x)(x + 10) \geq 600$ Recuerde que hay que llevarla a la forma canónica.

$40x - x^2 - 10x + 400 \geq 600$

$x^2 - 30x + 200 \leq 0$

Se factoriza

$(x-20)(x-10) \leq 0.$



Recordemos que están preguntando sobre el precio y no sobre el número de incrementos de una unidad monetaria. Así debemos ver los valores de p. Sabemos que el precio es $p = 50 + 1 \cdot x$

Así que sumando 50 a cada miembro de la desigualdad tenemos que

$$50+1\cdot 10 \leq 50+1\cdot x \leq 50+1\cdot 20$$

La respuesta de esta última desigualdad es:

$$10 \leq x \leq 20$$

$$60 \leq p \leq 70$$

RESPUESTA VERBAL

Esto es, se deberá fijar el precio entre 60 y 70UM para lograr utilidades mayores de 30.000U.M.

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

1) Un fabricante puede producir cintas de video a un costo de 2UM por casete. Los casetes se han vendido a 5UM cada uno y a ese precio, los consumidores han comprado 4.000 casetes al mes. El fabricante planea incrementar el precio de los casetes y estima que por cada 1UM de aumento en el precio se venderán 400 casetes menos. ¿Qué precio podrá fijar el fabricante a fin de obtener utilidades de por lo menos 14.400 UM? **Respuesta:** entre 6 y 12 U.M.

2) Un fabricante puede producir y vender q unidades de un artículo cada mes al precio p UM por unidad, con $p= 400 -q$. ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 30.000 UM? **Respuesta:** Entre 100 y 300 unidades.

3) Un fabricante puede producir y vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por unidad, con $p= 200 -q$. Si el costo de producir q artículos es 120 ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener utilidades de al menos 1.500 UM? **Respuesta:** Entre 30 y 50 unidades.

4) Un fabricante puede vender cada unidad que produce a un precio de 400-2qUM. El costo de producir un artículo es 200 y los gastos mensuales de mantenimiento son 3200UM ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener alguna utilidad? **Respuesta:** Entre 20 y 80 unidades.

5) Un detallistas de mangos sabe que si fija un precio de p UM el kilo venderá $q= 100 -2p$ kilos de mangos. ¿Cómo debe fijar el precio a fin de obtener ingresos mayores a 1.200UM? (Entre 20 y 30UM)

6) Se estima que si en una hectárea se siembran 60 naranjos la producción por árbol será de 450 naranjas anuales y que por cada árbol adicional que se siembre la producción por árbol disminuirá en 5 unidades. ¿Cuántos árboles deberá plantarse por hectárea a fin de tener una producción de al menos 28.000 naranjas anuales? **Respuesta:** Entre 70 y 80 naranjos

7) El número y de unidades vendidas cada mes de cierto artículo depende de la cantidad de UM x invertidas en publicidad dada por la relación $y=100+8x-0.1x^2$. ¿Cuánto debería gastar en publicidad a fin de obtener un volumen de ventas mayor a 250 unidades? **Respuesta:** Entre 30 y 50 UM

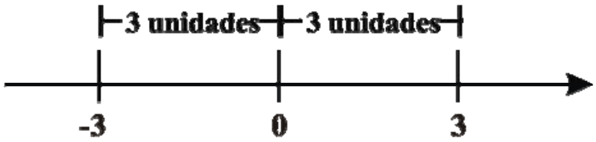
8) Un fabricante puede vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por unidad, con $p= 100 -q$. **a)** ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 1.600 UM? **b)** Si el costo de mano de obra y materiales por unidad es de 10 UM y los costos fijos son de 200UM ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 800 UM? . **Respuesta: a)** Entre 20 y 80 unidades); **b)** Entre 10 y 80.

9) El modelo de costos de una empresa está dado por: $C(q)=300+3q-0.02q^2$ .Si la empresa vende todo lo que produce a 8UM **a)** ¿Cuántas unidades debe producir y vender a fin de tener alguna utilidad? **b)** ¿Cuántas unidades de producir y vender a fin de tener al menos 1.500UM de utilidad?
Respuesta: a) Más de 50 unidades **b)** Más de 200 unidades

10) Un productor tiene unas ventas anuales de 100.000 unidades de un artículo con un precio de 50UM. El gobierno planea colocar un impuesto sobre el precio de venta y estima que por cada UM de impuesto las ventas bajarán en 500 unidades. ¿Cuál es el rango posible de impuesto que puede establecer a fin que los ingresos sean mayores a 4 millones? **Respuesta:** de 0 a 40UM.

VALOR ABSOLUTO

Cualquier número real a tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto a al origen. Observe en el dibujo que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3. En notación, esto es $|-3| = 3$.



Las barras se leen como el valor absoluto de lo que está dentro de ellas. Recuerde que como el valor absoluto es una distancia siempre es positivo. Analíticamente podemos ver que si a es positivo, es decir está a la derecha del cero, entonces $|a| = a$ y si está a la izquierda del origen, es decir si a es negativo, entonces el valor absoluto le cambia el signo, esto es $|a| = -a$. Tenemos entonces la siguiente definición

Definición.- El valor absoluto de un número real, x, se define como**:**

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1.-

a.- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b.- $\left|-\frac{1}{2}\right| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Observe como el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo.

c.- Si x>2 entonces $|x-2| = x-2$, pues x-2>0 y así usamos la primera parte de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo positivo y el valor absoluto lo deja igual.

d.- Si x<2 entonces $|x-2| = -(x-2)$, pues x-2<0 y así usamos la segunda formula de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo negativo y el valor absoluto le cambia el signo.

e.- $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si x es una incógnita en la expresión $|x-3|$, entonces no sabemos si x-3 es positivo o negativo. Ahora bien, si tenemos la ecuación:

$$|x-3|=5,$$

debemos considerar las dos posibilidades de signo. Éstas son:

$$x-3=5 \quad \text{o} \quad x-3=-5$$

La primera es en el caso que x -3 sea positivo, la segunda en la situación que sea negativo.
Al resolver esta dos ecuaciones obtenemos que

$$x=8 \quad \text{o} \quad x=-2$$

Efectivamente estos valores de x satisfacen la ecuación: $|x-3|=5$.

Veamos más ejemplos de resolución de ecuaciones en valor absoluto.

Ejemplo 1.- Resolver $|x-4|=3$

Solución: Hay dos posibilidades

$$x\text{-}4=3 \quad \text{o} \quad x\text{-}4=\text{-}3.$$

Las soluciones de ellas son 7 y 1.

El lector puede comprobar que si sustituimos estos valores en la ecuación ellos satisfacen la igualdad.

Ejemplo 2.- Resolver $3\,|5-4x|=9$

Solución: Sabemos resolver una ecuación con valor absoluto cuando el valor absoluto está aislado en el lado izquierda, así que lo llevamos a esta forma, dividiendo entre 3. De esta manera la ecuación dada es equivalente a:

$$|5-4x|=3$$

Ahora esta ecuación en valor absoluto es equivalente a

$$5\text{-}4x=3 \quad \text{ó} \quad 5\text{-}4x=\text{-}3$$

La solución de ellas son $\frac{1}{2}$ y 2.

Podemos representar el conjunto solución de nuestra ecuación $3|5-4x|=9$ a través de la notación de conjunto como: $\{\frac{1}{2},2\}$.

Recuerde que un valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, nunca negativo.

Ejemplo 3.- Resolver $|x-5|=-2$

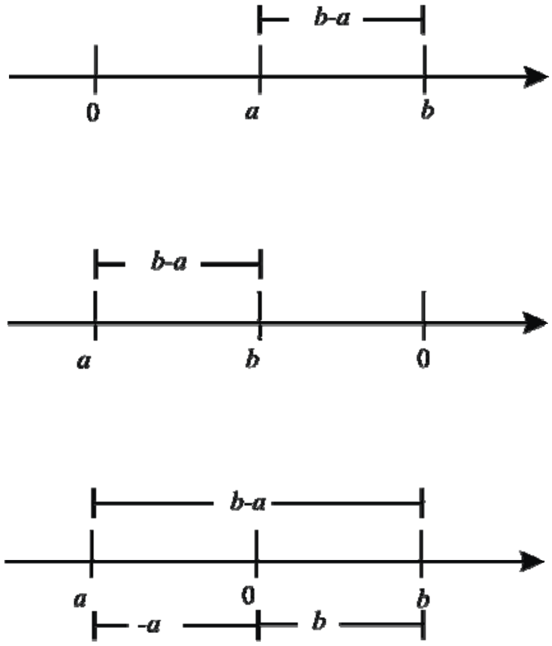
Solución: Esta igualdad es imposible de cumplirse. Por tanto la solución es vacía**.**

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes ecuaciones en valor absoluto

a) $3|x-4|+1=7$ **b)** $3|2x-1|+8=1$

OTRA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA USANDO VALOR ABSOLUTO.

Recordemos que $|x|$ representa la distancia del punto x al origen.



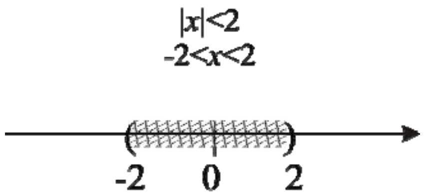
En la figura se puede observar que en cualquier situación tenemos que

$|b$-$a|$ representa la distancia entre a y b.

Ejemplo 1- Conseguir todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.
Solución: Sea x un punto cuya distancia a 3 es igual a 4.
Entonces $|x-3|=4$. El lector puede chequear que las soluciones de está ecuación son -1 y 7.

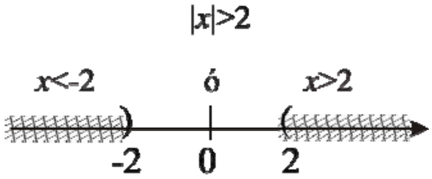
DESIGUALDADES CON VALORES ABSOLUTOS

La interpretación geométrica del valor absoluto nos puede ayudar a conseguir un método para resolver ecuaciones en valor absoluto.



La expresión $|x|<2$ la podemos interpretar como los x cuya distancia al origen es menor que 2, estos x son todos los números que están entre -2 y 2. Así la desigualdad

$|x|<2$ es equivalente a $-2<x<2$

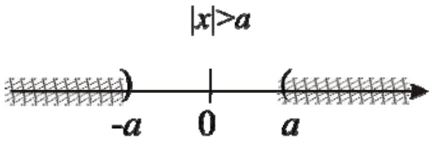


La expresión $|x|>2$ la podemos interpretar como los x cuya distancia al origen es mayor que 2, estos x son todos los números mayores que 2 y los menores que -2. Así la desigualdad

$|x|>2$ es equivalente a $x<-2$ ó $x>2$

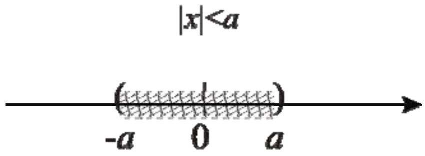
Generalizando, **si** $a>0$, tenemos dos tipos de situaciones

FORMA 1) $|x|>a$ si y sólo si $x<-a$ ó $x>a$.



Este tipo de conjunto se suele representar usando el símbolo unión, $\cup$, y se escribe como $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$, que significa todos los números que están en $(-\infty,-a)$ ó en (a,∞).

FORMA 2) $|x|<a$ si y sólo si $-a<x<a$



Estas equivalencias entre desigualdades nos permitirán resolver desigualdades en valores absolutos al convertirlas en desigualdades sin valor absoluto. Una estrategia a utilizar será interpretar a x como una expresión más complicada.

Ejemplo 1.- Convertir las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto.
a) $|2x-1|>1$; **b)** $|2-5x|\leq 3$; **c)** $4-|1-x|\leq 1$.

Solución:

a) Usamos la forma 1.

$|2x-1|>1$ es equivalente a $2x-1>1$ o $2x-1<-1$.

(Note que $2x$-1 hace las veces de x)

b) Usamos la forma 2. Observe que un resultado similar a 2 se cumple en el caso de la desigualdad con $\leq$.

$|2-5x|\leq 3$ es equivalente a $-3\leq 2-5x\leq 3$.

c) Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$4-|1-x|\leq 1$	Como el 4 está sumando, pasa restando al otro lado
$-|1-x|\leq -3$	Multiplicamos por – ambos lados de la desigualdad, hay que recordar que la desigualdad cambia de sentido
$|1-x|\geq 3$.	Ésta es la forma 1.

Finalmente:

$|1-x|\geq 3$ es equivalente a $1-x\geq 3$ ó $1-x\leq -3$.

Ejercicio de desarrollo.- Convertir las siguientes desigualdades en otra expresión equivalente sin valor absoluto: **a)** $|3x-1|-4\leq 3$ **b)** $2\,|\,x-2\,|-1\leq 2$

Recuerde: Despejar completamente el valor absoluto en el lado izquierdo luego expresar la desigualdad planteada en otra equivalente usando forma 1 o forma 2 según sea el caso. Estas expresiones equivalentes serán las que nos conducirán a la solución.

NO PUEDE QUITAR ARBITRARIAMENTE EL VALOR ABSOLUTO EN UNA DESIGUALDAD!

LLEVELA A LA FORMA 1 O FORMA 2 A FIN DE TENER UNA PROPOSICIÓN SIN VALOR ABSOLUTO

Ejemplo 2.- Resolver **a)** $|\,2x-1|\leq 3$; **b**) $10-3\,|\,2x-3\,|<4$

Solución

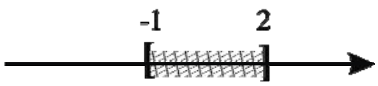
a) $|\,2x-1|\leq 3$ es equivalente a $-3\leq 2x-1\leq 3$, es decir tiene las mismas soluciones. Esta última es la que resolvemos:

$-3+1\leq 2x-1+1\leq 3+1$ Primero sumamos 1 a cada lado de la desigualdad

$-\frac{2}{2}\leq x\leq\frac{4}{2}$ Dividimos entre 2 cada miembro de la desigualdad.

$-1\leq x\leq 2$.

Así la solución son todos los números contenidos en el intervalo cerrado [-1,2]



b) Primero, se busca escribir esta desigualdad con el valor absoluto despejado del lado izquierdo. En la desigualdad $10-3\,|\,2x-3\,|<4$ primero pasamos el 10 restando al otro lado

$-3\,|\,2x-3\,|<-6$ Dividimos entre -3 ambos lados.

$|\,2x-3\,|>2$ Recuerde que la desigualdad cambia de sentido

Esta desigualdad es de la forma 2. Por tanto es equivalente a

$$2x-3>2 \quad \text{ó} \quad 2x-3<-2$$

Observación.- Este tipo de desigualdades dobles no pueden ser resueltas de la manera sintetizada como en el caso a). Hay que resolver cada desigualdad por separado.

En el lado izquierdo resolvemos la primera y en el lado derecho resolvemos la segunda desigualdad, manteniendo el conectivo “o”

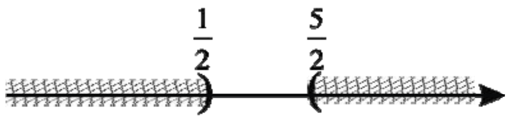
$2x-3>2$ ó $2x-3<-2$ Sumamos 3 a cada lado de la desigualdad

$2x>5$ ó $2x<1$ Se divide entre 2 ambos miembros

$x>\frac{5}{2}$ ó $x<\frac{1}{2}$

Así las soluciones de la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ es el conjunto $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},\infty)$

La solución puede ser representada geométrica por el siguiente subconjunto de la recta real.



Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes desigualdades

a) $|1-x|\geq 3$ **b)** $7-\frac{3}{2}|2x-1|>4$

El siguiente ejemplo muestra algunas desigualdades en valor absoluto cuya soluciones son **triviales: R** ó $\emptyset$ o un punto.

Ejemplo 3.- Resolver **a)** $|x-1|\leq -3$ **b)** $1-|2x-3|<4$; **c)** $|x-3|\leq 0$

Solución:

a) En la primera desigualdad estamos comparando un valor absoluto, el cuál es positivo, con un número negativo. Obviamente esta relación no se cumple para ningún *x*. Así la solución es el conjunto $\emptyset$.

b) En este caso primero despejamos el valor absoluto en el lado izquierdo, dando $|2x-3|>-3$. Para cualquier valor de *x* tenemos que $|2x-3|\geq 0$, esto es por la propia definición de valor absoluto y por tanto mayor que -3. Así la solución de está desigualdad son todos los número reales **R**.

c) Como el valor absoluto siempre da una cantidad mayor o igual a 0, la única forma que se cumpla esta proposición es cuando $|x-3|=0$ y esto ocurre solo cuando $x=3$. Así que la única solución de esta desigualdad es el punto $x=3$

Comentarios:

1) Observe que el ejemplo 3a no es de la forma 2, pues *a* tiene que ser positivo. Por la misma razón, $|2x-3|>-3$ no es de la forma 1.

2) Otro tipo de soluciones triviales es **R** menos un punto. Por ejemplo
$|x-1|>0$ tiene como solución **R**-$\{1\}$.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

A continuación damos algunas propiedades útiles del valor absoluto:

1.- $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$.

2.- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$.

3.- $|x| = \sqrt{x^2}$.

4.- $|a-b| = |b-a|$.

5.- Desigualdad triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Ejemplo 4.-

a) La ecuación $\frac{|6-6x|}{3} = 1$ es equivalente a las siguientes:

$\frac{|3(2-2x)|}{3} = 1$	Se factoriza
$\frac{|3||2-2x|}{3} = 1$	Propiedad de la multiplicación
$\frac{3|2-2x|}{3} = 1$	Se simplifica
$|2x-2| = 1$	Propiedad 4

b) La desigualdad $\left|\frac{1-2x}{3}\right| \leq 4$ es equivalente a las siguientes:

$\frac{|1-2x|}{|3|} \leq 4$	Propiedad del cociente
$\frac{|1-2x|}{3} \leq 4$	Propiedad 4
$|2x-1| \leq 12$	

En ocasiones se utiliza el valor absoluto para expresar ciertas relaciones entre cantidades:

Ejemplo 5.- Escriba las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos

a.- *x* está a más de 3 unidades de -7: $|x-(-7)| > 3$

b.- *x* está al menos a 3 unidades de 5: $|x-5| \geq 3$

c.- *x* dista de 7 en menos de 3 unidades: $|x-7| < 3$

d.- El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, *x*, difiere de 12 en menos de 2 horas: $|x-12| < 2$.

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

1.1) $|3-x| = 4$; **1.2)** $|5x-3| = 2$; **1.3)** $1-|2-x| = -6$

1.4) $3-2|4x-1| = 9$; **1.5)** $\frac{3}{2}|3x-1| = 6$ **1.6)** $|3-x|+|x| = 0$;

1.7) $|x|+|x-1| = -3$; **1.8)** $\left|\frac{1-x}{2}\right| = 1$; **1.9)** $\left|x-\frac{3}{2}\right| = 2$;

1.10) $\frac{|1-x|}{3} = 9$; **1.11)** $\left|\frac{1-2x}{x}\right| = 4$; **1.12)** $|1-x| = |3x-1|$

2) Resolver las siguientes desigualdades. Represente las soluciones en notación de intervalos y geométricamente

2.1) $|2-x| \geq 2$; **2.2)** $|x-3| < 5$; **2.3)** $2+|4-x| \leq -5$;

2.4) $2|4x-1| > 9$; **2.5)** $\frac{3}{2}|2x-3| < 5$; **2.6)** $\frac{|1-x|}{2} \leq 2$;

2.7) $3|x-1|+1 > -3$; **2.8)** $\left|\frac{1-x}{2}\right| \leq -1$; **2.9)** $1+\left|x-\frac{3}{2}\right| \geq 2$;

2.10) $\left|\frac{2-x}{3}\right| - \frac{1}{2} \geq 2$; **2.11)** $|1-x|+|3x-1| \leq 0$; **2.12)** $\frac{|1-x|}{2} \leq 0$;

2.13) $2-|4-x| \leq -5$; **2.14)** $4-|5-x| \leq 4$ **2.15)** $8-|3-x| \leq 4$

3) Escriba las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos

3.1) *x* está entre -3 y 3, ambos inclusive.

3.2) la distancia entre *x y -2* es cuanto mucho 3

3.3) El precio, *p*, en la bolsa de unos papeles comerciales difiere de 150UM en menos de 20.

3.4) *x* es mayor que 4 o menor que -4

3.5) *x* no está a más de 4 unidades de 5.

4) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

4.1) ( ) Una desigualdad cuadrática tiene dos soluciones

4.2) ( ) Existen desigualdades cuya solución es un punto.

4.3) ( ) Si $x^2 < y^2$ entonces $x < y$

4.4) ( ) Si $x \cdot (x+1) < x$ entonces $(x+1) < 1$

4.5) ( ) Si $a < b$ entonces $-a < -b$

4.6) ( ) $|x+y| = |x|+|y|$

4.7) ( ) La ecuación $|x+2|+|x+3| = 0$ no tiene solución.

4.8) ( ) $-2|x-1| = |-2x+2|$

4.9) ( ) Si $x > y$ entonces $-x-1 < -y+1$

4.10) ( ) x^2 es menor que x^4 para cualquier número real.

4.11) ( ) $|x+3| < 5$ si y sólo si *x* está a menos de 5 unidades de 3.

4.12) ( ) Si $x+y$ es positivo entonces $|x+y| = x+y$

Respuestas:
1.1) {-1,7}; **1.2)** {1,1/5} **1.3)** {-5,9}; **1.4)** $\varnothing$ **1.5)**{-1,5/3};**1.6)** $\varnothing$ **1.7)** $\varnothing$
1.8) {-1,3} **1.9**) {-1/2,7/2} ; **1.10)** {-26,28} **1.11)** {-1/2,1/6}; **1.12)** {1/2,0}
2.1) $(-\infty,0]\cup[4,\infty)$; 2.2) (-2,8) **2.3)** $\varnothing$; **2.4)** $(-\infty,-7/8]\cup[11/8,\infty)$; **2.5)** (-1/6,19/6); **2.6)** [-3,5];

2.7) R ; 2.8) $\varnothing$ **2.9)** $(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[\frac{5}{2},\infty)$; **2.10)** $(-\infty,-11/2]\cup[19/2,\infty)$; **2.11)** $\varnothing$; **2.12)** $\{1\}$;

2.13) $(-\infty,-3]\cup[11,\infty)$; **2.14)** {5}; **2.15) R**

3.1) $|x|\le 3$ **; 3.2)** $|x+2|\le 3$ **; 3.3)** $|p-150|<20$ **; 3.4)** $|x|\ge 4$ **; 3.6)** $|p-20|<2$ **;**

4.1) (F) Desigualdades como $(x-1)(x-2)\le 0$ donde el conjunto solución es el intervalo [1,2] tiene infinitas soluciones (todos los números contenidos en el intervalo).
4.2) (V) La desigualdad $(x-1)^2 \le 0$ tiene como única solución x=1.
4.3) (F) Si x=-2 y y=-3, tenemos que $x^2 < y^2$ (4<9) pero $x > y$ (-2>-3)
4.4) (F) Si x es negativo, al dividir ambos lados de la desigualdad $x\cdot(x+1)<x$ por x queda $(x+1)>1$
4.5) (F) El sentido de la desigualdad cambia**,** al multiplicar ambos lados por -1
4.6) (F) Si x=-2 y y=3, tenemos que $|-2+3|<|-2|+|3|$, esto es $1<5$
4.7) (V) El lado izquierdo es la suma de dos términos mayores o iguales a cero, para ser cero ambos tienen que ser cero, el primer termino es cero solo en 2 y el segundo termino es cero en 3, así que no hay un unico x en donde los dos valores absolutos sean simultáneamente cero.
4.8) (F) $-2|x-1|=|-2x+2|$ El lado izquierdo es negativo, el lado derecho es positivo. No vale la propiedad distributiva con el valor absoluto
4.9) (V) Si $x>y$ entonces $-x<-y$ **,** restamos a ambos lados 1 queda $-x-1<-y-1$, como $-y-1<-y+1$, por transitividad obtenemos la desigualdad.
4.10) (F) Se plantea $x^2\le x^4$ y la solución es el conjunto $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.
4.11) (F **)** Una proposición verdadera es: $|x+3|<5$ si y sólo si x está a menos de 5 unidades de -3.
4.12) (V) Si $x+y$ es positivo entonces el valor absoluto deja igual a una cantidad positiva $|x+y|=x+y$

PRUEBA AUTOEVALUTIVA 1 DEL TEMA 2. ECUACIONES Y DESIGUALDADES

1) Plantear la ecuación o desigualdad que resuelve el siguiente problema y resolverla. Explique el significado de su variable

1.1) Una fábrica de costales tiene gastos fijos de 3.000UM al mes. Se estima que el costo por elaborar un costal es de 2UM y se pueden colocar en el mercado a un precio promedio de 7UM. ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes con el fin que los ingresos sean al menos el triple de los costos?

1.2) Un capital de 5.000 se va invertir en dos bonos, uno que paga el 5% y otro que paga el 6,25%. Si invierte x en el primer bono y lo demás en el otro bono. ¿Cuánto se debe invertir en cada bono a fin de obtener una utilidad equivalente al 6%?

2) Resuelva las siguientes desigualdades. De la solución por intervalos y geométricamente:

2.1) $x^2 - 9 > 2(x+3)$ **2.2)** $x^2(x+1) + 2x(x+1)^2 \leq 0$ **;** **2.3)** $\frac{2}{3}(x-1) \leq 1 - \sqrt{2}x$

3) Plantee una ecuación o una desigualdad según sea el caso que resuelva el siguiente. Explique el significado de su variable

3.1) Un fabricante puede vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por artículo, con $p = 200 - 2q$. Si el costo de mano de obra y materiales es de 20 UM por unidad y los costos fijos son de 400UM ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener utilidades de al menos 3200 UM?

3.2) Un hotel dispone de 60 habitaciones. Sabe por experiencia que si fija un alquiler mensual de 150UM por habitación todos serán alquilados en temporada alta. Pero estima que por cada 3UM de incremento en la habitación una quedará vacante. ¿Qué alquiler deberá fijar con el fin de obtener ingresos de 9000 UM, pero dejando habitaciones vacías?

4) VERDADERO o FALSO Justifique

4.1) ( ) La solución de $x^2 + 2x + 5 > 0$ es **R**

4.2) ( ) La solución de la ecuación $(x^3 - 3)(x^3 + 3) = 1$ se obtiene planteando y resolviendo $x^3 - 3 = 1$ ó $x^3 + 3 = 1$

4.3) ( ) $|x+3| = 4$ se interpreta como: la distancia de x a -3 es igual a 4.

4.3) ( ) La ecuación $3\sqrt{x+1} = 2x$ es equivalente a la ecuación $(3\sqrt{x+1})^2 = (2x)^2$

5) Resuelva cada ecuación: **a)** $2\sqrt{2x-1} - x - 1 = 0$; **b)** $t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 20t - 12 = 0$;

c) $(2x^3 + 54)(\frac{x^2+1}{x^2-4})((x+2)^2 - 9) = 0$ **; d)** $x^2(x-1)^2 = 2x(x-1)(x+4)$; **e)** $\frac{3x-5}{3} - \frac{4-ax}{4} - 5 = 0$

6) Diga los valores de x´s para los cuales la expresión $1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ está bien definida y es un número real

7) Resolver la siguiente ecuación**:** $\frac{3}{4}\left|\frac{3-x}{3}\right| - 1 = 4$

8) Resuelva cada desigualdad en valor absoluto: **a)** $3|x-1| - 5 > 11$; **b)** $4 - 2\left|x - \frac{3}{2}\right| \geq 2$**.** De la soluciones por intervalos y represéntela geométricamente.

PRUEBA AUTOEVALUATIVA 2 DEL TEMA 2. ECUACIONES Y DESIGUALDADES

1) Plantear la ecuación o desigualdad que resuelve el siguiente problema y resolverla. Explique el significado de su variable

1.1) Un fabricante vende cada artículo en 30UM. Si tiene gastos mensuales fijos de 7.000 UM y el costo de cada articulo (incluye mano de obra y material) es de 15UM ¿Cuántos artículos debe producir y vender a fin de tener utilidades de 20.000UM?

1.2) Un estudiante tiene un promedio de 12.25 puntos en sus primeros 4 parciales. ¿Cuánto deberá sacar en el último parcial para aumentar su promedio en 1.25?

2)(Resolución de ecuaciones varias) Resuelva cada ecuación: **2.1)** $(\frac{x^4-3x^2-4}{x-3})(2x^3+54)=0$;

2.2) $1-2\sqrt{x^2-4}=\frac{x}{2}$; **2.3)** $x(x^2-3)^{-1/2}-2(x^2-3)^{1/2}=0$; **2.4)** $x^4-6x^3+5x^2=0$

3) Resuelva las siguientes desigualdades. De la solución por intervalos y geométricamente

3.1) $(x-3)(x+2)-4(x+2)\leq 0$; **3.2)** $3x>\frac{4}{3x}$; **3.3)** $\sqrt{3}x>2(1-2x)$

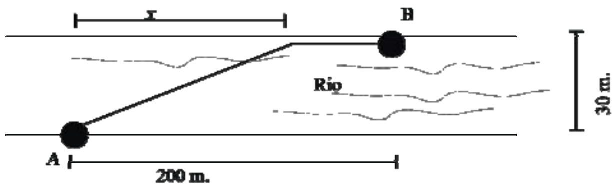
4) Resolver la siguiente ecuación. $3-\frac{2|4x-1|}{3}=1$.

5) Resuelva cada desigualdad: **5.1)** $2-2\left|2-\frac{x}{2}\right|\leq 1$; **5.2)** $3\left|\frac{2-x}{3}\right|-1\leq 2$. De la solución por intervalos y geométricamente

6) Plantee una ecuación o una desigualdad según sea el caso que resuelva los siguientes. Explique el significado de su variable

6.1) Los costos por fabricar q lavadoras están dado por la ecuación $C(q)=4800q-4q^2-4000$. Se sabe por experiencia que si fija un precio de p UM a la lavadora, entonces el número de lavadoras a ser vendidos es q donde p y q cumplen la relación $p=(12-\frac{q}{100})$. ¿Qué precio deberá fijar la fabrica a fin de obtener utilidades de al menos 4000 UM al mes?

6.2) Se conectó por cables un punto A en la orilla de un río a otro punto B del otro lado del río 200 metros más abajo. El ancho del río es 30m. El cable que va por debajo del río cae en un punto x metros más allá del punto A como muestra el dibujo



Si se gastó un presupuesto exacto de 520 UM solo en cables y se sabe que el precio del cable submarino es de 4UM y el aéreo es de 2 ¿Cuál fue el trayecto de la conexión por cable?

7) Diga los valores de x´s para los cuales la expresión $\frac{\sqrt{5-2x}}{x^2+1}$ está bien definida y es un número real

8) VERDADERO o FALSO Justifique

8.1) ( ) **2** no es solución de la ecuación $(2x^3-8)(\frac{x-1}{x^2-4})=0$

8.2) ( ) Resolver $|1-x|\geq -1$ es equivalente a resolver $1-x\geq -1$ **ó** $1-x\leq -1$

8.3) ( ) La solución de $x^2-2x+1>0$ es **R**

8.4) ( ) Los costos fijos de una empresa son 2300UM y el costo variable por unidad es 5. Si el precio de venta de cada artículo es 12 entonces la utilidad por producir y vender q artículos es $U(q)=12q-2305$

PRUEBA AUTOEVALUATIVA 3 DEL TEMA 2.

1) Plantear la ecuación o desigualdad que resuelve el siguiente problema y resolverla. Explique el significado de su variable.
1.1) Un fabricante vende cada artículo en 60UM. Si tiene gastos mensuales fijos de 70.000 UM y el costo de cada articulo (incluye mano de obra y material) es de 30UM ¿Cuántos artículos debe producir y vender a fin de tener utilidades de al menos 40.000UM?
1.2) Una persona quiere invertir en dos bonos: El primero paga el 8% anual y el otro el 9.5%. En el primero quiere invertir la mitad que en el segundo ¿Cuánto debe invertir en cada uno si desea obtener una utilidad al cabo de un año de 750UM?

2) Resuelva las siguientes desigualdades. De las soluciones por intervalos y geométricamente:

2.1) $(x+2)^2 \leq 3(x+2)$ **;** **2.2)** $1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$; **2.3)** $3 \leq 3(x+2)+1<10$

3) Plantee una ecuación o una desigualdad según sea el caso que resuelva el siguiente problema. Explique el significado de su variable. De una respuesta verbal al problema
3.1) Un fabricante puede vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por artículo, con $p=100-q$ Si los costos fijos son de 200UM y el costo de mano de obra y materiales por unidad es de 10 UM. ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener utilidades de al menos 1200 UM?
3.2) Si el precio de una revista se fija en 20UM se venderán 20.000 copias. Por cada UM de aumento en el precio, las ventas caerán en 500 ejemplares. Si el costo de cada revista es de 16UM. ¿Qué precio deberá fijarse a fin de obtener utilidades de al menos 200.000UM?

4) VERDADERO o FALSO justifique
4.1) ( ) El conjunto de números reales x´s para los cuales la expresión $1-\sqrt{3-x}$ está bien definida y es un número real es el conjunto solución de la desigualdad $1-\sqrt{3-x} \geq 0$
4.2) ( ) Resolver $|1-x| \leq -1$ es equivalente a resolver $-1 \leq -1+x \leq 1$
4.3) ( ) Los costos fijos de una empresa son 2300UM y el costo variable por unidad es 5. Si el precio de venta de cada artículo es 12 entonces la utilidad por producir y vender q artículos es
$U(q)=12q-2300+5q$

4.4) (**)** 3 es solución de la ecuación $(2x^3-54)(\dfrac{x-1}{x^2-9})=0$

4.5) ( ) La ecuación $\sqrt{7}=\dfrac{3}{x}-4a$ es equivalente a $\sqrt{7}x=3-4a$.

5) Resuelva cada ecuación: **a)** $(z^2-4)^4-2(z^2-4)^3=0$ **;** **b)** $x^3+3x^2-x-3=0$ **;**

c) $(8x^3+2x)(\dfrac{2\sqrt{x+1}-6}{x+1})(8x^2+x^{-1})=0$ **;** **d)** $2x^{5/3}-5x^{4/3}=0$ **;** **e)** $\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{x^2-x}=0$ **.**

6) Despeje la variable x en cada ecuación **a)** $y=3-4\sqrt{2x+1}$ **;** **b)** $y=\dfrac{3}{x+1}-4$

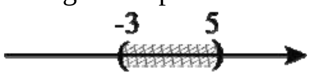
7) Resolver la siguiente ecuación $1+3\left|3-\dfrac{x}{4}\right|=7$

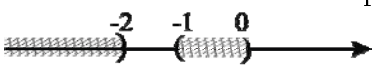
8) Resuelva cada desigualdad: **a)** $1+3|x-1|<4$ **;** **b)** $3-2\left|\dfrac{1-x}{2}\right| \leq -1$ **.**

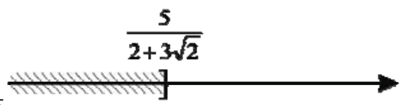
RESPUESTAS CON ALGUNAS INDICACIONES
DE LA PRUEBA AUTOEVALUATIVA 1 DEL TEMA 2 Ecuaciones y desigualdades

1.1) Una fábrica de costales tiene gastos fijos de 3.000UM al mes. Se estima que la elaboración de un costal es de 2UM y se pueden colocar en el mercado a un precio promedio de 7UM. ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes con el fin que los ingresos sean al menos el doble de los costos?
-Planteamiento de la desigualdad: Ingresos ≥ 2 Costos
-Variable *q*=número de costales a producir y vender
-Expresar la desigualdad en términos de la variable: $7q \geq 2(3.000 + 2q)$,
Respuesta: 1500 costales o más

1.2) Un capital de 5.000 se va invertir en dos bonos, uno que paga el 5% y otro que paga el 6,25%. Si invierte *x* en el primer bono y lo demás en el otro bono. ¿Cuánto se debe invertir en cada bono a fin de obtener una utilidad equivalente al 6%?
-Variable: $x =$ cantidad a invertir en el primer bono
-Cantidad desconocida en términos de la variable: $5000 - x =$ cantidad a invertir en el segundo bono
-Planteamiento de la ecuación: Interés del primer bono+interés del segundo=6% de 5.000
-Ecuación en términos de la variable: $0.05x + 0.0625(5000 - x) = 0.06 \cdot 5000$
Respuesta: 217,4

2.1) Dejar el cero en el lado derecho: $x^2 - 9 - 2(x+3) < 0$.
Factorizar, queda $(x+3)(x-5) < 0$. Colocar las raíces en la recta real: -3 y 5. Tomar valores de prueba dentro de cada intervalo y evaluarlo en cada factor, averiguar el signo del producto de los factores, ver en que intervalos el producto dio negativo. **Respuesta:** (-3,5) 

2.2) Factorizar $x(x+1)(x+2) \leq 0$ Colocar las raíces en la recta real: 0,-1 y -2. Tomar valores de prueba dentro de cada intervalo, (quedaron 4 intervalos) y evaluarlo en cada factor (son tres factores), el esquema del método de los sugnos queda ( )( )( ), averiguar el signo del producto de los factores, ver en que intervalos el producto dio negativo. **Respuesta:**
$(-\infty,-2) \cup (-1,0)$ 

2.3) Desigualdad lineal: Despejar *x*. Para ello se multiplica izquierda y derecha por 3, se distribuye y se simplifica los denominadores, se resuelve los paréntesis, se agrupan los términos con *x* de un lado las constantes del otro, se saca factor común *x*. **Respuesta:**
$x \leq \dfrac{5}{2+3\sqrt{2}}$ 

3.1) -Desigualdad verbal a plantear: $Utilidades \geq 3.200$
$I - C \geq 3.200$
-Ecuación en términos de la variable: $(200-2q)q - (400+20q) \geq 3.200$ Es una desigualdad cuadrática que se revuelve por el método de los signos
Respuesta: Deberá producir una cantidad de artículos comprendidos en el intervalo $[30,60]$

3.2) **La variable** *x*= número de aumentos de 1UM
Igualdad entre dos expresiones: Ingresos=9000
Cantidades desconocidas en términos de la variable:

Ingresos= (Número de habitaciones alquiladas)x(Precio por habitación)
Número de habitaciones= $(60-x)$
Precio por habitación= $(150+3x)$
Ecuación en términos de la variable: $(60-x)(150+3x)=9.000$.
Ecuación cuadrática cuyas soluciones son x=0 y 10
Se descarta 0 por la condición de dejar vacías habitaciones
Respuesta: Se deberá fijar un precio de $150+3\cdot 10=180$ UM

4) VERDADERO o FALSO Justifique
4.1) (V) El polinomio es irreducible. Al tomar un valor de prueba por ejemplo x=0 satisface la desigualdad

4.2) (F) El método de factorización se usa cuando la expresión factorizada está igualada a cero.
La solución de la ecuación $(x^3-3)(x^3+3)=1$ **es** $\{\pm\sqrt[6]{10}\}$
La solución de $x^3-3=1$ es $\sqrt[3]{4}$ y la solución de $x^3+3=1$ es $\sqrt[3]{-2}$ ambas distintas a $\{\pm\sqrt[6]{10}\}$

4.3) (V) $|x-(-3)|$ es la distancia entre x y -3

4.4) (F) Hay que solucionar la última ecuación y chequearla en la primera para ver si se añadieron soluciones. Las soluciones de última son x=0 y 9. La solución x=9 no satisface la ecuación $-3\sqrt{x}=x$, por tanto las dos ecuaciones no son equivalentes.

5) a) $2\sqrt{2x-1}-x-1=0$ es una ecuación con radical, se aísla el termino con radical
$2\sqrt{2x-1}=(x+1)$ Se eleva ambos miembros al cuadrado, queda una ecuación cuadrática equivalente a
$2\sqrt{2x-1}-x-1=0$
$x^2-6x+5=0$ Las soluciones de estas son 1 y 5, ambas satisfacen la original. Sol: $\{1,5\}$

b) $t^4+2t^3-7t^2-20t-12=0$ Se usa Ruffini,
Candidatos a raíces racionales: $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$ Como -1 anula el polinomio intentamos está raíz primero

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -7 & -20 & -12 \\
-1 & & -1 & -1 & 8 & 12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -8 & -12 & 0 \\
-2 & & -2 & 2 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & 0 & \\
-2 & & -2 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & & &
\end{array}$$

De aquí el lado la ecuación puede ser reescrita, al factorizar el lado izquierdo como $(t-3)(t+2)^2(t+1)=0$. Por el método de factorización para resolver ecuaciones concluimos que el conjunto solución está dado por $\{3,-1,-2\}$. La solución -2 tiene multiplicidad 2.

c) $(2x^3+54)(\frac{x^2+1}{x^2-4})((x+2)^2-9)=0$ Se resuelve por el método de factorización. Se plantean 3 ecuaciones:

$(2x^3+54)=0$ $\quad (\frac{x^2+1}{x^2-4})=0$ $\quad ((x+2)^2-9)=0$ Se resuelven simultáneamente,

$x^3=-27$ $\quad x^2+1=0$ $\quad (x+2)^2=9$ La segunda no tiene solución

$x=-3$ $\quad x+2=\pm 3$

$x=-2\pm 3$ Está tiene como solución -5 y 1

El conjunto solución es $\{-1,-3,5\}$

d) $x^2(x-1)^2=2x(x-1)(x+4)$**.** Se va a resolver por la técnica de factorización, primero aislamos el cero en el lado derecho

$x^2(x-1)^2-2x(x-1)(x+4)=0$ Se factoriza, sacando $x(x-1)$ de factor común

$x(x-1)\left(x(x-1)-2(x+4)\right)=0$

$x(x-1)\left(x^2-3x-8\right)=0$ Se plantean tres ecuaciones

$x=0$ $\quad (x-1)=0$ $\quad \left(x^2-3x-8\right)=0$ Las soluciones de las dos primeras son 0 y 1 La tercera ecuación se resuelve por la fórmula cuadrática $x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$

El conjunto solución está dado por $\left\{0,1,\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$

e) $\frac{3x-5}{3}-\frac{4-ax}{4}-5=0$ Es una ecuación de primer grado con literales. Se despeja la *x* siguiendo las recomendaciones. Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores:

$12\left(\frac{3x-5}{3}-\frac{4-ax}{4}-5\right)=0\cdot 12$ Al distribuir y simplificar queda

$4(3x-5)-3(4-ax)-60=0$ Se aplica la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis

$12x-20-12+3ax-60=0$ Se agrupan los términos (que no dependes de *x*) constantes en el lado derecho

$12x+3ax=92$ Se saca de factor común *x*

$x(12+3a)=92$ Se despeja la *x*

$$x=\frac{92}{12+3a}$$

6) Para que esté bien definida el denominador tiene que ser diferente de cero y para que sea un número real el radicando tiene que ser mayor o igual a cero(va a ser estrictamente mayor que cero)

Se plantea entonces

$x^2-1>0$ Es una desigualdad cuadrática que se resuelve por el método de los signos

$(x-1)(x+1)>0$

Colocar las raíces en la recta real: -1 y 1. Tomar valores de prueba dentro de cada intervalo, (quedaron 3 intervalos) y evaluarlo en cada factor (son dos factores), el esquema del cementerio queda ( )( ), averiguar el signo del producto de los factores, ver en que intervalos el producto dio positivo. **Respuesta:** $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

7) Para resolver la ecuación**:** $\frac{3}{4}\left|\frac{3-x}{3}\right|-1=4$ primero se puede aplicar a propiedad de cociente del valor absoluto

$\frac{3}{4}\frac{|3-x|}{|3|}-1=4$ Como $|3|=3$ se simplifica queda

$\frac{|3-x|}{4}-1=4$ Despejamos el valor absoluto. Pasamos el 1 sumando

$\frac{|3-x|}{4}=5$

$|3-x|=20$ Esta ecuación es equivalente a las siguiente dos (Este es el momento que se elimina el valor absoluto)

$3-x=20$ **ó** $3-x=-20$**.** El conjunto solución está dado por $\{-17,23\}$

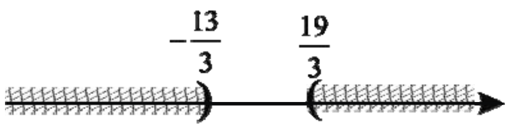
8) Resuelva cada desigualdad en valor absoluto: **a)** $3|x-1|-5>11$**.** Se despeja el valor absoluto

$|x-1|>\frac{16}{3}$ Es de la forma $|x|>a$, con $a>0$. Esta desigualdad es equivalente a

$x-1>\frac{16}{3}$ ó $x-1<-\frac{16}{3}$

$x>\frac{19}{3}$ ó $x<-\frac{13}{3}$ El conjunto solución está dado por $\left(-\infty,-\frac{13}{3}\right)\cup\left(\frac{19}{3},\infty\right)$

La representación gráfica está dada en la siguiente figura



b) $4-2\left|x-\frac{3}{2}\right|\geq 2$**.** Se despeja el valor absoluto

$-2\left|x-\frac{3}{2}\right|\geq -2$

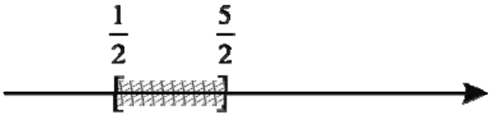
$\left|x-\frac{3}{2}\right|\leq 1$ Es de la forma $|x|<a$, con $a>0$. Esta desigualdad es equivalente a

$-1\leq x-\frac{3}{2}\leq 1$ Se resuelve simultáneamente. Se suma -3/2 a cada miembro de la desigualdad

$-1+\frac{3}{2}\leq x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\leq 1+\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$$

El conjunto solución es el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$



RESPUESTAS CON ALGUNAS INDICACIONES DE LA PRUEBA AUTOEVALUATIVA 2 DEL TEMA 2 ECUACIONES Y DESIGUALDADES

1.1) Indicaciones y respuestas: **Ecuación verbal**: $Utilidad = 20.000$,
En términos de la variable q: $I - C = 20.000$
$30q - (7.000 + 15q) = 20.000$. **Respuesta:** 1.800 unidades

1.2) Variable x =nota del ultimo parcial
Dato: Suma de las notas de los tres primeros parciales= 12.25*3
Ecuación que resuelve el problema: Promedio de los cuatro parciales=13.5
Ecuación en términos de la variable: $\frac{12.25*3+x}{4} = 13.5$ **Respuesta**: Deberá sacar 17.25 puntos

2)Indicaciones y respuestas: **2.1)** Se usa el método de factorización**:**
Se plantear $\left(\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x-3}\right) = 0$ ó $(2x^3 + 54) = 0$. La primera es de la forma P/Q=0, se plantea P=0 y se resuelve por Ruffini o por forma cuadrática. La segunda se despeja *x* al cubo y se toma raíz cúbica a ambos lados. **Respuestas: 2,-1 y -3**

2.2) Ecuación con radicales, podemos previamente multiplicar por 2 ambos lados para eliminar el denominador. Luego se aisla el radical y se eleva ambos miembros al cuadrado, queda una ecuación cuadrática que se resuelve. **Respuesta:** 2, -34/15

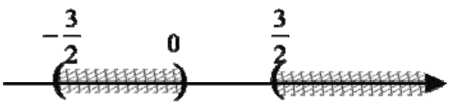
2.3) Reescribir el exponente con radicales y sumar en cruz llevándolo a la forma P/Q=0. Plantear P=0 y resolver **Respuesta:** -3/2, 2

2.4) Se factoriza, sacando x^2 de factor común, queda $x^2\left(x^2 - 6x + 5\right) = 0$. Se plantea dos ecuaciones, la segunda se resuelve por la resolvente o se continúa factorizando. **Solución** 0, -3 y -2

3) Desigualdades que se resuelven por el método de los signos:
3.1) En la primera se factoriza de una vez, queda $((x-7)(x+2) \le 0$, colocar 7 y -2 en la recta real, tomar valores de prueba, ver los signos de los factores y luego el signo del producto en cada intervalo.

Respuesta: $[-2,7]$

3.2) Llevarlo a la forma $\frac{P}{Q} > 0$**,** para ello se pasa restando a la izquierda el termino de la derecha, se suma fracciones, luego se factoriza el numerador, el denominador ya es irreducible. Queda
$\frac{9x^2 - 4}{3x} > 0$. Luego $\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x} > 0$. Colocar las raíces de los factores en la recta real, estas son -2/3,2/3 y 0. El 0 se coloca en círculo. Se toma valores de prueba en cada uno de los cuatro intervalos y se determina el signo de $\frac{9x^2 - 4}{3x}$. **Solución:** $(-3/2, 0) \cup (3/2, \infty)$.



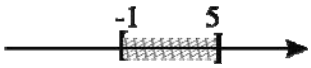
4) Indicación: Se despeja el valor absoluto. Queda $|4x-1|=6$. Se plantea dos ecuaciones que se resuelven:
$4x-1=6$ ó $4x-1=-6$. **Solución:** 7/4 y -5/4

5.1) Indicación: Se despeja el valor absoluto. Queda $\left|2-\frac{x}{2}\right|\geq\frac{1}{2}$, Es de la forma $|x|\geq a$, se plantea

$2-\frac{x}{2}\geq\frac{1}{2}$ o $2-\frac{x}{2}\leq-\frac{1}{2}$ que se resuelve cada una por separado y luego se unen los intervalos

Solución: $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$ 

5.2) Se despeja el valor absoluto. Queda $|2-x|\leq 3$, es de la forma $|x|\leq a$, se plantea

$-3\leq 2-x\leq 3$, se resuelve simultáneamente. **Solución:** $[-1,5]$ 

6) Plantee una ecuación o una desigualdad según sea el caso que resuelva los siguientes. Explique el significado de su variable

6.1) Desigualdad a plantear : $Utilidad \geq 4.000$, en términos de la variable queda

$q\left(12-\frac{q}{100}\right)-4800q+4q^2+4000\geq 4.000$ es una desigualdad cuadrática que se resuelve por el método de los signos. **Solución factible** $(1368,\infty)$

6.2) Ecuación a plantear: $2(200-x)+4\sqrt{900+x^2}=520$, **Respuesta:** x= 40 y 0

7) Plantear y resolver $5-2x\geq 0$ (Para ser un número real el radicando debe ser mayor o igual a 0)
Respuesta: $(-\infty,5/2]$

8) 8.1) Verdadero: No tiene sentido cuando se evalúa en el segundo factor, la división entre 0 no está definida.

8.2) Falso: La solución es trivial, R en este caso. Para poder descomponer la desigualdad $|1-x|\geq a$, a tiene que ser positivo

8.3) Falso: Si se factoriza queda $(x-1)^2>0$. La solución es $R-\{1\}$

8.4) Falso: $U(q)=7q-2300$

La siguiente tabla muestra algunos tipos de ecuaciones que aparecen frecuentemente y las recomendaciones para resolverlas.

Definición y ejemplos	**Recomendaciones**
Forma $x^k = d$. ($ax^k - b = 0$) **1.1)** $x^2 = 4$; Sol: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ **1.2)** $x^3 = -81$; Sol: $x = \sqrt[3]{-81}$ **1.3)** $x^6 = -2$ Sol: $x = \sqrt[6]{-2} \notin R$ La ecuación no tiene solución real. **1.4)** $(y+1)^3 = 7$. No es exactamente de esta forma, pero igual se puede resolver usando la recomendación.	Tomar raíz con índice *k* a ambos lados, considerando que para *k* par está la solución negativa también. Así $x = \sqrt[k]{d} \quad si \ \ k \ \ es \ \ impar$ $x = \pm\sqrt[k]{d} \quad si \ \ k \ \ es \ \ par$, Recuerde que la raíz de índice par de un número negativo no es real, es un imaginario puro. Si este fuera el caso la ecuación no tiene solución real ($\sqrt{-2} \notin R$; $\sqrt[3]{-2} \in R$)
Ecuaciones con radicales: la variable está en el radicando **2.1)** $\sqrt[3]{x-3} - 2 = 0$ **2.2)** $\sqrt{x^2+3} + 3 = x$ **2.3)** $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$	**1)**Deje el término con el radical solo de un lado de la ecuación, **2)**Eleve ambos miembros a la potencia del índice. Este atento si hay planteado un producto notable. **3)**Simplifique e identifique la ecuación resultante para resolverla de acuerdo a la recomendación. Recuerde que al elevar a una potencia par puede estar agregando soluciones extrañas, en este caso hay que verificar las soluciones en la original.
Forma cuadrática: Se puede llevar a la forma *a(exp)*^{2} +*b*(exp)+c=0, donde exp es una expresión en la variable **3.1)** $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1} - 3 = 0$ **3.2)** $2x^6 - x^3 - 1 = 0$ **3.3)** $x + 3\sqrt{x} + 2 = 0$	**1)**Hacer el cambio de variable $y = Expresión$ queda la ecuación cuadrática en y : $ay^2 + by + c = 0$, **2)**Se resuelve la ecuación cuadrática. Si dan soluciones $y_i = k$ siga con paso 3 (Si la ecuación cuadrática no tiene solución la original tampoco) **3)**Se sustituye $Expresión$ por y_i en $y_i = k$ y se resuelven las ecuaciones planteadas Las soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación original.
Técnica de factorización: Aplicada cuando la ecuación se puede llevar a la forma *expresión*=0, donde *expresión* se puede factorizar **4.1)** $x(x-3)(x+1) = 0$; **Sol:** ={0,3,-1} **4.2)** $x^2 - 4x + 5 = 0$ **4.3)** $x^3 - 2x^2 + x = 0$ **4.4)** $x^3 = 2x$ **(si simplifica o divide entre la variable pierde solución)** **4.5)** $x(x+1)^{1/2} - 3(x+1)^{3/2} = 0$	**1)**Se lleva a la forma *expresión*=0, **2)**Se factoriza la *expresión*= $fact.1 \cdot fact.2 \cdots fact.k$ **3)**Se plantean tantas ecuaciones como factores, igualadas a 0: $fact.1 = 0; \quad fact.2 = 0; \ \ldots \ fact.k = 0$ (se usó el razonamiento que un producto es cero $fact.1 \cdot fact.2 \cdots fact.k$ =0 si algunos de los factores es cero.) Las soluciones de la ecuación original son las soluciones de todas las ecuaciones planteadas que tengan sentido en la original
Ecuaciones con fracciones: la variable está en el denominador **5.1)** $\dfrac{2x-1}{x^2 - x} = 0$ **5.2)** $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x - x^2}$ **5.3)** $\dfrac{2}{x-2} = \dfrac{4}{x^2 - 2x} + \dfrac{1}{x}$; **5.4)** $\dfrac{4}{x-1} = 0$	-Si es de la forma $\dfrac{P}{Q} = 0$, plantee y resuelva $P = 0$. Verifique que las soluciones de esta última tiene sentido en la original. -Si no es de esta forma entonces: Factorice los denominadores, calcule el m.c.m. de los denominadores y multiplique ambos lados por este m.c.m. a fin de eliminar los denominadores. (no se olvide de distribuir antes de simplificar), entonces identifique la ecuación resultante y resuelva de acuerdo a la recomendación del caso). Recuerde que se pueden agregar como soluciones extrañas las raíces de los denominadores, (hay que eliminarlas como soluciones, pues no se puede dividir entre cero).

Para despejar la variable en **una ecuación lineal** la recomendación general es:
1) Si existen denominadores numéricos, elimínelos multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores.
2) Resuelva **los paréntesis donde está la variable** de acuerdo con las reglas enseñadas. Esta estrategia hará que ambos lados de la ecuación quede expresado en términos en *x* y en términos que no dependen de *x*.
3) Agrupe los términos en *x* en un miembro y las constantes en otro.
4) Saque de factor común *x* y pase dividiendo el factor de *x*

Pasos a seguir para resolver desigualdades cuadráticas, polinómicas, racionales

1.- Despeje el cero de un lado de la ecuación $\text{expresión} > 0$ (<0; ≤ 0 ó ≥ 0). **PARA DESPEJAR PASE TERMINOS SUMANDO O RESTANDO AL OTRO LADO DE LA DESIGUALDAD SEGÚN CORRESPONDA. NUNCA PASE UNA EXPRESIÓN EN LA VARIABLE MULTIPLICANDO NI DIVIDIENDO.**

2.- Factorizar el lado izquierdo. En caso que no se pueda la solución es trivial: **R o** $\varnothing$. Si tiene expresiones racionales lleve la desigualdad a la forma $\frac{p}{q} > 0$ (<0; ≤ 0 ó ≥ 0)., factorice numerador y denominador

3.- Colocar las raíces de los factores en la recta real.

4.- Colocar tantos pares de paréntesis como factores tenga su expresión encima de cada intervalo establecido por las raíces.

5.- Tomar valores de prueba dentro de cada intervalo, evaluar los factores en los valores de prueba y colocar el signo resultante en el paréntesis respectivo del factor.

6.- Debajo de cada intervalo definido por los factores colocar un par de paréntesis, realizar la multiplicación y división de signos de arriba y colocar el resultado en el paréntesis de abajo.

7.- Responder la pregunta. Por ejemplo si la desigualdad factorizada es <0, colocar los intervalos en donde el signo dio negativo. Análogamente en los demás casos.

VALOR ABSOLUTO. $|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$; $|x| =$ distancia de *x* al origen

ECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO

Si es una ecuación donde hay un solo termino con valor absoluto y la variable solo está en el argumento del valor absoluto entonces despeje el valor absoluto. Considere *a* el otro miembro sin valor absoluto de la ecuación despejada: $|\text{expresión}| = a$

-Si $a \geq 0$ plantee dos ecuaciones

1) $\text{expresión} = a$ ó **2**) $\text{expresión} = -a$

-Resuelva cada ecuación.

- El conjunto solución de la ecuación original es la unión de las soluciones de estas dos ecuaciones

-Si $a < 0$ la ecuación no tiene solución

DESIGUALDADES EN VALOR ABSOLUTO

Si es una desigualdad donde hay un solo termino con valor absoluto y la variable solo está en el argumento del valor absoluto entonces despeje el valor absoluto. Considere *a* el otro miembro sin valor absoluto.

Propiedades útiles del valor absoluto:

1.- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

2.- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$.

3.- $|x| = \sqrt{x^2}$.

4.- $|a - b| = |b - a|$. (distancia de *a* a *b*)

5.- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

FORMA 1) |EXPRESIÓN|>*a* si y sólo si
EXPRESIÓN<-*a* ó EXPRESION>*a*.
Estas últimas se resuelven y se hace la unión de los conjuntos solución

FORMA 2) |EXPRESIÓN|<*a* si y sólo si -*a*<EXPRESIÓN<*a*
(Esta desigualdad doble se resuelve)

Si *a*>0, tenemos dos tipos de situaciones

Si $a \leq 0$ las desigualdades en valor absoluto son triviales. Se deduce las soluciones de manera lógica.