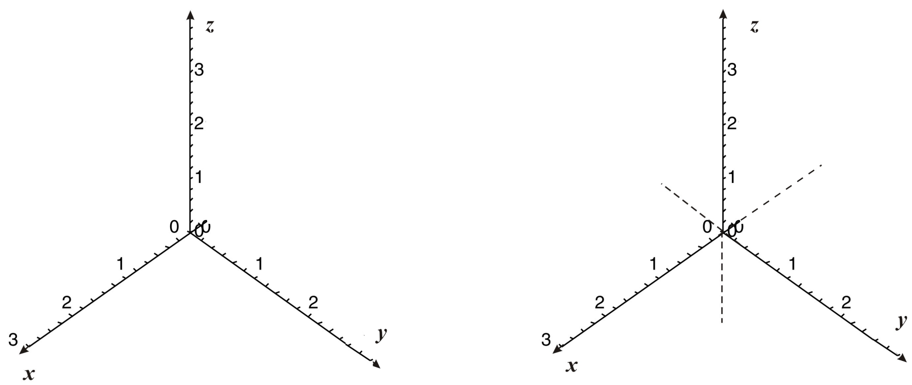
REPRESENTACION GRAFICA EN R^3

Próximamente se estudiarán relaciones entre tres variables, está relación puede venir dada a través de una ecuación o una función. Para visualizar mejor las relaciones siempre es conveniente hacer una representación gráfica por lo que se estudiará el espacio tridimensional R^3 y la representación de ecuaciones de este espacio.

SISTEMA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAL Y EL PRODUCTO CARTESIANO R^3

Recordemos que para situar un punto en el plano se necesitaban dos números reales. Si usamos un sistema de coordenadas rectangular o cartesiano estos números vienen dados por una pareja ordenada (a,b) donde a es la coordenada x y b la coordenada y. La pareja (a,b) son las coordenadas cartesianas del punto P del plano. Para localizar un punto en el espacio se necesitan tres números reales. Estos números están dados a partir de un sistema de referencia.

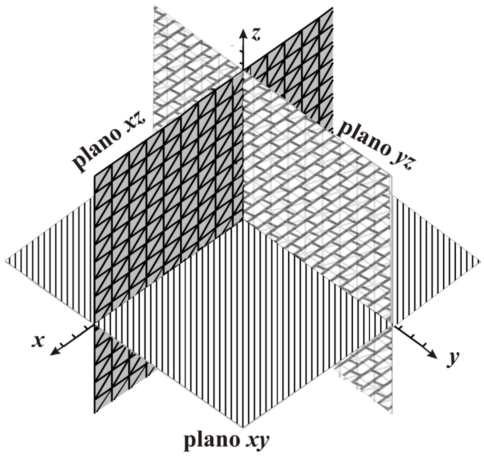
En el espacio también usaremos un sistema de coordenadas cartesiano o rectangular. Para establecer un sistema de coordenadas cartesiano seleccionamos un punto llamado el origen, por él haremos pasar tres rectas perpendiculares entre si, los cuales llamaremos ejes coordenados (eje *x*, eje *y* y eje *z*) Una elección común de los ejes es la dada en la figura.

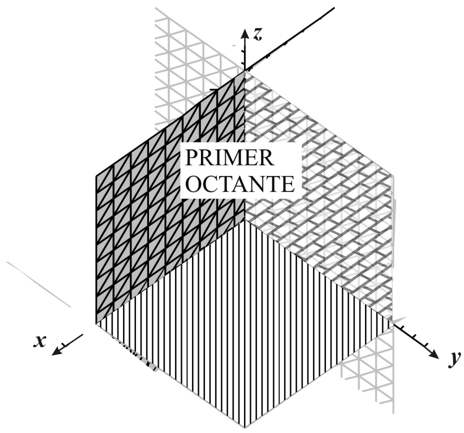


La dirección de la flecha indica la dirección positiva de los ejes. Para ver la ubicación de los ejes puede pensar en el libro abierto a 90 grados en posición vertical. Mirando de frente el libro abierto, el pie de la hoja del lado izquierdo representa la dirección positiva del eje *x*, el otro pie, la dirección positiva del eje *y* y la línea de juntura entre las dos páginas es el eje z.

Comentario: Puede haber otra selección de ejes pero normalmente todas siguen la regla de la mano derecha, la cual consiste en extender los dedos de la mano derecha, salvo del pulgar, en la dirección del eje de las *x* en el sentido positivo y cerrando los dedos en la dirección de los *y* positivos, el pulgar marca la dirección positiva del eje *z*.

Estos ejes determinan tres planos, el plano *xy*, el cual contiene el eje *x* y el eje *y*. Similarmente el plano *xz* y el plano *yz* como ilustra la figura. Estos planos dividen el espacio en ocho regiones llamadas octantes. El primer octante corresponde a la dirección positiva de los tres ejes.





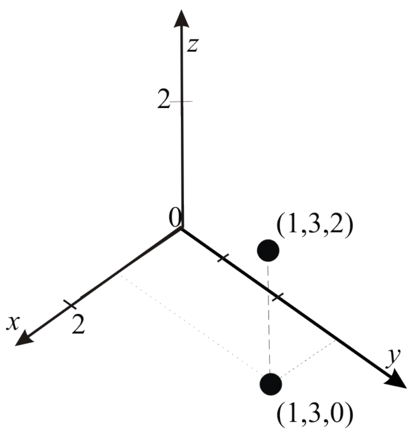
Otra forma de visualizar este sistema de referencia es observar una esquina inferior de cualquier habitación. Esta esquina será el origen. Ubicándonos al frente de esa esquina, con vista hacia ella, la pared de la izquierda es el plano *xz*, formado por el eje vertical *z* dirigido hacia el techo y el eje *x* que llega hasta nosotros, el plano *xy* es el piso y el plano *yz* es la pared de la derecha. Es claro que el eje *y* es la intersección del plano *yz* y el piso y la parte visible de esta intersección es la parte positiva del eje *y*. Usted está observando sólo el primer octante. El piso no lo deja ver cuatro octantes que están abajo y tiene otros tres en su piso que no logra ver debido a los planos *xz* y *yz*.

El producto cartesiano R^3 es el conjunto de todas las tríadas ordenadas de números reales (x, y, z). Este producto cartesiano también es conocido como el espacio numérico tridimensional. Las componentes son conocidas como las coordenadas. Similarmente a como ocurre en R^2, una tríada ordenada (x, y, z) de números reales se le puede asociar un único punto *P* del espacio geométrico tridimensional y recíprocamente un punto *P* en el espacio geométrico se le hace corresponder una única tríada ordenada. Esta última correspondencia se hace de manera análoga como en el sistema cartesiano R^2 y es como sigue: la coordenada *x* es la distancia del punto *P* al plano *yz* (en R^2 era la distancia al eje *y*), similarmente se determinan las otras dos coordenadas.

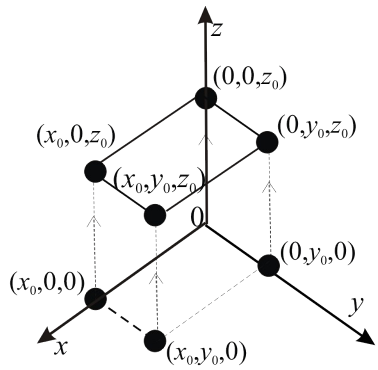
Como existe está relación uno a uno entre puntos en el espacio geométrico y el espacio numérico tridimensional, hablaremos de R^3 para referirnos indistintamente al espacio geométrico tridimensional o al numérico y haremos referencia a una tríada ordenada (x, y, z) o al punto (x, y, z) de manera indistinta. Así hablaremos de localizar el punto (x, y, z) en R^3.

Para localizar un punto (x, y, z) en R^3 podemos hacerlo primero ubicando su proyección en el plano *xy,* este es el punto $(x, y, 0)$ y luego subir o bajar este punto *z* unidades, según el signo de *z*. En el dibujo mostramos la representación del punto (1,3,2).

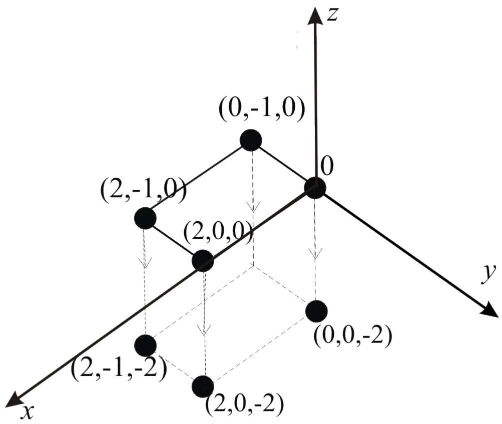
Observe como se ha trazado segmentos de rectas paralelos a los ejes de longitud dada por las coordenadas del punto.

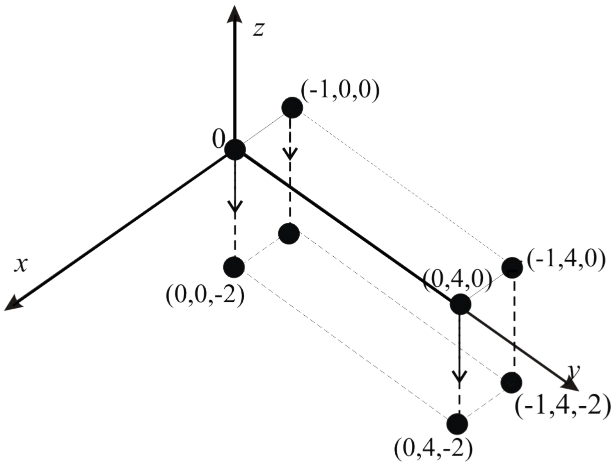


Otra forma de visualizar la representación de un punto *P* y que es muy conveniente cuando hay alguna coordenada negativa, es por medio de un paralelogramo. Este método consiste en trazar un paralelogramo con un vértice en el origen y el vértice opuesto es el punto P. Las longitudes de las aristas de este paralelogramo vienen dadas por el valor absoluto de las coordenadas



Ejemplo 1.- Localice los puntos (2,-2,-2) y (-1,4,-2) en el espacio tridimensional.
Solución:





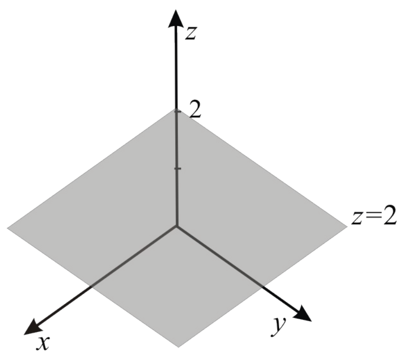
REPRESENTACIONES DE ECUACIONES EN R^3: SUPERFICIES

Para cada punto (x, y, z) que está en el plano *xy*, en el piso, tiene coordenada *z* igual a 0. Este plano es una superficie que tiene unas características que podemos describir a través de la ecuación $z = 0$, pues todos los puntos del espacio que satisfacen esta ecuación están en este plano y cada punto de este plano satisface la ecuación.

En general vamos a tener que una ecuación en tres variables, *x,y* y *z,* puede ser representada en R^3. La gráfica de una ecuación en R^3 es el conjunto de los puntos (x, y, z) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y su representación en el espacio tridimensional es, en general, una superficie. (Lehmann, pag 341, 2005)

Ejemplo 1.- Trace la gráfica de la ecuación $z = 2$ en R^3. (Un enunciado alternativo sería bosquejar la superficie que representa ecuación $z = 2$).

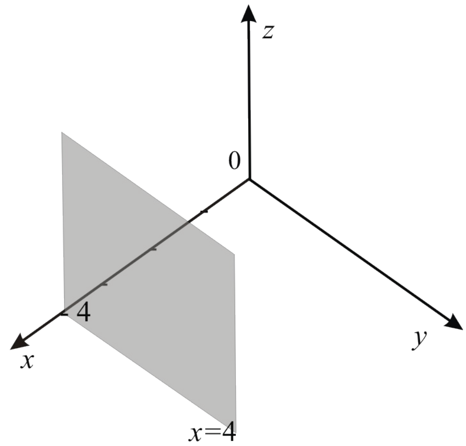
Solución: Este es el conjunto de todas las tríadas (x, y, z) con $z = 2$.
Este es un plano paralelo al plano $z = 0$ y ubicado 2 unidades arriba de éste como muestra la figura.



Comentario: Observe como el plano se ha dibujado con los bordes paralelos a los otros dos ejes.

Ejemplo 2.- Trace la superficie definida por la ecuación $x = 4$.

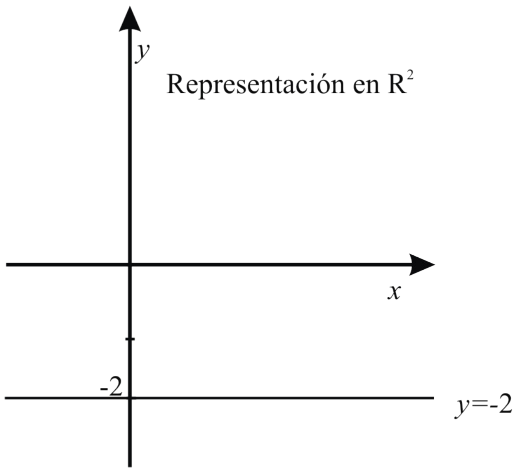
Solución: Nos estamos refiriendo a la representación en R^3. Allí la ecuación $x = 4$ es un plano paralelo al plano *yz* a una distancia de cuatro unidades de éste, es decir el conjunto de todas las tríadas (x, y, z) con $x = 4$.

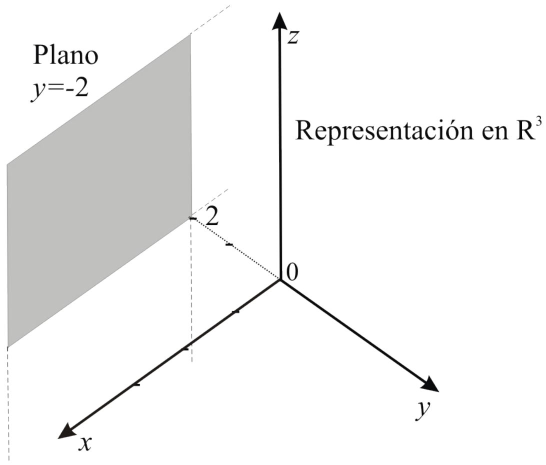


Recordemos que la representación gráfica de una ecuación en dos o menos variables en R^2 es una curva. Si la ecuación es lineal (de primer grado) está curva es una recta.

Ejemplo 3.- Trace la gráfica de ecuación $y = -2$ en R^2 y en R^3.

Solución: La gráfica de esta ecuación en R^2 es una recta. La gráfica de la ecuación en R^3 es un plano paralelo al plano *xz.* En el dibujo con trazo fuerte se ha dibujado el plano en el octante con *y* negativo y las otras coordenadas positivas, las líneas punteadas sugieren la continuación del plano que atraviesa perpendicularmente los otros planos coordenados.





Ejemplo 4.- Describa verbalmente la representación en R^3 de la ecuación $x^2 = 4$

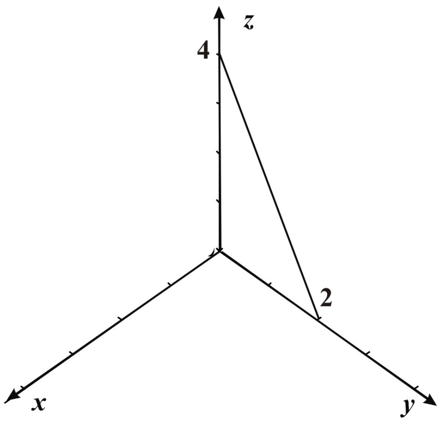
Solución: Un punto (x, y, z) satisface la ecuación $x^2 = 4$ si satisface la ecuación $x = 2$ o $x = -2$. Así que la representación de la ecuación $x^2 = 4$ son los planos $x = 2$ y $x = -2$, paralelos al plano coordenado *yz*.

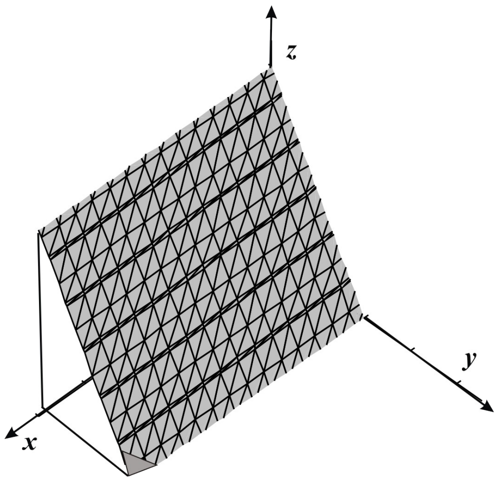
Conclusión: Las ecuaciones donde aparece una sola variable tienen, en general, tienen como representación gráfica en R^3 un conjunto de planos paralelos al plano coordenado de las variables no involucradas.

ECUACIONES EN DOS VARIABLES.

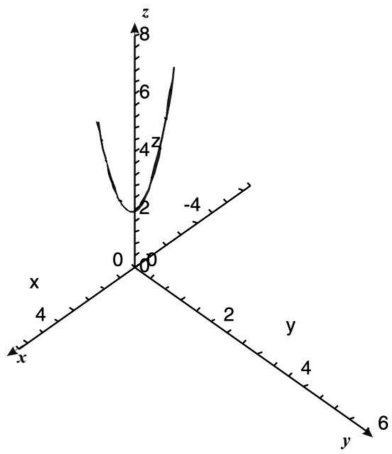
Vamos a representar ecuaciones en dos variables en R^3, tenemos que estar claro que la representación gráfica normalmente es una superficie, donde la variable que no aparece no tiene restricciones. Para representarla, dibujamos primero la curva en el plano de las dos variables involucradas y luego esta curva la prolongamos a lo largo del eje de la variable faltante, el trazo dejado es la superficie buscada.

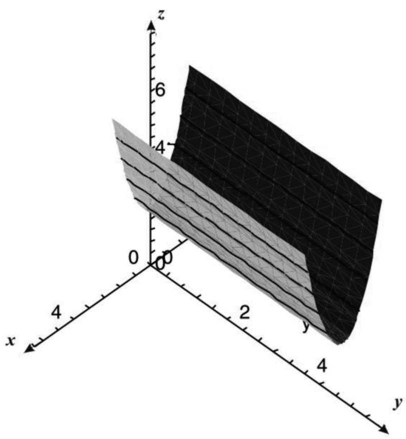
Ejemplo 1.- Bosqueje la superficie $2y + z = 4$.
Solución: Dibujamos primero la curva $2y + z = 4$ en el plano yz, es una recta, podemos graficarla consiguiendo los cortes con los ejes y y z, como se puede apreciar en el dibujo de la izquierda. Esta recta la prolongamos en la dirección del eje x, el trazo dejado es el plano que muestra la figura de la derecha.





Ejemplo 2.- Trace la gráfica de la ecuación $z = x^2 + 1$ en R^3.
Solución: Dibujamos primero la curva $z = x^2 + 1$ en el plano xz, es una parábola abriendo en el sentido positivo de las z y desplazada una unidad hacia arriba con respecto al origen.

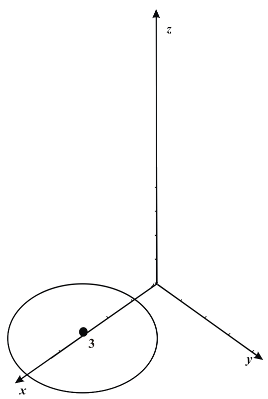


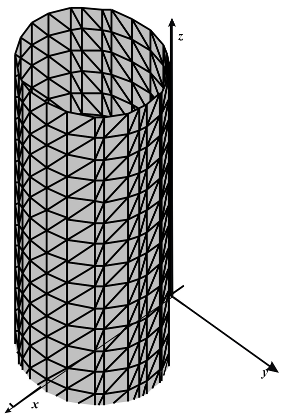


Esta parábola la prolongamos a lo largo del eje y, el trazo dejado es la superficie buscada tal como se muestra en el dibujo de la derecha.

Ejercicio de desarrollo.- Dibujar la superficie $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.

Respuesta:





ECUACIONES EN TRES VARIABLES

Veamos primero dos superficies de ecuaciones en tres variables de especial interés: el plano y la esfera. Luego trataremos como graficar otras superficies a través de curvas de nivel y trazas.

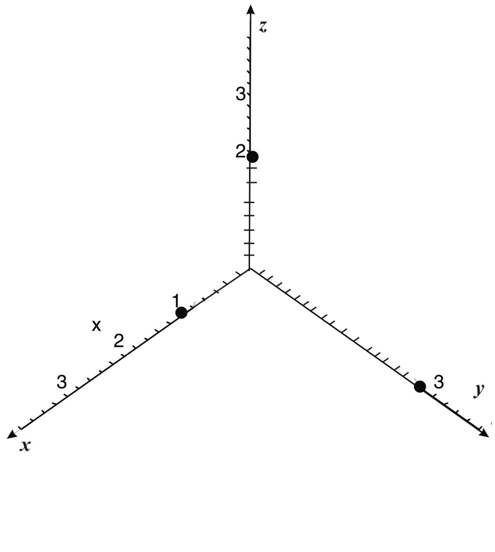
- **PLANO.-** La ecuación general del plano está dada por

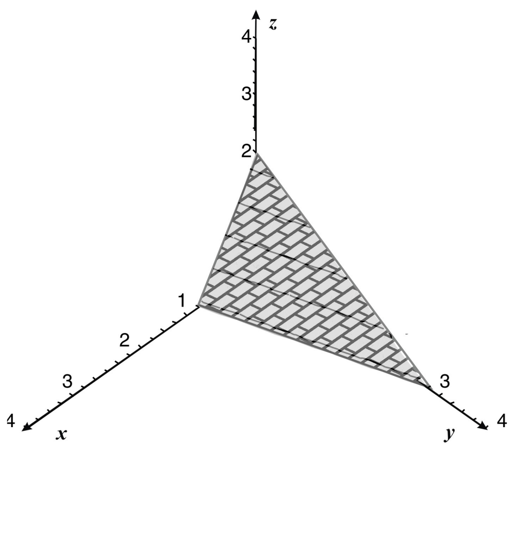
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

donde al menos uno de los tres primeros coeficientes es distinto de 0. En el último ejemplo teníamos un plano, se pudo graficar porque aparecían dos variables, es decir uno de los tres primeros coeficientes era cero.

Cuando en la ecuación del plano los cuatro coeficientes son distintos de cero se puede graficar consiguiendo los puntos de cortes con los ejes. Se lleva estos puntos en el espacio y se grafica el plano que pasa por estos puntos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.- Grafique $6x + 2y + 3z = 6$.
Solución: Para dibujar este plano primero encontraremos los cortes con los ejes
Corte con el eje *x*: Planteamos $y = z = 0$.
Tenemos entonces que $6 \cdot x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6$
La solución es $x = 1$.
Corte con el eje *y*: Planteamos $x = z = 0$ y obtenemos $y = 3$.
Corte con el eje *z*: Planteamos $x = y = 0$ y obtenemos $z = 2$.
Los cortes son entonces: $(1,0,0), (0,3,0)$ y $(0,0,2)$
Representamos estos cortes y unimos estos puntos mediante rectas. En este caso queda una porción del plano, la parte visible en el primer octante.





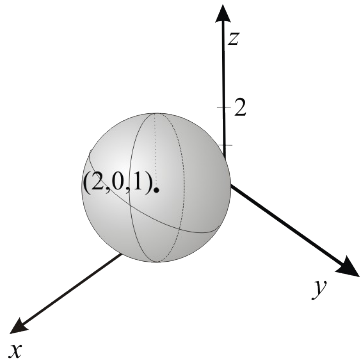
- **LA ESFERA.-** La ecuación centro-radio de la esfera está dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

donde (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del centro de la esfera y *r* es el radio de la esfera.

Ejemplo 2.- Graficar $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$

Solución.- La ecuación corresponde a una esfera de centro (2,0,1) y radio 2. Ubicamos el centro y luego se traza una esfera con este radio, como muestra la figura.

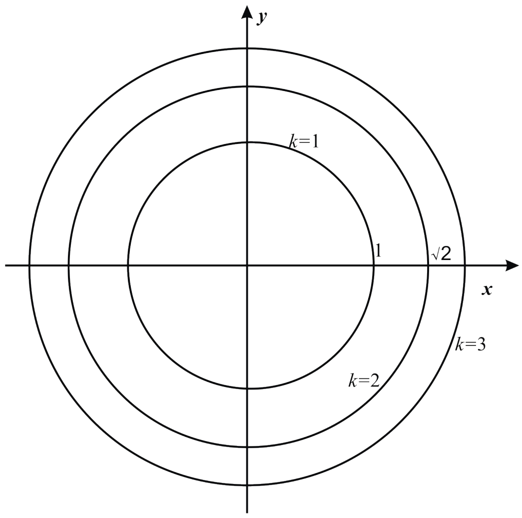


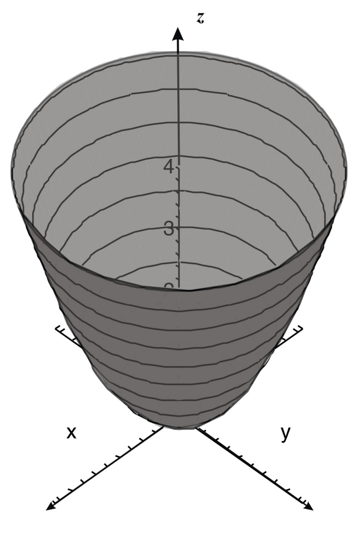
- **CURVAS DE NIVEL Y TRAZAS**

Para dibujar superficies más complicadas nos valemos de las curvas de nivel. Las curvas de nivel son las curvas que se obtienen al interceptar la superficie con planos paralelos a los coordenados. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.- Graficar la superficie $z = x^2 + y^2$ usando las curvas de nivel obtenidas al interceptar la superficie con planos del tipo $z = k$.

Solución: Observe que cuando interceptamos el plano $z = k$ con la superficie $z = x^2 + y^2$ obtenemos un circunferencias: $k = x^2 + y^2$. Estas circunferencias van aumentando de radio a medida que los planos van subiendo. En la izquierda tenemos las curvas de nivel formadas con la intercepción de la superficie con los planos $z = k$ y a la derecha la construcción de la superficie gracias a las curvas de nivel.





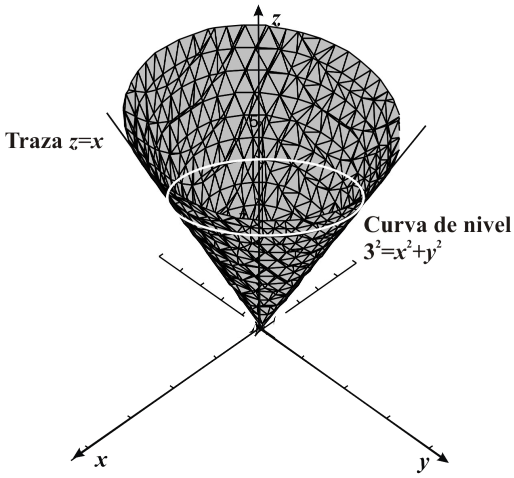
Esta figura es conocida como un paraboloide.

Observe que

1) A medida que aumenta *k* las circunferencias tienen mayor radio.

2) La curva de nivel (la traza) con el plano *y*=0 (plano *xz*) es la parábola $z = x^2$, esto nos permite deducir la ley con que crecen las circunferencias.(esta parábola abre en la dirección positiva de las *z*´s)

Se denomina **traza** a la curva de nivel obtenida al intersectar la superficie con uno de los planos coordenados. Esta traza permite ver con que ley crecen las curvas de nivel.



Para la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ con $z > 0$ tenemos que sus curvas de nivel formadas con la intersección con los planos $z = k$ forman circunferencias. Pero si tomamos la traza con el plano *xz* (curva de nivel con el plano *y*=0) se obtiene la gráfica de la ecuación $z^2 = x^2$, la cual es, para *z* positivo, las rectas $z = \pm x$. Así las trazas nos permite deducir que la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ con $z > 0$ es un cono.

Comentario: Con la técnica de las curvas de nivel se pueden graficar superficies como

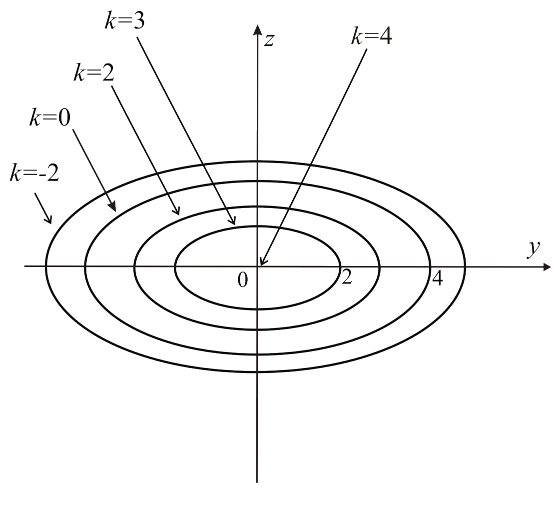
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Las curvas de nivel no tienen que ser siempre con respecto a la variable *z*, en ocasiones puede ser más recomendable buscar la variable donde eventualmente las curvas de nivel obtenidas sean elipses o circunferencias (puede ser que no se pueda obtener elipses). Luego se estudia la ley con que estas elipses aumentan o disminuyen.

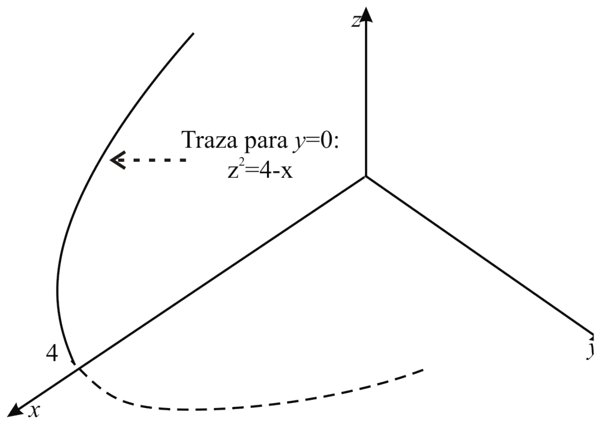
Ejemplo 4.- Graficar la superficie $x + \frac{y^2}{4} + z^2 - 4 = 0$ usando las trazas

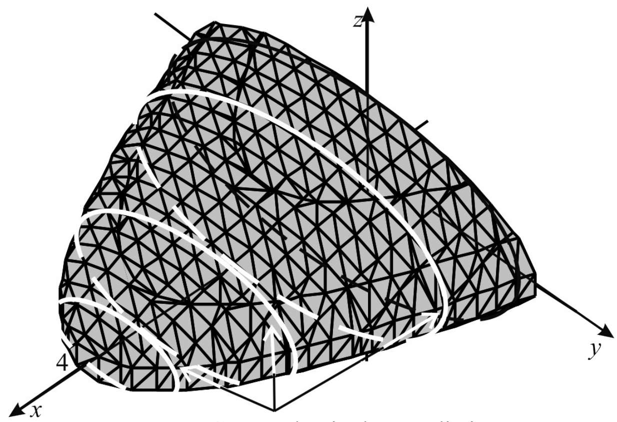
Solución:

En este caso es conveniente tomar las trazas sobre los planos $x = k$, pues nos queda una elipse con ecuación $\frac{y^2}{4} + z^2 = 4 - k$. Como el lado izquierdo es siempre mayor o igual a cero así tiene que ser el lado derecho: $4 - k \geq 0$, esto es $4 \geq k$, así que para valores mayores a 4 esta ecuación no es satisfecha por ningún punto, para valores menores que *k* su representación gráfica son elipses, tales que a medida que disminuyen los valores de *k* las elipses va agrandándose, como mostramos en la figura



Así que a lo largo del eje *x* empezamos a trazar estas elipses que comienzan en un punto para *x*=4 y conforme avanzamos en la dirección negativa del eje *x* se agrandan. La ley con que crecen estas elipses la podemos obtener a través de la traza en el plano *xz* la cual es la parábola $z^2 = 4 - x$, obtenida cuando colocamos *y*=0 en la ecuación original. (Recuerde que $x = 4 - z^2$ es una parábola que abre en la dirección negativa de las *x*´s)





Curvas de nivel para distintos valores de *x*

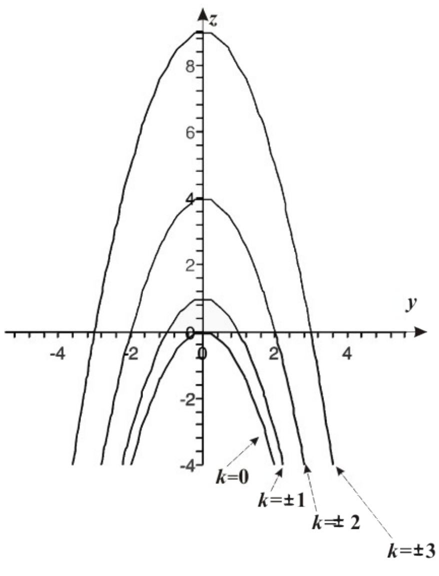
La superficie de este ejemplo se llama paraboloide elíptico.

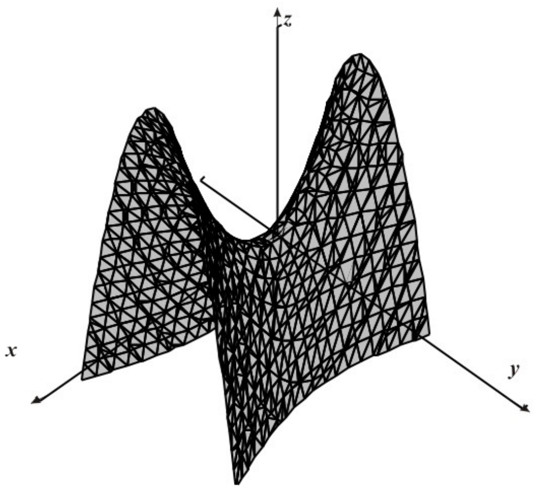
Ejercicio de desarrollo.- Dibujar la superficie $(x-1)^2+y^2-z^2=0$, para *z* positivo

Una superficie que estudiaremos más adelante es la conocida como paraboloide hiperbólico, sus trazas son hipérbolas y parábolas dependiendo de los planos paralelos a los planos coordenados que se tomen. El siguiente ejemplo ilustra un tipo de paraboloide hiperbólico.

Ejemplo 5.- Graficar la superficie $z=x^2-y^2$ usando las trazas

Solución: Al tomar las trazas sobre los planos $x=k$, quedan parábolas del tipo $z=k^2-y^2$. A la izquierda se han bosquejado distintas trazas sobre estos planos, a la derecha está la superficie resultante al reconstruirla en base a estas trazas, tomando en consideración que para *y*=0 queda la parábola $z=x^2$.





Este tipo de superficie también se llama silla de montar y lo que ocurre en esta superficie en el origen será llamado posteriormente un punto de silla.

EJERCICIOS

1) Represente los siguientes números en el espacio.

1.1) (1,2,4); **1.2)** (1,2,5); **1.3)** (1,-2,4); **1.4)** (-1,2,4); **1.5)** (1,2,-4)

2) Represente cada una de las siguientes ecuaciones en R^2 ó R^3 según corresponda

2.1) la superficie $3x + y = 1$; **2.2)** la curva $x = 3$; **2.3)** la superficie $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$;

2.4) la curva $y = -\sqrt{x-1}$; **2.5)** la curva $y = (x-2)^2 - 1$; **2.6)** la superficie $x = y^3$;

2.7) la curva $y = e^{-x} + 2$; **2.8)** la superficie $y = -\sqrt{x} + 2$

3) Represente cada una de las siguientes superficies.

3.1) $(x-2)^2 + (z-1)^2 = 9$; **3.2)** $x + z = 4$; **3.3)** $3x + 2y + 2z = 6$;

3.4) $z = (x+2)^2 + 3$; **3.5)** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$; **3.6)** $x = y$;

3.7) $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$; **3.8)** $z = \sqrt{y}$; **3.9)** $2y + z = 6$;

3.10) $x + 2y + z = 4$; **3.11)** $2x + 3y - 4z = 12$; **3.12)** $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$

3.13) $y = 2x^2 + z^2$; **3.14)** $z + x^2 + y^2 = 4$; **3.15)** $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$;

3.16) $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$; **3.17)** $z = 6 - (x-2)^2 - (y-3)^2$; **3.18)** $z = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 2$

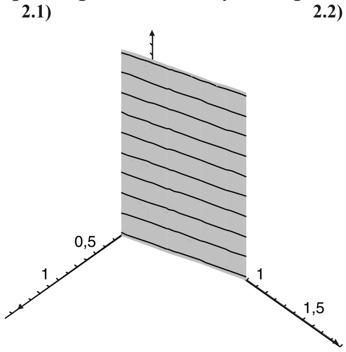
RETOS:

4) Represente cada una de las siguientes superficies mediante curvas de nivel

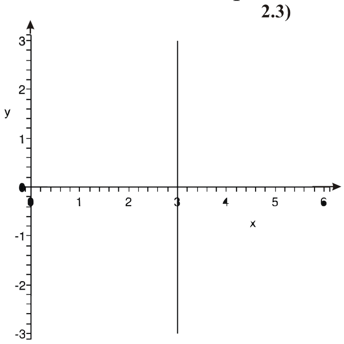
4.1) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; **4.2)** $z = x^2 + y^2 + 1$; **4.3)** $x^2 - y^2 - (z-1)^2 = 0$; **4.4)** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

4.5) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. (**Sug**. Recuerde siempre buscar las curvas de nivel intentando que quede una elipse, luego examine los valores posibles de la otra variable tomando en consideración que tiene una suma de cuadrados que es positiva, la ley con que crece o decrecen las elipse se buscan por otra traza)

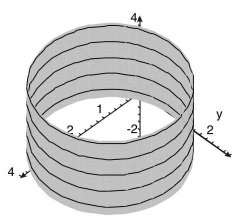
2.1)



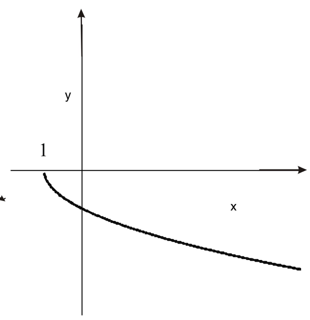
2.2)



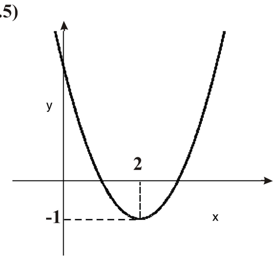
2.3)



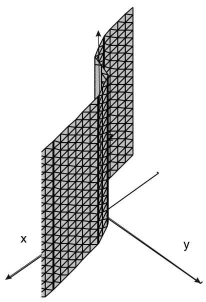
2.4)



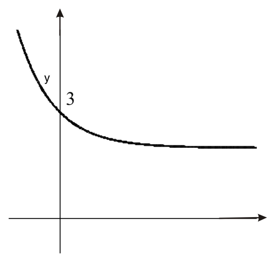
2.5)



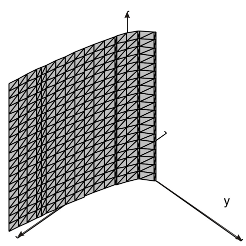
2.6)



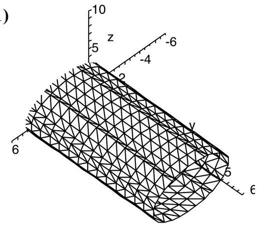
2.7)



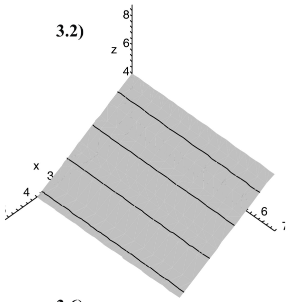
2.8)



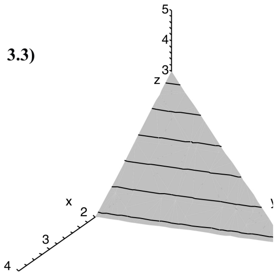
3.1)



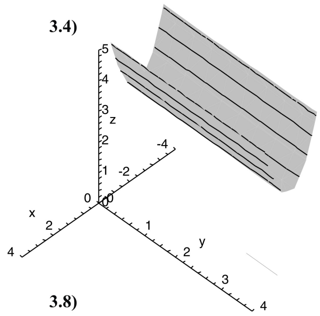
3.2)



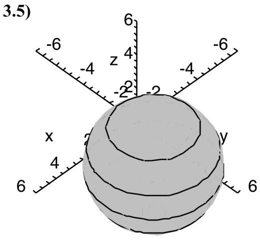
3.3)



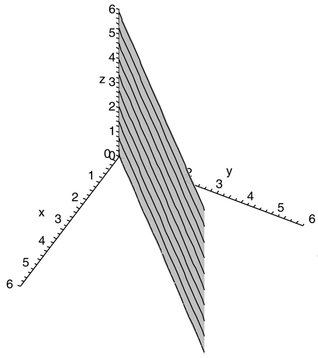
3.4)



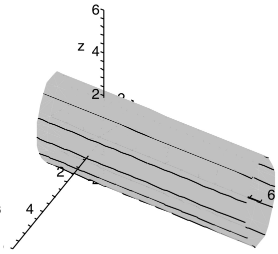
3.5)



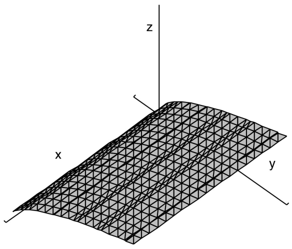
3.6)



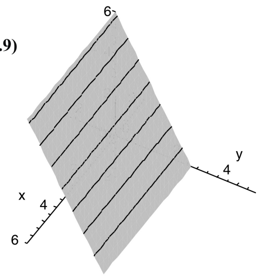
3.7)



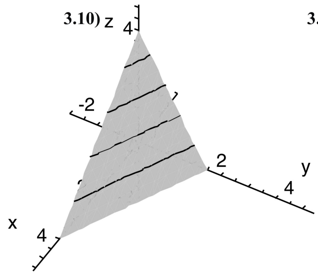
3.8)



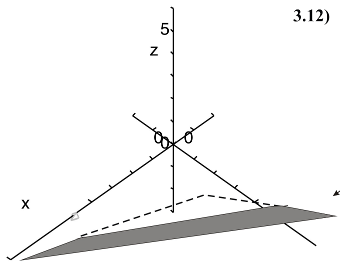
3.9)



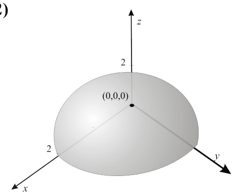
3.10)



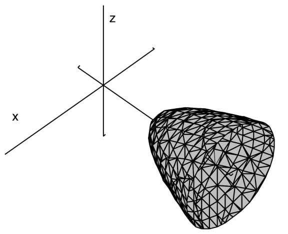
3.11)



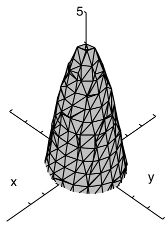
3.12)



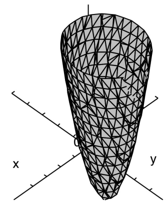
3.13)



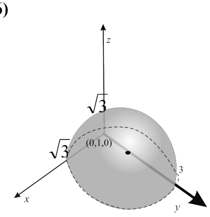
3.14)



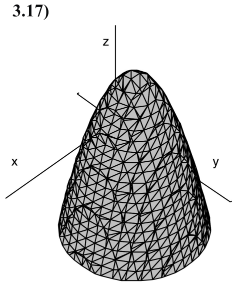
3.15)



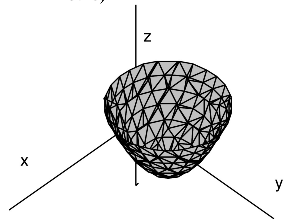
3.16)



3.17)



3.18)



MAPLE

El objetivo de todos estos ejercicios es bosquejar las gráficas usando las técnicas vistas en esta sección. Son técnicas que cuando se dominan resultan mucho más sencillas y rápidas en este tipo de gráficas que apelar a un software. Por otro lado la ejercitación de los ejercicios planteados le permitirán visualizar las representaciones en R^3. Sin embargo, otras resultan más complicadas para visualizar. En todo caso, si en algún momento necesita la gráfica bien elaborada se puede usar muchos softwares que grafican superficies en dos y tres variables. Uno de estos softwares es el MAPLE.

Para graficar el ejercicio 2.5) de esta sección en MAPLE puede usar las siguientes instrucciones

```
with(plots):
implicitplot(y=(x-2)^2-1, x=-6..6, y=-6..6, color=black, axes=normal,
view=[-2..6,-2..6], grid=[40,40],symbol=cross, thickness=2);
```

Para el ejercicio 2.6) puede usar este comando

```
with(plots):
implicitplot3d(x=y^3, x=-6..6, y=-6..6, z=0..6,color=gray,
axes=normal,style=patchcontour, view=[-2..6,-2..6,-2..6],
grid=[40,40,40],symbol=cross, transparency=0.1,thickness=1);
```

(Recomendación: quitar la opción color para ver en pantalla)