SEMINARIO 2
UNAM, MEXICO, MAYO, 2006.

Estudios numéricos y dinámicos via funciones Wavelets, de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales con soluciones tipo Soliton

Dra. Lilliam Alvarez

CITMA-CUBA

lilliam@citma.cu

- Se presentan las funciones wavelets para construir representaciones sparse y construir un método Híbrido para resolver EDPs no lineales clásicas como la KdV y No lineal de Shroedinger.

- Se emplea el Método de líneas para reducir la EDP un sistema de EDOs.

- Se estudia el comportamiento de la dinámica de las ondas viajers, en este caso solitones viajeros y su estabilidad, a través de los estudios numéricos.

EDPs con soluciones tipo SOLITON

- **Korteweg-de Vries:**

  (Describes wave trains with weak dipersion. The KdV replaces the Burgers' equation in models with extremely weak dispersions.)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

- **Non-linear Shroedinger:**

  (Describes the modulation of cuasi-monchromatic wave trains.)

$$iu_t + u_{xx} \pm u|u|^2 = 0$$

- **Sine Gordon:**

  (Is a special case of wave trains near to dispersive instabilities.)

$$u_t - u_{xx} + \sin(x) = 0$$

Breve recuento histórico sobre los Solitones

- 1892, Boussinesq Eq.
- 1894, J. Scott Russel, (Famosa observación)
- 1895, Korteweg and de Vries
- 1954, Fermi et al. (obervaciones numéricas)
- 1958, Gardner and Morikawa, Plasma Physics
- 1964, Óptica no-lineal
- 1964, Kruskal and Zabussky, “anomalus” comportamientos
- 1967, Shabat and Zajarov, Dispersión inversa
- 1971, Ecuación No-Lineal de Schroedinger.

La ecuación de KdV

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0$$

Si $\boxed{\varepsilon = 0}$, funciones de Airy

Si $\boxed{\mu = 0}$, Ecuación de Burgers

Dos ecuaciones clásicas con soluciones de tipo soliton:

Korteweg-de Vries:

$$\boxed{u_t + \mu u u_x + \varepsilon u_{xxx} = 0}$$

Schrödinger No-lineal:

$$\boxed{iu_t + u_{xx} + \nu u|u|^2 = 0}$$

Qué son los solitones?

Son soluciones de ecuaciones de ondas no-lineales y se comportan con dos propiedades permanentes :

- **Viajan largas distancias y en el tiempo sin cambiar la forma, como una**
- **Interactúa de forma fuerte con otras soluciones como si ellos representaran una "entidad propia" o "partículo localizada".**

ESQUEMA NUMÉRICA HÍBRIDO:
METODO DE LÍNEAS + WAVELETS +DIFERENCIAS FINITAS

IDEA: construir un algoritmo para calcular soluciones viajeras, tipo soliton, sobre una malla adaptiva no-uniforme.

Pasos principales del procedimiento :

1. **Partiendo de la condición inicial de la EDP de evolución, construir una representación Wavelet sparse, y con ello una malla no-uniforme sparse en la variable espacial inicial.**
2. **Discretizar en la EDP solo la variable espacial en los nodos definidos, usando un esquema en diferencias finitas centradas.**
3. **Resolver el sistema de EDOs resultante de tipo stiff**
4. **En cada paso temporal que automáticamente elija el resolvedor ODE para avanzar en el tiempo, reconstruir un representación sparse wavelete y con ello, construir una malla adaptativa en la variable espacial.**

Wavelet: definiciones y relaciones

Consider two functions which are solutions to the following equations:

$$\phi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k \phi(2x-k), \quad \psi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} g_k \phi(2x-k)$$

$\phi(x)$ is normalized: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1$

Let $\phi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi_k^j\left(2^{-j} x - k\right)$ **and** $\psi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi_k^j\left(2^{-j} x - k\right)$

where *j*, *k* are integers denoting the dilations and translations.

The coefficients $H = \{h_k\}_{k=0}^{L-1}$ **and** $G = \{g_k\}_{k=0}^{L-1}$

are the filters and are related by: $g_k = (-1)^k h_{L-k}, \quad k = 0,1,\ldots, L-1$

and are chosen so that,

ψ_k^j **will satisfy** $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^j(x) \psi_l^m(x)\, dx = \delta_{kl} \delta_{jm}$ **(Orthonormal. Basis)**

Also $\psi(x) = \psi_0^0(x)$ **satisfies**

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x^m\, dx = 0, \quad m = 0,1,\ldots, M-1$ **(M vanishing moments.)**

The spaces spanned by ϕ and ψ over *k* with fixed *j* are:

$$V_j = \operatorname*{span}_{k\in Z} \phi_k^j(x), \quad W_j = \operatorname*{span}_{k\in Z} \psi_k^j(x)$$

PROPERTIES :

- These spaces satisfy

$$\ldots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \ldots$$

- We say that $L^2(R) = \bigoplus_{j\in Z} W_j$ (wavelets form an orthonormal basis of L^2)
- Two more properties:

$$\cap \mathrm{V_j} = \{0\} \text{ and } \cup \mathrm{V_j} = L^2(R)$$

- Any $f(x) \in L^2(R)$ can be written as

$$\boxed{f(x) = \sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z} d_k^j \psi_k^j(x), \quad d_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_k^j(x)\,dx}$$

due to the orthonormality of the wavelets. In this expansion, functions with arbitrarily small-scale structures can be represented. But, in practice, in the computer there is a limit J, which depends on how fine the grid is in the numerical scenario:

$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_J \oplus V_J$$

$$P_{V_0} f(x) = \sum_{k\in Z} s_k^j \phi_k^j(x) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in Z} d_k^j \psi_k^j(x)$$

(j is the scale and k is the location)

Matriz de Descomposición Wavelet

The following two recursion relations can be found for the coefficients:

$$s_k^j = \sum_{n=1}^{n=2M} h_n s_{n+2k-2}^{j-1}, \quad d_k^j = \sum_{n=1}^{n=2M} g_n s_{n+2k-2}^{j-1}$$

The decomposition matrix embodied in these two equations is denoted by $P_{N \times N}^{j,j+1}$

Let s_j contain the scaling function coefficients at scale j.

Therefore P maps s_j onto s_{j+1} and d_{j+1}::

$$P_{N\times N}^{j,j+1} : \left[s_j\right] \rightarrow \begin{bmatrix} s_{j+1} \\ d_{j+1} \end{bmatrix}$$

Note that vectors at scale j+1 are half as long as vectors at scale j.

The decomposition or representation of a any function in wavelet basis is done in the following form:

$$
\begin{bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \\ f6 \\ f7 \\ f8 \\ f9 \\ f10 \\ f11 \\ f12 \\ f13 \\ f14 \\ f15 \\ f16 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{matrix}}
\begin{bmatrix} s1 \\ d1 \\ s2 \\ d2 \\ s3 \\ d3 \\ s4 \\ d4 \\ s5 \\ d5 \\ s6 \\ d6 \\ s7 \\ d7 \\ s8 \\ d8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{permutation}}
\begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \\ s4 \\ s5 \\ s6 \\ s7 \\ s8 \\ d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \\ d7 \\ d8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{matrix}}
\begin{bmatrix} S1 \\ D1 \\ S2 \\ D2 \\ S3 \\ D3 \\ S4 \\ D4 \\ d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \\ d7 \\ d8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{permutation}}
\begin{bmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \\ d7 \\ d8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{etc}}
\begin{bmatrix} S1 \\ S2 \\ D1 \\ D2 \\ D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \\ d7 \\ d8 \end{bmatrix}
$$

Para obtener una representación sparse de una función se colocan como igual a cero, todos los coeficientes que sean menores que un valor umbral: threshold value: $\left| d_k^j \right| \leq \varepsilon$ ***(Thresholding step)***

Esquema de subidivisión iterpolatoria

(Deslauriers and Dubuc, 1989)

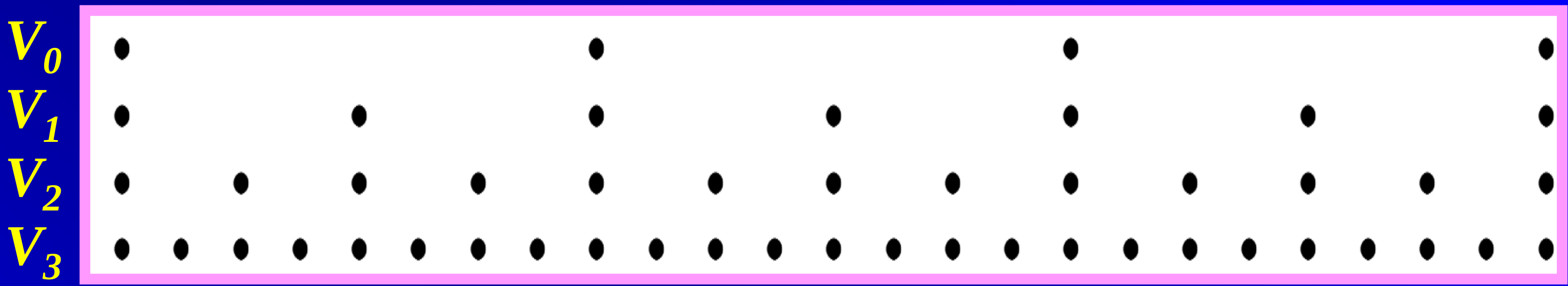
Se construye una mall diádica:

$$V_j = \left\{ x_{i,j} \in \Re : x_{i,j} = 2^{-j} k, .. k \in Z \right\}$$

Se interpola en el siguiente nivel usando los valores de la función en la malla mas gruesa, como sigue:

$$\begin{cases} f_{j+1,2k} = f_{j,k} \\ f_{j+1,2k+1} = P_{j+1,2k+1}\left(x_{j+1,2k+1}\right) \end{cases}$$

La localización de los nodos de interpolación en los diferentes niveles de arriba abajo es como sigue:



El polinomio de interpolación se $P_{j+1,2k+1}(x)$ **selecciona como sigue:**

$$\boxed{P_{j+1,2k+1}(x_{j,k+l}) = f_{j,k+l} \quad \text{for} -\frac{p}{2} < l \leq \frac{p}{2}}$$

Ejemplo:

$$f_{j+1,2k+1} = \frac{1}{2}\left(f_{j,k} + f_{j,k+1}\right) \qquad \text{si} \quad p = 2$$

$$f_{j+1,2k+1} = \frac{1}{16}\left(-f_{j,k-1} + 9f_{j,k} + 9f_{j,k+1} - f_{j,k+2}\right) \quad \text{si} \quad p = 4.$$

INTERPOLATORY WAVELETS, Donoho, 1992.

These wavelets correspond to the interpolating subdivision scheme as follows:

Starting the subdivision from the sequence $\{\delta_{0,k}\}_{k\in Z}$

On V_0 **and refine to** V_l**, in the limit** $l \to \infty$

we will get what Donoho, (1992), calls the scaling function, or fundamental function of Deslauries and Dubuc, $\varphi(x)$

From the construction, φ **has compact support on** $[-p+1, p-1]$

is symmetric around $x=0$ **and is cardinal, in the sense** $\varphi(k) = \delta_{o,k}, \ k \in Z$

Doing translations and dilations of $\varphi(x)$ by $\varphi_{j,k}(x)=\varphi(2^j x-k)$

we can define the interpolant of $f(x)$ **in any** V_j **by:**

$$\boxed{P_j f(x) = \sum_k f_{j,k}\varphi_{j,k}(x)}$$

where $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in Z}$ **is a basis in** V_j**.**

La Transformada Wavelet de interpolación

Introduciendo los espacios W_j tal que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

Se puede representar una función en el espacio V_{j+1} como sigue:

$$\boxed{P_{j+1} f(x) = \sum_k f_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(x)}$$

Considerando las bases $\{\psi_{j,k}\}_{k \in Z}$ *de* W_j**, se puede escribir que**

$$\boxed{P_{j+1} f(x) - P_j f(x) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x)}$$

Donde $\boxed{\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)}$

Son las funciones wavelets y $d_{j,k}$ son los coeficientes wavelets.

Los Wavelets usados en esta trabajo fueron los introducidos por by Donoho con su correspondiente , *Interpolated Subdivision Scheme.*

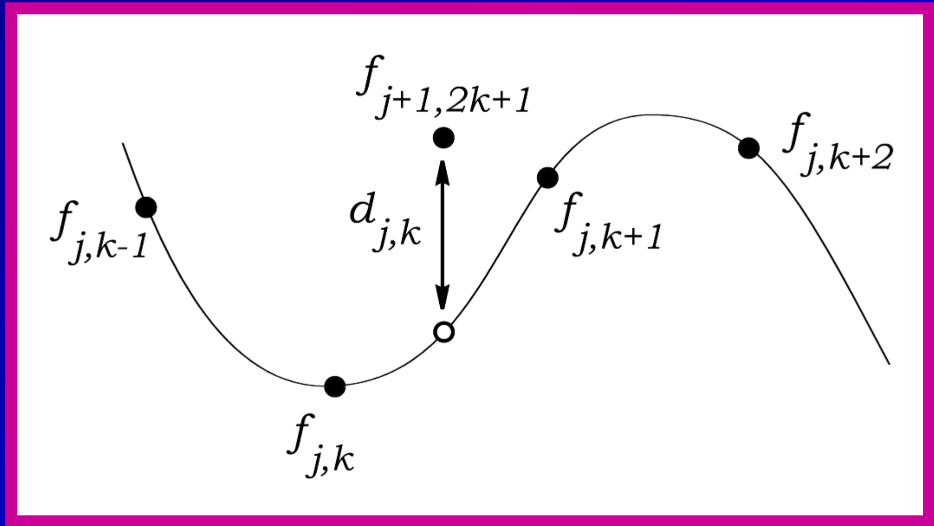
Las funciones pueden ser representadas en dos formas diferentes :

$$\sum_k f_{j+1,k}\phi_{j+1,k}(x) \quad \text{or} \quad \sum_k f_{j,k}\phi_{j,k}(x)+\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

Para representar la funcion ven una malla mas fina, la descomposición se repite recursivamente :

$$\sum_k f_{J,k}\phi_{J,k}(x) = \sum_k f_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x)+\sum_{j_0\le j<J}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

✓ Los coeficiendes wavelets, *d*, codifican el erro en el paso de la interpolación, y de esta forma señalan dónde la función se comporta con formas abruptas. La figura ilustra el proceso:



✓Cuando el punto interpolado esta cerca de la fronteral se toma los *p* puntos del lado interior con los pesos tomados de forma

✓ la trasformada inversa, hace le proceso de forma inversa, Añadiendo las correcciones a la predicción interpolada :

$$f_{j+1,2k+1} = d_{j,k} + P_{j+1,2k+1}(x_{j+1,2k+1}), \quad \forall k \in Z$$

Diferenciación uni-dimensional y paso por el umbral

La primera derivada se calcula en cada nodo de la malla sparse

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)} \sum_{l} g'_l f(x + lh)$$

Donde los coeficientes *g´* son los pesos del esquema en diferencias finitas centradas.
Para la aproximación de la segunda derivada se procede manera similar.
Si el nodo donde se aproximan las derivadas está cerca de las fronteras, se toman los pesos apropiados, para garantizar el mismo orden de la aproximación.
Para obener los representación Wavelet sparse, todos los coeficientes que sean menores que el umbral τ , se igualan a cero.

$$\left| d_{j,k} \right| < \tau \ \Rightarrow \ d_{j,k} = 0$$

El refinamiento de la malla para las diferencias finitas y los Wavelets:

- Cuando se usa un método wavelet éste es equivalente a usar métodos en diferencias finitas con refinamiento de la malla en las regiones donde hay pequeñas estructuras, detalles, cambios significativos, shocks, singularidades.

- El ‘refinamiento’ se efectúa añadiendo funciones bases wavelets en las regiones donde hay un comportamiento singular y que se corresponde donde el coeficiente wavelet, *d*, tiene un mayor valor. Esto equivale a añadir nodos en la malla.

- Al usar métodos Wavelets hay una correspondencia con los operadores en diferencias finitas centradas.
- Se demuestra además, que existe una superconvergencia en los nodos escogidos con esta técnica.

*Resultados of L. Jameson, NASA Langley Research Center

El Método de líneas es una técnica semi-discreta que transforma la EDP en un sistema de EDOs.
Discretizando las derivadas espaciales usando un esquema en diferencias finitas centradas:

$$V1(x_i,t) \approx \left(u^2/2\right)_x\Big|_{x=x_i} \qquad \text{(conservativa !)}$$

$$V2(x_i,t) \approx \left(u_{xx}\right)\Big|_{x=x_i} \qquad V3(x_i,t) \approx \left(u_{xxx}\right)\Big|_{x=x_i}$$

Para la ecuación the KdV tenemos :

$$u'(x_i,t) = -6\,V1(x_i,t) - V3(x_i,t), \quad i=1,N_s$$

Y para la no-lineal de Schrödinger :

$$u'(x_i,t) = V2(x_i,t) \pm \left|u(x_i,t)\right|^2 u(x_i,t), \quad i=1,N_s$$

En cada paso temporal, se construye una

<u>MALLA ADAPTIVA SPARSE Y NO-UNIFORME</u>

El sistema de EDOs se completa con las N_s condiciones iniciales a part de la evaluación, discretización y represnetación de la función de la condición inicial de la EDP en la mmala inicial sparse con N_s nodos.

Ej. Malla uniforme →≈ 200 nodos, Malla Sparse →≈ 20 nodos

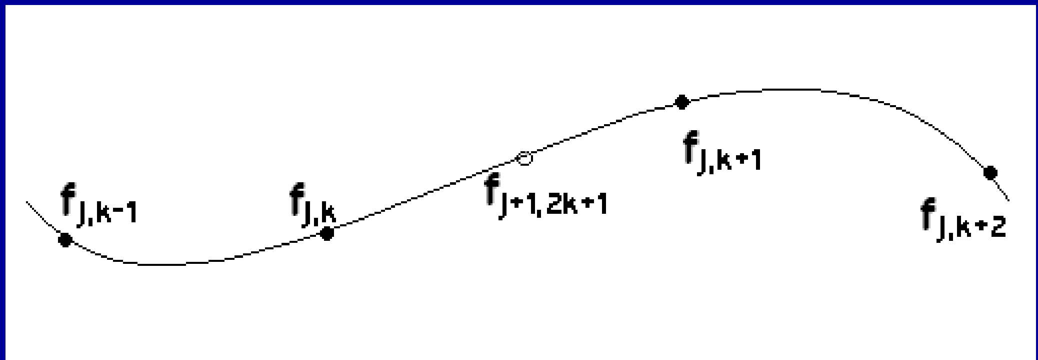
Representación Wavelet sparse: Resumen

Se construye una malla diádica:

$$V_j = \left\{ x_{i,j} \in \Re : x_{i,j} = 2^{-j} k, ..k \in Z \right\}$$

Se usa un polinomio de interpolación para refinar la malla inicial :

$$\begin{cases} f_{j+1,2k} = f_{j,k} \\ f_{j+1,2k+1} = P_{j+1,2k+1}\left(x_{j+1,2k+1}\right) \end{cases}$$



Se interpola en el siguiente nivel usando los valores de la función en la malla mas gruesa del nivel anterior, como sigue :

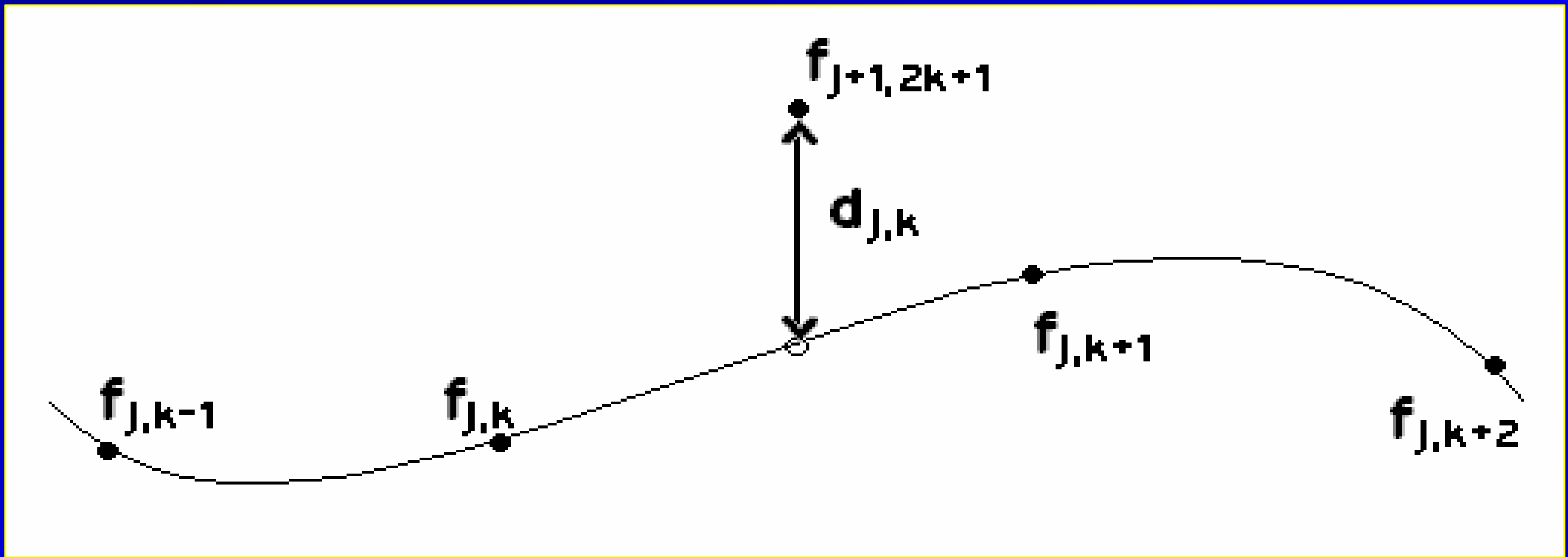
$$f_{j+1,2k+1} = \frac{1}{2}\left(f_{j,k} + f_{j,k+1}\right) \qquad \text{si } p = 2,$$

$$f_{j+1,2k+1} = \frac{1}{16}\left(-f_{j,k-1} + 9f_{j,k} + 9f_{j,k+1} - f_{j,k+2}\right) \qquad \text{si } p = 4.$$

TLos coeficientes wavelets son obtenidos por:

$$d_{j,k} = f_{j+1,2k+1} - P_{j+1,2k+1}\left(x_{j+1,2k+1}\right), \qquad k \in Z$$

Así vemos cómo los coeficientes wavelet codifican o señalan El error de la interpolación de un nivel a otro :



El siguiente paso es el del Umbral, reteniendo solo los coeficientes *d*, y por ende los NODOS, donde se cumpla que

$$\left| d_{j,k} \right| > \varepsilon$$

>>Antes de la operación del corte con el umbral, se tiene una función con una aproximación localmente cúbica (si p=4). Se retiene sólo un número Ns de coeficientes indicando la psoición y el número de nodos, Ns.

>>Una función reperesentada con los wavelets interpolatorios, se considera *bien comprimida o compactada si* if Ns<<N, donde N es el número de nodos en la malla inicial .

>> Una función suave será representada por una pequeña cantidad de coeficientes dj,k significativos. En las regiones donde la función es suave ser requieren pocos coeficientes y nodos para describirla. Sin embargo, si tiene capas limites, singularidades o zoans abruptas, en esas regiones se rqeuerirán mas coeficientes, y por ende mas nodos para describirla.

>>Así construimos una malla adaptiva!

>>Esta representación de una función, usando solo Ns puntos se llama “representación sparse de una función”.

La representación Wavelet sparse de las derivadas .

Usando un esquema de diferencias finita centradas, de orden 4, (p=4), y comenzando con la respresentación sparse de la condición incial se construye la rpresentación de las derivadas, hasta tercer orden, (necesarias para aproximar ux o uxxx en la u_x or u_{xxx} EDP)

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_l g'_l \, f(x + lh)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \sum_l g''_l \, f(x + lh), \qquad f'''(x) = \frac{1}{h^3} \sum_l g'''_l \, f(x + lh)$$

Donde los filtros *g'*, *g''* and *g'''* son obtenidos de las correspondientes derivadas del polinomio de aproximación

El Método de líneas para la ecuación KdV.

- Dada la ecuación general KdV:

$$\boxed{u_t + \varepsilon (u^2/2)_x + \mu u_{xxx} = 0}$$

- Se aproximan las derivadas espaciales via representación sparse wavelet :

$$\boxed{V1(x_i,t) \approx \left(u^2/2\right)_x \Big|_{x=x_i}} \qquad \boxed{V3(x_i,t) \approx \left(u_{xxx}\right)\Big|_{x=x_i}}$$

- Obteniéndose el siguiente sistema de EDOs :

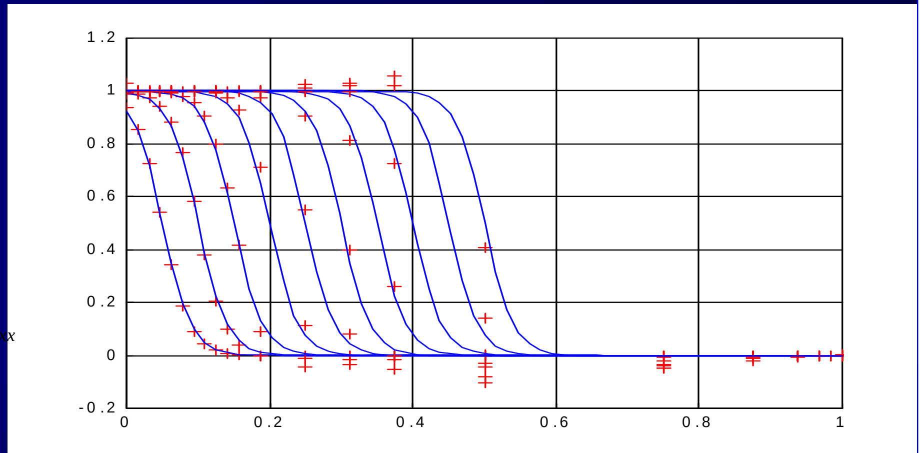
$$\boxed{u'(x_i,t) = -\varepsilon V1(x_i,t) - \mu V3(x_i,t),}$$

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS.

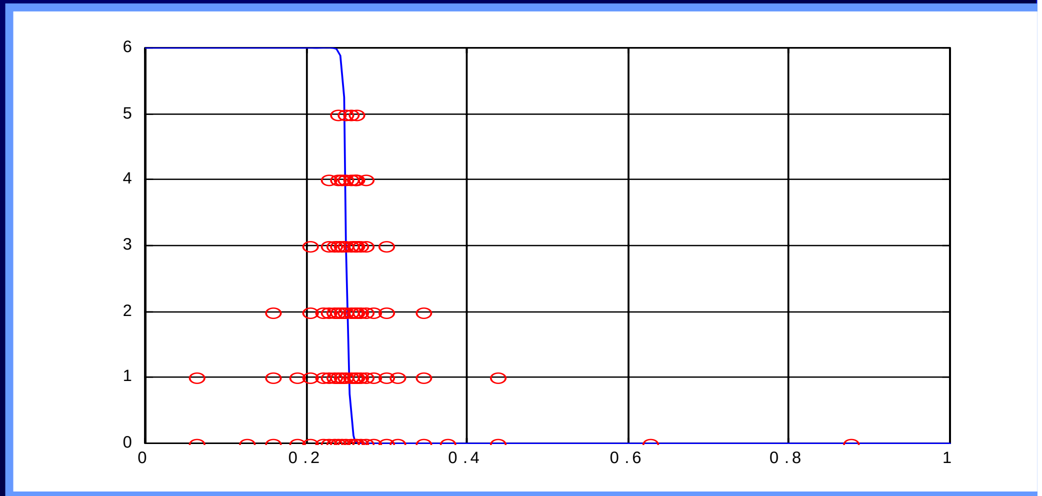
Ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u_x or u_{xxx}

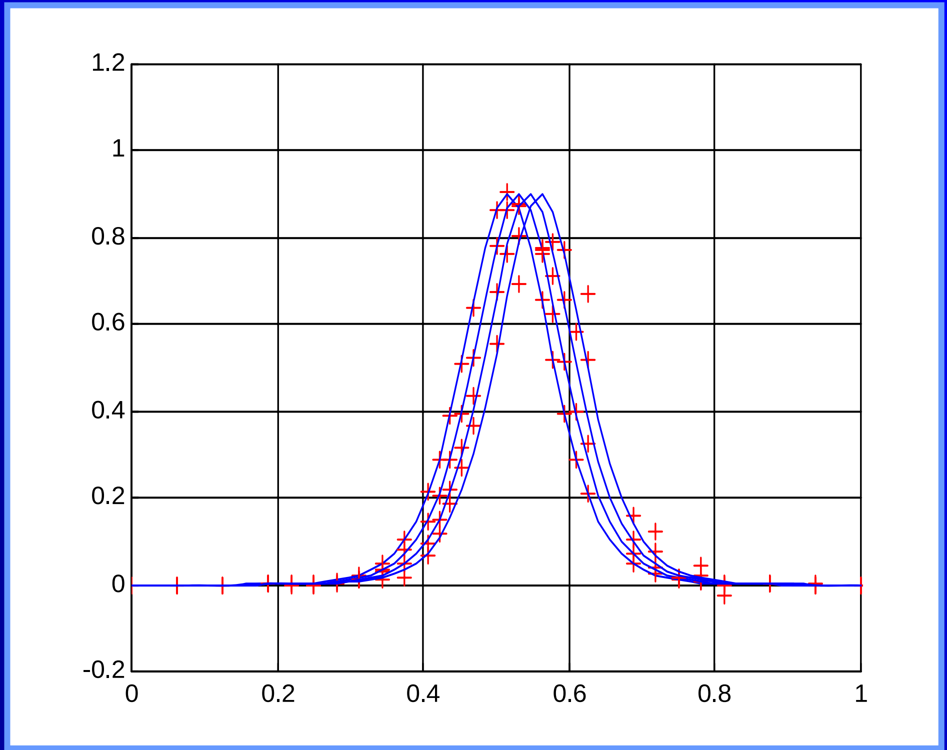


Localización de los coeficientes significativos en los diferentes niveles



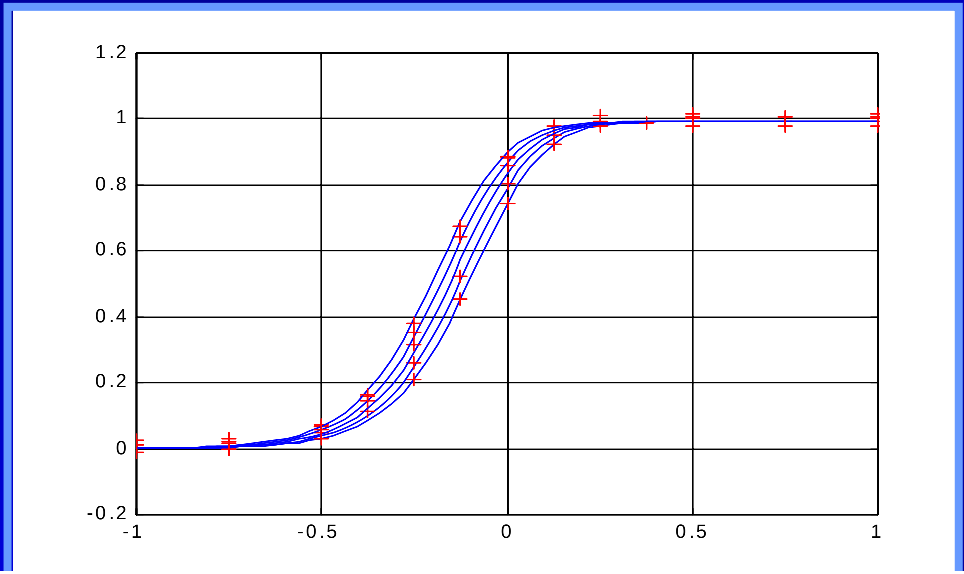
Ecuación KdV :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$



Ecuación KdV-Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \delta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$$



ESTUDIOS DINÁMICOS:

Como es usual en la búsqueda soluciones de tipo ondas solitarias, se considera una forma especítica para la solución de *u* en la ecuación KdV :

$$u(x,t) = U(x - Vt)$$

Sustituyendo en la ecuación KdV e integrando :

$$-VU + \frac{\mu}{2}U^2 + \varepsilon U''' = C$$

Que es equivalente a un sistema de EDOs de primer orden :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{C}{\varepsilon} + \frac{V}{\varepsilon}x - \frac{\mu}{2\varepsilon}x^2 \end{aligned}}$$

Este es un sistema Hamiltoniano cuya primera integral es :

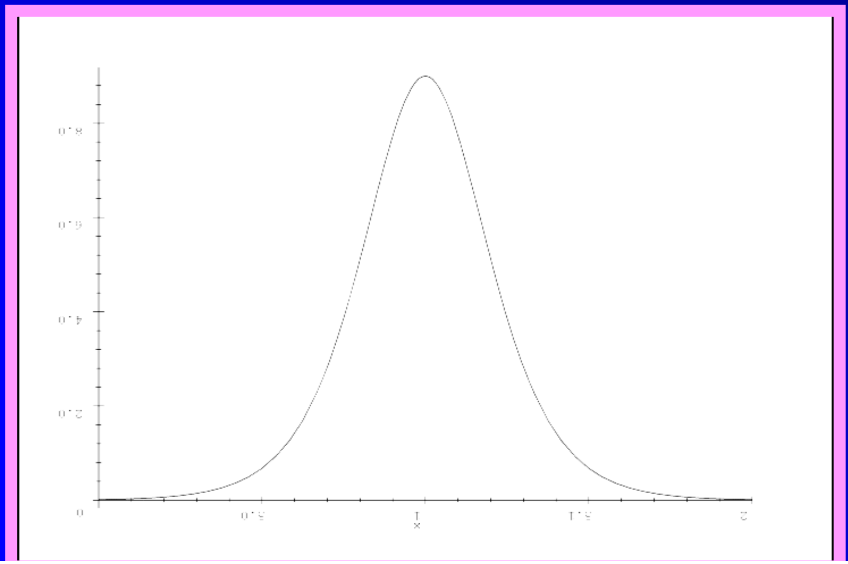
$$\boxed{H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{C}{\varepsilon}x - \frac{V}{2\varepsilon}x^2 - \frac{\mu}{6\varepsilon}x^3}$$

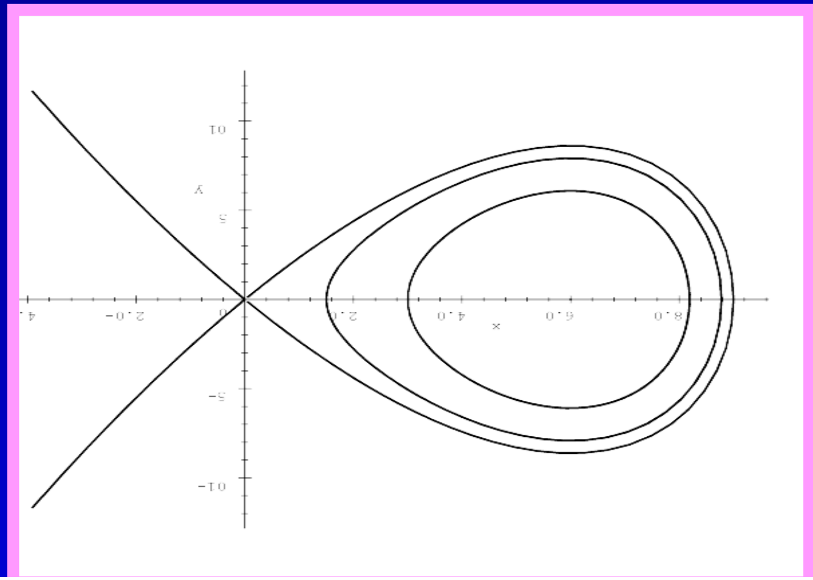
Conclusiones sobre el comportamiento dinámico

Se buscan ondas solitarias que se mueven de cero hacia el infinito, y lo mismo sus derivadas, lo que significa que ambos conjuntos límites de las órbitas deben ser el punto fijo (0,0).

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{C}{\varepsilon}x - \frac{V}{2\varepsilon}x^2 - \frac{\mu}{6\varepsilon}x^3$$

- **Si $C = 0$, los puntos fijos son (0,0), ($2V/m$,0), para $V > 0$, el primero en un *saddle*, y el segundo es un centro.**
- **La existencia de la órbita homoclínica (solución tipo -soliton) puede deducirse de $H(x,y)$ y se corresponde con la componente acotada del contorno de nivel cero de $H(x,y)$.**



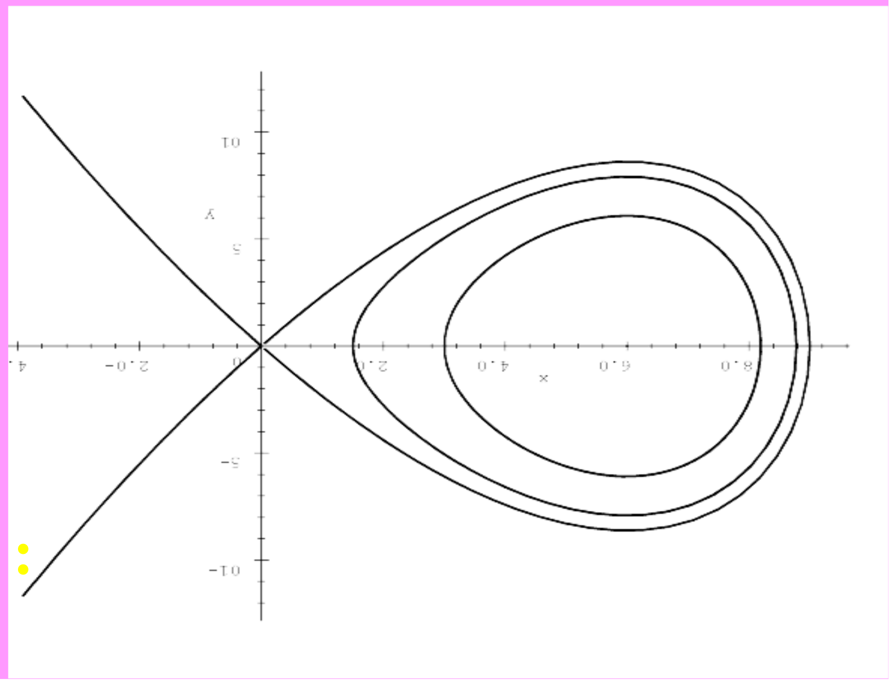


•*Si V* < 0 entoces (0,0) es un centro y ningula órbita homoclínica va hacia (0,0), lo que significa que no se pueden obtener soluciones de tipo ondas solitaria que se anulen en $\pm\infty$ y que se muevan hacia la izquierda.

•Si $C \neq 0$ no hay solitones que se anulen en $\pm\infty$, pero sí hay órbitas periódicas y también otra órbitas homoclínicas.

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{C}{\varepsilon}x - \frac{V}{2\varepsilon}x^2 - \frac{\mu}{6\varepsilon}x^3$$

Diagrama de Fase de la ecuación KdV :



En el caso de la ecuación NLS, solamente nos ocupa el valor absoluto de la solución. Buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t) = A(x - Vt)e^{i(\phi(x-Vt)+\alpha t)}, \quad A(x-Vt) \geq 0, \quad V \neq 0.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación NLS y usando la parte real y la parte imaginaria se obtiene final,ente una ecuación que invlucra sól a *A*:

$$A'' = \frac{C^2}{4A^3} + \left(\alpha - \frac{V^2}{4}\right)A - \nu A^3$$

Que es equivalente al sistema de EDOs de primer orden :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{C^2}{4x^3} + \left(\alpha - \frac{V^2}{4}\right)x - \nu x^3 \end{aligned}}$$

Y que es el sistme Hamiltoniano cuy primera integral es:

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{C}{8x^2} - \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad a^2 = 2\left(\alpha - \frac{V^2}{4}\right)$$

<u>Conclusiones sobre el comportamiento dinámico.</u>

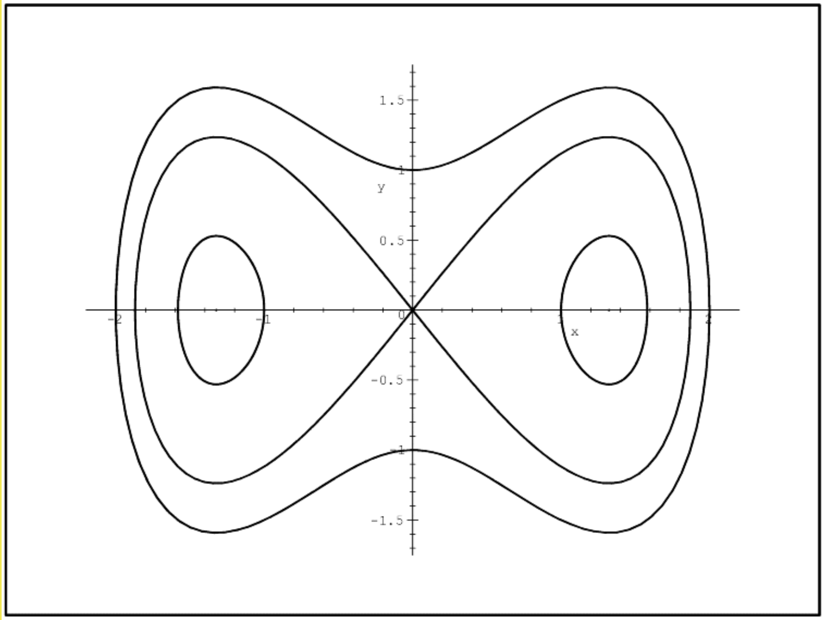
- **Nuevamente buscamos ondas solitarias que tieden a cero en el infinito, así como sus derivadas. Esto significa que ambos conjutnos límites de la órbita deben ser el pnto fijo (0,0).**

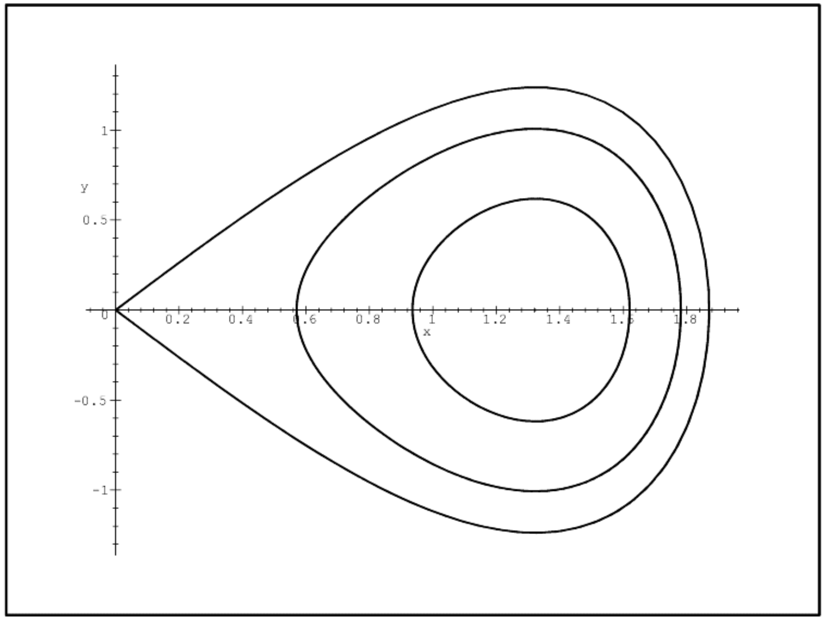
$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{C}{8x^2}-\frac{1}{4}a^2x^2+\frac{1}{4}x^4,\quad a^2=2\left(\alpha-\frac{V^2}{4}\right)$$

•Si *C* = 0 los puntos fijos son (0,0), ($a^2/2n$,0), ($-a^2/2n$,0), para *V* > 0 , el primero es un saddle, los otros son centros.

• En el contorno de nivel cero de *H*(*x*,*y*), yacen dos órbitas homoclínicas, pero puesto que Two homoclinic orbits lie in the *A* > 0, y debido a que *u* es el módulo de la función de onda, entocnes solamente el semi plano derecho contiene soluciones significativas.

Diagrama de Fase de la ecuación NLS :





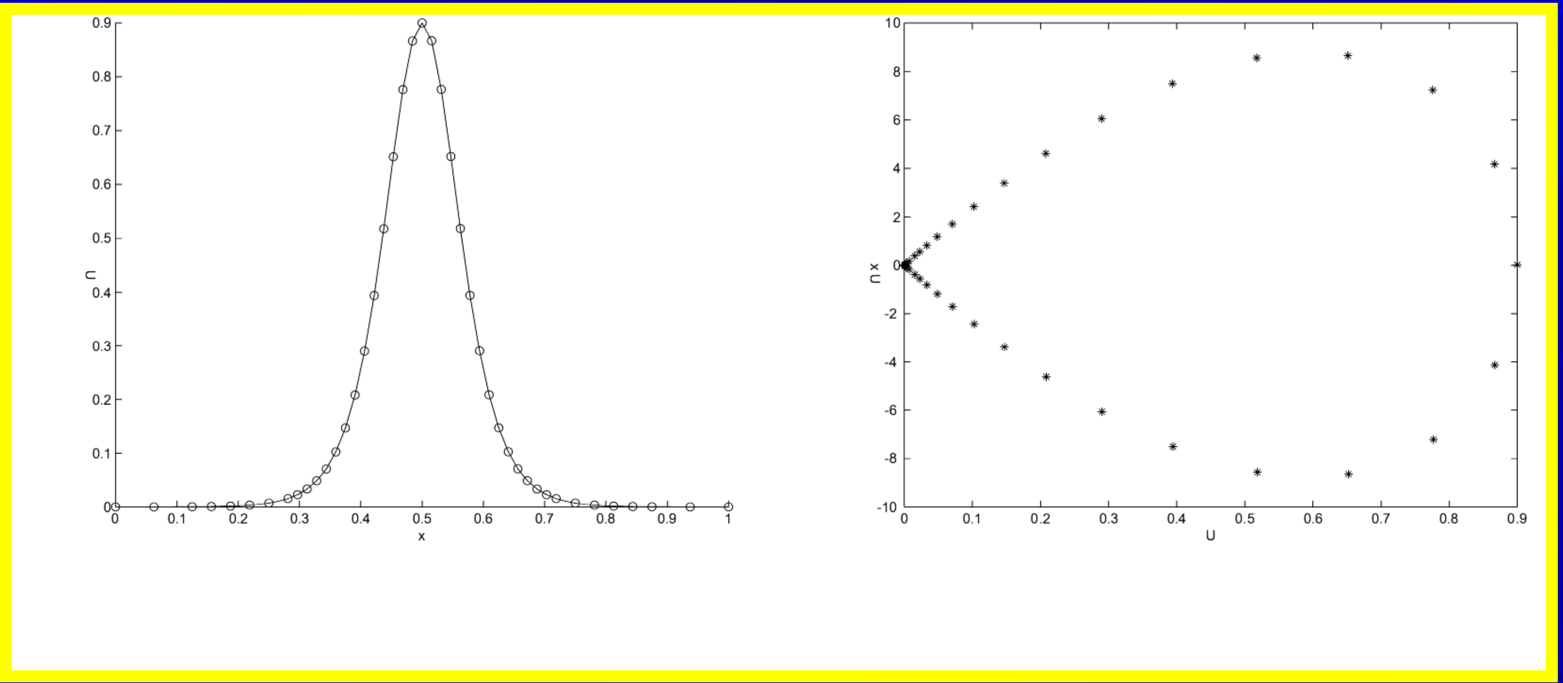
TESTS NUMÉRICOS

Test 1: KdV

$$u_t + \mu u u_x + \varepsilon u_{xxx} = 0$$

Los datos son: $\mu = 1$, $\varepsilon = 0.000484$ y la solución exacta es :

$$u(x,t) = 3c\cosh^{-2}(kx - kct + d), \quad c = 0.3, \quad k = \sqrt{\frac{c}{4\varepsilon}}, \quad d = -k$$



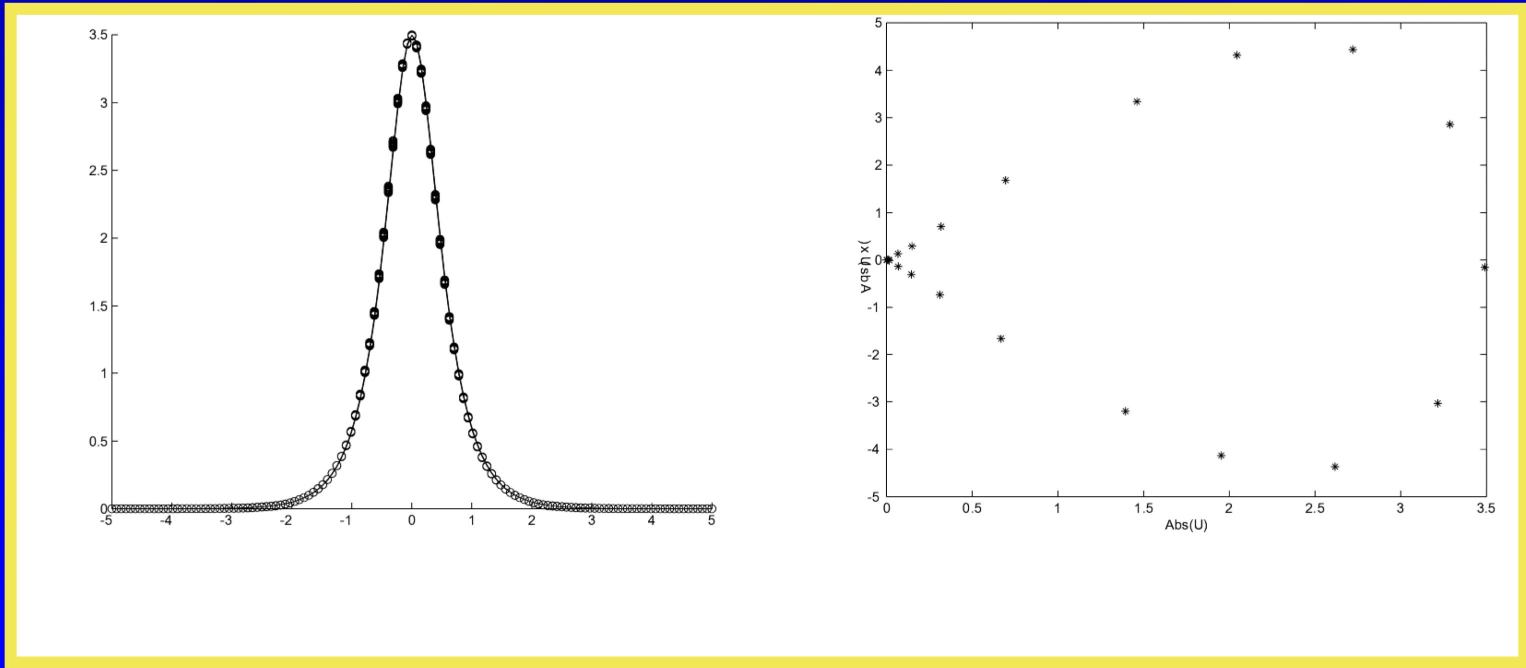
Test 2: NLS con $\nu = 1$.

$$iu_t + u_{xx} + \nu u|u|^2 = 0$$

Los datos son : $\alpha = 2$, $a = 2(\alpha - V^2/4)$, $V = 1$.

La solución exacta es:

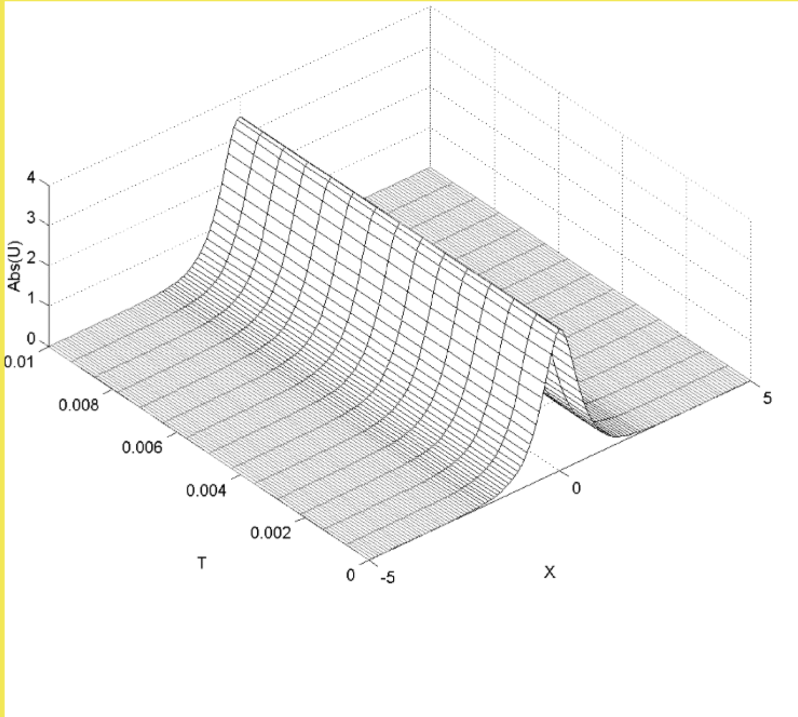
$$u(x,t) = a\,\mathrm{sech}\left(\frac{a(x-Vt)}{\sqrt{2}}\right)\exp i\left(\frac{V(x-Vt)}{2} + \alpha t\right)$$

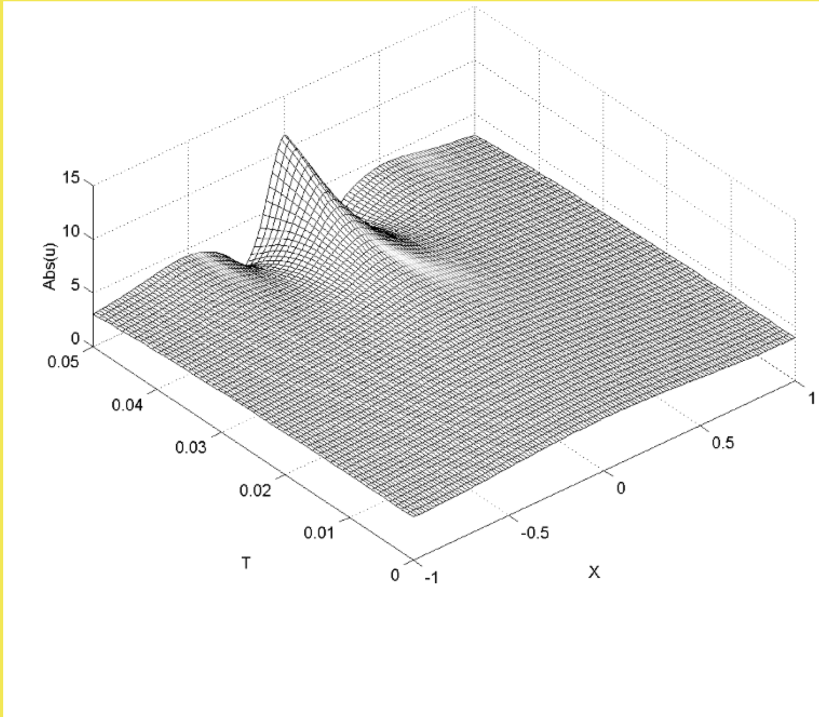


Las soluciones numéricas muestran total coincidencia con el comportamiento dinámico de las ONDAS SOLITARIAS .

Test 3: NLS con $\nu = 2$. La solución exacta es desconocida y la condición inicial es :

$$u(x,0) = \pi\sqrt{2}(1 + 0.1\cos \pi x)$$





Sobre el Método de líneas + Wavelets

- La transformada wavelet sparse es una técnica competitiva para resolver EDPs no lineales, usando una pequeña cantidad de nodos en una malla adaptativa y que captura muy bien los shocks u otras discontinudiades de la solución.
- La aproximación de las derivadas u_x or u_{xxx} con el mismo orden de aproximación es un resultado mejor al presentado por Holmstrom, 1996.
- Las diferentes irrefularidades de la solución, como regiones no suaves, solitones, capas límites, shocks, son capturadas eficientemente con el as transformada wavelet sparse, combinada con el código ode23s.m de Matlab.
- Ya se cuenta con otras soluciones en 2 D para modelos tipo “shallow water” para simulaciones de “moving front”, como puede ser un frente frío, etc.).

Conclusiones

- Los resultados presentados ilustran el comportamiento complejo de las soluciones de algunas EDPs no lineales, en las que, encontrar técnicas numéricas apropiadas es todavía un reto.
- La utilización de las funciones wavelets abre un campo importante de posibilidades para el desarrollo de algoritmos numéricos eficientes.
- Usando estas técnicas se pueden obtener soluciones y hacer estudios de la dinámica de las mismas, con valores de los parámetros que los métodos clásicos o softwares estándares como MAPLE o MATLAB no lo permiten.

Gracias!