

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS REAL

ANTONIO TINEO CARLOS UZCÁTEGUI

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes

Versión: Marzo 2006 ¹

¹Esta es una versión no terminada de este libro. Los comentarios son bienvenidos; si desea hacer alguno, por favor escríbale al segundo autor a la dirección: uzca@ula.ve.

Índice general

1. Conjuntos y Funciones	1
1.1. Conjuntos.	1
1.2. Funciones.	4
1.3. Relaciones.	9
2. Sistemas Numéricos	11
2.1. Leyes de composición.	11
2.2. Cuerpos ordenados	13
2.3. Los números naturales	15
2.4. Los números enteros y los números racionales	18
2.5. Los números reales y el axioma de completitud	20
2.6. Propiedades del supremo y del ínfimo	23
2.7. La recta extendida.	27
2.8. Valor absoluto.	28
2.9. Un ejemplo de un cuerpo ordenado no arquimediano.	30
3. Definiciones Recursivas y Conjuntos Infinitos	33
3.1. Definiciones por recursión	33
3.2. Potenciación y radicación	38
3.3. Equipotencia	40
3.4. Numerabilidad.	43
3.5. \mathbb{R} no es numerable.	48
4. Sucesiones y Series	51
4.1. Sucesiones y convergencia de sucesiones.	51
4.2. Operaciones algebraicas entre sucesiones	54
4.3. Propiedades de las sucesiones convergentes.	57
4.4. Sucesiones monótonas.	58
4.5. Límites al infinito	63

4.6. Subsucesiones	65
4.7. Límites superior e inferior	68
4.8. Sucesiones de Cauchy	69
4.9. Series.	71
4.10. Series absolutamente convergentes	73
4.11. Criterios de convergencia de series	74
4.12. Redes.	78
5. Topología de la Recta	83
5.1. Intervalos	83
5.2. Conjuntos abiertos	85
5.3. Conjuntos cerrados y clausura de un conjunto	89
5.4. El teorema de Bolzano-Weierstrass	93
5.5. Conjuntos compactos	96
5.6. Los subgrupos aditivos de \mathbb{R}	100
6. Límites y Continuidad	103
6.1. Límites	103
6.2. Límites laterales y al infinito	107
6.3. Funciones continuas	109
6.4. Funciones continuas definidas sobre compactos y sobre intervalos	113
6.5. Funciones monótonas	117
6.6. Continuidad uniforme	123
6.7. Funciones exponenciales y logarítmicas	127
7. Diferenciación	131
7.1. Definición de la derivada	131
7.2. Algebra de derivadas y la regla de la cadena	135
7.3. Teoremas de valor medio	137
7.4. Derivadas de orden superior	143
7.5. La fórmula de Taylor	146
7.6. Extremos relativos y convexidad	150
7.7. Construcción de una función diferenciable que no es C^1	153
8. Integración	155
8.1. Particiones de un intervalo	155
8.2. La definición de la integral de Riemann	158
8.3. Propiedades básicas de la integral de Riemann.	164

8.4. El teorema fundamental del cálculo	170
8.5. Integrabilidad y continuidad.	175
8.6. Integrales impropias.	179
8.7. Una definición alternativa de la integral de Riemann	184
9. Sucesiones de Funciones	187
9.1. Convergencia puntual y uniforme	187
9.2. Intercambio de límites con derivadas	190
9.3. Intercambio de límites con integrales	193
9.4. Series de funciones	194
9.5. Series de potencias	196
9.6. Las funciones trigonométricas	201
9.7. Una función continua que no es diferenciable en ningún punto	203
9.8. La integral de Riemann-Stieljes	205

Capítulo 1

Conjuntos y Funciones

Además de fijar alguna terminología, referente a la teoría de conjuntos, este capítulo tiene por objeto establecer el concepto fundamental de función y estudiar sus propiedades elementales, a saber: composición de funciones, funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Unas breves palabras serán dichas acerca de las relaciones de orden y de equivalencia.

1.1. Conjuntos.

Cualquier teoría matemática debe tener un punto de partida; es decir, se deben aceptar (sin definición alguna), una serie de *términos primitivos* y ciertas relaciones entre ellos, llamadas *axiomas*. En el caso que nos ocupa, los términos primitivos (que aceptaremos como intuitivos) son aquellos de *conjunto*, *elemento* y *pertenencia*. A continuación mencionaremos algunos de los axiomas de la teoría de conjuntos (el lector interesado puede consultar [6] donde encontrará una presentación más completa de esos axiomas).

En general, se usarán letras mayúsculas A, B, \dots, X, Y, \dots para denotar conjuntos. Los elementos de un conjunto serán denotados generalmente por letras minúsculas tanto del alfabeto griego como latino. Dados un elemento x y un conjunto A pondremos $x \in A$ (léase: “ x pertenece a A ”) para indicar que x es un elemento de A . En caso contrario se utiliza el símbolo $x \notin A$, que se lee: “ x no pertenece a A ”.

Sean A y B conjuntos. El símbolo $A = B$ (léase: “ A igual a B ”) se usará para indicar que A y B son el mismo conjunto. En caso contrario, usaremos el símbolo $A \neq B$ que se lee: “ A distinto (o diferente) de B ”. Uno de los axiomas de la teoría de conjuntos dice que:

$A = B$ si y sólo si A y B poseen los mismos elementos.

Sean A, B conjuntos. Diremos que A está **contenido** en B o que A es un **subconjunto** de B , denotado $A \subset B$, si todo elemento de A es elemento de B . Si $A \subset B$ también pondremos $B \supset A$, que se lee: “ B contiene a A ”. Si $A \subset B$ y $A \neq B$ diremos que A es un **subconjunto propio** de B . Note que cualesquiera sean los conjuntos A, B, C , se tiene:

- i) $A \subset A$.
- ii) $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.
- iii) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Sea A un conjunto y sea $P(x)$ una oración que tiene a x como sujeto, esto es, P describe una propiedad. El *axioma de separación* informalmente dice que:

Los elementos x de A para los cuales $P(x)$ es verdadera, es un conjunto.

Ese conjunto será denotado por $\{x \in A : P(x)\}$. El símbolo $\{x \in A : \dots\}$ se lee: “El conjunto de los x en A tales que \dots ”. A fin de aclarar un poco más el axioma anterior daremos a continuación algunos ejemplos.

- 1) **El conjunto vacío.** En el capítulo siguiente admitiremos, como un axioma más, la existencia del conjunto de los números reales. En particular, tendremos la existencia de al menos un conjunto A . Consideremos ahora la oración $P(x) = “x$ no pertenece a $A”$. Por el axioma de separación se tiene un conjunto definido por $\{x \in A : x \notin A\}$ que denotaremos por \emptyset y que llamaremos **conjunto vacío**. Note que \emptyset es el único conjunto que no tiene elementos. Note también que para cualquier conjunto X se tiene $\emptyset \subset X$ (porque no hay elementos en \emptyset que no pertenezcan a X).
- 2) **Conjunto singular.** Sea A un conjunto y sea $a \in A$. Considerando la oración “ x es igual a a ” obtenemos el conjunto $\{x \in A : x = a\}$ que se denota por $\{a\}$ y se llama **el conjunto singular de a** . Note que $\{a\}$ posee a a como único elemento.
- 3) **Intersección de conjuntos.** Sean A y B conjuntos y consideremos la oración $P(x) = “x$ pertenece a $B”$. Entonces $\{x \in A : x \in B\}$ es un conjunto que se denota por $A \cap B$ y que se llama la **intersección** de A con B . Cuando $A \cap B = \emptyset$ decimos que A y B son **disjuntos**.
- 4) **Diferencia de conjuntos.** Sean A y B conjuntos. La **diferencia** $A \setminus B$ se define como $\{x \in A : x \notin B\}$. Si $B \subset A$, el conjunto $A \setminus B$ se llama el **complemento de B respecto a A** y se denota también por B^c , si ello no acarrea confusión.

Sean A y B conjuntos. El *axioma de la unión* dice que:

Existe un (único) conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos que están en A o que están en B .

Dicho conjunto se denota por $A \cup B$ y se llama la **unión** de A con B . En realidad, el axioma de las unión dice que si \mathcal{P} es un conjunto y cada elemento de \mathcal{P} es a su vez un conjunto, entonces existe un único conjunto A tal que $x \in A$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{P}$. Sean x, y elementos de un conjunto A . El conjunto $\{x\} \cup \{y\}$ se denotará por $\{x, y\}$.

Un axioma adicional de la teoría de conjuntos (llamado el *axioma del conjunto potencia*) dice que:

Si A es un conjunto, entonces hay un conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A .

Este conjunto lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$ y lo llamamos **el conjunto de partes de A** o conjunto potencia.

Ejercicios.

1. Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que:
 - a) $A \cap B = B \cap A$.
 - b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, lo que permite escribir $A \cap B \cap C$ en lugar de $A \cap (B \cap C)$ o de $(A \cap B) \cap C$.
 - c) $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$.
 - d) Si $A \subset B$, entonces $A \cap C \subset B \cap C$.
2. Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que
 - a) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
 - b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - c) $A \cup B \subset A$ si y sólo si $B \subset A$.
 - d) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
3. Sea A un conjunto. Para $X \subset A$ denotaremos con X^c el complemento de X en A . Pruebe que dados $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que:
 - a) $(X^c)^c = X$.
 - b) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.
 - c) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.
 - d) $X \subset Y$ si y sólo si $X^c \supset Y^c$.

4. Pruebe que no existe ningún conjunto U que contenga a cualquier otro conjunto. *Ayuda.* Suponga que tal U existe y defina $V = \{A \in \mathcal{P}(U) : A \notin A\}$. Ya que U contiene cualquier conjunto, debe tenerse que $V \subset U$. Observe ahora que cualquiera de las dos siguientes posibilidades $V \in V$, $V \notin V$, lleva a contradicción.

1.2. Funciones.

En esta sección A y B denotan conjuntos. Dados $x \in A$, $y \in B$ definimos el **par ordenado** (x, y) como el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Dejamos como un ejercicio al lector mostrar la siguiente propiedad importante de los pares ordenados: $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

El **producto cartesiano** de A por B , denotado $A \times B$, se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$. (Note que (x, y) es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$).

Una **función o aplicación de A en B** es una terna ordenada (A, f, B) donde f es un subconjunto de $A \times B$ con la siguiente propiedad:

Para cada $x \in A$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Este único elemento y se denota por $f(x)$ y se llama **la imagen de x por f** . El conjunto A es llamado el **dominio de f** y el conjunto $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ se conoce como el **rango de f** . El conjunto f se conoce también como el **gráfico de la función** (A, f, B) . En la casi totalidad de los casos y cuando esto no cause confusión, diremos “la función f ”, en vez de la función (A, f, B) .

En la literatura corriente, una función (A, f, B) se denota por el símbolo $f : A \rightarrow B$ y se le piensa como una ley o regla que a cada elemento $x \in A$ asocia un único elemento $f(x)$ de B .

Ejemplos 1.2.1. a) Sean A, B conjuntos no vacíos y fijemos $b \in B$. Entonces $(A, f, B) := (A, A \times \{b\}, B)$ es una función de A en B tal que $f(x) = b$, para todo $x \in A$. Esta función es llamada **función constante (de valor b)**.

b) Asociada con cada conjunto no vacío A se tiene una aplicación $id_A : A \rightarrow A$ definida por $id_A(x) = x$ para cada $x \in A$. Dicha aplicación se denomina **identidad de A** y como subconjunto de $A \times A$ no es otra cosa que $\{(x, y) \in A \times A : x = y\}$.

Enunciaremos a continuación el **axioma de elección o escogencia**; uno de los más famosos de la teoría de conjuntos.

Sea X un conjunto y sea \mathcal{P} un subconjunto de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces existe una función $S : \mathcal{P} \rightarrow X$ tal que $S(Z) \in Z$ para cada $Z \in \mathcal{P}$.

Informalmente hablando, este axioma dice que dada cualquier familia \mathcal{P} de subconjuntos no vacíos de X , es posible escoger un elemento en cada uno de los miembros de esa familia. Cuando

la familia en cuestión es “pequeña” esto parece obvio. Sin embargo no es nada claro cuando la “familia es muy grande”.

Sean A, B, C conjuntos. Dadas aplicaciones $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, se define **la composición o compuesta de f con g** como la función $g \circ f : A \rightarrow C$ dada por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposición 1.2.2. *Dada una aplicación $f : A \rightarrow B$ se tiene $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.*

El resultado que sigue dice que “la composición de funciones es asociativa”

Proposición 1.2.3. *Sean A, B, C, D conjuntos y sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ funciones. Entonces $(h \circ g) \circ f \equiv h \circ (g \circ f)$.*

Demostración: De la definición de composición de funciones se tiene:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

De manera análoga, $[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, lo cual termina la prueba. ■

Estudiaremos ahora algunos tipos particulares de funciones.

Definición 1.2.4. *Una función $f : A \rightarrow B$ se dice **biyectiva** si existe una función $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f \equiv id_A$ y $f \circ g \equiv id_B$. Note que, en este caso, g también es biyectiva.*

Proposición 1.2.5. *Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva. Entonces existe una única aplicación $g : B \rightarrow A$ satisfaciendo las condiciones de la Definición 1.2.4.*

Demostración: Supongamos que $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ son funciones que satisfacen las condiciones de la Definición 1.2.4. Entonces $g_1 \circ f = id_A$ y $f \circ g_2 = id_B$, y usando las dos proposiciones anteriores obtenemos

$$g_2 = id_A \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_B = g_1.$$

■

Observaciones 1.2.6. a) Sea $f : A \rightarrow B$ una biyección. La única aplicación $g : B \rightarrow A$ dada por la Definición 1.2.4 y la proposición 1.2.5 se llama **la inversa** de f y se denota por f^{-1} . De la definición 1.2.4 resulta que f^{-1} es una biyección cuya inversa es f . Es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) La función id_A es una biyección cuya inversa es ella misma.

Proposición 1.2.7. *Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones biyectivas, entonces la composición $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Demostración: De las proposiciones 1.2.2-1.2.3 y de la Definición 1.2.4 se tiene:

$$\begin{aligned} [(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] &= g \circ [f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] = g \circ [(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}] \\ &= g \circ [id_B \circ g^{-1}] = g \circ g^{-1} = id_C. \end{aligned}$$

De manera semejante, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_A$, lo cual completa la prueba. ■

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** si para todo par de elementos distintos x, x' en A se cumple que $f(x) \neq f(x')$. Note que si f es inyectiva e $y \in f(A)$, entonces existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Proposición 1.2.8. *Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si existe una función $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$.*

Demostración: Supongamos primero que existe una función $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$. Si $f(x) = f(x')$, entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$ de donde, $id_A(x) = id_A(x')$. De aquí, $x = x'$, lo cual prueba que f es inyectiva.

Supongamos ahora que f es inyectiva y fijemos $a_0 \in A$. Definiremos $g : B \rightarrow A$ como sigue:

$$g(y) = a_0 \quad \text{si } y \notin f(A).$$

$$g(y) = x \quad \text{si } y \in f(A) \text{ e } y = f(x).$$

De la definición de g se tiene $g(f(x)) = x$, cualquiera sea $x \in A$, de modo que $g \circ f = id_A$. ■

Sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Dado $b \in B$ definimos la **contraimagen** de b por f como el conjunto $f^{-1}(b) = \{x \in A : f(x) = b\}$. (Note que el símbolo $f^{-1}(b)$ está definido aunque f no sea biyectiva). Cuando $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, para cada $b \in B$, decimos que f es **sobre ó sobreyectiva**. Es decir, f es sobreyectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. En otras palabras, f es sobreyectiva si y sólo si $f(A) = B$.

Proposición 1.2.9. *Una aplicación $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = id_B$.*

Demostración: Supongamos primero que existe $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = id_B$. Fijemos $b \in B$ y pongamos $a = g(b)$. Entonces, $f(a) = f \circ g(b) = id_B(b) = b$, lo cual muestra que f es sobreyectiva.

Supongamos ahora que f es sobreyectiva. Por el axioma de elección existe una función $S : \{f^{-1}(b) : b \in B\} \rightarrow A$ tal que $S(f^{-1}(b)) \in f^{-1}(b)$ para cada $b \in B$. Definamos ahora $g : B \rightarrow A$ mediante $g(b) = S(f^{-1}(b))$. Ya que $g(b) \in f^{-1}(b)$, se sigue de la definición de contraimagen, que $f(g(b)) = b = id_B(b)$. ■

Proposición 1.2.10. *Una aplicación $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.*

Demostración: Si f es biyectiva existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, y de las proposiciones 1.2.8-1.2.9, f es inyectiva y sobreyectiva.

Recíprocamente, si f es inyectiva y sobreyectiva, entonces por las proposiciones 1.2.8 y 1.2.9 existen funciones $g, h : B \rightarrow A$ tales que $g \circ f = id_A$ y $f \circ h = id_B$. Usando el argumento de la proposición 1.2.5 se prueba (hacerlo) que $h = g$ y en consecuencia, g satisface las condiciones de la Definición 1.2.4. Luego, f es biyectiva. ■

Dada una función $f : A \rightarrow B$ y subconjuntos $X \subset A, Y \subset B$, definimos $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$. El primero de ellos se llama la **imagen de X por f** , mientras que el segundo se conoce como la **contraimagen de Y por f** .

Sean A e I conjuntos. Toda aplicación $F : I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ es llamada una **familia de subconjuntos de A** . La notación usual para una tal familia es $\{X_i\}_{i \in I}$, donde $X_i = F(i)$. Se dice también que la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ esta **indizada** por I .

Se define la **unión de la familia** $\{X_i\}_{i \in I}$, denotada $\bigcup_I X_i$ (o $\bigcup_{i \in I} X_i$), como el conjunto de aquellos elementos $x \in A$ tales que $x \in X_i$ para algún $i \in I$. Es decir, $\bigcup_I X_i = \{x \in A : x \in X_i \text{ para algún } i \in I\}$. Si $I \neq \emptyset$, se define la **intersección** de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$, denotada $\bigcap_I X_i$, como el conjunto de los elementos de A que son comunes a todos los X_i . Es decir, $\bigcap_I X_i = \{x \in A : x \in X_i, \forall i \in I\}$. El símbolo \forall se lee: "para todo".

Cuando I es vacío, se define $\bigcup_{\emptyset} X_i = \emptyset$. Sin embargo, no puede definirse el símbolo $\bigcap_{\emptyset} X_i$, porque esto daría un conjunto U que contiene cualquier elemento x . Por el ejercicio 4 de la sección 1.1, esto resultaría imposible.

Se dice que la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es **disjunta** si $X_i \cap X_j = \emptyset$, cuando $i \neq j$.

Un subconjunto \mathcal{A} de $\mathcal{P}(A)$ también puede ser considerado como una familia de subconjuntos de A ; a través de la aplicación de inclusión $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(A)$; $F(X) = X$.

Ejercicios.

1. Sean $a, x \in A$ y $b, y \in B$. Pruebe que $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.
2. Defina la **terna ordenada** (x, y, z) como el conjunto

$$\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

y pruebe un resultado análogo al anterior. Defina también la noción de cuaterna ordenada.

3. Sean A, B, C, D conjuntos. Pruebe que dos funciones $(A, f, B), (C, g, D)$ son iguales si y sólo si $A = C, B = D$ y $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$. En este caso también se suele escribir $f \equiv g$ y se dice que f y g **son idénticas**.

4. Sea (A, f, B) una función y sea X un subconjunto de A . Pruebe que $(A, f \cap X \times B, B)$ es una función que denotaremos por $f|_X$ y que llamaremos **la restricción de f a X** .
5. Pruebe que dado un subconjunto X de A y una función $g : X \rightarrow B$, existe una función $f : A \rightarrow B$ tal que $f|_X = g$. Esta función f es llamada **una extensión o prolongamiento de g** .
6. Sean a, b elementos de un conjunto A . Muestre que existe una biyección $f : A \setminus \{a\} \rightarrow A \setminus \{b\}$.
7. Pruebe que la composición de funciones inyectivas (resp. sobreyectivas) es inyectiva (resp. sobreyectiva).
8. Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva (resp. sobreyectiva). Pruebe que dados $a \in A, b \in B$, existe una función inyectiva (resp. sobreyectiva) de $A \setminus \{a\}$ en $B \setminus \{b\}$.
9. Dada una función $f : A \rightarrow B$, pruebe que la función $g : A \rightarrow f(A)$, definida por $g(x) = f(x)$, es sobreyectiva. Concluya que g es biyectiva si y sólo si f es inyectiva.
10. Sea B un subconjunto de un conjunto A . Construya una función sobreyectiva de A en B .
11. Sea $f : A \rightarrow B$ una función sobreyectiva y sea $b \in B$. Pruebe que la función $g : A \setminus f^{-1}(b) \rightarrow B \setminus \{b\}$ definida por $g(x) = f(x)$ es sobreyectiva.
12. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Dados $X_1, X_2 \subset A$ e $Y_1, Y_2 \subset B$ pruebe que:
 - a) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
 - b) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
 - c) $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.
 - d) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
 - e) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$. Dar un ejemplo donde la contención sea estricta.
13. (Leyes de De Morgan). Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de A . Pruebe que
 - a) $(\bigcup_i X_i)^c = \bigcap_i X_i^c$.
 - b) $(\bigcap_i X_i)^c = \bigcup_i X_i^c$.

1.3. Relaciones.

Los temas tratados en este libro no requieren del uso explícito de la noción de relación. Sin embargo, las relaciones de orden y de equivalencia son tan importantes en matemáticas, que una mención a ellas se hace necesaria.

En lo que resta del capítulo, A y B denotan conjuntos. Todo subconjunto $R \subset A \times B$ será llamado una **relación** (entre A y B). Si $(x, y) \in R$ decimos que x **está en la relación** R **con** y y escribimos $x R y$.

Las relaciones más importantes en matemática (aparte de la noción de función) ocurren cuando $A = B$. En este caso una relación $R \subset A \times B$ se llamará **interna** en A .

Sea R una relación interna en A . Diremos que:

- 1) R es **reflexiva**, si $x R x$ para cada $x \in A$.
- 2) R es **transitiva**, si las condiciones $x R y$, $y R z$ implican $x R z$.
- 3) R es **simétrica** si la condición $x R y$ implica $y R x$.
- 4) R es **antisimétrica** si las condiciones $x R y$ e $y R x$ implican $x = y$.

Un **orden** (u **orden parcial**) en A es una relación interna \leq en A la cual es reflexiva antisimétrica y transitiva. Un **conjunto ordenado** es un par (A, \leq) donde A es un conjunto y \leq es un orden en A .

Ejemplo 1.3.1. Sea X un conjunto. Entonces la relación de contención $Y \subset Z; Y, Z \in \mathcal{P}(X)$; define una relación de orden en $\mathcal{P}(X)$. Así, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un conjunto ordenado.

Una relación interna \simeq en A se dice de **equivalencia**, si esa relación es reflexiva, simétrica y transitiva. En lo que resta de la sección, \simeq denotará una relación de equivalencia en A . Diremos que $\alpha \subset A$ es **una clase de A según \simeq** (o simplemente una clase de equivalencia) si:

- i) $\alpha \neq \emptyset$.
- ii) $x \simeq y$ cualesquiera sean $x, y \in \alpha$.
- iii) $y \in \alpha$ si $x \simeq y$ y $x \in \alpha$.

El conjunto $\{\alpha \in \mathcal{P}(A) : \alpha \text{ es una clase de } A \text{ según } \simeq\}$ se llama el **conjunto cociente** de A por \simeq y se denota por A/\simeq .

Ejercicios.

1. Sea (A, \leq) un conjunto ordenado. Diremos que $a \in A$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de un subconjunto B de A si $x \leq a$ (resp. $x \geq a$) para cada $x \in B$. En este caso se dice que B está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) en A . Se dice que B **tiene supremo en A** si “ B posee una cota superior mínima”; es decir, si existe una cota superior $c \in A$ de B tal que $c \leq a$ para cualquier otra cota superior a de B . Pruebe que

existe a lo sumo un elemento $c \in A$ con esta propiedad. Cuando tal c exista, será llamado **el supremo** de B en A y será denotado por $\sup_A(B)$ (ó por $\sup(B)$, si no hay peligro de confusión).

2. Sea X un conjunto. Pruebe que todo subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ posee supremo con respecto al orden dado por contención.
3. Sea (A, \leq) un conjunto ordenado y suponga que el conjunto $\{a, b\}$ posee supremo en A , cualesquiera sean $a, b \in A$. Defina $a \vee b = \sup(\{a, b\})$ y muestre que $a \vee b = b \vee a$ y $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, cualesquiera sean $a, b, c \in A$.
4. Sean $\alpha, \beta \subset A$ dos clases de A según \simeq . Pruebe que si $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces $\alpha = \beta$. En otras palabras, dos clases de A según \simeq ó son disjuntas ó son iguales.
5. Pruebe que para cada $a \in A$, el conjunto $[a] := \{x \in A : x \simeq a\}$ es una clase de A según \simeq , que llamaremos **la clase de a según \simeq** .
6. Sea $\alpha \subset A$ una clase de A según \simeq . Pruebe que si $a \in \alpha$, entonces $\alpha = [a]$.
7. Por **una división** de A entendemos una familia \mathcal{P} de subconjuntos no vacíos de A , dos a dos disjuntos cuya reunión es A . Pruebe que A/\simeq es una división de A . Recíprocamente, pruebe que si \mathcal{P} es una división de A , entonces $\mathcal{P} = A/\simeq$ para alguna relación de equivalencia \simeq en A .

Capítulo 2

Sistemas Numéricos

El objeto de este capítulo es introducir, de manera axiomática, *el cuerpo de los números reales* y estudiar algunos de sus subconjuntos más importantes, a saber: números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Hay otra forma de introducir los números reales, llamada constructiva. Esta vía comienza con la aceptación de los números naturales y después se construyen sucesivamente, los enteros, los racionales y, finalmente, los números reales. La construcción de los enteros y racionales es sumamente algebraica y no aporta mucho al estudio del análisis matemático. Para la construcción de los números reales, a partir de los racionales, se presentan dos alternativas: Las cortaduras de Dedekind (ver por ejemplo [9]) o las sucesiones de Cauchy. La primera de ellas es un método que también sirve para completar conjuntos ordenados más abstractos (ver por ejemplo [3]). La construcción con sucesiones de Cauchy tiene importancia posterior, como es la completación de un espacio métrico [11, 7]. Sin embargo, debido a las sutilezas y tecnicismos de estos métodos, es preferible, a nuestro criterio, dejarlos para un curso más avanzado.

2.1. Leyes de composición.

En esta sección, A denota un conjunto no vacío. Toda aplicación $*$: $A \times A \rightarrow A$ será llamada **una ley de composición en A** . La imagen de (x, y) mediante tal ley, será denotada por $x * y$ en vez de $*((x, y))$. En lo que resta de esta sección, $*$ denotará una ley de composición en A . Diremos que:

- i) $*$ es **asociativa**, si $x * (y * z) = (x * y) * z$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$.
- ii) $*$ es **conmutativa**, si $x * y = y * x$, cualesquiera sean $x, y \in A$.
- iii) $e \in A$ es **elemento neutro para $*$** , si $x * e = e * x = x$, para cada $x \in A$.

Supongamos que $*$ es una ley de composición en un conjunto A , la cual posee un elemento neutro e . Se dice que $x \in A$ es **simetrizable ó invertible respecto a $*$** si existe $y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$.

Ejemplo 2.1.1. Sea X un conjunto y sea \mathcal{A} el conjunto de todas las funciones $f : X \rightarrow X$, entonces la composición de funciones es una ley de composición en \mathcal{A} . De manera más precisa, se tiene una ley de composición $*$ en \mathcal{A} definida por $f * g = g \circ f$. Note que por la proposición 1.2.2, id_A es el elemento neutro de $*$. Además, por la proposición 1.2.3, $*$ es asociativa. Es más, de la definición 1.2.4, se tiene que los elementos invertibles de \mathcal{A} son las biyecciones de X en si mismo.

Ejemplo 2.1.2. Sea X un conjunto. La unión de conjuntos define una ley de composición $*$ en $\mathcal{P}(X)$. El lector comprobará que $*$ es conmutativa y asociativa. Además, \emptyset es el elemento neutro de esta ley de composición. ¿Qué puede usted decir acerca de la ley de composición dada por $A * B = A \cap B$?

Un **grupo** es un par $(G, *)$, donde $*$ es una ley de composición en un conjunto G , la cual es asociativa, posee un elemento neutro y todo elemento de G es invertible. Si además $*$ es conmutativa, se dice que $(G, *)$ es **conmutativo ó abeliano**. En este caso, la ley $*$ suele denotarse por $+$, el elemento neutro de G por 0 y el simétrico de $x \in G$ por $-x$.

Ejemplo 2.1.3. Sea X un conjunto no vacío y sea G el conjunto de todas las biyecciones de X en si mismo. Entonces (G, \circ) es un grupo, donde \circ es la ley de composición de funciones definida en el ejemplo 2.1.1.

Ejercicios.

1. Pruebe que si $e, e' \in A$ son elementos neutros para $*$ entonces $e = e'$.
2. Suponga que $*$ es asociativa y que posee elemento neutro e . Pruebe que si $x \in A$ es simetrizable entonces existe un único elemento $y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$. Este elemento y será llamado **el simétrico ó inverso de x** y será denotado por x^{-1} . *Ayuda.* Imite la prueba de la proposición 1.2.5.
3. Sea X un conjunto de tres elementos. Pruebe que el grupo G dado en el ejemplo 2.1.3 no es abeliano.
4. Sea $(G, *)$ un grupo y sean x, y, z elementos de G . Pruebe que $(x^{-1})^{-1} = x$ y que $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Muestre que, si $x * y = x * z$, entonces $y = z$. Concluya que, si $x * y = y$, entonces $x = e$ (elemento neutro). Enuncie estos resultados con la notación usada para grupos abelianos.

5. * Dados conjuntos Y, Z se define la **diferencia simétrica** $Y \Delta Z$ como el conjunto $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$. Pruebe que $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ es un grupo abeliano, cualquiera sea el conjunto X . (La asociatividad es la requiere mayor atención).

2.2. Cuerpos ordenados

Un **cuerpo** es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde $+, \cdot$ son leyes de composición en \mathbb{K} llamadas **adición** y **multiplicación** respectivamente, tales que:

- i) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano (cuyo elemento neutro denotamos por 0).
- ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano cuyo elemento neutro denotamos por 1.
- iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, cualesquiera sean $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Observaciones: a) Note que $1 \neq 0$ ya que $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. El simétrico de un elemento $x \in \mathbb{K}$ respecto a $+$ será denotado por $-x$ mientras que el simétrico de $x \neq 0$ respecto a la multiplicación, será denotado por x^{-1} . Así, $x + (-x) = 0$ y $x \cdot x^{-1} = 1$ si $x \neq 0$.

b) El producto $x \cdot y$, de dos elementos en \mathbb{K} , será denotado a menudo por xy . Si además $y \neq 0$, el producto xy^{-1} también será denotado por x/y ó $\frac{x}{y}$.

Un **cuerpo ordenado** es una cuaterna $(\mathbb{K}, +, \cdot, P)$ donde $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo y P es un subconjunto de \mathbb{K} con las siguientes dos propiedades:

O₁) Si $x \in \mathbb{K}$, entonces ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$x \in P, \quad x = 0, \quad -x \in P.$$

O₂) Si $x, y \in P$, entonces $x + y, x \cdot y \in P$.

Observación: Dado un subconjunto A de \mathbb{K} pondremos, en todo lo que sigue,

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Con esta notación, O₁) es equivalente a decir que \mathbb{K} es la unión de $P, \{0\}$ y $-P$ y que estos tres conjuntos son dos a dos disjuntos.

Veamos porque $(\mathbb{K}, +, \cdot, P)$ es un cuerpo *ordenado*. Considere la siguiente relación binaria, denotada por $<$,

$$x < y \text{ si } y - x \in P$$

Extendemos esta relación de la manera siguiente. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ definimos

$$x \leq y, \text{ si } x < y \text{ o } x = y$$

La relación binaria \leq (léase x **menor o igual a** y) es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, es una relación de orden sobre \mathbb{K} (ver ejercicio 10). Usaremos también la notación $y > x$ e $y \geq x$ para significar, respectivamente, $x < y$ y $x \leq y$.

El conjunto P debe pensarse como los elementos “positivos” de \mathbb{K} . Las propiedades $O_1)$ - $O_2)$ se expresan ahora de la siguiente forma:

$P_1)$ Si $x \in \mathbb{K}$ entonces ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades: $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$.

$P_2)$ Si $x, y \in \mathbb{K}$ y $x, y > 0$, entonces $x + y, x \cdot y > 0$.

Es por esta razón que llamamos a $(\mathbb{K}, +, \cdot, P)$ un cuerpo ordenado. Las propiedades más importantes del orden \geq son las siguientes (ver ejercicio 10):

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, \forall z \in \mathbb{K} (x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z)$$

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, \forall z \in P (x \geq y \Rightarrow z \cdot x \geq z \cdot y).$$

En lo que resta de este capítulo $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ denotará un cuerpo ordenado. Es decir, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo y \leq es la relación de orden en \mathbb{K} asociada a un conjunto P que satisface $P_1)$ y $P_2)$. De la propiedad $P_1)$ se tiene que ocurre una y sólo una de las siguientes alternativas:

$$x > y; \quad x = y; \quad x < y.$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de **ley de tricotomía**.

En lo que sigue pondremos $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, etc. Note que $1 > 0$ (ver ejercicio 8), luego $2 = 1 + 1 > 1$, $3 = 2 + 1 > 2$ etc, es decir, $1 < 2 < 3 < 4$ etc. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ pondremos $x - y = x + (-y)$.

Terminaremos esta sección mostrando un resultado que es clave en muchas pruebas del análisis matemático y que será usado repetidas veces en este texto. Es un buen ejercicio para el lector observar durante el desarrollo de este curso la frecuencia con la que se usa este sencillo resultado.

Proposición 2.2.1. *Sea $a \in \mathbb{K}$ y supongamos que $a < \epsilon$, para cada $\epsilon > 0$. Entonces $a \leq 0$.*

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto, entonces de la propiedad $P_1)$, se tiene que $a > 0$. Como $1 < 2$, entonces $1/2 < 1$ (ver ejercicio 9). Luego multiplicando por a ambos lados de la desigualdad obtenemos que $a/2 < a$ (ver ejercicio 5). Pero es fácil ver que $a/2 > 0$ (hacerlo!) y esto contradice nuestra hipótesis. ■

Ejercicios.

Sean $a, b, c \in \mathbb{K}$.

1. Pruebe que $a \cdot 0 = 0$. *Ayuda.* $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$.
2. Pruebe que $(-a) \cdot b = -a \cdot b = a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ y $(-1) \cdot a = -a$.
3. Pruebe que si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.
4. Pruebe que $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.
5. Pruebe que, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Si además $c > 0$, muestre que $a \cdot c < b \cdot c$.
6. Pruebe que $a > 0$ si y sólo si $-a < 0$. De manera similar, $a > 0$ si y sólo si $a^{-1} > 0$.
7. $a \cdot b < 0$ si $a > 0 > b$.
8. Denotaremos $a \cdot a$ por a^2 . Muestre que $a^2 > 0$, si $a \neq 0$. Concluya que $1 > 0$.
9. Pruebe que si $a > b > 0$, entonces $a^{-1} < b^{-1}$. Si, además, $c > d > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot d$.
10. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ defina $x \leq y$, si $x < y$ o si $x = y$. Pruebe que \leq es un orden en \mathbb{K} y que además posee las siguientes propiedades, donde x, y, z denotarán elementos e \mathbb{K} :
 - a) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.
 - b) Si $x \leq y$ y $0 \leq z$, entonces $z \cdot x \leq z \cdot y$.
11. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo y \leq una relación de orden sobre \mathbb{K} . Suponga que \leq es total, es decir, que para todo $x, y \in \mathbb{K}$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$. Suponga también que \leq satisface (a) y (b) del ejercicio anterior. Sea P el conjunto $\{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$. Muestre que $(\mathbb{K}, +, \cdot, P)$ es un cuerpo ordenado.

2.3. Los números naturales

Diremos que un subconjunto I de \mathbb{K} es **inductivo** si

$$I_1) 1 \in I.$$

$$I_2) \text{ Si } x \in I, \text{ entonces } x + 1 \in I.$$

Es claro que \mathbb{K} es inductivo. Además, la intersección de cualquier familia no vacía de subconjuntos inductivos de \mathbb{K} , es un conjunto inductivo (dejamos al lector como ejercicio probar estas afirmaciones). Por consiguiente, la intersección de todos los subconjuntos inductivos de \mathbb{K} está bien definida y es un subconjunto inductivo de \mathbb{K} , que denotaremos por \mathbb{N} y que llamaremos **conjunto de los números naturales o enteros positivos**. Es claro que \mathbb{N} es el más “pequeño” subconjunto inductivo de \mathbb{K} . Es decir,

Teorema 2.3.1. (*Principio de Inducción*). Si $I \subset \mathbb{K}$ es inductivo, entonces $\mathbb{N} \subset I$. En otras palabras, si $I \subset \mathbb{N}$ es inductivo, entonces $I = \mathbb{N}$.

Proposición 2.3.2. a) Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Demostración: a) Supongamos que el resultado es falso. Es decir, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 1$ y $n - 1 \notin \mathbb{N}$. Dejamos al lector verificar que el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ es inductivo (ver ejercicio 3). Pero esto contradice el teorema 2.3.1 y termina la prueba de a). La prueba de b) es consecuencia directa del hecho que el conjunto $\{m \in \mathbb{K} : m \geq 1\}$ es inductivo (ver ejercicio 1) y de la definición de \mathbb{N} . ■

Proposición 2.3.3. Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces: i) $m + n \in \mathbb{N}$, ii) $m \cdot n \in \mathbb{N}$ y iii) $m - n \in \mathbb{N}$ si $m > n$.

Demostración: i) Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. Ya que \mathbb{N} es inductivo se tiene que $m + 1 \in \mathbb{N}$, así, $1 \in A$. Por otra parte, si $x \in A$, entonces $m + x \in \mathbb{N}$ y como \mathbb{N} es inductivo, $(m + x) + 1 \in \mathbb{N}$. Pero, $(m + x) + 1 = m + (x + 1)$, de donde, $x + 1 \in A$. Esto prueba que A es inductivo y por el 2.3.1, $\mathbb{N} \subset A$. Pero, por definición, $A \subset \mathbb{N}$, y así, $A = \mathbb{N}$. Es decir, $m + n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las pruebas de ii) y iii) serán dejadas al lector, quien mostrará que cada uno de los siguientes conjuntos es inductivo: $\{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$, $\{n \in \mathbb{N} : \text{si } m \in \mathbb{N} \text{ y } m > n, \text{ entonces } m - n \in \mathbb{N}\}$. ■

Proposición 2.3.4. Si $n, x \in \mathbb{N}$ y $n < x$, entonces $n + 1 \leq x$ (en otras palabras, si $n \in \mathbb{N}$, entonces entre n y $n + 1$ no hay otro natural).

Demostración: Por la proposición 2.3.3, $x - n \in \mathbb{N}$ y por la parte b) de la proposición 2.3.2, $x - n \geq 1$. De aquí, $x \geq n + 1$. ■

Teorema 2.3.5. Todo subconjunto no vacío A de \mathbb{N} posee un **primer elemento**. Esto significa, por definición, que existe $a \in A$ tal que, $a \leq x$, para todo $x \in A$.

Demostración: Por la proposición 2.3.2 sabemos que,

$$n \geq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

de modo que 1 es el primer elemento de \mathbb{N} .

Supongamos que A no tiene primer elemento y definamos $B = \{n \in \mathbb{N} : n < x \text{ para todo } x \in A\}$. Ya que A no tiene primer elemento, entonces $1 \notin A$ y por (3.1), $x > 1$, para todo $x \in A$. De aquí, $1 \in B$.

Supongamos que $n \in B$. Por la definición de B tenemos que $n < x$ para todo $x \in A$ y por proposición 2.3.4,

$$n + 1 \leq x, \quad \text{para todo } n \in A. \quad (3.2)$$

Si para algún $a \in A$ se tuviera $a = n + 1$, entonces a sería el primer elemento de A , lo que contradiría nuestra suposición de que A no tiene primer elemento. De aquí y de (3.2) obtenemos $n + 1 < x$; para todo $x \in A$; lo cual prueba que $n + 1 \in B$. De esta manera tenemos que B es inductivo y por el teorema 2.3.1, $B = \mathbb{N}$.

Fijemos ahora $a \in A$ (recuerde que A no es vacío). Entonces $a \in \mathbb{N} = B$ y, de la definición de B , $a < a$. Esta contradicción termina la demostración. ■

Ejercicios.

1. Pruebe que el conjunto $\{x \in \mathbb{K} : x \geq 1\}$ es inductivo.
2. Pruebe que la intersección de cualquier familia no vacía de subconjuntos inductivos de \mathbb{K} , es un conjunto inductivo.
3. Sea I un subconjunto inductivo de \mathbb{K} y sea $a \in I$. Pruebe que si $a \neq 1$ y $a - 1 \notin I$, entonces $I \setminus \{a\}$ es inductivo.
4. Sean $x, y \in -\mathbb{N}$. Pruebe que $x + y \in -\mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$.
5. Fije $p \in \mathbb{N}$ y construya una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{p\}$.
6. Sea $B \subset \mathbb{N}$ no vacío y suponga que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq a$; para todo $x \in B$. Pruebe que existe $b \in B$ tal que $x \leq b$ para cada $x \in B$. Este número b se llama el **máximo** de B . *Ayuda.* Sea b el primer elemento del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x \leq n \text{ para todo } x \in B\}$.
7. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pondremos; en lo que sigue; $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$. Diremos que $A \subset I_n$ es **n -inductivo** si $1 \in A$ e $i + 1 \in A$ cuando $i \in A$ e $i \neq n$. Pruebe que si $A \subset I_n$ es n -inductivo, entonces $A = I_n$. *Ayuda.* Suponga que $B := I_n \setminus A \neq \emptyset$ y sea b el primer elemento de B . Otra manera alternativa de demostrar que $A = I_n$ es mostrando que el conjunto $A \cup \{i \in \mathbb{N} : i > n\}$ es inductivo.
8. Pruebe que no existen funciones inyectivas de \mathbb{N} en I_n . *Ayuda.* Defina \mathcal{F}_n como el conjunto de todas las funciones inyectivas de \mathbb{N} en I_n y pruebe que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n = \emptyset\}$ es inductivo.

9. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Diremos que a **divide a** b si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. En este caso se dice que a es un **divisor o factor** de b . Denote por D_b al conjunto de divisores de b y pruebe que $D_b \neq \emptyset$ y que b es cota superior de D_b . El **máximo común divisor de a y b** se define como el máximo del conjunto $D_a \cap D_b$ y se denota por $MCD(a, b)$.
- Sea $M = MCD(a, b)$, entonces $a = Mx$, $b = My$ para ciertos $x, y \in \mathbb{N}$. Pruebe que $MCD(x, y) = 1$. En este caso se dice que x, y **no tienen factores comunes** o que **son coprimos**.
10. Pruebe que para cualquier $a \in \mathbb{N}$, existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2b$ ó $a = 2b - 1$. En el primer caso se dice que a es **par**, mientras que en el segundo, decimos que a es **impar**.
11. Sea $a \in \mathbb{N}$. Pruebe que si a^2 es par, entonces a es par.
12. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que $f(n + 1) > f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que f es inyectiva.

2.4. Los números enteros y los números racionales

Definimos el conjunto \mathbb{Z} de los **números enteros** como la unión de los conjuntos \mathbb{N} , $\{0\}$ y $-\mathbb{N}$ (recordemos que para un conjunto $A \subset \mathbb{K}$ hemos definido $-A$ como el conjunto $\{-x : x \in A\}$). Obviamente, $0, 1 \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.4.1. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $x + y, -x, xy \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Probaremos únicamente que $x + y \in \mathbb{Z}$. (El resto de la demostración es parecida y será dejada a cargo del lector). Si $x = 0$ ó $y = 0$ no hay nada que mostrar. Si $x, y \in \mathbb{N}$ ó si $x, y \in -\mathbb{N}$, el resultado se sigue de lo expuesto en la sección anterior.

Supongamos ahora que $x \in \mathbb{N}$ y que $y \in -\mathbb{N}$. Podemos escribir $y = -z$ para algún $z \in \mathbb{N}$ y se presentan los tres casos siguientes:

- i) $z < x$. Por la proposición 2.3.3 tenemos que $x - z \in \mathbb{N}$, de manera que $x + y = x - z \in \mathbb{Z}$.
- ii) $z = x$. En este caso, $x + y = x - z = 0 \in \mathbb{Z}$.
- iii) $z > x$. En este caso, $z - x \in \mathbb{N}$, de modo que $x + y = x - z = -(z - x) \in -\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

■

El conjunto de los **números racionales**, que denotaremos por \mathbb{Q} , lo definimos como la colección de todas las **fracciones** de la forma m/n , donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Diremos que $F \subset \mathbb{K}$ es un **subcuerpo** de \mathbb{K} si F es un anillo tal que $x^{-1} \in F$ cuando $x \in F$ y $x \neq 0$.

Proposición 2.4.2. \mathbb{Q} es un subcuerpo de \mathbb{K} .

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ y escribamos $x = a/b, y = c/d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$. Entonces $x + y = ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)b^{-1}d^{-1} = (ad + bc)/bd$, de modo que $x + y \in \mathbb{Q}$. El resto de la prueba será dejada a cargo del lector. ■

Ejercicios.

1. Diremos que un subconjunto R de \mathbb{K} es un **anillo** si $0, 1 \in R$ y si $x+y, -x, xy \in R$ cuando $x, y \in R$. (Con este lenguaje, la proposición 2.4.1 dice que \mathbb{Z} es un anillo). Pruebe que todo anillo de \mathbb{K} contiene a \mathbb{Z} , de modo que \mathbb{Z} puede caracterizarse como el anillo “más pequeño” de \mathbb{K} .
2. Sea A un subconjunto de \mathbb{Z} acotado inferiormente en \mathbb{Z} . Pruebe que existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para cada $x \in A$. (Es decir, A **tiene primer elemento**). *Ayuda.* Sea $b \in \mathbb{Z}$ una cota inferior de A y note que $\{z \in \mathbb{Z} : z = x - b + 1 \text{ para algún } x \in A\}$ está contenido en \mathbb{N} .
3. Sea R un anillo de \mathbb{K} tal que todo subconjunto no vacío de R , acotado inferiormente en R , posee primer elemento. Pruebe que $R = \mathbb{Z}$. *Ayuda.* Sea a el primer elemento de $R_* := \{x \in R : x > 0\}$. Muestre que $\mathbb{N} \subset R$, de modo que $a \leq 1$. Concluya que $a = 1$, porque $a^2 \in R$ y $a^2 \leq a$. Suponga por el absurdo que $\mathbb{R}_+ \neq \mathbb{N}$ y sea b el primer elemento de $R_+ \setminus \mathbb{N}$. Pruebe que $b - 1 \in R_+ \setminus \mathbb{N}$.

Nota. Los ejercicios 2 y 3, dicen que \mathbb{Z} puede caracterizarse como el anillo de \mathbb{K} donde todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente en \mathbb{Z} , tiene primer elemento.

4. Pruebe que, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Este número n , se conoce como **la parte entera de x** y se le denota por $[x]$. *Ayuda.* Use el ejercicio 2.
5. Pruebe que $[x + m] = [x] + m$, si $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Concluya que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x - [x]$; satisface $f(x + 1) = f(x)$.
6. Sea $b > 0$. Pruebe que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $nb \leq x < (n + 1)b$.
7. Sean $a, b, m, n, M \in \mathbb{Z}$ con n, b no nulos, tales que $m = Ma$ y $n = Mb$. Pruebe que $m/n = a/b$ y deduzca que \mathbb{Q} es el conjunto de todas las fracciones a/b donde a, b no tienen factores comunes.
8. * Pruebe que si F es un subcuerpo de \mathbb{K} , entonces $(F, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado. Pruebe además que $\mathbb{Q} \subset F$, de modo que \mathbb{Q} puede ser caracterizado como el subcuerpo ordenado más pequeño de \mathbb{K} .

2.5. Los números reales y el axioma de completitud

En esta sección presentaremos la definición de los números reales. Este es sin duda uno de los conceptos más importantes de toda la matemática.

Para facilitar la lectura de esta sección, recordaremos algunas definiciones dadas en la sección 1.3. Diremos que un subconjunto A de \mathbb{K} está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) si existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq b$ (resp. $b \leq x$) para cada $x \in A$. En este caso se dice que b es **una cota superior** (resp. **inferior**) de A . Se dice que A es **acotado** si ese conjunto admite cotas inferiores y superiores.

Sea $A \subset \mathbb{K}$ no vacío. Se dice que A tiene **supremo** en \mathbb{K} si existe una cota superior $b \in \mathbb{K}$ de A tal que $b \leq c$ para cualquier otra cota superior c de A . En otras palabras, “el supremo (cuando exista!) es la menor de las cotas superiores” y se denota por $\sup(A)$.

De manera semejante, se dice que A tiene **ínfimo** en \mathbb{K} si existe una cota inferior b de A tal que $b \geq c$ para cualquier otra cota inferior c de A . El ínfimo (cuando exista) será denotado por $\inf(A)$. Es de observar que “el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores”.

Diremos que un cuerpo ordenado \mathbb{K} es **completo** si posee la siguiente propiedad: todo subconjunto de \mathbb{K} no vacío y acotado superiormente tiene supremo en \mathbb{K} . Esta propiedad se conoce como **propiedad del supremo** o **axioma de completitud**.

Asumiremos la existencia de un cuerpo ordenado completo, denotado por $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ (o, simplemente, \mathbb{R}); llamado **cuerpo de los números reales**.

Observación: La definición que hemos dado de \mathbb{R} puede (y quizá debe) parecer extraña, pues nada indica que exista un cuerpo ordenado con la propiedad del supremo. En este texto no daremos una prueba formal de la existencia \mathbb{R} , sino que estudiaremos sus propiedades basados solamente en el hecho que es un cuerpo ordenado completo. En casos como este, usualmente se dice que se *trabaja axiomáticamente*. Este enfoque axiomático es particularmente efectivo en el caso de \mathbb{R} pues existe un sólo cuerpo ordenado completo. El significado preciso de esta afirmación se escapa de los objetivos de este libro, pero en términos informales, podemos decir que no hay manera de diferenciar o distinguir dos cuerpos ordenados completos a través de propiedades algebraicas o de propiedades expresadas en términos del orden.

Comenzaremos el estudio del orden de \mathbb{R} introduciendo un concepto importante. Se dice que \mathbb{K} es **arquimediano**, si dado $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. También se dice que \mathbb{K} tiene la *propiedad arquimediana*.

Proposición 2.5.1. \mathbb{Q} y \mathbb{R} son arquimedianos.

Demostración: Dejamos como ejercicio mostrar que \mathbb{Q} es arquimediano. Supongamos, por reducción al absurdo, que \mathbb{R} no es arquimediano. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que, $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, \mathbb{N} está acotado superiormente en \mathbb{R} .

Pongamos $b = \sup(\mathbb{N})$. Entonces, $n + 1 \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$; y de aquí, $n \leq b - 1$; para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $b - 1$ es una cota superior de \mathbb{N} menor que el supremo. Esta contradicción termina la prueba. ■

Ya hemos dicho que \mathbb{Q} es un cuerpo ordenado (ver proposición 2.4.2 y ejercicio 8 de la sección 2.4), mostraremos a continuación que \mathbb{Q} no es completo, y por consiguiente \mathbb{Q} no es igual a \mathbb{R} .

Comenzaremos mostrando que no existe una solución racional para la ecuación $x^2 = 2$. Como seguramente conoce el lector, sí existe una solución en \mathbb{R} , precisamente la raíz cuadrada de 2. Esto será demostrado más adelante.

Proposición 2.5.2. *Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x^2 \neq 2$.*

Demostración: Supongamos por el absurdo que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$ y escribamos $x = a/b$, donde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ y a, b no tienen factores comunes. Como $a^2/b^2 = x^2 = 2$, entonces $a^2 = 2b^2$, de modo que a^2 es par. Por el ejercicio 11 de la sección precedente, a es par y por consiguiente $a = 2c$ para algún $c \in \mathbb{Z}$. De aquí, $2b^2 = 4c^2$ y se concluye fácilmente que b es par. Esto muestra que 2 es un factor común de a y b y esta contradicción termina la prueba. ■

La siguiente proposición muestra que \mathbb{Q} no es completo y además que existe un real t tal que $t^2 = 2$, en particular, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Todo elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ será llamado **irracional**.

Proposición 2.5.3. *El conjunto $A := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 < 2\}$ no es vacío, está acotado superiormente en \mathbb{Q} pero no tiene supremo en \mathbb{Q} . Si t es el supremo (en \mathbb{R}) de A , entonces $t^2 = 2$.*

Demostración: Note que A no es vacío porque $1 \in A$. Además, 2 es cota superior de A porque si hubiera un $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > 2$ se tendría $x^2 > 4 > 2$, contradiciendo la definición de A . Sea t el supremo de A . Mostraremos que las relaciones $t^2 < 2$ y $t^2 > 2$ llevan a contradicción y por la ley de tricotomía se tiene que $t^2 = 2$.

Supongamos que $t^2 < 2$. Ya que $2t + 1, 2 - t^2 \in \mathbb{Q}$ y \mathbb{Q} es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(2 - t^2) > 2t + 1$. De aquí, $t^2 + (2t + 1)/n < 2$ y en consecuencia

$$\left(t + \frac{1}{n}\right)^2 = t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2} \leq t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n} = t^2 + \frac{2t + 1}{n} < 2.$$

Esto dice que $t + 1/n \in A$ y contradice el hecho que t es cota superior de A . Luego, no puede ser $t^2 < 2$.

Supongamos que $t^2 > 2$. Ya que \mathbb{Q} es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nt > 1$ y $n(t^2 - 2) > 2t$ (justificar). En particular, $t^2 - 2t/n > 2$, de donde $(t - 1/n)^2 > 2$. De aquí, para

cada $x \in A$ se tiene $(t - 1/n)^2 > x^2$ y como $t - 1/n > 0$, concluimos que $t - 1/n > x$. Es decir, $t - 1/n$ es una cota superior de A contradiciendo el hecho que t era la menor de tales cotas. Esta contradicción dice que la relación $t^2 > 2$ no puede suceder y termina la demostración. ■

Teorema 2.5.4. (*Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R}*). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.*

Demostración: Consideraremos primero el caso en que $a \geq 0$. Ya que $b - a > 0$ y \mathbb{R} es arquimediano, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p(b - a) > 1$. Por el mismo argumento, el conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : n > pa\}$ no es vacío y en consecuencia posee un primer elemento que denotaremos por m . Afirmamos que $m - 1 \leq pa$. En efecto, si $m = 1$, entonces $m - 1 = 0 \leq pa$ (porque $a \geq 0$) y si $m > 1$, entonces $m - 1 \in \mathbb{N}$ y como m es el primer elemento de A se tiene que $m - 1 \notin A$; así $m - 1 \leq pa$. En cualquier caso ($m = 1$ ó $m > 1$), se que $m - 1 \leq pa$. Luego $pa < m \leq 1 + pa < pb$ (recuerde que $p(b - a) > 1$ y que $m \in A$). Finalmente, tenemos que $r = m/p$ satisface la conclusión del teorema.

Consideremos ahora el caso $a < 0$. Si $b > 0$ tomamos $r = 0$. Si $b \leq 0$, entonces $0 \leq -b < -a$ y por el primer caso, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $-b < s < -a$. La prueba se termina tomando $r = -s$. ■

La proposición que sigue muestra que existen irracionales entre dos reales cualesquiera.

Proposición 2.5.5. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a < x < b$, para algún $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Demostración: Consideraremos tres casos:

Caso $a = 0, b \in \mathbb{Q}$. Fijemos $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (recuerde que este conjunto no es vacío). Podemos asumir que $r > 0$ (porque si $r < 0$, entonces $-r > 0$ y $-r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Como \mathbb{R} es arquimediano (proposición 2.5.1), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > rb^{-1}$, de modo que, $b > rn^{-1} > 0$, y basta tomar $x = r/n$.

Caso $a, b \in \mathbb{Q}$. Tenemos que $b - a \in \mathbb{Q}$ es positivo y por el caso anterior, existe un irracional z tal que $0 < z < b - a$. Ahora basta tomar $x = a + z$.

Caso General. Por el teorema 2.5.4, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$, y por el mismo argumento, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r < b$. Por el caso anterior existe un irracional x tal que $s < x < r$ y la prueba es completa. ■

Ejercicios.

1. Sea $A = \{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $\sup(A) = 1$ si y sólo si \mathbb{K} es arquimediano.
2. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ con s racional y t irracional. Pruebe que $s+t$ es irracional y que lo mismo vale para st si $s \neq 0$.
3. Pruebe que \mathbb{K} es arquimediano si y sólo si dados $x, y \in \mathbb{K}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Pruebe también que \mathbb{Q} es arquimediano.
4. * Un subconjunto propio y no vacío α de \mathbb{Q} es llamado **cortadura (de Dedekind)** si:
 - i) Si $x < y$ e $y \in \alpha$, entonces $x \in \alpha$.
 - ii) Para cada $x \in \alpha$ existe $y \in \alpha$ tal que $x < y$.

Pruebe que si $\alpha \subset \mathbb{Q}$ es una cortadura y $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, entonces a es una cota superior de α . Pruebe también que, para cada $z \in \mathbb{R}$, el conjunto $\alpha_z := \{x \in \mathbb{Q} : x < z\}$ es una cortadura cuyo supremo es z . En fin, sea R_* el conjunto de todas las cortaduras. Muestre que la aplicación $S : R_* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(\alpha) = \sup(\alpha)$ es biyectiva.

Nota. El ejercicio 4 dice que el cuerpo de los números reales puede ser construido a partir del cuerpo de los números racionales a través de las cortaduras de Dedekind (para un tratamiento completo de este tema ver, por ejemplo, [9]).

2.6. Propiedades del supremo y del ínfimo

En esta sección presentaremos algunos resultados generales relativos al supremo y al ínfimo. El primero de ellos será usado con frecuencia y le recomendamos al lector que le preste particular atención.

Proposición 2.6.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de A . Son equivalentes:*

- a) b es supremo de A (en símbolos, $b = \sup(A)$).
- b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$.
- c) Para cada $a < b$; $a \in \mathbb{R}$; existe $x \in A$ tal que $a < x$.

Demostración: a) \Rightarrow b). Si $\epsilon > 0$, entonces $b - \epsilon < b$ y en consecuencia, $b - \epsilon$ no es cota superior de A . Por lo tanto, $b - \epsilon < x$, para algún $x \in A$.

b) \Rightarrow c). Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y pongamos $\epsilon = b - a$. Entonces $\epsilon > 0$ y por lo tanto existe $x \in A$ tal que, $a = b - \epsilon < x$.

c) \Rightarrow a). Sea d una cota superior de A . Por c), no puede ser que $d < b$, y en consecuencia, $d \geq b$. Luego, $b = \sup(A)$.

La siguiente proposición es la versión análoga a la anterior para el ínfimo. Su demostración se deja como ejercicio. ■

Proposición 2.6.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota inferior de A . Son equivalentes:*

- a) b es el ínfimo de A (en símbolos, $b = \inf(A)$).
- b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x < b + \epsilon$.
- c) Para cada $a > b$; $a \in \mathbb{R}$; existe $x \in A$ tal que $a > x$.

Dados subconjuntos no vacíos A, B de \mathbb{R} y $\gamma \in \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} A + B &= \{x + y : x \in A, y \in B\} \\ \gamma A &= \{\gamma x : x \in A\} \\ A \cdot B &= \{xy : x \in A, y \in B\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.6.3. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente y $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces*

- a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- b) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ si $x, y \geq 0$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.
- c) $\sup(\gamma A) = \gamma \sup(A)$, si $\gamma \geq 0$.
- d) Si $\gamma \leq 0$, entonces γA es acotado inferiormente y $\inf(\gamma A) = \gamma \sup(A)$.

Demostración: Pongamos $a = \sup(A)$, $b = \sup(B)$ y recordemos que

$$x \leq a \quad \text{e} \quad y \leq b \quad \text{para todo } x \in A, y \in B. \quad (6.1)$$

- a) De la relación anterior, $x + y \leq a + b$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$, lo cual dice que $a + b$ es cota superior de $A + B$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ existen, por la proposición 2.6.1, $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que $a - \epsilon/2 < x_0$ y $b - \epsilon/2 < y_0$. De aquí, $a + b - \epsilon < x_0 + y_0$. Por la proposición 2.6.1 se concluye que $\sup(A + B) = a + b$.
- b) Si $a = 0$, entonces $A = \{0\}$ (pues por hipótesis A no contiene elementos negativos). De suerte que $A \cdot B = \{0\}$ y en consecuencia $\sup(A \cdot B) = 0 = a \cdot b$. Análogamente, el resultado también vale si $b = 0$. Supongamos ahora que $a, b > 0$. Por (6.1) se tiene $xy \leq ab$, lo cual dice que ab es cota superior de $A \cdot B$. Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y escojamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{a, b, \epsilon/(a + b)\}$. Por la proposición 2.6.1, existen $x_0 \in A, y_0 \in B$ tales que $a - \delta < x_0$ y $b - \delta < y_0$, de donde

$$x_0 \cdot y_0 > (a - \delta)(b - \delta) = ab - (a + b)\delta + \delta^2 > ab - (a + b)\delta > ab - \epsilon$$

De nuevo por la proposición 2.6.1 concluimos que ab es el supremo de $A \cdot B$.

- c) Se deduce de la parte b) con $B = \{\gamma\}$.
- d) Como $\gamma \leq 0$, de (6.1) se tiene que $\gamma x \geq \gamma a$, para todo $x \in A$. De modo que γa es cota inferior de γA . Poniendo $\mu = -\gamma$, se tiene, del ejercicio 1 de esta sección, que $\inf(\gamma A) = \inf(-\mu A) = -\sup(\mu A) = -\mu \sup(A)$, lo cual completa la prueba de d). ■

Ejercicios.

1. Bajo las mismas hipótesis de la proposición 2.6.1 pruebe que $b = \sup(A)$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in A$ tal que $b - 1/n < x$. Enuncie y demuestre un resultado análogo para el ínfimo.

2. a) Muestre que

$$\sup \left\{ \frac{7x^2 + 8}{3x^2 + 5} : x \in \mathbb{R} \right\} = 7/3$$

y que

$$\inf \left\{ \frac{7x^2 + 8}{3x^2 + 5} : x \in \mathbb{R} \right\} = 8/5.$$

- b) ¿Qué puede decir acerca del supremo y del ínfimo de $\left\{ \frac{7x^2 + 4x + 8}{3x^2 + 4x + 5} : x \in \mathbb{R} \right\}$?

- c) Muestre que $\inf \left\{ \frac{2q^2 + 5q + 3}{3q^2 - q + 8} : q \in \mathbb{Q}, q \geq 1 \right\} = 2/3$.

- d) ¿Qué puede decir acerca de $\sup \left\{ \frac{2q^2 + 5q + 3}{3q^2 - q + 8} : q \in \mathbb{Q}, q \geq 1 \right\}$?

- e) Sean a, b reales con b positivo. ¿Qué puede decir, en términos de a y b , acerca del supremo y del ínfimo de $\left\{ \frac{7x^2 + a}{3x^2 + b} : x \in \mathbb{R} \right\}$?

3. Determinar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} son acotados superiormente y/o acotados inferiormente, en caso que lo sean, hallar su supremo y/o su ínfimo. Determinar si tienen máximo y/o mínimo.

$$\left\{ \frac{3n+5}{7n+8} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left\{ \frac{3n+5}{7n+12} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left\{ 7 - \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{3}{x-1} : x > 1, x \in \mathbb{R} \right\} \quad \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left\{ 8 - \frac{2}{2^{n+1}-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\{5^x : x \in \mathbb{Z}\} \quad \{(-5)^x : x \in \mathbb{Z}\} \quad \{n^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left\{ \frac{3n+(-1)^n 5}{7n+8} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

4. Pruebe que $A \subset \mathbb{K}$ está acotado superiormente si y sólo si $-A$ está acotado inferiormente. Si además A no es vacío, muestre que A tiene supremo si y sólo si $-A$ tiene ínfimo. En este caso pruebe que $\inf(-A) = -\sup(A)$.

5. Sean $A \subset B \subset \mathbb{K}$ conjuntos no vacíos. Pruebe que si B está acotado superiormente (resp. inferiormente) lo mismo ocurre para A . Si además A y B tienen supremo (resp. ínfimo), entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$ (resp. $\inf(A) \geq \inf(B)$).
6. Demuestre la proposición 2.6.2.
7. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados inferiormente y $\gamma \in \mathbb{R}$. Pruebe que:
- $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$,
 - $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$ si $x \geq 0$ e $y \geq 0$, cualesquiera sean $x \in A$ e $y \in B$.
 - $\inf(\gamma A) = \gamma \inf(A)$ si $\gamma \geq 0$,
 - Si $\gamma \leq 0$, entonces γA es acotado superiormente y $\sup(\gamma A) = \gamma \inf(A)$,
8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $B = A \setminus [0, 1]$. Suponga que B es acotado superiormente y que $\sup(B) \leq 0$. Muestre que A es acotado superiormente y que $\sup(A) \leq 1$.
9. Usando la noción de suma de conjuntos introducida en esta sección, muestre que
- $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x\} + \{x \in \mathbb{R} : 2 < x\} = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x\}$
 - * $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\} + \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 7\}$
10. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R} acotados superiormente. Muestre que $A \cup B$ es acotado superiormente y además que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

11. Sean A, B dos subconjuntos de \mathbb{R} tales que $A \subset B$ y $A \neq \emptyset$.
- Muestre que si B es acotado superiormente, entonces A también lo es y en este caso se cumple que $\sup A \leq \sup B$.
 - De manera similar, muestre que si B es acotado inferiormente, entonces A también lo es y además $\inf A \leq \inf B$.
 - Suponga que A no es acotado superiormente y $B \subset A$ ¿Es posible que B sea acotado superiormente? Si su respuesta es “sí”, de un ejemplo.
 - ¿Existirán subconjuntos de \mathbb{R} tales que $A \subset B$, B acotado superiormente, $A \neq B$ y $\sup A = \sup B$?

2.7. La recta extendida.

El objeto de esta sección es introducir algunas notaciones sumamente útiles para lo que sigue. Al conjunto \mathbb{R} le añadiremos dos nuevos elementos que denotaremos por $+\infty$, y $-\infty$ y que llamaremos **más infinito** y **menos infinito** respectivamente. El conjunto así obtenido, se le conoce como la **recta extendida** y lo denotaremos provisionalmente por $\bar{\mathbb{R}}$. Extenderemos parcialmente a $\bar{\mathbb{R}}$ las operaciones de suma y producto en \mathbb{R} , así como el orden de \mathbb{R} . Más precisamente, dado $x \in \mathbb{R}$ pondremos:

$$\begin{aligned}
 x + (+\infty) &= (+\infty) + x &= +\infty. \\
 x + (-\infty) &= (-\infty) + x &= -\infty. \\
 (+\infty) + (+\infty) &= (+\infty) \\
 (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \\
 (+\infty)x &= x(+\infty) &= +\infty, \text{ si } x > 0. \\
 (+\infty)x &= x(+\infty) &= -\infty, \text{ si } x < 0. \\
 (-\infty)x &= x(-\infty) &= -\infty, \text{ si } x > 0. \\
 (-\infty)x &= x(-\infty) &= +\infty, \text{ si } x < 0. \\
 (+\infty)(+\infty) &= (-\infty)(-\infty) &= +\infty \\
 (+\infty)(-\infty) &= (-\infty)(+\infty) &= -\infty. \\
 -\infty &< +\infty \\
 -\infty &< x \\
 x &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Se suele escribir: $x+\infty$, $x-\infty$, $\infty+\infty$, $-\infty-\infty$, en lugar de, $x+(+\infty)$, $x+(-\infty)$, $(+\infty)+(+\infty)$ y $(-\infty)+(-\infty)$ respectivamente. No se le asigna ningún significado a los símbolos $0 \cdot (\pm\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si A no está acotado superiormente (resp. inferiormente), pondremos $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$). El lector comprobará que la proposición 2.6.3 sigue siendo válida para subconjuntos arbitrarios de \mathbb{R} (ver ejercicio 1).

Ejercicios.

- Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos. Pruebe que:
 - $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$,
 - $\sup(\gamma A) = \gamma \sup(A)$ si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma > 0$,
 - $\sup(\gamma A) = \gamma \inf(A)$ si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma < 0$,
 - $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$ si $A \cdot B \neq \{0\}$ y $x, y \geq 0$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.
- Pruebe que el ejercicio anterior permanece válido si intercambiamos “supremo” por “ínfimo”.

2.8. Valor absoluto.

Dado $x \in \mathbb{R}$ se define el **valor absoluto de x** , denotado $|x|$, por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Si los números reales se representan en una recta, entonces $|x|$ representa “la distancia de x al origen”; y más generalmente, $|x - y|$ representa la distancia entre x e y . Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función denotaremos por $|f|$ la función $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $|f|(x) = |f(x)|$.

La demostración de la siguiente proposición se deja al lector.

Proposición 2.8.1. 1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es más, $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2. $|-x| = |x|$

3. $|xy| = |x||y|$

4. $|1/y| = 1/|y|$ ($y \neq 0$).

5. $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.8.2. Sea $b \in \mathbb{R}$ no negativo ($b \geq 0$). Entonces, $|x| \leq b$ si y sólo si $-b \leq x \leq b$.

Demostración: Si $|x| \leq b$, entonces $-b \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq b$. Recíprocamente, supongamos que $-b \leq x \leq b$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x \leq b$; mientras que si $x \leq 0$, $|x| = -x \leq b$, porque $-b \leq x$. ■

Proposición 2.8.3. (*Propiedad Triangular*). Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración: Sabemos que, $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, y sumando miembro a miembro estas desigualdades queda, $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. El resultado se sigue ahora de la proposición 2.8.2. ■

Proposición 2.8.4. Sean $x, y, r \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

ii) $|x| \leq |y| + r$ si $|x - y| \leq r$.

Demostración: Ya que $x = (x - y) + y$, entonces por la propiedad triangular, se tiene que $|x| \leq |x - y| + |y|$; de donde,

$$|x| - |y| \leq |x - y|. \quad (8.1)$$

Por el mismo argumento, $|y| \leq |y - x| + |x|$; de donde, $|x| - |y| \geq -|y - x|$. Pero, $y - x = -(x - y)$, así que $|y - x| = |x - y|$. De aquí,

$$|x| - |y| \geq -|x - y|. \quad (8.2)$$

La prueba de i) se sigue ahora de (8.1)-(8.2) y la proposición 2.8.2. La prueba de ii) se sigue fácilmente de (8.1). ■

Proposición 2.8.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado y no vacío. Entonces*

$$\sup(A) - \inf(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Demostración: Pongamos

$$C = \{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Sean $a = \inf(A)$, $b = \sup(A)$ y $c = \sup(C)$. Dados $x, y \in A$, tenemos que $a \leq x, y \leq b$. De esto se sigue que $-(b - a) = a - b \leq x - y \leq b - a$. Por la proposición 2.8.2, $|x - y| \leq b - a$. Así, $b - a$ es cota superior de C y, en consecuencia, $c \leq b - a$.

Fijemos $\epsilon > 0$. Por la proposición 2.6.1, existen $x, y \in A$ tales que $b - \epsilon/2 < x, y < a + \epsilon/2$. De aquí, $b - a \leq x - y + \epsilon \leq |x - y| + \epsilon \leq c + \epsilon$. Es decir, $b - a - c \leq \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$, y por la proposición 2.2.1, $b - a - c \leq 0$. Es decir, $b - a \leq c$. ■

Ejercicios.

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ positivo. Pruebe que $|x| < b$ si y sólo si $-b < x < b$.
2. Sean $x, \epsilon \in \mathbb{R}$, con $\epsilon > 0$. Pruebe que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|x - r| < \epsilon$.
3. Pruebe que $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$, para todo $x \in A$.
4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

2.9. Un ejemplo de un cuerpo ordenado no arquimediano.

En esta sección daremos algunas indicaciones para construir un cuerpo ordenado que no es arquimediano. Los resultados presentados en esta sección no se usarán en el resto del texto y serán introducidos a manera de ejercicios.

1. Considere el conjunto $\mathbb{Q}(t)$ formado por todas *formas racionales* $\frac{p(t)}{q(t)}$ donde $p(t)$ y $q(t)$ son polinomios en la indeterminada t con coeficientes racionales y $q(t)$ no es el polinomio cero. Es decir, los elementos de $\mathbb{Q}(t)$ son la expresiones de la forma

$$\frac{a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0}{b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0}$$

donde $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ son racionales, n, m son naturales y algún b_i no es igual a cero. Defina sobre $\mathbb{Q}(t)$ las operaciones usuales de suma y multiplicación, es decir,

$$\frac{p(t)}{q(t)} + \frac{p'(t)}{q'(t)} = \frac{p(t)q'(t) + p'(t)q(t)}{q(t)q'(t)}$$

y

$$\frac{p(t)}{q(t)} \cdot \frac{p'(t)}{q'(t)} = \frac{p(t)p'(t)}{q(t)q'(t)}$$

Las operaciones inversas son entonces

$$-\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{-p(t)}{q(t)}$$

y

$$\left(\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{-1} = \frac{q(t)}{p(t)}$$

Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ con estas operaciones es un cuerpo.

2. El conjunto P de los elemento positivos de $\mathbb{Q}(t)$ es la colección de la formas racionales $\frac{p(t)}{q(t)}$ tales que los coeficientes de $p(t)$ y $q(t)$ de la mayor potencia de t son del mismo signo. Es decir, si $p(t)$ es $a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ y $q(t)$ es $b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, entonces $a_n b_m > 0$. Muestre que P satisface las condiciones O_1 y O_2 introducidas en la sección 2.2. En consecuencia $\mathbb{Q}(t)$ es un cuerpo ordenado.
3. Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ no es arquimediano. Recuerde que el elemento unidad de $\mathbb{Q}(t)$ es el polinomio $p(t) = 1$. Muestre que $n \cdot 1 < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir que $n \cdot p(t)$ es menor, en el orden de $\mathbb{Q}(t)$, que el polinomio $q(t) = t$).

4. Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ no es completo consiguiendo un subconjunto de $\mathbb{Q}(t)$ acotado superiormente que no tiene supremo. *Sugerencia:* Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}(t)$. Muestre que A es acotado superiormente, pero no tiene supremo. Para esto suponga que r es una cota superior de A y muestre que $r/2$ también es una cota superior de A .

Capítulo 3

Definiciones Recursivas y Conjuntos Infinitos

En este capítulo trataremos dos temas. Por una parte, queremos introducir, de manera formal, las nociones de sumatorias y productorias. Para hacerlo necesitamos estudiar las “definiciones recursivas” o “por inducción”. Estos métodos serán ilustrados con un ejemplo importante: la construcción de las funciones potenciales ($f(x) = x^n$) y radicales ($f(x) = \sqrt[n]{x}$). En una primera lectura, el lector puede omitir las demostraciones de los resultados de la sección 3.1.

Por otra parte, queremos mostrar que el axioma de completitud tiene otra consecuencia interesante: El “tamaño” de \mathbb{R} es mayor que el de \mathbb{Q} , en contraste con el hecho de que \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} tienen el mismo “tamaño”. Precisar el significado de estas afirmaciones es el objetivo de las últimas secciones.

3.1. Definiciones por recursión

El objeto de esta sección es dar significado preciso a expresiones de la forma $a_1 + \cdots + a_n$, $a_1 \cdots a_n$, etc. También se definirán las potencias a^n ; $n \in \mathbb{N}$; de un elemento $a \in \mathbb{K}$, donde \mathbb{K} es un cuerpo ordenado en todo lo que sigue. Usaremos la siguiente notación

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1.1. *Dados un conjunto X , un elemento $a \in X$ y una función $f : X \rightarrow X$, existe una única función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos \mathcal{F}_n como el conjunto de todas aquellas funciones $\psi : I_n \rightarrow X$ tales que

$$\psi(1) = a \quad \text{y} \quad \psi(i+1) = f(\psi(i)) \quad \text{si} \quad i < n. \quad (1.1)$$

Note que \mathcal{F}_1 es el conjunto singular $\{\psi_1\}$ donde $\psi_1 : I_1 \rightarrow X$ es definida por $\psi_1(1) = a$. Probaremos que el conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n \text{ es singular}\}$ es inductivo. Para ello, fijemos $n \in A$ y pongamos $\mathcal{F}_n = \{\psi_n\}$. Definamos ahora $\psi : I_{n+1} \rightarrow X$ mediante

$$\psi(i) = \psi_n(i) \quad \text{si} \quad i \in I_n,$$

$$\psi(n+1) = f(\psi_n(n)).$$

Usando (1.1) se verifica sin dificultad que $\psi \in \mathcal{F}_{n+1}$ y en consecuencia ese conjunto no es vacío. Supongamos ahora que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_{n+1}$ y sean $\phi, \psi : I_n \rightarrow X$ las restricciones de α, β respectivamente. Es fácil ver que $\phi, \psi \in \mathcal{F}_n$ y como este conjunto es singular, se concluye que $\psi = \phi$. Es decir, $\alpha(i) = \beta(i)$ si $i \in I_n$. Pero de (1.1), $\alpha(n+1) = f(\alpha(n)) = f(\beta(n)) = \beta(n+1)$ y en consecuencia $\alpha = \beta$. Esto muestra que \mathcal{F}_{n+1} es singular y en consecuencia, A es inductivo. Así, $A = \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $\mathcal{F}_n = \{\psi_n\}$ y definamos $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ mediante $\phi(n) = \psi_n(n)$. Ya que la restricción de ψ_{n+1} a I_n está en \mathcal{F}_n , se tiene $\psi_{n+1}(n) = \psi_n(n)$, de modo que,

$$\phi(n+1) = \psi_{n+1}(n+1) = f(\psi_{n+1}(n)) = f(\psi_n(n)) = f(\phi(n)),$$

lo cual demuestra la existencia de una función ϕ satisfaciendo los requerimientos del teorema. Supongamos ahora que $\phi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow X$ satisfacen tales requerimientos. Dejamos a cargo del lector mostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \phi(n) = \psi(n)\}$ es inductivo, de donde $\phi = \psi$. ■

El resultado que enunciaremos a continuación, aparentemente más general que el teorema anterior, puede probarse usando los mismos argumentos que en este último. Sin embargo, aquí obtendremos el teorema 3.1.2 como consecuencia del teorema 3.1.1, lo que de paso, ilustra la fuerza de este último.

Necesitamos alguna terminología previa. Dados un conjunto X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por X^n al conjunto de todas las funciones de I_n en X . Un elemento $\alpha \in X^n$ suele denotarse por (x_1, \dots, x_n) donde, $x_i = \alpha(i)$; $i \in I_n$. El conjunto X^n se llama **la n-ésima potencia de X** y el elemento (x_1, \dots, x_n) una **n-upla** de X . Con esta nueva terminología, X^2 no es otra cosa que $X \times X$.

Teorema 3.1.2. *Sea X un conjunto. Dado $a \in X$ y funciones $f_n : X^n \rightarrow X$; para cada $n \in \mathbb{N}$; existe una única función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f_n(\phi(1), \dots, \phi(n))$.*

Demostración: Pongamos $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ y definamos $F : Y \rightarrow Y$ como sigue: Si $\alpha \in X^n$, entonces $F(\alpha)$ es el elemento de X^{n+1} definido por:

$$F(\alpha)(i) = \alpha(i) \quad \text{si} \quad i \in I_n$$

y

$$F(\alpha)(n+1) = f_n(\alpha). \quad (1.2)$$

Note que $F(\alpha)|_{I_n} = \alpha$ y que $F(X^n) \subset X^{n+1}$.

En fin, sea $\alpha^* \in X^1$ definida por $\alpha^*(1) = a$. Por el teorema 3.1.1, existe una función $\psi : \mathbb{N} \rightarrow Y$ tal que, $\psi(1) = \alpha^*$ y $\psi(n+1) = F(\psi(n))$. En particular,

$$\psi(n+1)|_{I_n} = \psi(n). \quad (1.3)$$

Definamos $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ por $\phi(n) = \psi(n)(n)$. Usando nuevamente inducción puede probarse (hacerlo) que, $\phi|_{I_n} = \psi(n)$, de modo que por (1.2) y (1.3), $\phi(n+1) = F(\psi(n))(n+1) = f_n(\psi(n)) = f_n(\phi|_{I_n})$. La unicidad de ϕ se sigue como en el teorema 3.1.1. ■

Teorema 3.1.3. *Sea X un conjunto no vacío provisto de una ley de composición $*$. Para cada función $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ existe una única función $\xi_g : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $\xi_g(1) = g(1)$ y $\xi_g(n+1) = \xi_g(n) * g(n+1)$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : X^n \rightarrow X$ por $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n * g(n+1)$. Por el teorema 3.1.2 (con $a = g(1)$), existe una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $\xi(1) = g(1)$ y $\xi(n+1) = f_n(\xi(1), \dots, \xi(n))$. La unicidad de ξ se sigue como en el teorema anterior. ■

Observaciones 3.1.4. a) De las demostraciones de los dos teoremas precedentes se tiene que el teorema 3.1.1 implica el teorema 3.1.2 y que éste implica el teorema 3.1.3. Veremos ahora que este último implica el teorema 3.1.1, (de donde los tres teoremas son equivalentes). Para ello, sea G el conjunto de todas las aplicaciones de X en si mismo, provisto de la ley de composición $h * g = g \circ h$. Dada $f \in G$ sea $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ la aplicación constante $g(n) = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.1.3 existe una aplicación $\xi : \mathbb{N} \rightarrow G$ tal que $\xi(1) = g(1) = f$ y $\xi(n+1) = \xi(n) * g(n+1) = f \circ \xi(n)$. El lector verificará que la función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ definida por $\phi(1) = a$ y $\phi(n) = \xi(n-1)(a)$ (si $n > 1$) satisface los requerimientos del teorema 3.1.1.

b) En el teorema anterior pongamos $g(i) = x_i$. Entonces, $\xi_g(2) = x_1 * x_2$, $\xi_g(3) = (x_1 * x_2) * x_3$, $\xi_g(4) = [(x_1 * x_2) * x_3] * x_4$; etc. Esto nos lleva a definir “el producto” $x_1 * \dots * x_n$ como $\xi_g(n)$.

c) Sea $(X, *)$ como en el teorema 3.1.3. Dada una aplicación $h : I_n \rightarrow X$ definimos $h(1) * \dots * h(n) = g(1) * \dots * g(n)$ donde $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ es cualquier extensión de h . En el ejercicio 1 se mostrará que esta definición no depende de la extensión g de h usada.

Proposición 3.1.5. *Supongamos que en el teorema 3.1.3 $*$ es asociativa, entonces cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$g(1) * \dots * g(m+n) = [g(1) * \dots * g(m)] * [g(m+1) * \dots * g(m+n)].$$

Demostración: Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ por $h(n) = g(m + n)$. Debemos probar que

$$g(1) * \cdots * g(m + n) = [g(1) * \cdots * g(m)] * [h(1) * \cdots * h(n)],$$

lo cual es equivalente a mostrar que

$$\xi_g(m + n) = \xi_g(m) * \xi_h(n), \quad (1.4)$$

donde ξ_g y ξ_h vienen dadas por el teorema 3.1.3.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y sea A el conjunto de aquellos $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen (1.4). Ya que $\xi_h(1) = h(1) = g(m + 1)$, entonces $\xi_g(m + 1) = \xi_g(m) * g(m + 1) = \xi_g(m) * \xi_h(1)$, lo cual prueba que $1 \in A$.

Supongamos ahora que $n \in A$. Del teorema 3.1.3 se tiene,

$$\xi_g(m + n + 1) = \xi_g(m + n) * g(m + n + 1) = [\xi_g(m) * \xi_h(n)] * h(n + 1)$$

porque $n \in A$, y de la asociatividad de $*$ se concluye que

$$\xi_g(m + n + 1) = \xi_g(m) * [\xi_h(n) * h(n + 1)] = \xi_g(m) * \xi_h(n + 1).$$

Así, $n + 1 \in A$ y en consecuencia $A = \mathbb{N}$. Es decir, (1.4) es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejemplo 3.1.6. Sea $(X, *) = (\mathbb{K}, +)$. Dada una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, existe (por el teorema 3.1.3) una única función $\Sigma_g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\Sigma_g(1) = g(1)$ y $\Sigma_g(n + 1) = \Sigma_g(n) + g(n + 1)$. Esta aplicación Σ_g será llamada **la serie asociada a g** . También usaremos el símbolo

$$\sum_{i=1}^n g(i)$$

para denotar al número $g(1) + \cdots + g(n) = \Sigma_g(n)$. Dicho símbolo es llamado **la sumatoria** de los $g(i)$ desde 1 hasta n . Note que por la proposición 3.1.5,

$$\sum_{i=1}^{m+n} g(i) = \sum_{i=1}^m g(i) + \sum_{i=1}^n g(m + i),$$

cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$. La última de estas sumatorias también suele denotarse por $\sum_{i=m+1}^{m+n} g(i)$.

Ejemplo 3.1.7. Sea $(X, *) = (\mathbb{K}, \cdot)$. Dada una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, existe (por el teorema 3.1.3) una única función $P_g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $P_g(1) = g(1)$ y $P_g(n+1) = P_g(n) + g(n+1)$. También usaremos los símbolos

$$g(1) \cdots g(n), \quad \prod_{i=1}^n g(i),$$

para denotar al número $P_g(n)$. Note que por la proposición 3.1.5,

$$\prod_{i=1}^{m+n} g(i) = \prod_{i=1}^m g(i) + \prod_{i=1}^n g(m+i),$$

cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$. La última de estas “productorias” también suele denotarse por $\prod_{i=m+1}^{m+n} g(i)$.

Cuando $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el producto $\prod_{i=1}^n g(i)$ es llamado **el factorial de n** y es denotado por $n!$. Recuerde que por el teorema 3.1.3, los factoriales están caracterizados por las dos propiedades siguientes:

$$1! = 1 \quad \text{y} \quad (n+1)! = n!(n+1).$$

Ejercicios.

- Sea $(X, *)$ como en el teorema 3.1.3 y sean $g, h : \mathbb{N} \rightarrow X$ aplicaciones tales que, para algún $p \in \mathbb{N}$, $g(i) = h(i)$ si $i \in I_p$. Pruebe que $g(1) * \cdots * g(p) = h(1) * \cdots * h(p)$. *Ayuda.* Defina $A = \{i \in I_p : g(1) * \cdots * g(i) = h(1) * \cdots * h(i)\}$.
- Dadas $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:
 - $\sum_{i=1}^n [g(i) + h(i)] = \sum_{i=1}^n g(i) + \sum_{i=1}^n h(i)$.
 - $\sum_{i=1}^n ag(i) = a \sum_{i=1}^n g(i)$.
 - $|\sum_{i=1}^n g(i)| \leq \sum_{i=1}^n |g(i)|$.
 - $\sum_{i=1}^n g(i) \leq \sum_{i=1}^n h(i)$ si $g(i) \leq h(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
- Dados $x, y \in \mathbb{K}$ defina $\max\{x, y\}$ como el máximo del conjunto $\{x, y\}$. Pruebe que dada una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ existe una única función $M_g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $M_g(1) = g(1)$ y $M_g(n+1) = \max\{M_g(n), g(n+1)\}$. Pruebe también que $M_g(n) \geq g(i)$ para todo $i \in I_n$. El número $M_g(n)$ se suele denotar por $\max\{g(1), \dots, g(n)\}$ y se llama **el máximo** de los números $g(1), \dots, g(n)$.
- Pruebe un resultado análogo al anterior, concerniente al mínimo.
- Defina $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ por $g(n) = n$ y pruebe que $\sum_{i=1}^n g(i) = n(n+1)/2$.

6. Pruebe que $n! \leq (n-i)!n^i$ si $n \in \mathbb{N}$ e $i \leq n$. Aquí, $0!$ es, por definición, igual a 1.
7. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i \leq n$, definamos el **número combinatorio**

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}.$$

Pruebe la identidad de Pascal:

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Use inducción para concluir que $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

3.2. Potenciación y radicación

Fijemos $a \in \mathbb{K}$ y definamos $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ por $f(x) = ax$. Por el teorema 3.1.1 existe una única aplicación $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\phi(n+1) = f(\phi(n)) = a \cdot \phi(n)$. Note que $\phi(2) = a \cdot a = a^2$, $\phi(3) = a^2 \cdot a := a^3$, etc. El elemento $\phi(n)$ será llamado la **n-ésima potencia de a** y será denotado por a^n . Con esta nueva notación tenemos

$$a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Teorema 3.2.1. *Dados $a \in \mathbb{R}$ positivo y $n \in \mathbb{N}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ positivo tal que $b^n = a$. Este número b es llamado la **raíz n-ésima de a** y será denotado por $a^{1/n}$ ó $\sqrt[n]{a}$.*

Demostración: (Unicidad) Supongamos que existen $b, c \in \mathbb{R}$ positivos tales que $b^n = a$ y $c^n = a$. Entonces, del ejercicio 3, $b = c$.

(Existencia) Si $a = 1$ basta tomar $b = 1$. Supongamos ahora $a > 1$ y pongamos $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^n < a\}$. Entonces A no es vacío porque $1 \in A$. También, a es cota superior de A . En efecto, supongamos por el absurdo que existe $x \in A$ tal que $x > a$, entonces $x^n > a^n \geq a$ (ver ejercicio 4), lo cual contradice la definición de A y muestra nuestra afirmación.

Pongamos $b = \sup(A)$ y notemos que $b \geq 1$. Probaremos que las relaciones $b^n > a$ y $b^n < a$ llevan a contradicción y por la ley de tricotomía se tendrá $b^n = a$.

Supongamos primero que $b^n < a$. Por el ejercicio 7, existe $p > 0$ tal que

$$(b + \epsilon)^n - b^n \leq p \epsilon \quad \text{para todo } \epsilon \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

Fijemos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ y $\alpha < (a - b^n)/p$ (justifique la existencia de tal α). De (2.1) se tiene que $(b + \alpha)^n \leq b^n + p \alpha < a$, lo cual dice que $b + \alpha \in A$ y contradice el hecho que b es cota superior de A . Luego, la relación $b^n < a$ no puede ocurrir.

Supongamos ahora que $b^n > a$. Por el ejercicio 7 existe $q > 0$ tal que

$$b^n - (b - \epsilon)^n \leq q\epsilon \quad \text{para todo } \epsilon \in [0, b]. \quad (2.2)$$

Fijemos ahora $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta \leq b$ y $\beta \leq (b^n - a)/q$. De (2.2), $(b - \beta)^n \geq b^n - q\beta \geq a$, de modo que $(b - \beta)^n \geq x^n$ para cada $x \in A$. De aquí y el ejercicio 3, $b - \beta \geq x$ para todo $x \in A$, lo cual dice que $b - \beta$ es cota superior de A . Esto contradice el hecho que b es la más pequeña cota superior de A y prueba que la relación $b^n > a$ no puede suceder. Esto termina la prueba del caso $a > 1$

Supongamos en fin que $a < 1$. Ya que $1/a > 1$, existe $c \in \mathbb{R}$ positivo tal que $c^n = a^{-1}$ y el resultado se sigue tomando $b = 1/c$. ■

Proposición 3.2.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ positivos y sean $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

- a) $(a^{1/n})^n = (a^n)^{1/n} = a$.
- b) $(a^{1/n})^{1/m} = a^{1/mn}$.
- c) $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.
- d) $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$.
- e) $(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}$ si $mq = np$.
- f) $a^{(mq+np)/nq} = (a^m)^{1/n}(a^p)^{1/q}$.
- g) $1^{1/n} = 1$.

Demostración: a) Por definición de raíz n -ésima, $(a^{1/n})^n = a$. Pongamos ahora $x = (a^n)^{1/n}$; entonces x es la raíz n -ésima de a^n , de manera que $x^n = a^n$. De aquí y el ejercicio 3, $x = a$, lo cual prueba la parte a).

b) Escribamos $x = (a^{1/n})^{1/m}$ e $y = a^{1/mn}$. Entonces $x^m = a^{1/n}$, de donde $(x^m)^n = a$. Es decir, $x^{mn} = a$. Análogamente, $y^{mn} = a$, de suerte que $x^{mn} = y^{mn}$ y la parte b) se sigue del ejercicio 3.

El resto de la prueba será dejado a cargo del lector. ■

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$ positivos, se define $a^r = (a^m)^{1/n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $r = m/n$. Note que de la parte e) de la proposición anterior se tiene que esta definición no depende de los números m, n tales que $r = m/n$. Con esta definición las partes c), f) y g) de la proposición anterior pueden enunciarse como sigue.

Proposición 3.2.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $r, s \in \mathbb{Q}$ números positivos. Entonces, $(ab)^r = a^r b^r$, $a^{r+s} = a^r a^s$ y $1^r = 1$. En particular $(a^r)^{-1} = (a^{-1})^r$.

Por último, sea $a \in \mathbb{R}$ positivo y defina $a^r = (a^{-1})^{-r}$ si $r \in \mathbb{Q}$ es negativo. Dejamos a cargo del lector verificar que la proposición 3.2.3 permanece válida para r, s racionales cualesquiera.

Ejercicios.

Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Pruebe que $a^{m+n} = a^n \cdot a^m$, $(a^m)^n = a^{mn}$ y $(ab)^n = a^n b^n$.
2. Si $a \neq 0$ definimos $a^0 = 1$ y $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Pruebe que el ejercicio anterior permanece válido si $a, b \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Concluya que $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.
3. Sean $a, b > 0$. Pruebe que $b^n > 0$ y use este hecho para ver que $a > b$ si y sólo si $a^n > b^n$. Concluya que si $a^p = b^p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, entonces $a = b$.
4. Pruebe que si $a > 1$, entonces $a^{n+1} > a^n$. Deduzca que $a^n \geq a$. Análogamente, si $0 < a < 1$, muestre que $a^{n+1} < a^n \leq a$.
5. Pruebe que $b^n - a^n = (b - a) \sum_{i=1}^n b^{n-i} a^{i-1}$.
6. Pruebe que si $a \neq 1$, entonces $\sum_{i=1}^n a^{i-1} = (1 - a^n)/(1 - a)$. Deduzca que $\sum_{i=1}^n (1/2)^i = 1 - (1/2)^n$.
7. Si $a > 0$ pruebe la existencia de $p_n, q_n \in \mathbb{K}$ positivos tales que $(a + \epsilon)^n - a^n \leq p_n \epsilon$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$ y $a^n - (a - \epsilon)^n \leq q_n \epsilon$ para todo $0 \leq \epsilon \leq a$.
8. (Binomio de Newton) Pruebe que

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

9. (Desigualdad de Bernoulli) Pruebe que si $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 0$ y $a > -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
10. Pruebe que $2^{n-1} \leq n!$.
11. Suponga $b \geq 1$ y muestre que $[1 + (1/bn)]^n < 1 + (1/b) + (1/b)^2$. *Ayuda.* Note que $\binom{n}{i} n^{-i} \leq 1/i! \leq 1/2^{i-1}$. Concluya que $(1 + 1/n)^n < 3$.
12. Pruebe que la proposición 3.2.3 permanece válida si $r, s \in \mathbb{Q}$ son arbitrarios.

3.3. Equipotencia

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **equipotente a** B (o que A y B son equipotentes), denotado $A \sim B$, si existe una biyección $f : A \rightarrow B$. Note que:

- E₁)** $A \sim A$ ya que id_A es una biyección de A en si mismo.
- E₂)** Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$, porque la inversa de una biyección es una biyección.
- E₃)** Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$ porque la composición de funciones biyectivas es biyectiva.

En otras palabras, la relación de equipotencia entre conjuntos es una relación de equivalencia (ver sección 1.3).

Recordemos que I_n denota el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Un conjunto A se dice **finito** si A es vacío o si es equipotente a I_n para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se dice que A es **infinito**.

Observación: Por E₁), I_n es finito para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, por E₃) se tiene que si $A \sim B$, entonces A es finito si y sólo si B es finito.

Veremos en un ejercicio mas adelante que si $I_p \sim I_q$, entonces $p = q$. Esto permite definir **el cardinal** de un conjunto finito no vacío A , denotado $c(A)$, como aquel entero positivo n tal que $A \sim I_n$. En este caso se dice que A **tiene n elementos**. También pondremos $c(\emptyset) = 0$.

Un conjunto equipotente a \mathbb{N} se dirá **infinito numerable**, y un conjunto finito o infinito numerable se dirá **numerable**.

Proposición 3.3.1. *Todo subconjunto de I_n es finito.*

Demostración: Sea A el conjunto de aquellos $n \in \mathbb{N}$ tales que todo subconjunto de I_n es finito. Bastará ver que A es inductivo.

Ya que los únicos subconjuntos de I_1 son \emptyset e I_1 , se concluye que $1 \in A$. Supongamos ahora que $n \in A$ y fijemos $B \subset I_{n+1}$. Debemos probar que B es finito, para lo cual consideramos dos casos. Si $n+1 \notin B$, entonces $B \subset I_n$ y en consecuencia B es finito porque $n \in A$. Si $n+1 \in B$, entonces $B = C \cup \{n+1\}$ donde $C = B \cap I_n$ es un subconjunto de I_n . Luego C es finito. Sea k tal que C es equipotente con I_k . Dejamos a cargo del lector mostrar que B es equipotente con I_{k+1} .

■

Proposición 3.3.2. *a) Si $B \subset A$ y A es finito, entonces B es finito.*

b) Si $f : A \rightarrow B$ es inyectiva y B es finito, entonces A es finito.

c) Si $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva y A es finito, entonces B es finito.

Demostración: Ejercicio.

Notemos que la parte a) de la proposición anterior dice que si un conjunto A contiene un subconjunto infinito, entonces A es infinito.

Proposición 3.3.3. *Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es finito y $c(A \cup B) + c(A \cap B) = c(A) + c(B)$.*

Demostración: Primero trataremos un caso particular y luego el general.

Caso $A \cap B = \emptyset$. Sean $f : A \rightarrow I_n$, $g : B \rightarrow I_m$ biyecciones, donde $n = c(A)$ y $m = c(B)$, y definamos $h : A \cup B \rightarrow I_{m+n}$ por

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) && \text{si } x \in A, \\ h(x) &= n + g(x) && \text{si } x \in B. \end{aligned}$$

Como A y B son disjuntos, h está bien definida. Además, h es obviamente inyectiva. Fijemos ahora $p \in I_{m+n}$. Si $p \leq n$, entonces $p = f(x)$ para algún $x \in A$ y así, $p = h(x)$. Mientras que si $p > n$, entonces $p = n + i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y como $p \leq m + n$ concluimos que $i \in I_m$. Luego $i = g(x)$ para algún $x \in B$, de suerte que $h(x) = n + g(x) = n + i = p$. Esto muestra que h es sobreyectiva y prueba el primer caso.

Caso General. Notemos primero que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Del caso precedente (con $B \setminus A$ en lugar de B) se tiene que $A \cup B$ es finito y que $c(A \cup B) = c(A) + c(B \setminus A)$. Pero B es la unión disjunta de $A \cap B$ con $B \setminus A$ y aplicando el caso precedente una vez más, se tiene que $c(B) = c(A \cap B) + c(B \setminus A)$. De esto y lo anterior obtenemos que $c(A \cup B) = c(A) + c(B \setminus A) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$.

■

Ejercicios.

1. Sea A un conjunto. Pruebe que si $x, y \in A$, entonces $A \setminus \{x\}$ y $A \setminus \{y\}$ son equipotentes. Concluya que si $A \sim B$, entonces $A \setminus \{x\} \sim B \setminus \{y\}$ cualesquiera sean $x \in A$ e $y \in B$.
2. Pruebe que no existe una función sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$. En particular, A y $\mathcal{P}(A)$ no son equipotentes. *Ayuda.* Dada $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ defina $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ y pruebe por el absurdo que $B \notin f(A)$.
3. Pruebe que \mathbb{N} es infinito.
4. Sea B un subconjunto finito de un conjunto A . Pruebe que $B \cup \{a\}$ es finito cualquiera sea $a \in A$.
5. Pruebe que no existen aplicaciones sobreyectivas de I_p en I_{n+p} ; $p, n \in \mathbb{N}$. (*Ayuda.* Use inducción en p). Concluya que si $f : I_p \rightarrow I_q$ es sobreyectiva, entonces $q \leq p$.
6. Pruebe que si $I_p \sim I_q$, entonces $p = q$.
7. Sean A y B conjuntos finitos. Pruebe que $A \sim B$ si y sólo si $c(A) = c(B)$.

8. Sea $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} . Pruebe que existe una aplicación $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $h(n) < h(n+1)$ y $h(n) \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. *Ayuda.* Aplique el teorema 3.1.2 al caso en que $X = \mathbb{N}$, a es el primer elemento de E_1 y $f_n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ viene definida como sigue: $f_n(\alpha)$ es el primer elemento de $\{x \in E_{n+1} : x > \alpha(i) \text{ para todo } i \in I_n\}$.
9. Sea A un conjunto infinito. Pruebe que si $B \subset A$ es finito, entonces $A \setminus B$ es infinito. En particular, $A \setminus B \neq \emptyset$.
10. Pruebe que un conjunto A es infinito si y sólo si A es equipotente con alguno de sus subconjuntos propios.
11. Sean A, B finitos. Pruebe que $A \sim B$ si y sólo si $A \setminus B \sim B \setminus A$.
12. Sea $f : A \rightarrow B$ una biyección entre dos subconjuntos finitos de un conjunto X . Pruebe que existe una biyección $F : X \rightarrow X$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. *Ayuda.* Observe que $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B)$. Muestre que existe una biyección $g : B \setminus A \rightarrow A \setminus B$ y con esto construya una biyección de $h : A \cup B \rightarrow A \cup B$ tal que $h(x) = f(x)$ si $x \in A$.
13. Sean $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$ y \mathcal{F}_i la familia de aquellos subconjuntos de I_n que tienen cardinal igual a i . Pruebe que $c(\mathcal{F}_i) = \binom{n}{i}$ y use el binomio de Newton para concluir que $c(\mathcal{P}(I_n)) = 2^n$. Deduzca que $c(\mathcal{P}(A)) = 2^n$, si A es un conjunto finito con $c(A) = n$.
14. Sea A un conjunto finito el cual es unión de una familia de subconjuntos $\{A_1, \dots, A_n\}$ dos a dos disjuntos. Pruebe que $c(A) = \sum_{i=1}^n c(A_i)$.
15. Pruebe que el cardinal del conjunto \mathcal{F} de todas las funciones de I_p en I_q posee q^p elementos. *Ayuda.* Use inducción en p .
16. * Muestre que el conjunto \mathcal{F} de todas las funciones de un conjunto A en $\{1, 2\}$ es equipotente a $\mathcal{P}(A)$.

3.4. Numerabilidad.

Recordemos que un conjunto equipotente a \mathbb{N} se dice que es *infinito numerable*, y un conjunto finito o infinito numerable se dice que es *numerable*.

Proposición 3.4.1. *Todo subconjunto de \mathbb{N} es numerable.*

Demostración: Sea $A \subset \mathbb{N}$. Si A es finito no hay nada que probar. Supongamos ahora que A es infinito y para cada $n \in A$ definamos $A_n = \{x \in A : x > n\}$. Como $A \cap I_n$ es un subconjunto

del conjunto finito I_n , entonces $A \cap I_n$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver proposición 3.3.1). Como $A = A_n \cup (A \cap I_n)$, entonces A_n es infinito para todo $n \in \mathbb{N}$; pues de lo contrario, A sería finito al ser la unión de dos conjuntos finitos. En particular $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La idea para construir una función sobreyectiva de \mathbb{N} en A es sencilla. Queremos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento a_n en A como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{primer elemento de } A \\ a_2 &= \text{primer elemento de } \{x \in A : x > a_1\} \\ a_3 &= \text{primer elemento de } \{x \in A : x > a_2\} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \text{primer elemento de } \{x \in A : x > a_n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Una vez hecho esto, definimos $h(n) = a_n$ y afirmamos que h es la biyección buscada. Note que $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$, así que h es inyectiva. Ahora mostraremos que h es sobreyectiva. Observe primero que $n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Razonando indirectamente, si h no fuera sobreyectiva y b es el primer elemento de $A \setminus h[A]$, entonces se muestra fácilmente que $a_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto contradice que $b \leq a_b$.

Ahora bien, ¿Cómo podemos formalizar el argumento anterior? El teorema 3.1.1 es precisamente la herramienta adecuada para este fin. Sea a el primer elemento de A y definamos $f : A \rightarrow A$ poniendo $f(n) = \text{primer elemento de } A_n$. Por el teorema 3.1.1, existe una única función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. Ya que $f(x) \in A_x$ se tiene $f(x) > x$ para cada $x \in A$, de modo que $\phi(n+1) > \phi(n)$. De aquí se sigue que ϕ es inyectiva (ver el ejercicio 12 de la sección 2.3).

Supongamos por el absurdo que ϕ no es sobreyectiva y sea b el primer elemento de $B := \mathbb{N} \setminus \phi(A)$. Ya que $a \notin B$ tenemos $b > a$ y de aquí $C := \{x \in A : x < b\}$ no es vacío. Por el ejercicio 6 de la sección 2.3, C posee un elemento máximo que denotamos por c y como $c < b$ tenemos que $b \in A_c$. En particular, $f(c) \leq b$. Si fuera $f(c) < b$ tendríamos que $f(c) \in C$, de modo que $f(c) \leq c$. Esto contradice el hecho que $f(x) > x$ para todo $x \in A$ y prueba que $b = f(c)$. Por otra parte, $c \notin B$ ya que $c < b$ y b es el primer elemento de B , luego $c \in \phi(\mathbb{N})$. Podemos escribir entonces $c = \phi(m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$, de donde $\phi(m+1) = f(\phi(m)) = f(c) = b$. Es decir, $b \in \phi(\mathbb{N})$ y esta contradicción termina la prueba. ■

Proposición 3.4.2. *Un conjunto no vacío A es numerable si y sólo si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. En consecuencia, si existe un conjunto numerable B y una función inyectiva $f : A \rightarrow B$, entonces A es numerable.*

Demostración: Si A es numerable, entonces existe una biyección $g : A \rightarrow I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ o

existe una biyección $g : A \rightarrow \mathbb{N}$. En cualquiera de los dos casos, la función $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = g(x)$, es una inyección.

Recíprocamente, si $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ es una inyección, entonces por la proposición 3.4.1, $f(A)$ es numerable y en consecuencia A también lo es, porque la función $g : A \rightarrow f(A)$ dada por $g(x) = f(x)$ es una biyección.

La demostración de la segunda afirmación la dejamos a cargo del lector (ver ejercicio 1). ■

Proposición 3.4.3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Demostración: De acuerdo a la proposición precedente, bastará ver que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(p, q) = (p + q - 1)(p + q - 2) + 2q$; es inyectiva. Note que $f(p, q) \in \mathbb{Z}$ y $f(p, q) \geq 2q$, de modo que $f(p, q) \in \mathbb{N}$. Es decir, f está bien definida.

Sean $(a, b), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a, b) \neq (p, q)$ y consideremos los tres casos siguientes:

- i) $a + b = p + q$. En este caso, $b \neq q$ (puesto que en caso contrario se tendría $(a, b) = (p, q)$) y $f(a, b) - f(p, q) = 2(b - q) \neq 0$. Así, $f(a, b) \neq f(p, q)$.
- ii) $a + b > p + q$. En este caso definimos $r = (a + b) - (p + q)$ y notamos que $f(a, b) - f(p, q) = r[2p + 2q - 3 + r] + 2(b - q) \geq 2p + 2q - 2 + 2(b - q) = 2(p + b - 1) \geq 2$, porque $r \geq 1$. Luego $f(a, b) > f(p, q)$.
- iii) $a + b < p + q$. Igual que antes se tiene $f(a, b) < f(p, q)$. ■

Sea f la función definida en la prueba de la proposición 3.4.3 y considere la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $g(p, q) = f(p, q)/2$. Dejamos como ejercicio al lector mostrar que g es biyectiva. Explicaremos a continuación el significado de la función g . Comenzaremos diciendo que los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ suelen representarse en la siguiente forma cuadrangular:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (1, 1), & (1, 2), & \cdots, & (1, s), & \cdots & & \\
 (2, 1), & (2, 2), & \cdots, & (2, s), & \cdots & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
 (s, 1), & (s, 2), & \cdots, & (s, s), & \cdots & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & &
 \end{array}$$

Pero para “numerarlos”, se ideó el siguiente arreglo diagonal:

$$\begin{array}{c}
 (1, 1) \\
 (2, 1), (1, 2) \\
 \dots\dots\dots \\
 (s, 1), (s - 1, 2), \dots, (1, s) \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

La función g asigna a $(1, 1)$ el número 1; a $(2, 1), (1, 2)$ los números 2, 3 respectivamente; a $(3, 1), (2, 2), (1, 3)$ los números 4, 5, 6 respectivamente, etc.

Para ser más precisos, sea D_s la diagonal formada por $(s, 1), (s-1, 2), \dots, (1, s)$ y notemos que D_s tiene s elementos. Así, el número n de elementos en las diagonales anteriores a D_s es $1+2+\dots+(s-1) = (s-1)s/2$. En consecuencia, $g(s, 1) = n+1, g(s-1, 2) = n+2, \dots, g(1, s) = n+s$. Es decir, $g(p, q) = n+q$, si $(p, q) \in D_s$. Pero $(p, q) \in D_s$ si y sólo si $p+q = s+1$, y esto termina la construcción de g .

Proposición 3.4.4. *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.*

Demostración: Ejercicio. ■

Sean A, I conjuntos. Una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A se dirá **numerable** si I es numerable. Cuando $I = \{1, \dots, n\}$, la unión y intersección de esa familia será denotada respectivamente por

$$\bigcup_{i=1}^n X_i \text{ y } \bigcap_{i=1}^n X_i.$$

Mientras que si $I = \mathbb{N}$, usaremos los símbolos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \text{ y } \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Proposición 3.4.5. *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia numerable de subconjuntos numerables de un conjunto A . Entonces $\bigcup_{i \in I} X_i$ es numerable.*

Demostración: Podemos suponer que cada X_i no es vacío (Justificar). Para cada $i \in I$ pongamos $B_i = X_i \times \{i\}$. Sea $B := \bigcup_{i \in I} B_i$. Mostraremos primero que B es numerable. Por la proposición 3.4.2 sabemos que, para cada $i \in I$, existe una función inyectiva $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{N}$. Defina $F : B \rightarrow \mathbb{N} \times I$ mediante $F(x, k) = (f_k(x), k)$. Para ver que F está bien definida, note que si $(x, k) \in B$, entonces existe un (único) natural k tal que $(x, k) \in B_k$, de modo que $x \in B_k$ y por lo tanto $f_k(x)$ está definido. Afirmamos que F es inyectiva. En efecto, supongamos que $F(x, k) = F(y, j)$. Entonces $k = j$ y $f_k(x) = f_j(y) = f_k(y)$, de donde $x = y$, porque f_k es inyectiva. De aquí, F es inyectiva. Ahora bien, por la proposición 3.4.4, $\mathbb{N} \times I$ es numerable, y finalmente por la proposición 3.4.2 concluimos que B es numerable.

Para concluir, observe que la función $\pi : B \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ dada por $\pi(x, k) = x$ es sobreyectiva (justificar) y el resultado se sigue del ejercicio 1. ■

Proposición 3.4.6. \mathbb{Z} y \mathbb{Q} son numerables.

Demostración: Sabemos que \mathbb{Z} es la unión de tres conjuntos numerables (\mathbb{N} , $\{0\}$ y $-\mathbb{N}$) y en consecuencia, \mathbb{Z} es numerable. En particular, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ es numerable y como la función $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(m, n) = m/n$; es sobreyectiva, se sigue del ejercicio 1 que \mathbb{Q} es numerable. ■

Ejemplo 3.4.7. *Un conjunto no numerable.* El ejemplo típico de un conjunto no numerable es $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En efecto, por el ejercicio 2 de la sección 3.3 sabemos que \mathbb{N} y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no son equipotentes y es claro que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es finito (por ejemplo, contiene los conjuntos de la forma $\{n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$), por lo tanto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable. A continuación daremos una demostración diferente de este hecho.

Considere el conjunto A formado por todas las funciones de \mathbb{N} en $\{0, 1\}$. A cada $X \subset \mathbb{N}$ le asociamos una función $g_X : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ de la manera siguiente: $g_X(n) = 1$ si $n \in X$ y $g_X(n) = 0$ si $n \notin X$. Considere la función $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow A$ dada por $F(X) = g_X$. Dejamos a cargo del lector interesado el demostrar que F es una biyección y en consecuencia A y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son equipotentes.

Ahora mostraremos que A no es numerable. Basta mostrar que si $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ es una función, entonces Φ no es sobreyectiva. Para facilitar la lectura denotaremos $\Phi(n)$ por f_n . Definamos $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ de la siguiente manera: $f(n) = 0$ si $f_n(n) = 1$ y $f(n) = 1$ si $f_n(n) = 0$. Es claro $f \in A$ pero $f \neq f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que f no pertenece al rango de Φ . Lo cual dice que Φ no es sobreyectiva y con esto termina la demostración.

Una vez que se tiene a la mano un conjunto no numerable, como el descrito en el ejemplo anterior, la proposición que veremos a continuación provee un método para mostrar que un conjunto no es numerable. Por ejemplo, puede ser usada para mostrar que \mathbb{R} no es numerable (ver sección 4.11).

Proposición 3.4.8. *Sean A, B conjuntos. Si A no es numerable y existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$, entonces B no es numerable.*

Demostración: Es una consecuencia directa de la proposición 3.4.2. ■

Ejercicios.

1. a) Pruebe que si $f : A \rightarrow B$ es inyectiva y B es numerable, entonces A es numerable.
b) Pruebe que si $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva y A es numerable, entonces B es numerable.
2. Pruebe que $n(n+1)$ es par para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluya que $f(p, q)$ es par, donde f es la función definida en la prueba de la proposición 3.4.3. Muestre que la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(p, q) = f(p, q)/2$ es biyectiva. *Ayuda.* Pruebe que $g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es inductivo.

3. Pruebe que la función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $h(p, q) = 2^p 3^q$ es inyectiva. *Ayuda.* Note que 3^n es impar para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. Pruebe que si A es infinito, entonces existe una función inyectiva $h : \mathbb{N} \rightarrow A$. *Ayuda.* Sea \mathcal{F} la familia de todos los subconjuntos finitos de A . Por el axioma de elección podemos fijar un elemento $x_B \in A \setminus B$, para cada $B \in \mathcal{F}$. Use el teorema 3.1.1 para encontrar una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $g(1) = \emptyset$ y $g(n+1) = g(n) \cup \{x_{g(n)}\}$. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ por $h(n) = x_{g(n)}$.
5. Demuestre la proposición 3.4.4.

3.5. \mathbb{R} no es numerable.

En esta sección mostraremos que \mathbb{R} no es numerable. Usaremos el siguiente resultado que es importante por si mismo. Recordemos que un intervalo cerrado $[a, b]$, donde $a \leq b$, es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los números reales x tales que $a \leq x \leq b$. Se dice que el intervalo $[a, b]$ no es degenerado cuando a y b no son iguales.

Teorema 3.5.1. (*El teorema de los intervalos encajados de Cantor*) Sea $I_n = [a_n, b_n]$, con $a_n < b_n$, un intervalo para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.

Demostración: Como por hipótesis $I_{n+1} \subset I_n$, entonces se tiene que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \tag{5.1}$$

Por lo tanto

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

Sea B el siguiente conjunto

$$B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

De (5.1) se tiene que cada a_n es una cota inferior de B . Por consiguiente B tiene ínfimo, sea z el ínfimo de B . Por la misma razón tenemos que $a_n \leq z$ para todo n . Por lo tanto $a_n \leq z \leq b_n$. Esto muestra que $z \in I_n$ para todo n , es decir, $z \in \bigcap_n I_n$. ■

Teorema 3.5.2. \mathbb{R} no es numerable.

Demostración: Mostraremos que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces f no es sobreyectiva. Para esto construiremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un intervalo cerrado y acotado I_n con las siguientes propiedades:

- (i) $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $f(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos por un momento que hemos definido una colección de intervalos con esas características. Por el teorema 3.5.1 existe $r \in \bigcap_n I_n$. Por la condición (ii) se tiene que $r \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, f no es sobreyectiva.

Ahora indicaremos cómo construir una sucesión de intervalos con las propiedades (i) y (ii). Comencemos por elegir un intervalo cerrado I_1 tal que $f(1) \notin I_1$. Por ejemplo, I_1 podría ser $[f(1) + 1, f(1) + 2]$. Supongamos que I_k ha sido construido para cada $k \leq n$ y tal que (i) y (ii) son satisfechas. Entonces para definir I_{n+1} observe que es posible encontrar un intervalo cerrado no degenerado $J \subset I_n$ tal que $f(n+1) \notin J$. Defina $I_{n+1} = J$.

■

Ejercicios.

1. Muestre que todo intervalo no degenerado no es numerable.
2. Muestre la afirmación hecha al final de la demostración del teorema 3.5.2. Es decir, si I es un intervalo cerrado no degenerado y $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, entonces existe $J \subset I$ intervalo cerrado no degenerado tal que $x \notin J$.

Capítulo 4

Sucesiones y Series

En este capítulo introducimos los conceptos fundamentales de *convergencia de sucesiones* y *series* y estudiamos sus relaciones con las operaciones algebraicas y con el orden usual de \mathbb{R} . En la sección 4.8 se prueba *la completitud de \mathbb{R}* , el cual es quizás, el resultado teórico más importante del capítulo. Este resultado dice que toda sucesión de Cauchy de números reales, converge.

En la última sección, introducimos la noción de *red*. Este concepto generaliza la noción de sucesión, y será utilizado en el estudio de las integrales impropias (su lectura puede posponerse hasta para cuando se estudie la sección 8.6).

4.1. Sucesiones y convergencia de sucesiones.

Las nociones de convergencia y de límite se basan en el concepto más elemental de distancia. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. El número $|x - y|$ se conoce como la distancia de x a y . Esta distancia satisface la propiedad (o desigualdad) triangular. Es decir,

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|; \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

En efecto, basta notar que, $x - z = (x - y) + (y - z)$, y aplicar la proposición 2.8.3.

Dados $a, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, definimos el **entorno (vecindad) de centro a y radio r** ; denotado provisionalmente por $E(a, r)$; como el conjunto de aquellos puntos (elementos) de \mathbb{R} cuya distancia a a es menor que r . En símbolos, $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$. Por la proposición 2.8.2 tenemos que, $x \in E(a, r)$ si y sólo si $a - r < x < a + r$. Por esta razón, $E(a, r)$ se denota más comúnmente por $(a - r, a + r)$ y se llama el **intervalo de centro a y radio r** .

Sea A un conjunto no vacío. Toda aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, será llamada una **sucesión** de A . Usualmente, una sucesión f suele indicarse con el símbolo $\{x_n\}_n$, donde $x_n = f(n)$. La letra n , en esta notación es “muda”, en el sentido que podemos usar otras letras como i, j, k, m etc. A veces, abusando un poco de la notación, se escribe simplemente $\{x_n\}$ en lugar de $\{x_n\}_n$, pudiendo

confundirse $\{x_n\}$ con un conjunto de solo elemento, en estos casos el contexto indicará si estamos hablando de una sucesión.

Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de \mathbb{R} . Diremos que $\{x_n\}_n$ es **convergente** si existe $a \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

Esto equivale a decir que, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, cuando $n > n_0$. En este caso, también se dice que $\{x_n\}_n$ **converge ó tiende a a** . El natural n_0 , de esta definición, depende en general del valor que tome ϵ , y será más grande mientras más pequeño sea ϵ .

Ejemplos 4.1.1. 1. Sea $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\{x_n\}_n$ converge a 0. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana de \mathbb{R} (ver proposición 2.5.1), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > 1/\epsilon$. Por lo tanto, $|1/n| < \epsilon$ para todo $n \geq n_1$.

Más generalmente, para cada $z \in \mathbb{R}$ se tiene que la sucesión $x_n = z/n$ converge a 0.

2. Si $0 < z < 1$, entonces la sucesión $x_n = z^n$ converge a 0. Para ver esto, primero observemos que al multiplicar por z ambos lados de la desigualdad $z < 1$ obtenemos que $z^2 < z$ y en general se cumple que

$$0 < z^{n+1} < z^n < \dots < z^2 < z < 1. \quad (1.1)$$

Esto sugiere que la sucesión $\{x_n\}_n$ “tiende” a $\inf\{z^n : n \geq 1\}$. En efecto, para simplificar la notación, sea $a := \inf\{z^n : n \geq 1\}$. De las propiedades del ínfimo (proposición 2.6.2) se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal $z^{n_1} < a + \epsilon$. Usando (1.1) se concluye que $z^n < a + \epsilon$ para todo $n \geq n_1$. Como $a \leq z^n$ para todo n , entonces $|z^n - a| < \epsilon$ si $n \geq n_1$. Es decir, $\{x_n\}_n$ converge a a .

Finalmente mostraremos que $a = 0$. Notemos que $a/z \leq z^n$, pues $a \leq z^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $a/z \leq a$ y de aquí se tiene que $a(1 - z) \leq 0$. Como $z < 1$, entonces $a \leq 0$ y por lo tanto $a = 0$ (por la tricotomía).

Para indicar que una sucesión $\{x_n\}_n$ de \mathbb{R} converge a $a \in \mathbb{R}$, usaremos cualquiera de los siguientes símbolos:

$x_n \rightarrow a$, que se lee: x_n tiende a a .

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que se lee: a es el límite de x_n cuando n tiende a infinito.

En lo que sigue, $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ denotarán sucesiones de \mathbb{R} . La próxima proposición dice que si una sucesión es convergente, entonces converge a un sólo número.

Proposición 4.1.2. Si $\{x_n\}_n$ converge a $a \in \mathbb{R}$ y también converge a $b \in \mathbb{R}$, entonces $a = b$.

Demostración: Supongamos $a \neq b$ y definamos $\epsilon = |a - b|/2$. Ya que $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}_n$ converge a a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, si $n > n_0$. Por la misma razón, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - b| < \epsilon$, si $n > m_0$. Escojamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_0$ y $k > m_0$ (por ejemplo $k = m_0 + n_0$), entonces $|x_k - a| < \epsilon$, $|x_k - b| < \epsilon$, y por la propiedad triangular, $|a - b| \leq |a - x_k| + |x_k - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a - b|$. Por lo tanto, $|a - b| < |a - b|$ y esto contradice la ley de tricotomía y termina la prueba. ■

Ahora introduciremos algunas nociones que serán útiles para todo lo que sigue. Sea $a \in \mathbb{R}$ y definamos $x_n = a$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}_n$ es llamada la **sucesión constante** de valor a . El lector comprobará que ella converge a a .

El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se llama el **rango de la sucesión** $\{x_n\}_n$ (observe la diferencia en la notación). Por ejemplo, el rango de la sucesión $\{1/n\}$ es el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Y el rango de la sucesión $\{(-1)^n\}$ es $\{-1, 1\}$.

Si el rango de una sucesión es un conjunto acotado, diremos que la sucesión $\{x_n\}_n$ es **acotada**. En otras palabras, $\{x_n\}_n$ es acotada, si existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver la importancia de concepto, basta notar que toda sucesión convergente es acotada (ver ejercicio 5)

Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión y $m \in \mathbb{N}$, usaremos el símbolo $\{x_n\}_{n \geq m}$ para denotar la sucesión dada por la función $f(k) = x_{m+k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicios.

1. a) Sea $x_n = \frac{7n^2+8}{3n^2+5}$. Pruebe que $x_n \rightarrow 7/3$.
 b) Sea $x_n = \frac{3}{n^3+n+3}$. Pruebe que $x_n \rightarrow 0$.
2. Suponga que $\{x_n\}_n$ es convergente. Pruebe que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_m - x_n| < 2\epsilon$, si $n, m > n_0$. Deduzca que $\{(-1)^n\}$ no es convergente.
3. Pruebe que si $x_n \rightarrow a$, entonces $|x_n| \rightarrow |a|$. Dé un ejemplo donde el recíproco falla. Sin embargo, se tiene que $x_n \rightarrow 0$ si y sólo si $|x_n| \rightarrow 0$.
4. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión y $n_0 \in \mathbb{N}$. Pruebe que
 - a) $\{x_n\}_n$ es convergente si y sólo si $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ es convergente.
 - b) $\{x_n\}_n$ es acotada si y sólo si $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ es acotada.
5. Pruebe que toda sucesión convergente es acotada.

6. Pruebe que si $x_n \rightarrow 0$ e $\{y_n\}_n$ es acotada, entonces $x_n y_n \rightarrow 0$.
7. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de A . Pruebe que $b = \sup(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_n$ de A que converge a b .

4.2. Operaciones algebraicas entre sucesiones

En el conjunto de sucesiones de \mathbb{R} podemos introducir operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división. Más precisamente, dadas sucesiones $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ de \mathbb{R} , definimos nuevas sucesiones de \mathbb{R} por: $\{x_n + y_n\}_n, \{x_n - y_n\}_n, \{x_n y_n\}_n$. Si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, también definimos la **sucesión cociente** $\{x_n/y_n\}_n$. Si $\{x_n\}_n$ es la sucesión constante de valor λ , entonces la sucesión $\{x_n y_n\}_n$ se denota por $\{\lambda y_n\}_n$.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. *Si $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$, entonces*

- i) $x_n + y_n \rightarrow a + b$,
- ii) $\lambda x_n \rightarrow \lambda a$, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$,
- iii) $x_n y_n \rightarrow ab$,
- iv) $x_n/y_n \rightarrow a/b$, si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$.

La demostración de esta proposición la daremos al final de esta sección pues se deducirá de algunas propiedades que poseen las operaciones entre números reales. Sean a, b, c, d números reales. Es intuitivamente claro que si a y b están cerca en la recta y también lo están c y d , entonces $a+c$ y $b+d$ deben estar cerca. Algo similar ocurre con las otras operaciones algebraicas en \mathbb{R} . En esta sección mostraremos rigurosamente estos hechos que pueden resumirse diciendo que las operaciones algebraicas en \mathbb{R} son continuas (el significado preciso de esta expresión se aclarará más adelante).

Recordamos que dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, se define $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ y $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

Proposición 4.2.2. *Sean $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ con $r, s > 0$. Entonces*

- i) $(a - r, a + r) + (b - s, b + s) \subset (a + b - (r + s), a + b + (r + s))$,
- ii) $(a - r, a + r) \cdot (b - s, b + s) \subset (ab - \rho, ab + \rho)$; donde $\rho := r|b| + s|a| + rs$,
- iii) Sean $a, r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r < |a|$ y sea $\rho = r/[|a|(|a| - r)]$. Si $x \in (a - r, a + r)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1} - \rho, a^{-1} + \rho)$.

Demostración: i) Sean $x \in (a - r, a + r)$ e $y \in (b - s, b + s)$. Entonces $|x - a| < r$ y $|y - b| < s$. Note $(x + y) - (a + b) = (x - a) + (y - b)$, luego por la desigualdad triangular obtenemos

$$|(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| < r + s.$$

A fin de probar ii), invitamos al lector a verificar previamente la siguiente identidad:

$$xy - ab = (x - a)b + a(y - b) + (x - a)(y - b). \quad (2.1)$$

Ahora fijemos $x \in (a - r, a + r)$ e $y \in (b - s, b + s)$. Usando (2.1) y la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} |xy - ab| &\leq |(x - a)b| + |a(y - b)| + |(x - a)(y - b)| \\ &= |x - a||b| + |a||y - b| + |x - a||y - b| \\ &< r|b| + |a|s + rs. \end{aligned}$$

Para mostrar iii), sea $x \in (a - r, a + r)$, esto es, $|a - x| < r$. Como $a = x + (a - x)$, por la desigualdad triangular, se tiene que $|a| < |x| + r$. De aquí,

$$|x| > |a| - r > 0, \quad (2.2)$$

de donde, $x \neq 0$. Por otra parte, $1/x - 1/a = (a - x)/ax$, así que,

$$|x^{-1} - a^{-1}| = \frac{|x - a|}{|a||x|} < \frac{r}{|a||x|}$$

y usando (2.2), tenemos que $x^{-1} < (|a| - r)^{-1}$. Y de aquí

$$|x^{-1} - a^{-1}| < \frac{r}{|a|(|a| - r)}.$$

Esto prueba iii). ■

Proposición 4.2.3. Sean $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > 0$, entonces:

- i) Existen $r, s > 0$ tales que, $(a - r, a + r) + (b - s, b + s) \subset (a + b - \epsilon, a + b + \epsilon)$,
- ii) Existen $r, s > 0$ tales que $(a - r, a + r) \cdot (b - s, b + s) \subset (ab - \epsilon, ab + \epsilon)$,
- iii) Sean $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ tales que, $a \neq 0$ y $\epsilon > 0$. Existe $\mu > 0$ tal que si $x \in (a - \mu, a + \mu)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1} - \epsilon, a^{-1} + \epsilon)$.

Demostración: La parte i) se sigue de la proposición 4.2.2(i) tomando (por ejemplo) $r = s = \epsilon/2$. Para probar ii), comencemos tomando $0 < r \leq 1$, tal que $r \leq \epsilon/(|a| + |b| + 1)$ y sea $s = r$. Entonces

$$r|b| + s|a| + r \cdot s = r[|a| + |b| + r] \leq r[|a| + |b| + 1] \leq \epsilon$$

y el resultado se sigue de la proposición 4.2.2(ii). La parte iii) se sigue de 4.2.2(iii), eligiendo $\mu \in \mathbb{R}$ de modo que, $0 < \mu < |a|$ y $\mu \leq \epsilon|a|^2/(1 + \epsilon|a|)$. Note que esta última desigualdad es equivalente a $\mu/[|a|(|a| - \mu)] \leq \epsilon$. ■

Ahora ya tenemos las herramientas necesarias para demostrar 4.2.1.

Demostración de la proposición 4.2.1. La parte i) será dejada como ejercicio. Para ver ii), observe que ii) es un caso particular de iii) tomando $\{y_n\}_n$ la sucesión constante λ . Para probar iii), fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que por la proposición 4.2.3, existen $r, s > 0$ tales que

$$(a - r, a + r) \cdot (b - s, b + s) \subset (ab - \epsilon, ab + \epsilon). \quad (2.3)$$

Ya que $x_n \rightarrow a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (a - r, a + r) \quad \text{si} \quad n > n_1. \quad (2.4)$$

Por el mismo argumento, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y_n \in (b - s, b + s) \quad \text{si} \quad n > n_2. \quad (2.5)$$

Pongamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y sea $n > n_0$ ($n \in \mathbb{N}$). Ya que n es mayor que n_1 y n_2 simultáneamente, entonces (2.4)-(2.5) son válidas al mismo tiempo y, por (2.3), tenemos que $x_n \cdot y_n \in (ab - \epsilon, ab + \epsilon)$. Esto termina la prueba de iii).

Ya que $x_n/y_n = x_n(1/y_n)$, iv) se seguirá de iii) si probamos que $1/y_n \rightarrow 1/b$. Para ello, fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que por la proposición 4.2.3, existe $\mu > 0$ tal que, si $x \in (a - \mu, a + \mu)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1} - \epsilon, a^{-1} + \epsilon)$. Como $y_n \rightarrow b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $y_n \in (b - \mu, b + \mu)$ si $n > n_0$. De aquí, $y_n^{-1} \in (b^{-1} - \epsilon, b^{-1} + \epsilon)$ si $n > n_0$. ■

Ejercicios.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $a \neq b$, existe $\epsilon > 0$ tal que, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon) = \emptyset$.
2. Dé una interpretación geométrica de la identidad (2.1) usada en la proposición 4.2.2, como la diferencia del área de dos rectángulos.
3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Denotaremos por (a, b) el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, por $(-\infty, a)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y por $(a, +\infty)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Muestre que

$$(i) \quad (a, +\infty) + (c, +\infty) = (a + c, +\infty),$$

$$(ii) \quad (-\infty, a) + (-\infty, c) = (-\infty, a + c),$$

$$(iii)^* \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

4.3. Propiedades de las sucesiones convergentes.

En esta sección mostraremos algunas propiedades de las sucesiones convergentes relativas al orden de \mathbb{R} .

Proposición 4.3.1. *i) Si $x_n \rightarrow a$ y $x_n \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \geq 0$,*

ii) Si $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ y $x_n \geq y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \geq b$.

Demostración: i) Supongamos, por reducción al absurdo, que $a < 0$ y sea $\epsilon = -a/2$. Ya que $x_n \rightarrow a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, si $n > n_0$. Pero $x_n - a > 0$ porque $x_n \geq 0$ y estamos suponiendo que $a < 0$. De aquí, $x_n - a < \epsilon$ para $n > n_0$, y en consecuencia, $x_n < a + \epsilon = a/2 < 0$, si $n > n_0$. Esto es imposible, pues por hipótesis $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Con esto termina la prueba de i).

ii) Observemos que a partir de la proposición 4.2.1 parte ii), se tiene que $-y_n \rightarrow -b$. De aquí y de la parte i) de esa proposición, $x_n - y_n \rightarrow a - b$. Por hipótesis, $x_n - y_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, y de la parte i) concluimos que $a - b \geq 0$. ■

Ejemplo 4.3.2. Mostraremos que no es válido un resultado análogo a la proposición 4.3.1 para $<$ en lugar de \leq . Considere las sucesiones $x_n = 1/n$ y $y_n = 2/n$, para $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $x_n < y_n$, pero ambas convergen a 0.

Proposición 4.3.3. *Si $0 \leq x_n \leq y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y_n \rightarrow 0$, entonces $x_n \rightarrow 0$.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|y_n| < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Como $|x_n| \leq |y_n|$ para todo n , entonces $|x_n| < \epsilon$ si $n \geq n_0$. ■

Ejemplo 4.3.4. Si $x > 1$, entonces $x^{1/n} \rightarrow 1$. En efecto, como $x^{1/n} > 1$, podemos escribir $x^{1/n} = 1 + b_n$, para algún $b_n > 0$. Por definición de raíz n -ésima, $x = (1 + b_n)^n$, y por la desigualdad de Bernoulli (ver ejercicio 9 de la sección 3.2), $(1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$. En consecuencia, $0 < b_n \leq (x - 1)/n$. Como $(x - 1)/n \rightarrow 0$, entonces por la proposición 4.3.3 tenemos que $b_n \rightarrow 0$. Luego $1 + b_n \rightarrow 1$ (por la proposición 4.2.1(i)).

Proposición 4.3.5. *Sean $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n, \{z_n\}_n$ sucesiones de \mathbb{R} tales que, $x_n \rightarrow a$ y $z_n \rightarrow a$. Si $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n \rightarrow a$.*

Demostración: Sabemos que $z_n - x_n \rightarrow a - a$. Además, $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$, y por la proposición precedente, $y_n - x_n \rightarrow 0$. De aquí, $(y_n - x_n) + x_n \rightarrow 0 + a$. Es decir, $y_n \rightarrow a$. ■

Ejercicios.

1. Pruebe que si $x_n^2 \rightarrow 0$, entonces $x_n \rightarrow 0$.
2. Pruebe que dado $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{x_n\}_n$ de \mathbb{Q} convergente a x . *Ayuda.* Use la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} (teorema 2.5.4) para hallar un racional x_n tal que $x < x_n < x + 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Pruebe que $a/(n+b) \rightarrow 0$, cualquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $-b \notin \mathbb{N}$.
4. Pruebe que $z^n \rightarrow 0$ si $|z| < 1$. Pruebe que $\{z^n\}_n$ no converge si $|z| > 1$. Concluya que $\{z^n\}_n$ converge si y sólo si $-1 < z \leq 1$.
5. Pruebe que $x^{1/n} \rightarrow 1$ si $x > 0$. Compare este resultado con lo mostrado en el ejemplo 4.3.4.
6. * Pruebe que $n^{1/n} \rightarrow 1$. *Ayuda.* Muestre que $n^{1/n} = 1 + b_n$ para algún $b_n \geq 0$. Use el Binomio de Newton para probar que si $a \geq 0$, entonces $(1+a)^n \geq n(n-1)a^2/2$.
7. * Dados $a, \lambda, t \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, $t \in \mathbb{Q}$ y $\lambda < a^t$. Pruebe que existe $s \in \mathbb{Q}$ con $s < t$ tal que $\lambda < a^s$. *Ayuda.* Busque s de la forma $t - 1/n$ para algún natural n y recuerde que $(a)^{1/n}$ tiende a 1.
8. Pruebe que las dos condiciones siguientes son equivalentes:
 - a) \mathbb{R} es arquimediano,
 - b) $1/n \rightarrow 0$.

4.4. Sucesiones monótonas.

Diremos que $\{x_n\}_n$ es **monótona creciente** o más simplemente **creciente**, si $x_n \leq x_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Cuando la desigualdad es estricta, se dice que $\{x_n\}_n$ es **estrictamente creciente**. Si $x_{n+1} \leq x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\{x_n\}_n$ es **monótona decreciente** o simplemente **decreciente**. Diremos que una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

En el ejemplo 4.1.1 vimos que la sucesión $\{z^n\}_n$, cuando $0 < z < 1$, es decreciente, acotada y converge al ínfimo del rango de la sucesión. Esto es un caso particular de un resultado general que mostraremos a continuación.

Teorema 4.4.1. *Si $\{x_n\}_n$ es creciente y acotada, entonces $\{x_n\}_n$ es convergente y, de hecho, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Análogamente, si $\{x_n\}_n$ es decreciente y acotada, entonces $\{x_n\}_n$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_n$ es creciente y acotada. Pongamos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $a = \sup(A)$. Dado $\epsilon > 0$, por la proposición 2.6.1, existe $x \in A$ tal que, $a - \epsilon < x$. Pero como $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_{n_0}$, y así $a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$ si $n > n_0$ (por ser $\{x_n\}_n$ creciente). Por otra parte, $x_n \leq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (porque $a = \sup(A)$), en consecuencia, $a - \epsilon < x_n \leq a < a + \epsilon$ si $n > n_0$. Esto prueba que $x_n \rightarrow a$.

El caso cuando la sucesión es decreciente será dejado a cargo del lector. ■

Ejemplo 4.4.2. Sea $0 < r < 1$ y considere la siguiente sucesión

$$b_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{i=0}^n r^i.$$

Observe que $b_{n+1} - b_n = r^{n+1} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\{b_n\}_n$ es estrictamente creciente. Se prueba fácilmente por inducción que $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. En consecuencia, $\{b_n\}_n$ converge a $1/(1-r)$ (justifique).

Ejemplo 4.4.3. Considere la siguiente sucesión

$$a_n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/n! = \sum_{i=0}^n 1/i!.$$

Note que $a_{n+1} - a_n = 1/(n+1)! > 0$, así que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Para mostrar que es acotada, note que $2^n < n!$, si $n \geq 4$ (como se verifica fácilmente por inducción). De esto se sigue fácilmente que

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^n = 1 + \sum_{i=0}^n 1/2^i.$$

Ya vimos en el ejemplo 4.4.2 que $\sum_{i=0}^n 1/2^i$ converge a 2. Esto dice que $a_n \leq 3 - 1/2^n$ para todo n . En conclusión, $a_n < 3$ para todo n . Así por el teorema 4.4.1 se tiene que $\{a_n\}_n$ es convergente.

Proposición 4.4.4. La sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_n$ es convergente.

Demostración: Pongamos $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Por el binomio de Newton,

$$x_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} n^{-i}.$$

Note que $\binom{n}{i} n^{-i} \leq 1/i!$ (verificarlo). Luego

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{i=0}^n 1/i!. \quad (4.1)$$

Por lo visto en el ejemplo 4.4.3, concluimos que $x_n < 3$ y claramente $1 < x_n$ para todo n . Así, $\{x_n\}_n$ es acotada.

Por el teorema 4.4.1, es suficiente que demos demos que $\{x_n\}_n$ es creciente, pues ya vimos que es acotada. Para ello notemos que

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i} > \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i}.$$

Por esto, bastará mostrar que

$$\binom{n}{i} n^{-i} \leq \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i}, \quad (4.2)$$

si $0 \leq i \leq n$. Es claro que esta desigualdad es válida para $i = 0$, luego supondremos que $1 \leq i \leq n$. Notemos que

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} n^{-i} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(i-1))}{i! \cdot n^i} \\ &= \frac{1}{i!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-(i-1)}{n} \\ &= \frac{1}{i!} (1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{i!} (1) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{i!} \frac{n+1}{n+1} \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n+1-(i-1)}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i}. \end{aligned}$$

Donde la desigualdad arriba es válida ya que $1 - \frac{j}{n} \leq 1 - \frac{j}{n+1}$ para todo $j \leq n$. ■

Observación: Otra manera de mostrar la desigualdad (4.2) es observando que, por la definición de factorial, esa desigualdad es equivalente a la siguiente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^i \leq 1 + \frac{i}{n+1-i}, \quad (4.3)$$

la cual es obviamente válida para $i = 0, 1$. Supongamos ahora que (4.3) es válida para algún $i < n$, entonces

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{i+1} &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{i}{n+1-i}\right) = \left(1 + \frac{i+1}{n+1-i}\right) + \left(\frac{1}{n(n+1-i)}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{i+1}{n-i}\right) - \frac{i}{(n-i)(n+1-i)} \leq 1 + \frac{i+1}{n+1-(i+1)} \end{aligned}$$

lo cual dice que (4.3) es válida para $i + 1$. Por inducción tenemos que (4.3) es válida para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

El límite de la sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_n$ juega un papel tan importante en matemática, que se optó por denotarlo con un signo particular; a saber, la letra e . Es decir,

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Proposición 4.4.5. (i) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n 1/i!$

$$(i) \quad 0 < e - \sum_{i=0}^n 1/i! < 1/n!n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) e es irracional.

Demostración: Para simplificar la notación, sea $a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$.

(i) Ya vimos en (4.1) que $(1 + \frac{1}{n})^n \leq a_n$. Por lo tanto, $e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (justifique). Por otra parte, fijado $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(1 + \frac{1}{n})^n \geq \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} n^{-i}$, para cualquier $n \geq m$ con $n \in \mathbb{N}$. Además, de la demostración de la proposición 4.4.4 se concluye que, fijando i , $\binom{n}{i} n^{-i} \rightarrow \frac{1}{i!}$ cuando $n \rightarrow +\infty$. En consecuencia, $e \geq a_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y con esto termina la demostración de la parte (i).

Para ver (ii), se tiene que, para $m > n$,

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(m)} \right) \\ &\leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m-n} \frac{1}{(n+1)^i}. \end{aligned}$$

En consecuencia, fijando n y tomando límite cuando $m \rightarrow +\infty$ y recordando lo mostrado en el ejemplo 4.4.2 (con $r = 1/(n+1)$), se obtiene que

$$e - a_n < \frac{1}{n!n}.$$

Como $\{a_n\}_n$ es estrictamente creciente, entonces $0 < e - a_n$ para todo n .

(iii) Supongamos, por reducción al absurdo, que e es racional. Sean entonces p, q naturales tales que $e = p/q$. De lo mostrado en (ii) con $n = q$ se tiene (multiplicando por $q!$) que

$$0 < p(q-1)! - q!a_q < 1/q \leq 1. \quad (4.4)$$

Es fácil verificar que $q!a_q$ es un número natural y en consecuencia $p(q-1)! - q!a_q$ también lo es. Esto contradice (4.4). ■

Ejercicios.

1. Pruebe que si $\{x_n\}_n$ es creciente, entonces $x_m \leq x_n$ cuando $m < n$.
2. Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$. Pruebe que $\{x^{1/n}\}_n$ es decreciente.
3. Pruebe que $\{n/x^n\}_n$ es decreciente si $x \geq 2$.
4. Pruebe que $\{x_n\}_n$ es creciente si y sólo si $\{-x_n\}_n$ es decreciente.
5. Suponga que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq x_{n+1}$ si $n > n_0$. Pruebe que $\{x_n\}_n$ es convergente si ella es acotada.
6. Pruebe que $x^n/n! \rightarrow 0$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Suponga primero que $x > 0$ y escoja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq x$. Sea $x_n := x^n/n!$ para $n \geq n_0$. Aplique el ejercicio anterior para deducir que $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ converge a algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que $x_{n+1} = x_n([x/(n+1)])$, y $x_{n+1} \rightarrow \lambda$.
7. Use los argumentos del ejercicio anterior para mostrar que $n/x^n \rightarrow 0$, si $x > 1$.
8. Considere la sucesión $\{x_n\}_n$ definida recursivamente de la manera siguiente: $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$, para $n \geq 1$. Pruebe que $\{x_n\}_n$ no es acotada. *Ayuda:* Use el teorema 4.4.1.
9. Considere la sucesión $\{x_n\}_n$ definida recursivamente de la siguiente manera: $x_1 = 1$ y para $n \geq 1$ se cumple que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Pruebe que es convergente ¿Puede determinar su límite?. *Ayuda:* Pruebe que $\{x_n\}_n$ es acotada inferiormente y que a partir de $n = 2$ es decreciente.

10. * En los siguientes ejercicios damos los resultados necesarios para definir la función exponencial e^x . No haremos uso de ellos en lo que resta del libro. Pondremos $F_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

- a) Use los argumentos de la demostración de la proposición 4.4.4 para probar que $\{F_n(x)\}_n$ es creciente y acotada, si $0 < x \leq 1$.
- b) Pruebe que si $b_n \rightarrow +\infty$, entonces $(1 + 1/nb_n)^n \rightarrow 1$.
- c) Sean $x, y > 0$. Pruebe que si $\{F_n(x)\}_n$ y $\{F_n(y)\}_n$ son convergentes, entonces $\{F_n(x+y)\}_n$ también lo es y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)F_n(y);$$

Ayuda. Use la parte b) para ver que $F_n(x)F_n(y)/F_n(x+y) \rightarrow 1$.

- d) Use inducción en k para probar que $F_n(k) \rightarrow e^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- e) Pruebe que $\{F_n(x)\}_n$ es convergente si $x > 0$. *Ayuda.* Por la parte a), sólo falta mostrar el caso cuando $x > 1$. En consecuencia, puede suponer que $x = k + r$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < 1$.
- f) Pruebe que $(1 - n^{-2})^n \rightarrow 1$. *Ayuda.* Use la desigualdad de Bernoulli.
- g) Pruebe que $F_n(x)F_n(-x) \rightarrow 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- h) Pruebe que $\{F_n(x)\}_n$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ y pruebe que $F(x+y) = F(x)F(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

4.5. Límites al infinito

En esta sección precisaremos el significado de los límites al infinito. Diremos que $\{x_n\}_n$ **tiende a** $+\infty$, denotado $x_n \rightarrow +\infty$, si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ si $n > n_0$. Análogamente, diremos que $\{x_n\}_n$ **tiende a** $-\infty$, si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < -M$ si $n > n_0$.

Las sucesiones monótonas acotadas son convergentes (por el teorema 4.4.1). La siguiente proposición complementa ese resultado.

Proposición 4.5.1. *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión monótona.*

- i) *Si $\{x_n\}_n$ es creciente y no está acotada superiormente, entonces $x_n \rightarrow +\infty$.*
- ii) *Si $\{x_n\}_n$ es decreciente y no está acotada inferiormente, entonces $x_n \rightarrow -\infty$.*

Demostración: i) Dado $K > 0$, ya que $\{x_n\}_n$ no es acotada superiormente, existe n tal que $x_n > K$. Como $\{x_n\}_n$ es creciente, entonces $x_m > K$ para todo $m \geq n$. Esto muestra lo deseado. La parte ii) la dejaremos a cargo del lector. ■

Observación: Por el teorema 4.4.1 y el resultado anterior, tenemos entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ cualquiera sea la sucesión creciente $\{x_n\}_n$.

Ejemplo 4.5.2. Mostraremos que $z^n \rightarrow +\infty$, si $z > 1$. En efecto, tenemos que $z < z^2 < z^3 < \dots$, es decir que esta sucesión es creciente. Afirmamos que $\{z^n\}_n$ no es acotada superiormente. En efecto, si lo fuera, entonces $\{z^n\}_n$ convergería a un valor a positivo (justifique). Por otra parte tenemos que $z^{n+1} - z = z(z^n - 1)$. Como $\{z^n\}_n$ y $\{z^{n+1}\}_n$ convergen ambas a a , entonces se tiene que $a - z = z(a - 1)$. Simplificando esta igualdad se tiene que $a = az$ y en consecuencia $z = 1$ contradiciendo la hipótesis.

La siguiente proposición nos habla del comportamiento de los límites al infinito en relación a la suma, al producto y al orden. Su demostración quedará a cargo del lector.

Proposición 4.5.3. i) Si $\{x_n\}_n$ es acotada e $y_n \rightarrow +\infty$, entonces $x_n + y_n \rightarrow +\infty$. Análogamente, si $y_n \rightarrow -\infty$, entonces $x_n + y_n \rightarrow -\infty$.

ii) Suponga que $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow +\infty$. Si $a > 0$, entonces $x_n y_n \rightarrow +\infty$ y si $a < 0$, entonces $x_n y_n \rightarrow -\infty$.

iii) Suponga que $x_n \leq y_n$ para todo n . Si $x_n \rightarrow +\infty$, entonces $y_n \rightarrow +\infty$ y si $y_n \rightarrow -\infty$, entonces $x_n \rightarrow -\infty$.

Ejercicios.

1. Complete la demostración de la proposición 4.5.1.
2. Pruebe que $|x_n| \rightarrow +\infty$ si y sólo si $1/x_n \rightarrow 0$.
3. Demuestre la proposición 4.5.3.
4. Sea a un real mayor que 1 y $p \in \mathbb{N}$. Pruebe que $a^n/n^p \rightarrow +\infty$. *Ayuda.* Pruebe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ es creciente. Después muestre que no puede ser acotada.
5. Pruebe que $n^n/n! \rightarrow +\infty$. *Ayuda.* Muestre que $n^n/n!$ es creciente. Después suponga que es acotada y llegue a una contradicción (para esto observe que $(n+1)^{n+1}/(n+1)! = (n^n/n!)(1+1/n)^n$).

4.6. Subsucesiones

El resultado más importante de esta sección dice que toda sucesión acotada se acumula alrededor de algún número (ver teorema 4.6.4). Para aclarar el significado de esta afirmación necesitamos introducir la noción de subsucesión. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión y n_k naturales tales que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$$

Entonces la sucesión

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

dada por $g(k) = x_{n_k}$ se llama una subsucesión de $\{x_n\}_n$. Más formalmente, diremos que $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es **estrictamente creciente**, si $\phi(n) < \phi(m)$ cuando $n < m$. La composición $f \circ \phi$, de una sucesión $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, será llamada una **subsucesión** de f . Si denotamos a f por $\{x_n\}_n$, entonces $f \circ \phi$ es denotada por $\{x_{\phi(n)}\}_n$. La notación usual para $f \circ \phi$ es $\{x_{n_k}\}_k$, donde $n_k = \phi(k)$.

Ejemplo 4.6.1. Considere la sucesión $x_n = 1/n^2$. Las siguientes son subsucesiones con sus correspondiente funciones ϕ : (i) $y_n = 1/4n^2$ donde $\phi(n) = 2n$. (ii) $y_n = 1/2^{2n}$ donde $\phi(n) = 2^n$. Por otra parte, la sucesión

$$1/4, 1, 1/16, 1/9, 1/36, 1/25, \cdots, 1/(2n+1)^2, 1/(2n)^2, \cdots$$

no es una subsucesión de $\{x_n\}_n$.

Proposición 4.6.2. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión y $\{x_{\phi(n)}\}_n$ una subsucesión. Entonces

- i) Si $\{x_n\}_n$ es acotada, entonces $\{x_{\phi(n)}\}_n$ también es acotada.
- ii) Si $\{x_n\} \rightarrow a$, entonces $\{x_{\phi(n)}\} \rightarrow a$.
- iii) Si $\{x_n\}_n$ es monótona creciente, entonces $\{x_{\phi(n)}\}_n$ también lo es. Análogamente para monótona decreciente.
- iv) Si $\{x_{\psi(n)}\}_n$ es una subsucesión de $\{x_{\phi(n)}\}_n$, entonces $\{x_{\psi(n)}\}_n$ también es una subsucesión de $\{x_n\}_n$.

Demostración: i) Suponga que $|x_n| \leq M$ para todo n . Entonces $|x_{\phi(n)}| \leq M$ para todo n . ii) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, si $n > n_0$. Por inducción es fácil mostrar que, por ser ϕ estrictamente creciente, entonces $\phi(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; de modo que $|x_{\phi(n)} - a| < \epsilon$, si $n > n_0$. Dejamos a cargo del lector el resto de la demostración.

La sucesión $x_n = (-1)^n/n$ no es ni creciente ni decreciente, sin embargo tiene una subsucesión decreciente, por ejemplo $\{x_{2n}\}_n$. Este es un hecho general que mostramos a continuación. ■

Teorema 4.6.3. *Toda sucesión tiene una subsucesión monótona*

Demostración: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_k \text{ para todo } k \geq n\}.$$

Por ejemplo, si $\{x_n\}_n$ fuera creciente, entonces $A = \mathbb{N}$. Por otra parte, si $\{x_n\}_n$ fuera estrictamente decreciente, entonces $A = \emptyset$. Por supuesto que estos dos casos son los menos interesantes, pues para ellos la conclusión del teorema es trivial. Sin embargo, sugieren lo que ocurre en general. Hay dos casos posibles:

(i) Supongamos que A es infinito. Podemos enumerar los elementos de A en forma creciente

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$$

Entonces $\{x_{m_k}\}_k$ es una subsucesión creciente de $\{x_n\}_n$. Más formalmente, existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ creciente y sobreyectiva (vea la proposición 3.4.1 y su demostración). Ponga $m_k = \phi(k)$.

(ii) Supongamos que A es finito. Sea n_0 tal que $A \subset \{1, \dots, n_0\}$. Entonces para cada $n > n_0$ existe $k \geq n$ tal $x_n > x_k$. Ahora definiremos inductivamente una sucesión creciente $\{n_j\}_j$ de naturales tales que $x_{n_j} > x_{n_{j+1}}$. Como $n_0 + 1 \notin A$, entonces existe $n_1 > n_0 + 1$ tal que $x_{n_0+1} > x_{n_1}$. Suponga que hemos definido $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ tal que $x_{n_i} > x_{n_{i+1}}$ para todo $i < j$. De nuevo como $n_j \notin A$, entonces existe $n_{j+1} > n_j$ tal que $x_{n_j} > x_{n_{j+1}}$. Con esto queda construida la sucesión $\{n_j\}_j$. Para terminar, notemos que $\{x_{n_k}\}_k$ es una subsucesión decreciente de $\{x_n\}_n$. ■

El resultado que sigue es importante, pues da una condición suficiente para la existencia de subsucesiones convergentes.

Teorema 4.6.4. *Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada. Por el teorema 4.6.3 $\{x_n\}_n$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ monótona que además es acotada (por serlo $\{x_n\}_n$). Por consiguiente $\{x_{n_k}\}_k$ es convergente (por el teorema 4.4.1). ■

El teorema anterior dice que toda sucesión acotada se acumula alrededor de algún punto (precisamente, el punto donde converge la subsucesión mencionada en la conclusión).

Ejercicios.

1. Halle una sucesión que tenga una subsucesión convergente a 1 y otra convergente a 2.
2. Sea $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que $\phi(n) < \phi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que ϕ es estrictamente creciente.
3. Sea $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Use inducción para probar que $\phi(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Pruebe que si $\{x_n\}_n$ no es acotada, entonces $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión $\{x_{h(n)}\}_n$ tal que $|x_{h(n)}| \rightarrow +\infty$. *Ayuda.* Pruebe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $E_n = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq n\}$ es infinito.
5. Determine si el recíproco del teorema 4.6.4 es válido.
6.
 - a) Construya una sucesión que posea una subsucesión (estrictamente) creciente y también otra subsucesión decreciente.
 - b) Suponga que $\{x_n\}_n$ es una sucesión en \mathbb{R} que no tiene subsucesiones decrecientes. ¿Será cierto que $\{x_n\}_n$ es creciente?
7. Pruebe que si las subsucesiones $\{x_{2n-1}\}_n$, $\{x_{2n}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ convergen a $a \in \mathbb{R}$, entonces $x_n \rightarrow a$.
8. Pruebe que si $\{x_{2n-1}\}_n$, $\{x_{2n}\}_n$, $\{x_{3n}\}_n$ son convergentes, entonces $\{x_n\}_n$ es convergente. *Ayuda.* Note que $\{x_{2n-1}\}_n$ y $\{x_{3n}\}_n$ tienen una subsucesión común y que lo mismo ocurre con $\{x_{2n}\}_n$ y $\{x_{3n}\}_n$.
9. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión y sean $\phi_1, \dots, \phi_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente crecientes tales que $f(\phi_i(n)) \rightarrow x$ para todo $i = 1, \dots, m$. Pruebe que si $\phi_1(\mathbb{N}) \cup \dots \cup \phi_m(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, entonces $f(n) \rightarrow x$.
10.
 - a) Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada. Suponga que todas las subsucesiones *convergentes* de $\{x_n\}_n$ convergen al mismo punto. Muestre que $\{x_n\}_n$ es convergente. ¿Seguirá siendo válida la conclusión sin suponer que $\{x_n\}_n$ es acotada?.
 - b) Suponga que todas las subsucesiones *monótonas* de $\{x_n\}_n$ convergen al mismo punto. Muestre que $\{x_n\}_n$ es convergente.

4.7. Límites superior e inferior

Si $\{x_n\}_n$ es acotada definimos:

$$\bar{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\} \text{ y } \underline{x}_n = \inf\{x_i : i \geq n\}.$$

El lector verificará que $\{\bar{x}_n\}_n$ es una sucesión acotada monótona decreciente y que $\{\underline{x}_n\}_n$ es acotada monótona creciente. Por el teorema 4.4.1, la sucesión $\{\bar{x}_n\}_n$ (resp. $\{\underline{x}_n\}_n$) tiene límite, que denotaremos por $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ (resp. $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$) y que llamaremos el **límite superior** (resp. **límite inferior** de $\{x_n\}$).

Note que $\underline{x}_n \leq \bar{x}_n$; para cada $n \in \mathbb{N}$; y en consecuencia, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ (ver proposición 4.3.1).

Si $\{x_n\}_n$ no está acotada superiormente (resp. inferiormente), se define $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (resp. $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

Ejemplo 4.7.1. Considere la sucesión $x_n = (-1)^n + 1/n$. Se tiene que $-1 \leq x_n \leq 2$ y por lo tanto $\{x_n\}_n$ es acotada. Por otra parte

$$\bar{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \frac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así que los primeros términos de la sucesión $\{\bar{x}_n\}_n$ son:

$$1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6}, \dots,$$

y $\limsup x_n = 1$. Razonando de manera análoga se puede verificar que la sucesión $\{\underline{x}_n\}$ es constante igual a -1 y por lo tanto $\liminf x_n = -1$.

Proposición 4.7.2. *Supongamos que $\{x_n\}_n$ es acotada. Entonces $\{x_n\}_n$ es convergente si y sólo si sus límites superior e inferior coinciden. En ambos casos, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*

Demostración: Sea \bar{x} el límite de $\{\bar{x}_n\}_n$ y \underline{x} el límite de $\{\underline{x}_n\}_n$. Supongamos que $\bar{x} = \underline{x}$. Ya que $\underline{x}_n \leq x_n \leq \bar{x}_n$, se sigue de la proposición 4.3.5 que $\{x_n\}_n$ converge a \bar{x} .

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_n$ es convergente y notemos que, por la proposición 2.8.5,

$$\bar{x}_n - \underline{x}_n = \sup\{|x_i - x_j| : i, j \geq n\}. \quad (7.1)$$

Por otra parte, mostraremos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x_j| < \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existe n_0 tal que $|x_n - x| < \epsilon/2$ si $n \geq n_0$.

Luego como $x_n - x_m = x_n - x + x - x_m$, entonces por la desigualdad triangular, se tiene que $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon$ si $n, m \geq N$. De aquí y (7.1), concluimos que $\bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \epsilon$, si $n \geq n_0$. En consecuencia, $|\bar{x} - \underline{x}| \leq \epsilon$ (justifique). Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, concluimos que $\bar{x} = \underline{x}$. ■

Ejercicios.

1. Determine los primeros términos de la sucesiones $\{\bar{x}_n\}_n$ y $\{\underline{x}_n\}_n$ para cada una de las siguientes sucesiones y calcule $\limsup x_n$ y $\liminf x_n$:
 - a) $x_n = (-1)^n + (-1)^n/n$.
 - b) $x_n = [n + (-1)^n(3n - 1)]/n$.
2. Sea \bar{x} el límite superior de $\{x_n\}_n$. Pruebe que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \bar{x} + \epsilon$ si $n \geq N$.
3. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada y $\{x_{n_k}\}_k$ una subsucesión convergente. Muestre que

$$\liminf x_n \leq \lim x_{n_k} \leq \limsup x_n.$$

4.8. Sucesiones de Cauchy

Se dice que $\{x_n\}_n$ es **de Cauchy**, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \epsilon$, si $m, n > n_0$.

Ejemplo 4.8.1. Sea $\{x_n\}_n$ la sucesión definida de la siguiente manera:

$$x_{2n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad x_{2n+1} = n.$$

Mostraremos que esta sucesión no es de Cauchy. Veremos que para $\epsilon = 1$ falla la condición. En efecto, fijemos n_0 y sea $n = n_0 + 1$ y $m = n_0 + 3$. Entonces se verifica que $|x_n - x_m| \geq 1$.

La demostración de la siguiente proposición la puede extraer el lector interesado de la prueba de la proposición 4.7.2.

Proposición 4.8.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

El objeto de esta sección es probar el recíproco del resultado anterior. Pero antes de hacerlo mostraremos un resultado que nos hará falta.

Proposición 4.8.3. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < 1$, si $m, n > n_0$. En particular, $|x_n - x_{n_0+1}| < 1$ si $n > n_0$, y por la proposición 2.8.4,

$$|x_n| < 1 + |x_{n_0+1}| \quad \text{si } n > n_0. \quad (8.1)$$

Sea $M := \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + |x_{n_0+1}|\}$, entonces $|x_i| \leq M$ para $1 \leq i \leq n_0$. Además $1 + |x_{n_0+1}| \leq M$. De esto junto con (8.1) se tiene que $|x_n| \leq M$ para todo n . ■

Teorema 4.8.4. (*Completitud de \mathbb{R}*) *Toda sucesión de Cauchy, en \mathbb{R} , es convergente.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Por la proposición anterior sabemos que $\{x_n\}_n$ es acotada y por tanto tiene límites superior e inferior. Mostraremos que los límites superior e inferior de $\{x_n\}_n$ coinciden y así concluiremos, por la proposición 4.7.2, que $\{x_n\}_n$ es convergente. Sea \bar{x} el límite de $\{\bar{x}_n\}_n$ y \underline{x} el límite de $\{\underline{x}_n\}_n$. Mostraremos que $0 \leq \bar{x} - \underline{x} \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, y de esto concluiremos que $\bar{x} = \underline{x}$. Fijemos $\epsilon > 0$. Por ser $\{x_n\}_n$ de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_j - x_i| \leq \epsilon$, si $i, j \geq n_0$. Por otra parte, por la proposición 2.8.5,

$$\bar{x}_n - \underline{x}_n = \sup\{|x_i - x_j| : i, j \geq n\}.$$

Luego $\bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \epsilon$, si $n \geq n_0$. Como $\underline{x}_n \leq \bar{x}_n$, para todo n , concluimos que $0 \leq \bar{x} - \underline{x} \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (justifique). Y con esto termina la demostración. ■

Ejercicios.

1. En este ejercicio daremos una prueba alternativa de la completitud de \mathbb{R} .
 - a) Pruebe que si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces dicha sucesión converge.
 - b) Use la proposición 4.8.3 y el corolario 4.6.4 para mostrar que toda sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente y luego concluya usando la parte (a).
2. Pruebe que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$, si $p \in \mathbb{N}$ y $n > n_0$.
3. Sean $A_n \subset \mathbb{R}$ conjuntos tales que

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \dots$$

y además que

$$|x - y| < 1/n \text{ para todo } x, y \in A_n.$$

Muestre que si $\{x_n\}_n$ es una sucesión tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}_n$ es convergente.

4. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en \mathbb{R} y defina

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ t_n &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|. \end{aligned}$$

Muestre que si $\{t_n\}_n$ es convergente también lo es $\{s_n\}_n$. *Ayuda:* Por la desigualdad triangular $|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m|$.

5. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión con la siguiente propiedad

$$\exists n_0, \forall i, j \geq n_0, |x_i - x_j| < 1.$$

Muestre que $\{x_n\}_n$ es acotada. Compare la hipótesis de este ejercicio con la de la proposición 4.8.3.

6. * Sea \mathcal{S} el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Dadas $f, g \in \mathcal{S}$, escriba $f \simeq g$ si $f(n) - g(n) \rightarrow 0$ y pruebe que \simeq es una relación de equivalencia en \mathcal{S} . Denote por \mathbb{R}_0 el conjunto cociente de \mathcal{S} por \simeq y pruebe que la función $L : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}; L([f]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$; está bien definida y es biyectiva. Aquí, $[f]$ denota la clase de $f \in \mathcal{S}$ según \simeq (Ver sección 1.3).

Observación. El ejercicio 6 dice que el cuerpo de los números reales puede ser construido, una vez conocido el cuerpo de los números racionales, a través de ciertas clases de sucesiones de Cauchy de números racionales.

4.9. Series.

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las series numéricas. Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión. La serie asociada a $\{a_n\}_n$ se definirá para darle sentido a la siguiente suma “infinita”

$$a_1 + \cdots + a_n \cdots$$

Esta expresión se llama **serie de término general** a_n y se denota por $\sum_n a_n$. Primero definimos la **n-ésima suma parcial** s_n de la serie $\sum_n a_n$ como

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Si la sucesión $\{s_n\}_n$ converge, diremos que la serie $\sum_n a_n$ es **convergente**. En caso contrario, se dice que la **serie diverge**. Si la serie $\sum_n a_n$ converge, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}_n$ se llama la **suma de** $\sum_n a_n$ y se denota también por $\sum_n a_n$. Este abuso de notación no causa, en general, confusión. En fin, la serie $\sum_n a_n$ también suele indicarse por $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ ó por $a_1 + a_2 + \cdots$.

Observación 4.9.1. Podemos formalizar aún más el concepto de serie recurriendo a los resultados de la sección 3.1. En efecto, dada una sucesión $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, por el teorema 3.1.3, existe una única función $\Sigma_f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\Sigma_f(1) = f(1)$ y $\Sigma_f(n+1) = \Sigma_f(n) + f(n+1)$. Esta sucesión Σ_f corresponde a la sucesión de sumas parciales y también es llamada la serie asociada a f (ver ejemplo 3.1.6).

Ejemplo 4.9.2. *La serie geométrica.* Sea $r \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_n r^{n-1} = 1 + r + \dots + r^{n+1} + \dots,$$

se conoce con el nombre de **serie geométrica de razón r** . La sucesión de sumas parciales de esa serie ya fué estudiada en el ejemplo 4.4.2. Sabemos que la n -ésima suma parcial, $s_n = 1 + \dots + r^{n-1}$, de esa serie, viene dada por $s_n = (1 - r^n)/(1 - r)$ si $r \neq 1$ y $s_n = n$ si $r = 1$. En particular, la serie diverge si $r = 1$. Por otra parte, también sabemos que la sucesión $\{r^n\}$ converge si y sólo si $-1 < r \leq 1$ y además $r^n \rightarrow 0$ si $|r| < 1$ (ver el ejercicio 4 de la sección 4.3). En consecuencia, la serie geométrica de razón r converge si y sólo si $|r| < 1$ y, en este caso, su suma es $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1/(1 - r)$.

Proposición 4.9.3. *Si $\sum_n a_n$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.*

Demostración: Sea s_n la n -ésima suma parcial de la serie en cuestión. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \rightarrow s$. Como $\{s_{n+1}\}_n$ también converge a s , por ser una subsucesión de $\{s_n\}_n$, entonces $s_{n+1} - s_n \rightarrow 0$. Pero $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, en consecuencia $a_{n+1} \rightarrow 0$ y de aquí, $a_n \rightarrow 0$. ■

El recíproco del resultado anterior no es válido como lo ilustra el ejemplo que sigue.

Ejemplo 4.9.4. *La serie armónica.* Probaremos que la serie $\sum_n 1/n$ (llamada **armónica**) diverge, aunque su término general tiende a cero. Sea $s_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ y para k pongamos

$$t_k = s_{2^k} = 1 + 1/2 + \dots + 1/2^k.$$

Probaremos por inducción que $t_k \geq 1 + k/2$. Para ello sea $A = \{k \in \mathbb{N} : t_k \geq 1 + k/2\}$. Ya que $t_1 = s_2 = 3/2$, entonces $1 \in A$. Sea $k \in A$ y pongamos $n = 2^k$. Es fácil ver que

$$t_{k+1} = t_k + \sum_{i=1}^n 1/(n+i)$$

y como $n+i \leq 2n$ para $1 \leq i \leq n$, entonces, $t_{k+1} \geq 1 + k/2 + n/2n = 1 + (k+1)/2$. Es decir, $k+1 \in A$. Por lo tanto $t_k \geq 1 + k/2$; para todo $k \in \mathbb{N}$.

De lo mostrado arriba se concluye que $\{t_k\}_k$ no es acotada (justifique), y en consecuencia $\{s_n\}_n$ no es convergente porque $\{t_k\}_k$ es una subsucesión de $\{s_n\}_n$.

4.10. Series absolutamente convergentes

Se dice que $\sum_n a_n$ es **absolutamente convergente**, si $\sum_n |a_n|$ es convergente.

Proposición 4.10.1. *Toda serie $\sum_n a_n$ absolutamente convergente es convergente y $|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|$.*

Demostración: Sea $\sum_n a_n$ absolutamente convergente y pongamos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$. Por hipótesis, $\{t_n\}_n$ es convergente y en consecuencia de Cauchy. Por otra parte, $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| = t_{n+p} - t_n$; de donde $\{s_n\}_n$ es de Cauchy y en consecuencia convergente. Sean s, t los límites de $\{s_n\}_n$ y $\{t_n\}_n$ respectivamente, ya que $|s_n| \leq t_n$ y $|s_n| \rightarrow |s|$, entonces por la proposición 4.3.1(ii), $|s| \leq t$. ■

Si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, decimos que ella es **condicionalmente convergente**. Veremos más adelante (proposición 4.11.6) que $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ es convergente, y como la serie armónica diverge, entonces $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ es condicionalmente convergente.

Definición 4.10.2. *Si $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una biyección, la serie $\sum_n a_{h(n)}$ es llamada un **reordenamiento de $\sum_n a_n$** .*

Por ejemplo, la serie

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots,$$

es un reordenamiento de la serie

$$\sum_n (-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots.$$

En este caso, la aplicación h viene dada por: $h(3n-2) = 4n-3$, $h(3n-1) = 4n-1$ y $h(3n) = 2n$.

Observación 4.10.3. Si $\sum_n a_n$ es condicionalmente convergente, puede probarse que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento de ella convergente a α (ver, por ejemplo, [10, Pag. 444]).

Proposición 4.10.4. *Si $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente, entonces todo reordenamiento de $\sum_n a_n$ converge y tiene la misma suma que $\sum_n a_n$*

Demostración: Sea $\sum_n a_{h(n)}$ un reordenamiento de $\sum_n a_n$ y pongamos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = a_{h(1)} + \cdots + a_{h(n)}$, $r_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ y $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. Mostraremos que t_n converge a s .

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s| < \epsilon/2$ y $r - r_n < \epsilon/2$, si $n > n_0$. Por otro lado, es fácil probar que $\{j \in \mathbb{N} : h(j) \leq n_0\}$ es acotado y en consecuencia tiene máximo, que denotamos por p . Note que, $h(I_p) \supset I_{n_0}$ (recuerde que I_n denota el conjunto $\{1, \dots, n\}$). Si $n \geq p$, entonces $h(I_n) \supset I_{n_0}$ de modo que, $t_n = s_{n_0} + \sum_{i \in F} a_i$, donde $F = h(I_n) \setminus I_{n_0}$. Sea q el máximo de F . Entonces

$$|t_n - s| \leq |s - s_{n_0}| + \sum_{i \in F} |a_i| \leq \epsilon/2 + \sum_{i=n_0+1}^{i=q} |a_i| \leq \epsilon/2 + r_q - r_{n_0} \leq \epsilon/2 + r - r_{n_0} < \epsilon.$$

Hemos probado que: dado $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $|t_n - s| \leq \epsilon$, si $n \geq p$. ■

Ejercicios.

1. Sean $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ series convergentes y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\sum(a_n + b_n)$ y $\sum_n \lambda a_n$ son convergentes y que, $\sum(a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$, $\sum_n \lambda a_n = \lambda \sum_n a_n$.
2. Sea $N \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\sum_n a_n$ converge si y sólo si $\sum_n a_{n+N}$ converge. Deduzca que lo mismo es cierto para series absolutamente convergentes.
3. Pruebe que el reordenamiento $\sum_n b_n$ de $\sum_n (-1)^{n-1}/n$, dado después de la definición 4.10.2, es convergente y que su suma es $(3/2) \sum (-1)^{n-1}/n$. *Ayuda.* Escriba $t_n = b_1 + \dots + b_n$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$ y pruebe que:
 - a) $\{t_{3n}\}_n$, $\{t_{3n+2}\}_n$ son monótonas, la primera creciente y la segunda decreciente.
 - b) $t_{3n+2} - t_{3n+1} \rightarrow 0$ y $t_{3n+1} - t_{3n} \rightarrow 0$.
 - c) $t_{3n+2} \geq t_{3n+1} \geq t_{3n}$.
 - d) Deduzca que $\{t_{3n}\}_n$, $\{t_{3n+1}\}_n$ y $\{t_{3n+2}\}_n$ son convergentes a un mismo límite. Concluya que $\{t_n\}_n$ es convergente (ver el ejercicio 8 de la sección 4.6).
 - e) $t_{3n} = s_{4n} + s_{2n}/2$.

4.11. Criterios de convergencia de series

Proposición 4.11.1. (*Criterio de Cauchy*). Sea $\sum_n a_n$ una serie con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i \right| < \epsilon \quad \text{si } p \in \mathbb{N} \text{ y } n > N. \quad (11.1)$$

Entonces $\sum_n a_n$ es convergente.

Demostración: Sea s_n la n -ésima suma parcial de la serie en cuestión. De (11.1) se tiene que $|s_{n+p} - s_n| \leq \epsilon$ si $n > N$; de modo que $\{s_n\}_n$ es de Cauchy, y por lo tanto convergente (por el teorema 4.8.4). ■

Proposición 4.11.2. Si $\sum_n a_n$ es una serie de términos no negativos (esto es, $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) y la sucesión $\{s_n\}_n$ de sumas parciales es acotada, entonces $\sum_n a_n$ es convergente.

Demostración: Note que las desigualdades $s_n \leq s_{n+1}$, $a_{n+1} \geq 0$ son equivalentes. Por lo tanto la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada, luego convergente (por el teorema 4.4.1). ■

Proposición 4.11.3. Sean $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ sucesiones en \mathbb{R} tales que $0 \leq a_n \leq b_n$; $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge y $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$. La conclusión sigue siendo válida si para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n > N$.

Demostración: Pongamos $s_n = a_1 + \dots + a_n$ y $t_n = b_1 + \dots + b_n$. Entonces $s_n \leq t_n$ y $\{s_n\}_n$, $\{t_n\}_n$ son crecientes. Por hipótesis, $t_n \rightarrow t$, para algún $t \in \mathbb{R}$, y por ser creciente $t = \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ (teorema 4.4.1). En particular, $0 \leq s_n \leq t_n \leq t$, y por lo tanto, $\{s_n\}_n$ es acotada. Por la proposición 4.11.2, $s_n \rightarrow s$, para algún $s \in \mathbb{R}$, y por la proposición 4.3.1, $s \leq t$. La segunda parte de la proposición se prueba de manera similar y la dejamos al lector (ver ejercicio 2). ■

Proposición 4.11.4. Sean $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ series de términos positivos y supongamos que la sucesión $\{b_n/a_n\}_n$ converge a un número positivo c . Entonces $\sum_n a_n$ es convergente si y sólo si $\sum_n b_n$ es convergente.

Demostración: Pongamos $\epsilon = c/2$ y fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - c \right| < \epsilon, \quad \text{si } n > N.$$

De la definición de ϵ queda, después de algunas manipulaciones, que

$$\frac{c}{2}a_n < b_n < \frac{3c}{2}a_n, \quad \text{si } n > N.$$

La conclusión se obtiene fácilmente usando la proposición 4.11.3 (verificarlo). ■

Proposición 4.11.5. (Criterio del cociente). Supongamos que $a_n \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $c := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, entonces $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente.

b) Si $d := \liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$, entonces $\sum_n a_n$ es divergente.

Demostración: a) Fijemos $b \in \mathbb{R}$ tal que $c < b < 1$ y sea $\epsilon = b - c$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}/a_n| < c + \epsilon = b$, si $n \geq N$. De aquí,

$$\frac{|a_{n+N}|}{|a_N|} = \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdots \frac{|a_{n+N}|}{|a_{n+N-1}|} < b^n.$$

Luego $|a_{n+N}| \leq \lambda b^n$; $n \in \mathbb{N}$; donde $\lambda := |a_N|$. Pero la serie geométrica, de razón b , es convergente (porque $0 < b < 1$), y por la proposición 4.11.3, $\sum_n |a_{n+N}|$ es convergente. De aquí, $\sum_n |a_n|$ es convergente.

b) Fijemos $b \in (1, d)$. Usando el argumento de la parte a), podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+N}| \geq |a_N|b^n$. En consecuencia, la sucesión $\{a_n\}_n$ no puede converger a cero y la conclusión se obtiene usando la proposición 4.9.3. ■

Supongamos que $a_n \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$; y que la sucesión $\{|a_{n+1}/a_n|\}_n$ converge a $c \in \mathbb{R}$. La proposición anterior dice que la serie $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente (resp. divergente) si $c < 1$ (resp. $c > 1$). Sin embargo, en el caso $c = 1$, dicha serie puede ser convergente o divergente, como lo muestran los siguientes ejemplos:

1. Para la serie armónica se tiene que $c = 1$ y esta serie es divergente.
2. Si $a_n = (-1)^{n-1}/n$, entonces $c = 1$ y la serie converge, porque satisface las hipótesis de la proposición 4.11.6, más abajo.

Proposición 4.11.6. (Series alternadas). *Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión decreciente de números reales no negativos, convergente a cero ($a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ y $a_n \rightarrow 0$), entonces $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ converge.*

Demostración: Pongamos $s_n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} a_i$, entonces:

a) $s_{2n-2} - s_{2n} = a_{2n-1} - a_{2n+2} \geq 0$,

b) $s_{2n-1} - s_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$,

c) $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$.

De a) (resp. b)), se tiene que $\{s_{2n}\}_n$ (resp. $\{s_{2n-1}\}_n$) es creciente (resp. decreciente). En particular, $s_{2n} \geq s_2$ y $s_{2n-1} \leq s_1$, y por c), $s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$. Esto prueba que $\{s_{2n}\}_n$ y $\{s_{2n-1}\}_n$ son acotadas y por el teorema 4.4.1, convergentes. Por c) $\{s_{2n}\}_n$ y $\{s_{2n-1}\}_n$ tienen el mismo límite, ya que $a_{2n} \rightarrow 0$. Sea s el límite de ambas, mostraremos que s_n converge a s . Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $|s - s_{2n}| < \epsilon$ y $|s - s_{2n+1}| < \epsilon$ si $n \geq N$. Luego $|s - s_n| < \epsilon$ si $n \geq 2N$. ■

La serie $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n \geq 0$, se dice alternada, porque escrita en la forma $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \cdots$, los términos de la serie van alternando su signo.

Ejemplo 4.11.7. Sea $p \in \mathbb{R}$ un racional positivo. La serie $\sum_n \frac{1}{n^p}$ es llamada una **p-serie**. (En realidad, esta terminología es utilizada para cualquier número real positivo, pero en nuestro caso, todavía no hemos definido el símbolo n^p , para p irracional). Nuestro próximo objetivo es probar que la p-serie converge si y sólo si $p > 1$. Ya sabemos que la serie armónica ($p = 1$) diverge, de suerte que la p-serie diverge si $p \leq 1$. (Justificar). Restaría probar que la p-serie converge si $p > 1$

Proposición 4.11.8. *La p-serie converge si $p > 1$.*

Demostración: Definamos $q = p - 1$, $d_n = n^{-q}$ y $b_n = d_n - d_{n+1}$. Del ejercicio 7, $\sum_n b_n$ converge, y del ejercicio 8, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p b_n = q$, (justificar). La prueba se sigue ahora de la proposición 4.11.4 colocando $a_n = 1/n^p$. ■

Ejemplo 4.11.9. Usaremos los resultados de esta sección para dar otra demostración de que \mathbb{R} no es numerable. Denotaremos por A al conjunto de todas las funciones de \mathbb{N} en $\{0, 1\}$. La demostración que presentaremos dará más información que la obtenida en la prueba del teorema 3.5.2; pues ahora mostraremos que \mathbb{R} tiene al menos tantos elementos como A y recordemos que A no es numerable (ver ejemplo 3.4.7). Construiremos una inyección $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}$, y de la proposición 3.4.8, resultará lo deseado.

Para cada $f \in A$ se tiene que la serie $\sum_n f(n) \cdot 3^{-n}$ converge (justificarlo). Denotemos su suma por x_f y veamos que $x_f \neq x_g$ si $f \neq g$. Con este fin, sea N el primer elemento de $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$. Ya que $f(N) \neq g(N)$, podemos asumir, intercambiando los papeles de f y de g si fuera necesario, que $f(N) = 0$ y $g(N) = 1$. Pongamos $s_n = \sum_{i=1}^n f(i) \cdot 3^{-i}$, $t_n = \sum_{i=1}^n g(i) \cdot 3^{-i}$. Observe que $s_n = t_{N-1} + \sum_{i=N+1}^n f(i) \cdot 3^{-i}$ y $t_N = t_{N-1} + 3^{-N}$. Luego, si $n > N$ se tiene que

$$t_N - s_n = 3^{-N} - \sum_{i=N+1}^n f(i) 3^{-i}.$$

Ya que $0 \leq f(n) \leq 1$, entonces

$$t_N - s_n \geq 3^{-N} - \sum_{i=N+1}^n 3^{-i} \geq 3^{-N} [1 - \sum_i 3^{-i}] = 3^{-N}/2 > 0.$$

Es decir, $s_n < t_N - 2^{-1} \cdot 3^{-N} < t_N \leq x_g$. Por lo tanto, la función $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(f) = x_f$, es inyectiva.

Ejercicios.

1. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de \mathbb{R} tal que $|x_{n+1} - x_n| < (1/2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{x_n\}_n$ es convergente. *Ayuda.* La sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_n$ de la serie $\sum_n x_{n+1} - x_n$ viene dada por $s_n = x_{n+1} - x_1$.
2. Sean $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ sucesiones de \mathbb{R} y suponga que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $0 \leq a_n \leq b_n$, cuando $n \geq N$. Pruebe que si $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
3. Pruebe que si $\sum_n a_n$ es convergente y $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_n a_n^2$ es convergente. *Ayuda.* Recuerde que si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x^2 \leq x$.
4. Pruebe que si $\sum_n a_n$ es acotada y $0 < r < 1$, entonces $\sum_n a_n r^n$ es absolutamente convergente.
5. Pruebe que la serie $\sum_{n \geq 0} x^n/n!$ converge cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Aquí, $x^0 := 1, 0! = 1$ y $\sum_{n \geq 0} a_n$ denota la serie $\sum_n a_{n-1}$.
6. (*Criterio de la Raíz.*) Pruebe que si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1$ (resp. $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} > 1$), entonces $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente (resp. divergente).
7. Pruebe que si la sucesión $\{d_n\}$ converge a cero, entonces la serie $\sum_n (d_n - d_{n+1})$ converge.
8. Pruebe que si $q \in \mathbb{Q}$ es positivo, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} n[(1 + \frac{1}{n})^q - 1] = q$. *Ayuda.* Pruebe primero el caso en que $q \in \mathbb{N}$. En el caso general, escriba $q = m/r$ con $m, r \in \mathbb{N}$ y use el ejercicio 5 de la sección 3.2 para mostrar que si, $a, b \in \mathbb{R}$ son positivos, entonces

$$b^m - a^m = (b^q - a^q) \sum_{i=1}^r b^{q(r-i)} a^{q(i-1)}.$$

9. Pruebe que todo intervalo no degenerado es no numerable. *Ayuda.* Muestre que la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ dada por $f(x) = x(1 + x^2)^{-1/2}$ es biyectiva.

4.12. Redes.

El concepto de convergencia de sucesiones, establecido en la sección 4.3, es insuficiente en algunas ramas de las matemáticas. De hecho, en la teoría de integrales impropias desarrolladas en el capítulo 8, se toman límites de familias de elementos de \mathbb{R} , que están indizadas por el conjunto de los intervalos compactos, contenidos en el intervalo I de integración.

Sea I un conjunto. Diremos que $\mathbb{J} \subset \mathcal{P}(I)$ es un **conjunto dirigido**, si dados $J, K \in \mathbb{J}$ existe $L \in \mathbb{J}$ tal que $J \subset L$ y $K \subset L$. Por una **red** en un conjunto A entendemos cualquier

familia $\{x_J\}_{J \in \mathbb{J}}$, de elementos de A , indizada por un conjunto dirigido \mathbb{J} . Cuando no haya peligro de confusión, utilizaremos la notación abreviada $\{x_J\}$. Los conceptos de “dirigido” y de “red”, que acabamos de dar, son un caso particular de una teoría más general (ver, por ejemplo, [5]), pero son suficientes para nuestros propósitos.

Ejemplos 4.12.1. 1. Sea $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{J} = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es dirigido. Además, una red indizada por este \mathbb{J} corresponde exactamente a una sucesión.

2. El conjunto \mathbb{J} , de todos los subconjuntos finitos de I , es dirigido. Además, con cualquier familia $\{a_i\}$ de números reales, se tiene la red de “las sumas parciales” $\{\sum_{i \in J} a_i\}_{J \in \mathbb{J}}$.

Diremos que una red $\{x_J\}_{J \in \mathbb{J}}$ de \mathbb{R} es **convergente**, si existe $a \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que

$$|x_J - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_0.$$

En este caso se dice que $\{x_J\}$ **converge a** a y lo denotaremos por $x_J \rightarrow a$.

Los resultados de esta sección serán, en su mayoría, dejados como ejercicios. La demostración del primero de ellos servirá para ilustrar donde se utiliza el hecho de que \mathbb{J} es dirigido. Las otras pruebas se obtienen utilizando los argumentos de este primer resultado y los argumentos de las cuatro secciones precedentes.

Proposición 4.12.2. *Sea $\{x_J\}$ una red en \mathbb{R} . Si $x_J \rightarrow a$ y $x_J \rightarrow b$, entonces $a = b$.*

Demostración: Supongamos $a \neq b$ y pongamos $\epsilon = |b - a|/2$. Ya que $x_J \rightarrow a$, existe $J_1 \in \mathbb{J}$ tal que

$$|x_J - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_1. \quad (12.1)$$

Por el mismo argumento, existe $J_2 \in \mathbb{J}$ tal que,

$$|x_J - b| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_2. \quad (12.2)$$

Como \mathbb{J} es dirigido, existe $K \in \mathbb{J}$ tal que $J_1 \subset K$ y $J_2 \subset K$, y por (12.1)-(12.2), $|a - b| \leq |a - x_K| + |x_K - b| < 2\epsilon = |a - b|$. Esta contradicción termina la prueba. ■

En lo que resta del capítulo, $\{x_J\}$, $\{y_J\}$ denotarán redes en \mathbb{R} , indizadas por un conjunto dirigido \mathbb{J} .

Proposición 4.12.3. *Supongamos que $x_J \rightarrow a$ e $y_J \rightarrow b$. Entonces: $x_J + y_J \rightarrow a + b$, $x_J y_J \rightarrow ab$ y $\lambda x_J \rightarrow \lambda a$ si $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, $1/y_J \rightarrow 1/b$, si $b \neq 0$ e $y_J \neq 0$ para todo $J \in \mathbb{J}$.*

Proposición 4.12.4. *Supongamos que $x_J \rightarrow a$ e $y_J \rightarrow b$. Si $x_J \leq y_J$, para todo $J \in \mathbb{J}$, entonces $a \leq b$.*

Diremos que $\{x_J\}$ es **creciente**, si $x_J \leq x_K$ cuando $J \subset K$. Se dice que $\{x_J\}$ está **acotada superiormente** si $\{x_J : J \in \mathbb{J}\}$ está acotado superiormente. De manera análoga se definen los conceptos de red **decreciente** y **acotada inferiormente**.

Proposición 4.12.5. *Si $\{x_J\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces ella es convergente y su límite es $\sup\{x_J : J \in \mathbb{J}\}$. Un resultado análogo vale para redes decrecientes acotadas inferiormente.*

Se dice que la red $\{x_J\}$ es **de Cauchy**, si para cada $\epsilon > 0$, existe, $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que, $|x_J - x_K| < \epsilon$, cuando $J, K \supset J_0$.

Proposición 4.12.6. *Toda red $\{x_J\}$ de Cauchy converge.*

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la definición de red de Cauchy, con $\epsilon = 2^{-n}$, tenemos que existe $J_n \in \mathbb{J}$ tal que

$$|x_J - x_K| < 2^{-n} \quad \text{si} \quad J, K \supset J_n. \quad (12.3)$$

Podemos suponer que $J_{n+1} \supset J_n$ (justificar). Definamos $y_n = x_{J_n}$. Se sigue de (12.3) que $|y_{n+1} - y_n| < 2^{-n}$ y por el ejercicio 1 de la sección 4.11, $\{y_n\}_n$ es convergente. Así, $y_n \rightarrow x$, para algún $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\epsilon > 0$. Ya que, $y_n \rightarrow x$ y $2^{-n} \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_N - x| < \epsilon/2$ y $2^{-N} < \epsilon/2$. De aquí y (12.3), $|x_J - x| \leq |x_J - y_N| + |y_N - x| < 2^{-N} + \epsilon/2 < \epsilon$, si $J \supset J_N$. ■

Sea I un conjunto. Denotaremos por $\mathbb{P}_\infty(I)$ a la familia de todos los subconjuntos finitos de I . Dada una aplicación $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe una única aplicación $\Sigma_f : \mathbb{P}_\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Sigma_f(\{i\}) = f(i); i \in I$; y $\Sigma_f(J \cup \{i\}) = \Sigma_f(J) + f(i)$, si $J \in \mathbb{P}_\infty(I)$ e $i \in I \setminus J$. Esta aplicación Σ_f la llamaremos **la serie asociada a f** y la denotaremos por $\sum_{i \in I} a_i$, donde $a_i = f(i)$. Asociada con la serie $\sum_{i \in I} a_i$ tenemos la red $\{s_J\}$ de sumas parciales definida por $s_J = \sum_{i \in J} a_i$, para cada $J \in \mathbb{J} := \mathbb{P}_\infty(I)$. En lo que resta del capítulo, pondremos $\mathbb{J} = \mathbb{P}_\infty(I)$. Si $\{s_J\}$ converge a $s \in \mathbb{R}$, se dice que $\sum_{i \in I} a_i$ es **convergente** y que su suma es s . En este caso escribiremos $s = \sum_{i \in I} a_i$.

Ejercicios.

1. Suponga que existe $L \in \mathbb{J}$ tal que $J \subset L$ para todo $J \in \mathbb{J}$. Pruebe que $x_J \rightarrow x_L$. (Este L , cuando existe, se llama el **máximo de \mathbb{J}**).

2. Pruebe que si $\{x_J\}$ es constante de valor a (es decir, $x_J = a$, para todo $J \in \mathbb{J}$), entonces $x_J \rightarrow a$.
3. Pruebe que toda red convergente es de Cauchy.
4. Pruebe que la red $\{s_J\}_J$, de sumas parciales, es de Cauchy si y solo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que $|s_H| < \epsilon$, cuando $H \in \mathbb{J}$ y $H \cap J_0 = \emptyset$.
5. Pruebe que si $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i \in I} b_i$ convergen, entonces $\sum_{i \in I} (a_i + b_i)$ y $\sum_{i \in I} \lambda a_i$ convergen, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$, $\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.
6. Pruebe que si $\sum_{i \in I} |a_i|$ converge, entonces, $\sum_{i \in I} a_i$ converge. Además $|\sum_{i \in I} a_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$.
Ayuda. $|s_J - s_K| \leq |s_J - s_{J \cup K}| + |s_{J \cup K}| = |s_{K \setminus J}| + |s_{J \setminus K}|$.
7. Suponga que $a_i \geq 0$ para todo $i \in I$. Pruebe que si la red $\{s_J\}$ está acotada superiormente, entonces $\sum_{i \in I} a_i$ converge y su suma es $\sup\{\sum_{i \in J} a_i : J \subset I \text{ es finito no vacío}\}$.
8. Supongamos que I es la unión de una familia numerable $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de conjuntos numerables I_n , y sea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa. Pruebe que $\sum_{i \in I} g(i) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} [\sum_{i \in I_n} g(i)]$. *Ayuda.* Si $F \subset I$ es finito, entonces existe $G \subset \mathbb{N}$ finito tal que $F \subset \cup_{n \in G} I_n$.
9. Suponga que $\sum_{i \in I} |a_i|$ converge y sea $h : I \rightarrow I$ una biyección. Pruebe que $\sum_{i \in I} a_{h(i)}$ converge y que tiene la misma suma que $\sum_{i \in I} a_i$.

Capítulo 5

Topología de la Recta

En este capítulo estudiaremos algunos subconjuntos especiales de \mathbb{R} . Estos subconjuntos estarán caracterizados en términos de propiedades derivadas de la noción de distancia (recordemos que si los números reales se representan en una recta, entonces $|x|$ es la distancia de x al origen; y más generalmente, $|x - y|$ es la distancia entre x e y). El concepto básico es el de *conjunto abierto*, ejemplos típicos son los intervalos $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. A partir del concepto de conjunto abierto, se obtienen los de: *conjunto cerrado*, *punto interior*, *punto de clausura*, *punto de acumulación*, *conjunto denso* y *conjunto compacto*, los cuales son llamados *conceptos topológicos*, precisamente porque pueden definirse usando solamente la noción de conjunto abierto.

Los resultados más importantes del capítulo son la caracterización de los conjuntos compactos como conjuntos cerrados y acotados, y el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual asegura que todo subconjunto infinito y acotado de \mathbb{R} posee un punto de acumulación.

5.1. Intervalos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ definimos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}; \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}; \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Estos conjuntos son llamados **intervalos de extremos a y b** . El primero (resp. último) de ellos se dice **abierto** (resp. **cerrado**). Cuando $a = b$ se tiene $(a, b) = \emptyset$; $[a, b] = \{a\}$ y se les llama **intervalos degenerados**.

Los cuatro intervalos definidos anteriormente, son conjuntos acotados, por lo que también se denominan **intervalos acotados**. La **longitud** de cualquiera de ellos se define como el número $b - a$.

Dado $a \in \mathbb{R}$ definimos:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}; \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

Estos conjuntos son conocidos como **intervalos no acotados**. El primero (resp. segundo) de ellos también se le dice **la semirrecta izquierda abierta** (resp. **cerrada**) **de extremo a** , mientras que para los dos últimos se utiliza una terminología análoga. En fin, alguna vez pondremos

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Los nueve conjuntos definidos anteriormente son conocidos bajo el nombre genérico de **intervalos**. Los que se definen usando sólo paréntesis, son llamados **abiertos**.

La siguiente proposición es una caracterización útil de los intervalos.

Proposición 5.1.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Los siguiente enunciados son equivalentes.*

- (i) $(x, y) \subset I$, para todo $x, y \in I$ con $x < y$.
- (ii) I es un intervalo.

Demostración: Dejamos al lector la tarea de mostrar que (ii) implica (i). Para ver la otra implicación, supongamos que I satisface (i). Hay dos casos posibles y los consideraremos por separado.

Caso 1: I es acotado. Pongamos $a = \inf(I)$ y $b = \sup(I)$. Es claro que $I \subset [a, b]$. Probaremos que $(a, b) \subset I$ y le dejamos la tarea al lector de convencerse que esto garantiza que I es un intervalo. Sea $c \in (a, b)$. Por la proposición 2.6.1, existe $y \in I$ tal que $c < y$ y por la proposición 2.6.2 existe $x \in I$ tal que $x < c$. Por hipótesis, $(x, y) \subset I$, luego $c \in I$. Esto muestra que $(a, b) \subset I$.

Caso 2: I no es acotado. Sólo trataremos el subcaso cuando I está acotado superiormente pero que no lo está inferiormente. La prueba de los dos subcasos restantes será dejada a cargo del lector. Sea $a = \sup(I)$. Es claro que $I \subset (-\infty, a]$, por lo cual basta ver que $(-\infty, a) \subset I$ (¿por qué?). Para ello, sea $c < a$. Igual que antes, existe $y \in I$ tal que $c < y$, pero como I no está acotado inferiormente, existe $x \in I$ tal que $x < c$. Así, $c \in (x, y) \subset I$, y la prueba de este caso es completa. ■

Proposición 5.1.2. *La unión de una familia de intervalos con un punto común es un intervalo.*

Demostración: Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos indizada por un conjunto P y supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in I_p$, para cada $p \in P$. Denotemos por I la unión de

esa familia y fijemos $x, y \in I$ con $x < y$. De acuerdo a la proposición anterior bastará ver que $(x, y) \subset I$. Con este fin, fijemos $p, q \in P$ tales que $x \in I_p$ e $y \in I_q$ y consideremos los tres casos que siguen:

- i) Si $y \leq a$, entonces $(x, y) \subset (x, a) \subset I_p \subset I$.
- ii) Si $a \leq x$, entonces $(x, y) \subset (a, y) \subset I_q \subset I$.
- iii) Si $x < a < y$, entonces $(x, y) \subset (x, a] \cup [a, y) \subset I_p \cup I_q \subset I$.

■

Ejercicios.

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Pruebe que (a, b) es el entorno de centro $(a + b)/2$ y radio $(b - a)/2$ (ver sección 4.2).
- Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos y suponga que existe $q \in P$ tal que $I_p \cap I_q \neq \emptyset$, para todo $p \in P$. Pruebe que la unión de los I_p es un intervalo. *Ayuda.* Aplique la proposición 5.1.2 a la familia $\{J_p : p \in P\}$ donde $J_p = I_p \cup I_q$, para cada $p \in P$.
- Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos no degenerados dos a dos disjuntos. Pruebe que P es numerable. *Ayuda.* Muestre que todo intervalo no degenerado contiene un número racional y use ese hecho para construir una inyección de P en \mathbb{Q} .
- Sea A un subconjunto de \mathbb{R} con la siguiente propiedad: Para todo $x \in A$ existe $y \in A$ con $x \neq y$ tal que $(x, y) \subset A$ o $(y, x) \subset A$ (según sea $x < y$ o $y < x$). ¿Es A un intervalo? Justifique su respuesta y compárela con la proposición 5.1.1.
- Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en un intervalo I convergente a punto x en I . Muestre que existen $c, d \in I$ tales que $c \leq x_n \leq d$ para todo n .

5.2. Conjuntos abiertos

Diremos que $U \subset \mathbb{R}$ es **abierto**, si para cada $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Este número ϵ depende en general de x . Observe que $(x - \epsilon, x + \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\}$. Por esto podemos decir que el concepto de conjunto abierto esta basado en la noción de distancia.

Ejemplos 5.2.1. Es obvio que \mathbb{R} es un conjunto abierto. También se tiene que \emptyset es abierto, porque no hay ningún elemento en \emptyset que no verifique la condición en la definición de conjunto abierto. Por otra parte, \mathbb{Q} no es abierto, pues todo intervalo contiene irracionales (proposición 2.5.5). Los intervalos de la forma $[a, b)$ no son abiertos, pues la condición de la definición de conjunto abierto no se cumple para $x = a$.

Proposición 5.2.2. *Sea I un intervalo. Entonces I es un intervalo abierto si I es un conjunto abierto.*

Demostración: Sea I un intervalo abierto. Ya que \mathbb{R} y \emptyset son abiertos, debemos considerar los casos $I = (a, b)$, $(-\infty, a)$ ó $(a, +\infty)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $I = (a, b)$.

Supongamos que $I = (a, b)$. Dado $x \in I$, pongamos $\epsilon = \min\{x - a, b - x\}$. Entonces $a \leq x - \epsilon < x + \epsilon \leq b$, de donde $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$. Luego I es abierto. Los otros dos casos serán dejados a cargo del lector.

Recíprocamente, sea I un intervalo que satisface la definición de conjunto abierto. Para ver que I es un intervalo abierto, basta mostrar que no puede ser de ninguno de los siguientes: $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, donde $a < b$. Le dejamos al lector la tarea de verificar que en cualquiera de estos casos los extremos acotados del intervalo no satisfacen condición en la definición de conjunto abierto. ■

El resultado que sigue nos indica las dos propiedades mas importantes que posee la colección de los conjuntos abiertos.

Proposición 5.2.3. *a) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

b) La intersección de cualquier familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración: La parte a) será dejada a cargo del lector. Para probar b), mostraremos sólo que la intersección de dos abiertos es abierto, el caso general se hace por inducción en el número de abiertos y lo dejaremos al lector. Sean U_1, U_2 abiertos de \mathbb{R} y fijemos $x \in U_1 \cap U_2$. Ya que $x \in U_1$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subset U_1$. Por el mismo argumento, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $(x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subset U_2$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Es claro que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_1 \cap U_2$. ■

Podemos resumir lo que tenemos hasta ahora en el siguiente resultado.

Teorema 5.2.4. *Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si U es la unión de una colección de intervalos abiertos.*

Demostración: Sea U un conjunto abierto. Para todo punto $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Así que la colección de todos los intervalos abiertos contenidos en U cumple con lo requerido. Esto es, U es la unión de una colección de intervalos abiertos.

Por otra parte, usando la parte a) de la proposición 5.2.3 concluimos que la unión de una colección de intervalos abiertos es un conjunto abierto. ■

La proposición que sigue muestra que el resultado puede mejorarse considerablemente.

Proposición 5.2.5. *Todo conjunto abierto de \mathbb{R} es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.*

Demostración: Sea U un abierto de \mathbb{R} y sea $x \in U$. Entonces la familia \mathcal{F}_x , de aquellos intervalos abiertos contenidos en U que contienen a x , no es vacía y tienen a x como punto común. De aquí y la proposición 5.1.2, la unión de los miembros de \mathcal{F}_x es un intervalo I_x que contiene a x . Note también que por las proposiciones 5.2.2 y 5.2.3, I_x es un intervalo abierto. Es más, I_x es el más grande de los intervalos abiertos contenidos en U y que contienen a x .

Mostraremos ahora que si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, entonces $I_x = I_y$. En efecto, sean $x, y \in U$ y supongamos que $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. De las proposiciones 5.1.2, 5.2.2 y 5.2.3, $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto contenido en U . Como x está en esa unión, se sigue de la maximalidad de I_x que $I_x \cup I_y \subset I_x$ y en particular se tiene que $I_y \subset I_x$. Un razonamiento análogo, intercambiando x por y , muestra que $I_x \subset I_y$, y en consecuencia $I_x = I_y$. En otras palabras, cualesquiera dos elementos de la familia $\{I_x : x \in U\}$ son iguales o disjuntos. Denotemos por \mathcal{I} esa familia de intervalos. Para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$ escoja un racional q_I en I . Como la familia \mathcal{I} es dos a dos disjunta, entonces la función $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(I) = q_I$ es inyectiva. Como \mathbb{Q} es numerable, entonces \mathcal{I} es numerable (ver proposición 3.4.2). Para concluir, note que U es la unión de los intervalos en \mathcal{I} . ■

Observación: No es cierto que todo conjunto abierto es la unión *disjunta* de intervalos con *extremos racionales* (ver ejercicio 10).

La siguiente proposición, aunque no será usada en el resto del libro, es importante pues indica cual es la propiedad topológica (llamada conexidad) que caracteriza a los intervalos.

Proposición 5.2.6. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo si y sólo si existen abiertos U, V de \mathbb{R} tales que*

$$U \cap V = \emptyset, U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, \text{ y } A \subset U \cup V. \quad (2.1)$$

Demostración: Si A no es un intervalo entonces, por la proposición 5.1.1 existen $x, y \in A$ tales que $x < y$, $c \in (x, y)$ y $c \notin A$. De aquí, los conjuntos $U = (-\infty, c)$, $V = (c, \infty)$ son abiertos que verifican (2.1).

Supongamos ahora que U, V son abiertos de \mathbb{R} verificando (2.1) y fijemos $a \in U \cap A$ y $b \in A \cap V$. Ya que $U \cap V = \emptyset$, tenemos $a \neq b$, e intercambiando los papeles de U y V si fuera necesario, podemos asumir que $a < b$. Pongamos $B = \{x \in [a, b] : [a, x] \subset U\}$ y notemos que $a \in B$ y que b es cota superior de B . Esto permite definir $c = \sup(B)$. Mostraremos que $c \notin A$ y $a < c < b$; de esto se concluye inmediatamente que A no es un intervalo (ver la proposición 5.1.1).

Para ver que $a < c$, observemos que al ser U abierto y a un elemento de U , existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset U$. En consecuencia, $a + r/2 \in B$. Luego, $c > a$.

Ahora mostraremos que $c \notin U \cup V$. De esto se deduce inmediatamente que $c \notin A$ y $c \neq b$ y termina la demostración. Veamos entonces que $c \notin U \cup V$. Primero mostraremos que $[a, c) \subset U$. Sea $d \in [a, c)$. Por la proposición 2.6.1, existe $z \in B$ tal que $z > d$, y como $[a, z] \subset U$, entonces $d \in U$. Esto prueba que $[a, c) \subset U$. Veamos ahora que $c \notin U$, porque si $c \in U$, entonces existiría $\epsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U$ y por lo tanto $[a, c + \epsilon/2] \in U$. Es decir, $c + \epsilon/2 \in B$, lo cual contradice el hecho que c es el supremo de B . Esto muestra que $c \notin U$.

Finalmente, supongamos que $c \in V$ y fijemos $\rho > 0$ tal que $(c - \rho, c + \rho) \subset V$. Entonces $(c - \rho, c) \cap [a, c) \subset U \cap V = \emptyset$, pero esto es contradictorio porque, al ser $a < c$, se tiene que $(c - \rho, c) \cap [a, c) \neq \emptyset$. Esta contradicción prueba que $c \notin V$. ■

Ejercicios.

1. Complete la demostración de la proposición 5.2.3.
2. Sea $U_n = (-1/n, 1/n)$; $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ y concluya que la intersección de una familia infinita de abiertos no es necesariamente abierto.
3. Sea $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto no vacío. Pruebe que $U \cap \mathbb{Q}$ y $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ no son vacíos.
4. Pruebe que si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos, entonces I es numerable.
5. Sean $x \in A \subset \mathbb{R}$. Diremos que x es un **punto interior** de A si existe un abierto U de \mathbb{R} tal que $x \in U \subset A$. Denotaremos por \mathring{A} o $\text{int}(A)$ el conjunto de los puntos interiores de A . Pruebe que
 - a) $\text{int}(A)$ es abierto.
 - b) Cualquier abierto de \mathbb{R} , contenido en A , está contenido en $\text{int}(A)$. Es decir, si $U \subset A$ y U es un abierto, entonces $U \subset \text{int}(A)$.
 - c) Concluya de lo anterior que $\text{int}(A)$ es el abierto más grande contenido en A . Por ejemplo, muestre que $\text{int}([1, 3)) = (1, 3)$.
6. Calcule $\text{int}([a, b])$, $\text{int}(\mathbb{Q})$ e $\text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
7. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Pruebe que $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ y que $\text{int}(A \cup B) \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Dé un ejemplo donde esta contención sea estricta.

8. Sea $A_n = (-1/n, 1/n)$; $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\text{int}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(A_n)$.
9. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $B \subset A$ es **abierto en A** si para cada $x_0 \in B$ existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A \subset B$. Pruebe que $B \subset A$ es abierto en A si y sólo si $B = A \cap U$ para algún abierto U de \mathbb{R} .
10. a) Muestre que ningún intervalo abierto es igual a la unión de dos intervalos abiertos y disjuntos.
- b) Halle un conjunto abierto que no sea la unión de una colección dos a dos disjunta de intervalos abiertos con *extremos racionales*. Explique por qué no hay conflicto entre este ejercicio y la proposición 5.2.5. *Ayuda:* Considere un intervalo (a, b) con a irracional.
11. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $r > 0$. Muestre que el siguiente conjunto es abierto

$$U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r \text{ para algún } a \in A\}.$$

Ayuda: Escriba U como la unión de una colección de intervalos abiertos.

12. * Sea $U \subset \mathbb{R}$. Muestre que las siguientes condiciones son equivalentes
- (a) U es abierto.
- (b) Para todo $x \in U$ y toda sucesión $\{x_n\}_n$ convergente a x , existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n > n_0$.

5.3. Conjuntos cerrados y clausura de un conjunto

En esta sección, A denota un subconjunto de \mathbb{R} . Diremos que A es **cerrado** si su complementario $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Por ejemplo, los intervalos de la forma $[a, b]$ son cerrados.

Proposición 5.3.1. a) \emptyset y \mathbb{R} son cerrados.

b) La unión de una familia finita de cerrados es cerrado.

c) La intersección de cualquier familia de cerrados es cerrado.

Demostración: Se deduce inmediatamente de la proposición 5.2.3 y dejamos a cargo del lector el completar la demostración. ■

Observación: Note que \emptyset y \mathbb{R} son a la vez abiertos y cerrados. De hecho son los únicos subconjuntos de \mathbb{R} con esta propiedad (ver ejercicio 12). Es importante tener presente que un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado, por ejemplo $(1, 5]$.

Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de clausura** de A , si $U \cap A \neq \emptyset$ para cualquier abierto U de \mathbb{R} que contenga a x_0 . El conjunto de todos los puntos de clausura de A será denotado \overline{A} y será llamado la **clausura o adherencia de A** . Es obvio que $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y que $A \subset \overline{A}$. En particular, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.3.2. Mostraremos que 2 es un punto de clausura del intervalo $(2, 7]$. En efecto, sea U un abierto cualquiera que contenga a 2. Por definición de conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $(2 - r, 2 + r) \subset U$. Escoja ahora t tal que $2 < t < \min\{2 + r, 7\}$. Entonces $t \in U \cap (2, 7]$.

Proposición 5.3.3. \overline{A} es cerrado.

Demostración: Mostraremos que $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ es abierto. Sea $x_0 \notin \overline{A}$. Por definición de clausura, existe un abierto U tal que $x_0 \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Por definición de abierto, existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$. Luego es claro que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \emptyset$. Como $(x_0 - r, x_0 + r)$ es un conjunto abierto, entonces por la definición de clausura tenemos que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$. Y con esto termina la prueba. ■

Proposición 5.3.4. A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

Demostración: Si $A = \overline{A}$ se tiene, de la proposición anterior, que A es cerrado. Supongamos ahora que A es cerrado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \mathbb{R}$ (¿por qué?). Fijemos $x \notin A$, entonces x está en el abierto $U := \mathbb{R} \setminus A$. Como $U \cap A = \emptyset$, entonces por definición de clausura se tiene que $x \notin \overline{A}$. Esto muestra que $\mathbb{R} \setminus A \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$. Por lo tanto, $\overline{A} \subset A$ y como $A \subset \overline{A}$, entonces $\overline{A} = A$. ■

Proposición 5.3.5. a) Si $B \subset \mathbb{R}$ y $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$. En particular, si B es cerrado y $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, cualesquiera sean $A, B \subset \mathbb{R}$.

Demostración: a) Suponga que $A \subset B$ y fije $x \in \overline{A}$ y un abierto U que contiene a x . Como $U \cap A \neq \emptyset$, entonces $U \cap B \neq \emptyset$. Así $x \in \overline{B}$. La segunda afirmación se sigue de la proposición 5.3.4.

b) De la relación $A \subset A \cup B$ se tiene $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De manera análoga, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, de modo que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Por otra parte, de las proposiciones 5.3.3 y 5.3.1 se tiene que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado y como obviamente ese cerrado contiene a $A \cup B$, se sigue de la parte a), que $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. ■

Ejemplo 5.3.6. Mostraremos que la clausura de $(2, 7]$ es $[2, 7]$. Es claro que $\mathbb{R} \setminus [2, 7] = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$ es abierto, luego $[2, 7]$ es cerrado. Por lo tanto, la parte a) de la proposición 5.3.5 nos asegura que $\overline{(2, 7]} \subset [2, 7]$. Por otra parte, ya vimos que 2 es un punto de clausura de $(2, 7]$, es decir, $2 \in \overline{(2, 7]}$. Como $(2, 7] \subset \overline{(2, 7]}$, entonces $[2, 7] \subset \overline{(2, 7]}$. En conclusión, tenemos que $\overline{(2, 7]} = [2, 7]$.

La proposición 5.3.3, junto con la parte a) de la proposición anterior, dicen que \overline{A} es el cerrado “más pequeño” (con respecto al orden \subset) que contiene a A . Terminaremos esta sección caracterizando los conjuntos cerrados a través de sucesiones. Para ello introducimos la siguiente definición. Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto límite** de A si existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A que converge a x_0 .

Proposición 5.3.7. $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto límite de A si y sólo si $x_0 \in \overline{A}$.

Demostración: Sea x_0 un punto límite de A y sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en A que converge a x_0 . Dado un abierto U de \mathbb{R} que contiene a x_0 , fijemos $\epsilon > 0$ tal que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset U$; entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$, para $n > N$. Es decir, $x_n \in A \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; $n > N$; lo cual prueba que $U \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $x_0 \in \overline{A}$.

Supongamos ahora que $x_0 \in \overline{A}$, entonces $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap A \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Escojamos entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap A$. Tenemos así una sucesión $\{x_n\}_n$ en A tal que $|x_n - x_0| < 1/n$. En particular, $x_n \rightarrow x_0$ y por lo tanto, x_0 es un punto límite de A . ■

Como corolario inmediato de las proposiciones 5.3.4 y 5.3.7 se obtiene:

Teorema 5.3.8. A es cerrado si y sólo si A contiene todos sus puntos límite.

Terminaremos esta sección introduciendo la noción de conjunto denso. Un subconjunto A de \mathbb{R} se dice **denso**, si $\overline{A} = \mathbb{R}$. La demostración de la siguiente proposición quedará a cargo del lector.

Proposición 5.3.9. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- (i) A es denso.
- (ii) $A \cap (a, b) \neq \emptyset$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
- (iii) $A \cap U \neq \emptyset$ para todo abierto no vacío U .
- (iv) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A que converge a x .

Del teorema 2.5.4 y la proposición anterior concluimos que \mathbb{Q} es un subconjunto denso de \mathbb{R} . Por consiguiente, todo real es el límite de una sucesión de racionales.

Ejercicios.

1. Demuestre la proposición 5.3.1.
2. Sean $a \leq b$ en \mathbb{R} . Pruebe que los intervalos $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ son conjuntos cerrados.
3. Pruebe que \mathbb{Z} es cerrado. *Ayuda.* Muestre que $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$, para ello recuerde que para todo real r existe un entero m tal que $m \leq r < m + 1$ (m es llamada la parte entera de r y fué formalmente definida en el ejercicio 4 de la sección 2.4).
4. Pruebe que el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado.
5. Pruebe que un subconjunto de \mathbb{R} que contiene un sólo elemento es cerrado. Concluya que todo conjunto finito es cerrado.
6. Calcule la clausura de los siguientes conjuntos: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (a, b) (donde $a < b$ son reales) y $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
7. Pruebe que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, cualesquiera sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Muestre, con un ejemplo, que la contención puede ser estricta.
8. Pruebe que $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
9. Sea U un abierto de \mathbb{R} tal que $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Pruebe que $U \cap A \neq \emptyset$.
10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{1/n\}$. Pruebe que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.
11. Demuestre la proposición 5.3.9.
12. Pruebe que si $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado entonces $A = \mathbb{R}$. *Ayuda:* Suponga que $x \notin A$ y $z \in A$. Sin pérdida de generalidad suponga que $z < x$. Sea $B = \{y \in \mathbb{R} : y < x, [y, x] \cap A = \emptyset\}$. B es acotado inferiormente. Sea $a = \inf B$. Muestre que se llega a una contradicción ya sea que $a \in A$ o que $a \notin A$.
13. En el ejercicio 9 de la sección 5.2 introdujimos el concepto de abierto relativo a un conjunto, ahora haremos lo correspondiente con el concepto de cerrado. Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}$. Diremos que B es **cerrado en A** si $A \setminus B$ es abierto en A . Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) B es cerrado en A .
 - b) $B = C \cap A$ para algún conjunto cerrado C .
 - c) Dada una sucesión $\{x_n\}_n$ en B convergente a un punto x en A , se tiene que x pertenece a B .

14. Sea U y V subconjuntos densos de \mathbb{R} . Suponga que uno de ellos es abierto y muestre que $U \cap V$ es denso en \mathbb{R} . ¿Será cierto el resultado para conjuntos densos cualesquiera?
15. * Sea $A \neq \emptyset$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, defina **la distancia de x_0 a A** mediante,

$$d(x_0, A) := \inf\{|x - x_0| : x \in A\}.$$

- a) Muestre que si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$.
- b) Pruebe que si A es cerrado y $d(x_0, A) = 0$, entonces $x_0 \in A$.
- c) Suponga que A no es vacío y es acotado superiormente. Pruebe que $d(\sup(A), A) = 0$. Concluya que $d(1, [0, 1)) = 0$.
16. * Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$U_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < 1/n \text{ para algún } a \in A\}.$$

- a) Muestre que
- $$\overline{A} = \bigcap_n U_n.$$
- b) Concluya que todo cerrado es igual a una intersección numerable de abiertos y análogamente, que todo abierto es igual a una unión numerable de cerrados. *Ayuda:* Use el ejercicio 11 de la sección 5.2.
17. * Muestre que si A es numerable, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es denso. *Ayuda:* Use que todo intervalo no degenerado no es numerable (ver ejercicio 9 de la sección 4.11).

5.4. El teorema de Bolzano-Weierstrass

Al igual que en la sección precedente, A denota un subconjunto de \mathbb{R} . Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación de A** , si $U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, para cada abierto U de \mathbb{R} que contenga a x_0 . Es obvio que todo punto de acumulación de A es punto de clausura de A . Un punto $x_0 \in A$ se dice **aislado en A** , si existe un abierto U de \mathbb{R} , conteniendo x_0 , tal que $U \cap A = \{x_0\}$.

Ejemplo 5.4.1. Considere el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene que 0 es un punto de acumulación de A y de hecho es el único. Note que todo elemento de A es un punto de clausura de A pero no es de acumulación, pues todo los elementos de A son aislados en A .

Ya vimos que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente (teorema 4.6.4). El siguiente teorema generaliza este resultado a conjuntos infinitos y acotados.

Teorema 5.4.2. (Bolzano-Weierstrass) *Todo subconjunto infinito y acotado de \mathbb{R} posee un punto de acumulación.*

Demostración: Daremos dos argumentos diferentes para demostrar el teorema. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} infinito y acotado.

Argumento 1: Como A es infinito, entonces existe una función $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ inyectiva (esto es intuitivamente claro, pero se puede ver una demostración formal en el ejercicio 4 de la sección 3.4). Considere la sucesión dada por f , es decir, $x_n = f(n)$. Por el teorema 4.6.4 sabemos que $\{x_n\}_n$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto a . Para ver que a es un punto de acumulación de A , sea U un abierto que contenga a a . Entonces existe k_0 tal que $x_{n_k} \in U$ para todo $k \geq k_0$. Por ser f inyectiva, sabemos que existe a lo sumo un natural k tal que $x_{n_k} = a$. En particular, como el rango de f está contenido en A , se tiene que $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Y esto termina la prueba.

Argumento 2: Dado un intervalo $J = [c, d]$, definimos su **punto medio** como $z = (c+d)/2$ y cada uno de los intervalos $[c, z]$ y $[z, d]$ será llamado **una mitad de J** . Si $A \cap J$ es infinito y J_1, J_2 son las dos mitades de J entonces $A \cap J_i$ es infinito para algún $i = 1, 2$; pues en caso contrario, $A \cap J = (A \cap J_1) \cup (A \cap J_2)$ sería finito al ser la unión de dos conjuntos finito (ver proposición 3.3.3).

Definamos $a = \inf(A)$, $b = \sup(A)$ e $I = [a, b]$. Es claro que $A \subset I$. Sea I_1 una mitad de I tal que $I_1 \cap A$ es infinito. Sea I_2 una mitad de I_1 tal que $A \cap I_2$ es infinito. “Prosiguiendo de esta manera”, se construye una familia de intervalos $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ con las siguientes propiedades:

- (i) I_{n+1} es una mitad de I_n .
- (ii) $I_n \cap A$ es infinito.

En particular de (i) se tiene que cada I_n es un intervalo cerrado, digamos que $I_n = [a_n, b_n]$. Observemos que de (i) también se tiene que $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ y aplicando inducción se muestra que $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. De aquí, $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Por el teorema de los intervalos encajados (3.5.1) se tiene que existe $x_0 \in \bigcap_n I_n$. Mostraremos que x_0 es un punto de acumulación de A . Para ello, fijemos un abierto U que contiene a x_0 . Debemos mostrar que $U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Por definición de conjunto abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$. Es claro que es suficiente mostrar que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito. Como $b_n - a_n \rightarrow 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N - a_N < r$. Como $x_0 \in [a_N, b_N]$, entonces $[a_N, b_N] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$. En consecuencia, $I_N \cap A \subset (x_0 - r, x_0 + r) \cap A$. De (ii) concluimos que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito.

Observación. La oración “Prosiguiendo de esta manera”, en la segunda versión de la prueba de 5.4.2, es imprecisa y, aunque de uso corriente, consideramos saludable dar una versión matemáticamente correcta de lo que ella significa. Para ello sea \mathcal{J} el conjunto de todos aquellos intervalos cerrados $J \subset I$ tales que $A \cap J$ es infinito. Obviamente $I \in \mathcal{J}$. Dado $J \in \mathcal{J}$, denotemos por $f(J)$ una de las mitades de J tal que $f(J) \cap A$ es infinito. Se tiene así una aplicación $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$. Por el teorema 3.1.1, existe una aplicación $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{J}$ tal que $\phi(1) = I$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. Los intervalos I_n “construídos” en la prueba anterior pueden ahora definirse de manera precisa poniendo $I_n = \phi(n+1)$. ■

Ejercicios.

1. Pruebe que todo punto de clausura de A que no sea punto de acumulación de A es un punto aislado de A .
2. Use la proposición 5.3.4 para probar que A es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.
3. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i) $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de A .
 - ii) $(A \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - r, x_0 + r) \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
 - iii) $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito para cada $r > 0$.
 - iv) Existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 .
4. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por A' el conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A . Demuestre las siguientes afirmaciones:
 - a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
 - b) Si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$.
 - c) A' es un conjunto cerrado.
5. * Pruebe que si todos los puntos de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ son aislados en A , entonces A es numerable. *Ayuda:* Muestre que existen intervalos abiertos, dos a dos disjuntos, cada uno conteniendo un sólo punto de A y cuya unión es A . Para hacerlo, defina $s_a = \inf\{|x - a| : x \in A \setminus \{a\}\}$ para cada $a \in A$ (se puede suponer que A contiene al menos dos elementos). Muestre que $s_a > 0$ y ponga $r_a := s_a/2$. Muestre ahora que $(a - r_a, a + r_a) \cap (b - r_b, b + r_b) = \emptyset$, si $a, b \in A$ con $a \neq b$. (Vea el ejercicio 15 de la sección 5.3 para entender mejor el significado de los números s_a).

6. * Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada en \mathbb{R} . Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el rango de la sucesión.
- a) Recuerde la definición de \bar{x}_n y \underline{x}_n dada en la sección 4.7. Suponga que a es un punto de acumulación de A . Muestre que $\underline{x}_n \leq a \leq \bar{x}_n$ para todo n y que

$$\liminf x_n \leq a \leq \limsup x_n.$$

- b) Determine bajo que condiciones $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ son puntos de acumulación de A .
- c) De un ejemplo de una sucesión acotada $\{x_n\}_n$ tal que su rango no tenga puntos de acumulación y calcule $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$.
- d) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ una biyección y sea $x_n = f(n)$. Calcule $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$. ¿Cuáles son los puntos de acumulación del rango de $\{x_n\}_n$?

5.5. Conjuntos compactos

En esta sección, K denota un subconjunto de \mathbb{R} y \mathcal{U} denota una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos de \mathbb{R} indizada por algún conjunto I .

Diremos que \mathcal{U} es un **cubrimiento abierto** de K , si la unión $\bigcup_{i \in I} U_i$ contiene a K . Si para algún subconjunto J de I se tiene que $\{U_i\}_{i \in J}$ es un cubrimiento de K , diremos que $\{U_i\}_{i \in J}$ es un **subcubrimiento de K extraído de \mathcal{U}** , el cual se dirá **finito** si el conjunto $\{U_i : i \in J\}$ es finito. Diremos que K es **compacto**, si todo cubrimiento abierto de K posee un subcubrimiento finito extraído de \mathcal{U} .

Esta definición es bastante abstracta y esto obedece al hecho de estar enunciada utilizando únicamente la noción de conjunto abierto. Sin embargo, uno de los propósitos principales de la sección es caracterizar los conjuntos compactos de una manera simple; a saber, como aquellos que son a la vez cerrados y acotados.

Ejemplos 5.5.1. (i) Es fácil ver que todo conjunto finito es compacto (verificarlo).

- (ii) Considere el conjunto $(0, 1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$U_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Afirmamos que $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento de $(0, 1)$. En efecto, si $x \in (0, 1)$, entonces existe n tal que $1/n < x < 1 - 1/n$ (verificar) y esto dice que $x \in U_n$. Por otra parte, dado $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(0, 1) \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_m$, pues $\frac{1}{m+1} \notin U_1 \cup \dots \cup U_m$. Esto muestra que \mathcal{U} no admite un subcubrimiento finito (justificar). En consecuencia $(0, 1)$ no es compacto.

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ positivo sea

$$V_n = \left(-1, \frac{n}{n+1}\right)$$

y sea \mathcal{U} la siguiente colección de abiertos:

$$\mathcal{U} = \{V_n : n \geq 1\} \cup \{(98/99, 2)\}.$$

Es fácil verificar que \mathcal{U} es un cubrimiento de $[0, 1]$. El lector verificará que el siguiente subconjunto de \mathcal{U} es un subcubrimiento finito de $[0, 1]$:

$$\{V_n : 1 \leq n \leq 99\} \cup \{(98/99, 2)\}.$$

¿Puede el lector conseguir un subcubrimiento finito que contenga sólo dos conjuntos?

Lo visto hasta ahora no garantiza que $[0, 1]$ sea compacto, pues solamente hemos analizado un cubrimiento $[0, 1]$; sin embargo, veremos en seguida que si lo es.

(iv) Consideremos ahora el conjunto $[5, +\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = (4, n)$. Es fácil verificar que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de $[5, +\infty)$ y además que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $[5, +\infty) \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_m$ (justificar). De lo anterior se deduce que $[5, +\infty)$ no es compacto.

Teorema 5.5.2. *Todo intervalo $[a, b]$, con $a < b$ en \mathbb{R} , es compacto.*

Demostración: Sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de $[a, b]$. Considere el siguiente subconjunto de $[a, b]$.

$$A = \{x \in [a, b] : \text{existe subconjunto finito de } \mathcal{U} \text{ que cubre a } [a, x]\}.$$

Para completar la demostración bastaría probar que $b \in A$. Para lo cual comenzamos notando que $a \in A$ y A es acotado. Esto permite definir $c = \sup(A)$.

Afirmación. $c = b$. En efecto, es claro que $c \leq b$. Razonaremos indirectamente. Supongamos $c < b$ y escojamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $c \in U$. Ahora escojamos $r > 0$ tal que $(c - r, c + r) \subset U$ y fijemos $x \in A$ tal que $c - r < x$ (recuerde que c es el supremo de A). Fijemos también $y \in (c, c + r) \cap (c, b)$ y notemos que $[x, y] \subset U$. Como $[a, y] = [a, x] \cup [x, y]$ y $[a, x]$ está cubierto por un subconjunto finito \mathcal{V} de \mathcal{U} , entonces $\mathcal{V} \cup \{U\}$ cubre a $[a, y]$. Por lo tanto $y \in A$, pero esto contradice que $y > c = \sup(A)$.

Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U$ y sea $r > 0$ tal que $(b - r, b + r) \subset U$. Por la afirmación, $b = \sup(A)$ y en consecuencia existe $x \in A$ tal que $b - r < x$. Como $[a, b] = [a, x] \cup [x, b]$, $x \in A$ y $[x, b] \subset U$, concluimos que $[a, b]$ está cubierto por un subconjunto finito de \mathcal{U} . Es decir, $b \in A$. ■

Proposición 5.5.3. *Todo compacto es cerrado y acotado.*

Demostración: Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R} . Mostraremos primero que K es acotado. Para esto, considere los conjuntos abiertos $U_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{R} es arquimediano (ver proposición 2.5.1), se tiene que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de \mathbb{R} y por tanto de K . Como K es compacto y $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_N$ y en consecuencia, K es acotado.

Supongamos ahora que K no es cerrado, entonces $\mathbb{R} \setminus K$ no es abierto y así existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r)$ no está contenido en $\mathbb{R} \setminus K$, para ningún $r > 0$. En particular,

$$(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap K \neq \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $V_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > 1/n\}$. El lector probará que V_n es abierto y que la unión de los V_n es $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. De aquí, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de K , porque $x_0 \notin K$. Como $V_1 \subset V_2 \subset \dots$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset V_N$ y en consecuencia, $[x_0 - 1/N, x_0 + 1/N] \cap K = \emptyset$. Esto contradice (5.1) y termina la prueba. ■

Proposición 5.5.4. *Si K es compacto y $A \subset K$ es cerrado, entonces A es compacto.*

Demostración: Sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de A . Entonces $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R} \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de K y en consecuencia existe un subconjunto finito \mathcal{V} de \mathcal{U} tal que $\mathcal{V} \cup \{\mathbb{R} \setminus A\}$ es un cubrimiento de K . De aquí (justificar) \mathcal{V} es un cubrimiento finito de A . ■

El teorema que sigue a continuación es uno de los resultados mas importantes de este capítulo.

Teorema 5.5.5. *(Heine-Borel) Un subconjunto K de \mathbb{R} es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración: Supongamos que K es cerrado y acotado y pongamos $a = \inf(K)$, $b = \sup(K)$. Entonces K es un subconjunto cerrado del compacto $[a, b]$ y por consiguiente K es compacto (por la proposición 5.5.4). La otra implicación fué probada en la proposición 5.5.3. ■

El siguiente teorema caracteriza los subconjuntos compactos de la recta en términos de sucesiones convergentes. Este resultado es sumamente útil, pues no hace referencia ni al concepto de conjunto abierto y tampoco al mas complejo de cubrimiento por abiertos.

Teorema 5.5.6. *K es compacto si y sólo si toda sucesión en K posee una subsucesión convergente a un punto de K .*

Demostración: Supongamos primero que K es compacto y fijemos una sucesión $\{x_n\}_n$ en K . Como K es acotado (proposición 5.5.3), entonces $\{x_n\}_n$ también lo es. Del teorema 4.6.4, esa sucesión posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}_k$ que converge a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, x_0 es un punto límite de K . Por ser K cerrado, se tiene que $x_0 \in K$ (proposición 5.5.3 y teorema 5.3.8).

Ahora mostraremos el recíproco. Sea K un conjunto como en la hipótesis. Por el teorema de Heine-Borel (5.5.5) basta mostrar que K es cerrado y acotado. Para ver que K es cerrado, sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en K que converge a $x \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}_k$ que converge a un punto $z \in K$. Pero por la proposición 4.6.2, $x_{h(k)} \rightarrow x$ y así $x = z \in K$. Es decir, K contiene todos sus puntos límite, luego K es cerrado (ver teorema 5.3.8).

Para terminar, supongamos que K no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. Por otro lado, la sucesión $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión convergente, en particular, posee una subsucesión acotada $\{x_{h(k)}\}_k$. Pero $|x_{h(k)}| > h(k) \geq k$ (para todo $k \in \mathbb{N}$); y esta contradicción termina la demostración. ■

Ejercicios.

1. Pruebe que la unión de una familia finita de compactos es compacto. Concluya que todo conjunto finito de \mathbb{R} es compacto.
2. Determine cuales de los siguientes conjuntos son compactos. En caso que no lo sean, halle un cubrimiento abierto del mismo que no admita un subcubrimiento finito.
 - a) $[-4, 3)$,
 - b) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 \leq 10\}$,
 - c) $[-3, 10] \cup \mathbb{Z}$,
 - d) $(-\infty, 5]$.
3. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de \mathbb{R} convergente a $z \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ es compacto. Se sugiere resolver este ejercicio usando las tres maneras de verificar compacidad vistas hasta ahora: por definición, usando el teorema de Heine-Borel o el teorema 5.5.6.
4. Sea K un conjunto compacto no vacío, muestre que $\sup K$ e $\inf K$ pertenecen a K .
5. Sean A , B y C subconjuntos de \mathbb{R} . Suponga que A y B son cerrados y C es compacto.
 - a) Muestre que $A + C = \{a + c : a \in A, c \in C\}$ es cerrado. *Ayuda:* Muestre que toda sucesión convergente en $A + C$ tiene su límite en $A + C$. Para ello, sea $a_n + c_n \rightarrow x$ y use una subsucesión de $\{c_n\}_n$ que sea convergente para mostrar que $x \in A + C$.

- b) Muestre que $A + B$ no es necesariamente cerrado. *Ayuda:* Considere por ejemplo $A = \mathbb{N}$ y $B = \{-n + 1/n : n = 2, 3, \dots\}$.
- c) ¿Es cierto que si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto?
- d) Muestre que $\{x^7 - 2x^2 + 10 : x \in C\}$ es compacto.
6. * Sea $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$, una familia decreciente de compactos no vacíos. Pruebe que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ no es vacío. *Ayuda:* Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $x_n \in K_n$. Muestre que la sucesión $\{x_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente a un punto x . Muestre que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.
7. * Dé otra prueba del teorema 5.5.2 como sigue. Suponga que existe un cubrimiento abierto \mathcal{U} de $I_0 := [a, b]$ del cual no es posible extraer un subcubrimiento finito y construya una familia de intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, contenidos en $[a, b]$, tal que I_n es una mitad de I_{n-1} (como en la demostración del teorema 5.4.2) que no posee un subcubrimiento finito extraído de \mathcal{U} . Sea x_0 como en la prueba del teorema 5.4.2 y sea $U \in \mathcal{U}$ conteniendo a x_0 . Pruebe que $I_N \subset U$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

5.6. Los subgrupos aditivos de \mathbb{R}

Por un **subgrupo aditivo** de \mathbb{R} (ó **subgrupo** de $(\mathbb{R}, +)$) entendemos un subconjunto no vacío G de \mathbb{R} tal que $b - a \in G$ si $a, b \in G$. En esta sección daremos algunas indicaciones para el estudio de los subgrupos aditivos de \mathbb{R} . Por ejemplo, veremos que un subgrupo aditivo de \mathbb{R} que sea (topologicamente) cerrado es de la forma $a\mathbb{Z}$ o es igual a \mathbb{R} . Estos resultados no serán usados en el libro y por esto los presentamos a manera de ejercicios.

En lo que sigue, G denota un subgrupo aditivo de \mathbb{R} tal que $G \neq \{0\}$.

1. Muestre que $(G, +)$ es un grupo.
2. Pruebe que $\{0\}$, \mathbb{Z} , $g\mathbb{Z} := \{ng : n \in \mathbb{Z}\}$ (con $g \in \mathbb{R}$), \mathbb{Q} y \mathbb{R} son subgrupos aditivos de \mathbb{R} .
3. Pruebe que el conjunto $G := \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es un subgrupo aditivo que es denso en \mathbb{R} . Concluya que $A := \{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}, m < 2^n\}$ es un subconjunto denso en $(0, 1)$ (esto significa que para cada $x \in (0, 1)$ y cada $\epsilon > 0$ existe $y \in A$ tal que $|x - y| < \epsilon$).
4. Muestre que \overline{G} también es un subgrupo aditivo.
5. Pruebe que $0 \in G$ y que $-x \in G$, si $x \in G$. Concluya que $(G, +)$ es un grupo y que $G_+ := \{x \in G : x > 0\}$ no es vacío.

6. Pruebe que si $g \in G$, entonces $g\mathbb{Z} \subset G$. *Ayuda.* Use inducción para mostrar que $g\mathbb{N} \subset G$. En los problemas que siguen, a denota el ínfimo de G_+ . Es decir, $a = \inf(G_+)$. De la definición de G_+ se tiene $a \geq 0$.
7. Pruebe que si $a > 0$, entonces $a \in G$. *Ayuda.* Por definición de ínfimo, existe $x \in G_+$ tal que $a \leq x < 2a$. Asuma $a < x$ y vuelva a aplicar la definición de ínfimo.
8. Pruebe que si $a > 0$, entonces $G = a\mathbb{Z}$. *Ayuda.* Muestre que dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $na < x < (n+1)a$.
9. Pruebe que si $a = 0$, entonces G es denso en \mathbb{R} . *Ayuda.* Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Muestre que existe $x_0 \in G_+$ tal que $x_0 < \epsilon$ y existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nx_0 \leq x < (n+1)x_0$. Concluya que $(n+1)x_0 - x < \epsilon$.
10. Pruebe que si G es cerrado, entonces $G = \mathbb{R}$ o $G = g\mathbb{Z}$ para algún $g \in G$.
11. Pruebe que si $\text{int}(G) \neq \emptyset$, entonces $G = \mathbb{R}$.
12. Suponga que existen subconjuntos abiertos $O_n \subset \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $G = \bigcap_n O_n$. Muestre que G es cerrado. *Ayuda:* Suponga que G no es cerrado y concluya que G es denso (en particular, cada O_n es denso). Fije $x_0 \in \mathbb{R} \setminus G$. Sea $H = G + x_0$. Muestre que H también es denso, $H = \bigcap_n (O_n + x_0)$ y cada $O_n + x_0$ es abierto denso. Construya una sucesión $\{I_n\}_n$ de intervalos compactos encajados con $I_n \subset O_n \cap (O_n + x_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluya que $H \cap G \neq \emptyset$ y vea que esto contradice que $x_0 \notin G$.
13. En este ejercicio trabajaremos con la estructura multiplicativa de \mathbb{R} . Sea $H \subset (0, +\infty)$. Suponga que si $x, y \in H$, entonces $x/y \in H$. Muestre que si $\text{int}(H) \neq \emptyset$, entonces $H = (0, +\infty)$.

Capítulo 6

Límites y Continuidad

En este capítulo introducimos el concepto más importante de este libro; a saber, el concepto de límite, el cual es usado explícitamente en el tema de derivadas e implícitamente, en el tema de integración. La mayor parte del capítulo es dedicado al estudio de las funciones continuas y de las funciones monótonas. El estudio de las funciones continuas y estrictamente monótonas, nos conducen a la construcción de las funciones exponenciales ($f(x) = a^x$) y logarítmicas ($f(x) = \log_a x$).

6.1. Límites

En este capítulo, salvo mención contraria, A denotará un subconjunto de \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$ será un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ indicará una función. Diremos que $f(x)$ **tiene límite cuando x tiende a x_0** , si existe un número real λ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$,

$$\text{si } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - \lambda| < \epsilon. \quad (1.1)$$

Expresada en forma simbólica la definición de límite es la siguiente:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \epsilon].$$

La notación que usaremos es la siguiente:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{ó} \quad f(x) \rightarrow \lambda, \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0.$$

El primer símbolo se lee: “ λ es el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 ”, mientras que el segundo se lee, “ $f(x)$ tiende a λ , cuando x tiende a x_0 ”.

La definición precedente dice que dado un entorno de λ de radio ϵ , existe un entorno de x_0 de radio δ (que depende de ϵ) tal que $f(x) \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ y $x \neq x_0$. Es

decir, $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. Informalmente hablando, esta definición dice que $f(x)$ está “cerca” de λ , si x está cerca de x_0 y $x \neq x_0$. Requerir que x_0 sea punto de acumulación asegura que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, de modo que la definición de límite “no es trivial”, en el sentido que existen elementos de A que satisfacen la premisa en (1.1). Por otra parte, es irrelevante que x_0 pertenezca o no al dominio de f . Estos dos comentarios se aclararán con el ejemplo que presentamos a continuación.

Ejemplo 6.1.1. Sea $A = [0, 1] \cup \{2\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función. El lector interesado comprobará que dado $\epsilon > 0$ la condición (1.1) es válida para $x_0 = 2$, $\delta = 1/2$ y cualquiera λ (!). El hecho que 2 no es un punto de acumulación del dominio de la función hace que el concepto de límite (en ese punto) no tenga ninguna utilidad (y por esto no se considera el caso en el que x_0 no es punto de acumulación de A).

Por otra parte si $A = [0, 2)$ y $f(x) = x^2$, entonces el límite de f cuando x tiende a 2 es igual a 4. Note que es irrelevante que 2 no pertenezca al dominio de f . En otras palabras, podemos agregar 2 al dominio de la función y definirla en 2 como queramos y todavía obtener que el mismo límite cuando x tiende a 2.

La siguiente proposición muestra que el concepto de límite puede expresarse en términos de la convergencia de ciertas sucesiones y es, por consiguiente, un concepto topológico. Este resultado con frecuencia simplifica la verificación de la existencia del límite de una función en un punto.

Teorema 6.1.2. $f(x) \rightarrow \lambda$, cuando $x \rightarrow x_0$ si y sólo si $f(x_n) \rightarrow \lambda$ para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 .

Demostración: (\Rightarrow). Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 y fijemos $\epsilon > 0$. Por definición de límite de una función, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \quad \text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A, \quad (1.2)$$

y por definición de límite de una sucesión existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{si } n > n_0. \quad (1.3)$$

Por otra parte, como $x_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos usar (1.2) y (1.3) y concluir que

$$|f(x_n) - \lambda| < \epsilon \quad \text{si } n > n_0.$$

Esto prueba que $\{f(x_n)\}_n$ converge a λ .

(\Leftarrow). Mostraremos la contrarecíproca. Supongamos que $f(x)$ no tiende a λ , cuando $x \rightarrow x_0$. Construiremos una sucesión $\{x_n\}_n$ que converge a x_0 pero tal que $\{f(x_n)\}_n$ no converge a λ .

En efecto, existe $\epsilon > 0$ tal que $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}))$ no está contenido en $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$, para ningún $\delta > 0$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap (A \setminus \{x_0\})$ tal que $f(x_n) \notin (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. De esta forma queda construída una sucesión $\{x_n\}_n$ en $A \setminus \{x_0\}$ tal que $|x_n - x_0| < 1/n$ y $|f(x_n) - \lambda| \geq \epsilon$. Es decir, $x_n \rightarrow x_0$ pero $\{f(x_n)\}_n$ no converge a λ . Con esto termina la demostración. ■

Observación: Es importante que el lector ponga atención a la estructura lógica de la implicación (\Leftarrow) en la demostración anterior. Observe que se demostró la contrarecíproca. Intente el lector dar una demostración directa de (\Leftarrow).

Ejemplos 6.1.3. 1. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \text{ es racional;} \\ 1 & , \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Sea x_0 un real cualquiera. Mostraremos que f no tiene límite en x_0 . Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , entonces por la proposición 5.3.9 existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en \mathbb{Q} con $x_n \neq x_0$ para todo n y tal que $x_n \rightarrow x_0$. Note que $f(x_n) \rightarrow 0$, de hecho $\{f(x_n)\}_n$ es una sucesión constante igual a 0. De igual forma, como los irracionales también son densos en \mathbb{R} (ver proposición 2.5.5), existe una sucesión $\{y_n\}_n$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $y_n \neq x_0$ para todo n y tal que $y_n \rightarrow x_0$. Note que $f(y_n) \rightarrow 1$. Usando el teorema 6.1.2 concluimos que f no tiene límite en x_0 .

2. Considere ahora la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la manera siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & , \text{ si } x \text{ es racional;} \\ x^2 & , \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Mostraremos que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$. En efecto, sea $\{x_n\}_n$ una sucesión convergente a 2. Es claro que si $\{x_n\}_n$ estuviera formada sólo por racionales o sólo por irracionales, entonces $g(x_n) \rightarrow 4$. Dejamos a cargo del lector mostrar que esto es suficiente para garantizar que $\{g(x_n)\}_n$ es convergente (ver ejercicio 4). ¿En que otro punto existe el límite?

3. Considere ahora la función $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la manera siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} 1/q & , \text{ si } x = p/q \text{ donde } p < q \text{ son enteros positivos} \\ & \text{y sin divisores comunes;} \\ 0 & , \text{ si } x \text{ es irracional y } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Sea $x_0 \in (0, 1)$ cualquiera. Mostraremos que h tiende a 0 en x_0 . Sea $\epsilon > 0$ y escoja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. Sea B el conjunto de todos los racionales de la forma p/q con $0 < p < q$ y $q \leq n$. Note que B es finito. Observe ahora que si x es racional y $x \notin B$, entonces $0 < h(x) < 1/n$. Como B es finito, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x_0 - x| < \delta$, entonces $x \notin B$. De aquí se puede fácilmente deducir que si $0 < |x_0 - x| < \delta$, entonces $|h(x)| < 1/n$.

Los cuatro resultados enunciados a continuación pueden probarse usando los mismos argumentos de las secciones 4.1, 4.2 y 4.3 o utilizando el teorema 6.1.2 y los correspondientes resultados del capítulo 4.

Proposición 6.1.4. *Si $f(x) \rightarrow \lambda$ y $g(x) \rightarrow \mu$ cuando $x \rightarrow x_0$, entonces $\lambda = \mu$.*

Dadas funciones $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se definen funciones $f + g, cf, f \cdot g, f/g : A \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x); \\ (cf)(x) &= cf(x); \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x); \\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x), \quad \text{si } g(x) \neq 0 \text{ (para todo } x \in A).\end{aligned}$$

Proposición 6.1.5. *Sean f, g, c como antes y supongamos que $f(x) \rightarrow \lambda$ y $g(x) \rightarrow \mu$, cuando $x \rightarrow x_0$. Entonces $f(x) + g(x) \rightarrow \lambda + \mu$, $cf(x) \rightarrow c\lambda$ y $f(x)g(x) \rightarrow \lambda\mu$, cuando $x \rightarrow x_0$. Si además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ y $\mu \neq 0$, entonces $f(x)/g(x) \rightarrow \lambda/\mu$, cuando $x \rightarrow x_0$.*

Proposición 6.1.6. *Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \leq g$ (lo que por definición significa que $f(x) \leq g(x); x \in A$). Si $f(x) \rightarrow \lambda$ y $g(x) \rightarrow \mu$, cuando $x \rightarrow x_0$, entonces $\lambda \leq \mu$.*

Proposición 6.1.7. *Sean $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f \leq g \leq h$. Si $f(x) \rightarrow \lambda$ y $h(x) \rightarrow \lambda$ cuando $x \rightarrow x_0$, entonces $g(x) \rightarrow \lambda$ cuando $x \rightarrow x_0$.*

Ejercicios.

- En cada uno de los siguientes ejercicios pruebe usando la definición ϵ - δ que el límite de f cuando x tiende a a es λ .
 - $f(x) = x^4, \lambda = a^4$;
 - $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1, \lambda = 1$;
 - $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}, a = 1, \lambda = 2$;
 - $f(x) = \sqrt{|x|}, a = 0, \lambda = 0$;
 - $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, \lambda = 1$.
- Pruebe las proposiciones 6.1.4 a 6.1.7.
- Halle un ejemplo de una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para algún punto de acumulación x_0 de A exista una sucesión $\{x_n\}_n$ convergente a x_0 pero que $\{f(x_n)\}_n$ no sea convergente. ¿Qué tiene esto que ver con la demostración del teorema 6.1.2?.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$. Suponga que para todo par de sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ con $x_n \in \mathbb{Q}$ y $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ambas convergiendo a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}_n$ y $\{f(y_n)\}_n$ convergen al mismo valor λ . Muestre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$. *Ayuda:* Vea el ejercicio 7 de la sección 4.6.
5. a) Suponga que $f(x) \rightarrow \lambda$ cuando $x \rightarrow x_0$ y sea $\phi : T \rightarrow A \setminus \{x_0\}$ una función definida en un subconjunto T de \mathbb{R} , tal que $t_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de T y $\phi(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow t_0$. Pruebe que $f(\phi(t)) \rightarrow \lambda$ cuando $t \rightarrow t_0$.
- b) De un ejemplo donde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x^2)$ exista, pero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no exista.
6. Suponga que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = l$ y sea $b \neq 0$. Muestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(bx)/x = bl$. *Ayuda:* Note que $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$ y use el ejercicio 5.
7. Intente dar una demostración directa de (\Leftarrow) en el teorema 6.1.2 (en lugar de mostrar la contrarecíproca, como lo hicimos).
8. Halle ejemplos que muestren que ninguno de los siguientes enunciados es equivalente a " $f(x) \rightarrow \lambda$, cuando $x \rightarrow a$ ".
- a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$.
- b) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - \lambda| < \epsilon$, entonces $0 < |x - a| < \delta$.
- c) Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$.
9. Suponga que las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienen la siguiente propiedad. Para todo $\epsilon > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \epsilon/2, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon$$

y

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \epsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \epsilon.$$

Muestre que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x se cumple que:

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |f(x)g(x) - 8| < \epsilon.$$

Ayuda: Note que $f(x)g(x) - 8 = [f(x) - 2][g(x) - 4] + 4[f(x) - 2] + 2[g(x) - 4]$.

6.2. Límites laterales y al infinito

Definiremos ahora el concepto de límite lateral. Para ello necesitamos el siguiente concepto: Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación a derecha** (resp. **izquierda**) de A si $(x_0, x_0 + \epsilon) \cap A$ (resp. $(x_0 - \epsilon, x_0) \cap A$) no es vacío, para ningún $\epsilon > 0$.

Ejemplo 6.2.1. Todo punto de \mathbb{Q} es a la vez punto de acumulación a derecha e izquierda de \mathbb{Q} . Sean a, b reales con $a < b$, entonces todo punto de (a, b) es punto de acumulación a derecha e izquierda de (a, b) . Por otra parte, a es un punto de acumulación a derecha de (a, b) .

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación a derecha (resp. *izquierda*) de A . Diremos que $f(x)$ **tiene límite, cuando x tiende a x_0 por la derecha** (resp. *izquierda*), si existe un número real λ con la siguiente propiedad:

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \quad \text{si } 0 < x - x_0 < \delta \quad (\text{resp. } -\delta < x - x_0 < 0) \quad \text{y } x \in A.$$

En este caso también se dice que $f(x)$ *tiende a λ , cuando x tiende a x_0 por la derecha* (resp. *izquierda*), o que λ *es el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 por la derecha* (resp. *izquierda*). Para denotar esta situación, se utilizan los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) && (\text{resp. } \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)). \\ f(x) &\rightarrow \lambda, \text{ cuando } x \rightarrow x_0^+ && (\text{resp. } x \rightarrow x_0^-). \\ \lambda &= f(x_0+) && (\text{resp. } \lambda = f(x_0-)). \end{aligned}$$

Proposición 6.2.2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación a derecha e izquierda de A . Entonces $f(x)$ tiene límite λ , cuando $x \rightarrow x_0$ si y sólo si existen los límites laterales $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ y $f(x_0+) = f(x_0-)$. En ambos casos, $\lambda = f(x_0+) = f(x_0-)$.

Demostración: Ejercicio.

Terminaremos esta sección definiendo los conceptos de límites al infinito y límites infinitos. Para lo primero, necesitamos suponer que A no está acotado superiormente (resp. inferiormente). En este caso decimos que $f(x)$ **tiene límite λ , cuando x tiende a $+\infty$** (resp. $-\infty$), si para cada $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \quad \text{si } x > M \quad (\text{resp. } x < -M) \quad \text{y } x \in A.$$

Esta situación suele expresarse a través de algunos de los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) && (\text{resp. } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)). \\ f(x) &\rightarrow \lambda \text{ cuando, } x \rightarrow +\infty && (\text{resp. } x \rightarrow -\infty). \\ \lambda &= f(+\infty) && (\text{resp. } \lambda = f(-\infty)). \end{aligned}$$

Sea x_0 un punto de acumulación de A . Diremos que $f(x)$ **tiende a más infinito** (resp. **menos infinito**), cuando x tiende a x_0 , si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > M \quad (\text{resp. } f(x) < -M) \quad \text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y } x \in A.$$

En este caso escribimos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= +\infty && (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty) \\ f(x) &\rightarrow +\infty && (\text{resp. } f(x) \rightarrow -\infty) \text{ cuando, } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Dejaremos a cuidado del lector definir los conceptos de límites laterales infinitos.

Ejercicios.

1. Pruebe que las proposiciones 6.1.4 a 6.1.7 siguen siendo válidas para límites laterales.
2. Enuncie y demuestre una versión del teorema 6.1.2 para límites laterales.
3. Enuncie y demuestre resultados análogos a los resultados 6.1.2 al 6.1.7 referentes a los límites al infinito.
4. Sea $p(x)$ una *función polinomial*, es decir, p es una función de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Use la versión de 6.1.2 para límites al infinito (probada en el ejercicio anterior) para determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$.
5. Muestre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ suponiendo que ambos límites existen.
6. Suponga que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Muestre que existe $\delta > 0$ tal que si $a - \delta < x < a < y < a + \delta$, entonces $f(x) < f(y)$.

6.3. Funciones continuas

En esta sección, A denota un subconjunto de \mathbb{R} , x_0 un punto de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función. Diremos que f es **continua en x_0** , si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon].$$

Informalmente hablando, f es continua en x_0 si $f(x)$ está próximo a $f(x_0)$, cuando x lo está de x_0 . En caso contrario, diremos que f es **discontinua** en x_0 . Diremos que f es **continua en A** si ella es continua en todo punto de A . Este concepto es fundamental para todo lo que resta.

Las siguientes dos proposiciones caracterizan la continuidad de una función en términos de su comportamiento con respecto a los límites y a las sucesiones convergentes. La primera es una consecuencia inmediata de las definiciones y la segunda se deduce a partir del teorema 6.1.2.

Proposición 6.3.1. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y x_0 es un punto de acumulación de A . Se tiene que f es continua en x_0 si y sólo si $f(x) \rightarrow f(x_0)$ cuando $x \rightarrow x_0$.*

Proposición 6.3.2. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Se tiene que f es continua en x_0 si y sólo si $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, para cada sucesión $\{x_n\}_n$ en A convergente a x_0 .*

Los resultados anteriores facilitan la verificación de la continuidad de una función, como se ilustra en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 6.3.3. Considere la función f dada en el ejemplo 6.1.3(1). Vimos que f no tiene límite en ningún punto de su dominio. En consecuencia, la proposición 6.3.1 nos asegura que f no es continua en ningún punto.

Ejemplo 6.3.4. Considere la función $g(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$. Usaremos la proposición 6.3.2 para verificar que g es continua en \mathbb{R} . Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}_n$ una sucesión convergente a x_0 . Entonces $f(x_n) = x_n^2$ y como $x_n^2 \rightarrow x_0^2$ (ver proposición 4.2.1), entonces $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Esto muestra que g es continua en todo punto.

Para ilustrar como usar directamente la definición de continuidad, daremos otra demostración de la continuidad de g . Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$. Ahora bien, al factorizar $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$ observamos que debemos garantizar que $|x + x_0|$ esté acotado. Para esto basta tomar δ tal que $0 < \delta < \min\{1, \epsilon/(2|x_0| + 1)\}$. En efecto, supongamos que $|x - x_0| < \delta$. En particular, $|x - x_0| < 1$ y en consecuencia

$$|x| < 1 + |x_0|$$

(pues $|x| - |x_0| \leq |x - x_0|$). Como $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$, entonces tenemos que

$$|x + x_0| < 1 + 2|x_0|.$$

En consecuencia,

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| < (1 + 2|x_0|)|x - x_0|.$$

Finalmente, como $|x - x_0| < \epsilon/(2|x_0| + 1)$, entonces

$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon.$$

El lector podrá verificar que esta escojencia del δ es exactamente la usada en la demostración de la proposición 4.2.3. Es decir, en realidad hemos demostrado la parte de la proposición 4.2.1 que nos hacía falta para este ejemplo particular.

Veremos ahora una caracterización de las funciones continuas exclusivamente en términos de conjuntos abiertos. Enunciaremos el resultado para funciones con dominio \mathbb{R} y dejaremos como ejercicio el caso general de funciones con dominio un subconjunto de \mathbb{R} (ver ejercicio 10).

Teorema 6.3.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) f es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto para cada abierto V de \mathbb{R} .
- b) f es continua si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado para cada cerrado F de \mathbb{R} .

Demostración: Mostraremos a) y dejaremos a cargo del lector la parte b). Supongamos que f es continua y sea $V \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Fijemos $x_0 \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x_0) \in V$ y por ser V abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset V$. Por ser f continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En consecuencia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(V)$ (verificar) y concluye la prueba de que $f^{-1}(V)$ es abierto.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto para cada abierto V de \mathbb{R} y veamos que f es continua en todo punto. Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Considere el abierto $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Por hipótesis $f^{-1}(V)$ es abierto. Como $x_0 \in f^{-1}(V)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(V)$. Esto muestra que f es continua en x_0 (verificar). ■

La proposición que sigue nos dice que la composición de funciones continuas es una función continua.

Proposición 6.3.6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \rightarrow B$ es continua en x_0 y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0 .

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Para simplificar la notación pondremos $y_0 := f(x_0)$. Ya que g es continua en y_0 , existe $\eta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon, \quad \text{si } |y - y_0| < \eta \text{ y } y \in B.$$

Como a su vez, f es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \eta, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

De aquí y la relación precedente, y teniendo en cuenta que $y_0 = f(x_0)$, obtenemos:

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

■

Ejercicios.

1. Determine los puntos de continuidad de las funciones definidas en el ejemplo 6.1.3.
2. Pruebe que si x_0 es un punto aislado de A , entonces cualquier función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 .
3. De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua sólomente en los puntos del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $B \subset A$. Muestre que la restricción de f a B es una función continua. Este resultado se puede mostrar directamente usando la definición de continuidad o se puede deducir de la proposición 6.3.6. (Sea $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ y considere la función $g \circ f$).
5. Complete las demostraciones de las proposiciones 6.3.1 y 6.3.2.
6. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en x_0 . Pruebe que $|f|$, $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0 . Si además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces f/g también es continua en x_0 .
7. Pruebe que si f es constante ó si $f(x) = x$ para todo $x \in A$, entonces f es continua. Use el ejercicio anterior para concluir que toda función polinomial es continua, es decir las funciones de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$; donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
8. Complete la demostración del teorema 6.3.5.
9. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en un punto $a \in A$. Defina $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente

$$\varphi(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \text{ y } \psi(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Muestre que φ y ψ son continuas en a . *Ayuda:* Vea el ejercicio 4 de la sección 2.8.

10. Este ejercicio es la relativización del teorema 6.3.5 a un conjunto A cualquiera y una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Recuerde la definición de abierto en A dada en ejercicio 9 de la sección 5.2 y la de cerrado en A dada en el ejercicio 13 de la sección 5.3.
 - a) Pruebe que f es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en A , para cada abierto V de \mathbb{R} .
 - b) Pruebe que f es continua si y sólo si $f^{-1}(Z)$ es cerrado en A para cada cerrado Z de \mathbb{R} .
11. De otra demostración de la proposición 6.3.6 usando el ejercicio 10 y otra usando sucesiones (proposición 6.3.2).
12. Pruebe que si f es continua, entonces $f(\overline{C} \cap A) \subset \overline{f(C)}$, para cada subconjunto C de A .
13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que f es continua en 0 y muestre que f es continua en \mathbb{R} .
14. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo racional x . Muestre que $f = g$. ¿Que puede decir si f y g son iguales en los irracionales?

15. * Dada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, diremos que $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *extensión continua* de f si F es continua y $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.
- Pruebe que f tiene a lo sumo una extensión continua $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, si $F, G : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ son extensiones continuas de f , entonces $F = G$.
 - De un ejemplo de un conjunto A y una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que no admita ninguna extensión continua.
16. * Sea $A \subset \mathbb{R}$ cerrado y no vacío.
- Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente $f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Muestre que f es continua y que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$. *Ayuda:* Muestre que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
 - Si $c \notin A$. Muestre que existe una función continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 1$ y $g(x) = 0$ para todo $x \in A$.
17. * Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ es cerrado y que $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}$ es abierto. *Ayuda:* Use el teorema 6.3.5 y la función $h = f - g$. Note que $B = h^{-1}(0)$.
18. * Pruebe que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es numerable, entonces f es constante. *Ayuda.* Pruebe primero que $f(\mathbb{R})$ es numerable. Enseguida suponga que existen $a, b \in f(\mathbb{R})$ con $a < b$. Ya que (a, b) no es numerable, existe $c \in (a, b) \setminus f(\mathbb{R})$. Defina $U = f^{-1}((-\infty, c))$ y $V = f^{-1}((c, +\infty))$. Muestre que U es abierto y cerrado y después use el ejercicio 12 de la sección 5.3.

6.4. Funciones continuas definidas sobre compactos y sobre intervalos

Estudiaremos ahora los conceptos de máximo y mínimo de una función y probaremos que si A es compacto, entonces toda función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza máximo y mínimo.

Diremos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **alcanza mínimo** (resp. **máximo**), si existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$) para cada $x \in A$. El número $f(x_0)$ es llamado **el mínimo** (resp. **el máximo**) (**absoluto**) de f en A . Se dice también que f **alcanza mínimo** (resp. **máximo**) en x_0 o que x_0 **es un punto de mínimo** (resp. **máximo**) de f .

La proposición que sigue es la clave para demostrar la existencia de máximos y mínimos.

Proposición 6.4.1. *Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración: Por el teorema 5.5.6, bastará probar que toda sucesión en $f(A)$ posee una subsucesión convergente a un punto de $f(A)$. Sea $\{y_n\}_n$ una sucesión en $f(A)$. Para cada n escoja $x_n \in A$ tal que $f(x_n) = y_n$. Ya que A es compacto, por el teorema 5.5.6, sabemos que $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}$ convergente a un punto $x_0 \in A$. Considere la sucesión $y_{h(k)} = f(x_{h(k)})$ para $k \in \mathbb{N}$. Como f es continua, entonces la proposición 6.3.2 nos garantiza que $f(x_{h(k)}) \rightarrow f(x_0)$, es decir, $y_{h(k)} \rightarrow f(x_0)$. ■

Teorema 6.4.2. *Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto, entonces f alcanza máximo y mínimo.*

Demostración: Por la proposición anterior, $K := f(A)$ es compacto, lo que permite definir $c = \inf(K)$ y $d = \sup(K)$. Dejamos a cargo del lector verificar que, por ser K cerrado, se tiene que $c, d \in K$. De modo que $c = f(x_0)$ y $d = f(z_0)$, para ciertos $x_0, z_0 \in A$. El resultado se obtiene notando que $c \leq f(x) \leq d$ para todo $x \in A$. ■

Incluir gráfica

Nos encaminamos ahora a probar el teorema de Bolzano de los Valores Intermedios, una de cuyas formas dice que: “*la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo*”. Una versión más sugerente es que si dos puntos y_0, y_1 están en la imagen de una función continua, cuyo dominio es un intervalo, entonces todo punto entre y_0 e y_1 también está en la imagen de f . La prueba de este resultado necesita el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 6.4.3. *i) Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), para algún x_0 . Entonces existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$ y $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$), para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.*

ii) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $a < b$ y supongamos que $f(a) < 0$ (resp. $f(a) > 0$). Entonces existe $r \in (0, b - a)$ tal que $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) para cada $x \in [a, a + r]$.

iii) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $a < b$ y supongamos que $f(b) < 0$ (resp. $f(b) > 0$). Entonces existe $r \in (0, b - a)$ tal que $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) para cada $x \in [b - r, b]$.

Demostración: (i) Probaremos sólo el caso en el que $f(x_0) > 0$. De la definición de continuidad con $\epsilon = f(x_0)$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$, si $|x - x_0| < \delta$ y

$x \in (a, b)$. En consecuencia, $0 < f(x) < 2f(x_0)$, si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in (a, b)$. El resultado se seguirá fácilmente fijando $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r)$ esté contenido en el abierto $(a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dejaremos a cargo del lector la demostración de (ii) y (iii). ■

Teorema 6.4.4. (Bolzano) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración: Sea $B = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Entonces $a \in B$ y b es cota superior de B , lo cual permite definir $c = \sup(B)$. Note que de la proposición 6.4.3(ii) se concluye que $a < c$. Mostraremos que $f(c) = 0$.

Primero afirmamos que $c < b$. En efecto, como $f(b) > 0$, entonces de la proposición 6.4.3(iii) se concluye que existe $r \in (0, b-a)$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in [b-r, b]$. De aquí, $B \subset [a, b-r)$ y en consecuencia, $b-r$ es una cota superior de B . Por lo tanto $c \leq b-r$ y con esto queda probada la afirmación.

Ahora mostraremos que $f(c) \geq 0$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $f(c) < 0$. Por la proposición 6.4.3(i) existe $d \in (c, b)$ tal que $f(d) < 0$. En consecuencia $d \in B$ y por lo tanto $d \leq c$. Esta contradicción muestra que $f(c) \geq 0$.

Finalmente mostraremos que $f(c) = 0$. En efecto, si fuera $f(c) > 0$, por la proposición 6.4.3(i), existiría $r > 0$ tal que $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ y $f(x) > 0$ en $(c-r, c+r)$. Así, $B \subset [a, c-r)$ (justificar) y en consecuencia, $c-r$ sería una cota superior de B menor que el supremo de B . Con esta contradicción termina la demostración. ■

Incluir gráfica

El lector comprobará que el resultado anterior permanece válido si reemplazamos la hipótesis $f(a) < 0 < f(b)$ por $f(b) < 0 < f(a)$. De aquí se tiene que: “si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[a, b]$, entonces f se anula por lo menos una vez en (a, b) ”.

Corolario 6.4.5. Sea A un intervalo y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in A$. Entonces $f(x) > 0$, para todo $x \in A$; ó $f(x) < 0$ para todo $x \in A$.

Demostración: Supongamos por el absurdo que existen $a, b \in A$ tales que $f(a) < 0 < f(b)$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $a < b$. Como $[a, b] \subset A$, entonces podemos usar el teorema de Bolzano (6.4.4) a $f|_{[a,b]}$, la restricción de f a $[a, b]$, y concluir que $f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$. Esto contradice la hipótesis y termina la prueba. ■

Corolario 6.4.6. (*Teorema de los valores intermedios*) Si A es un intervalo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(A)$ es un intervalo. En particular, si $a, b \in A$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = c$.

Demostración: Por la proposición 5.1.1, basta mostrar que dados $c < d$ en $f(A)$ se tiene que $(c, d) \subset f(A)$. Fijemos entonces $c < d$ en $f(A)$ y $z \in (c, d)$. Como $c, d \in f(A)$, entonces $c = f(a)$, $d = f(b)$ para ciertos $a, b \in A$. Intercambiando los papeles de a y b si fuera necesario, podemos suponer que $a < b$. (Note que $a \neq b$, pues $c \neq d$). Si definimos $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - z$ tenemos que $g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $g(w) = 0$ para algún $w \in (a, b)$. Así, $f(w) = z$, lo que prueba que $z \in f(A)$. ■

Observación. De lo visto en esta sección se deduce que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces el rango de f es un intervalo compacto de la forma $[c, d]$. Sin embargo, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e I es un intervalo, no podemos en general decir qué tipo de intervalo es el rango de f . Por ejemplo, considere la función $f(x) = x^2$ definida para $x \in \mathbb{R}$. Entonces la imagen de $(-1, 1)$ bajo f es $[0, 1)$. Por otra parte, la imagen del intervalo $(-2, -1]$ es $[1, 4)$ y la imagen de $[1, 3)$ es $[1, 9)$. Le dejamos al lector la tarea de buscar ejemplos que muestren que el rango de una función continua definida en un intervalo no compacto puede ser de cualquier tipo. En la sección que sigue veremos una clase de funciones (las monótonas) para las cuales se puede determinar el tipo de intervalo que aparece en el rango.

Ejercicios.

1. Dé otra prueba de la proposición 6.4.1, usando la definición original de conjunto compacto en términos de cubrimientos por abiertos. *Ayuda:* Use el ejercicio 10 de la sección 6.3.
2. Complete la demostración de la proposición 6.4.3.
3. Pruebe que si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, entonces $g(c) = c$ para algún c . *Ayuda.* Si $g(0) = 0$ ó si $g(1) = 1$ no hay nada que mostrar. En caso contrario aplique el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - g(x)$. Generalize este resultado a funciones continuas $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$.

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continua y biyectiva. Muestre que la función inversa $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es continua. *Ayuda:* Muestre que si $\{y_n\}_n$ es una sucesión en $[c, d]$ convergente a un punto y , entonces $\{f^{-1}(y_n)\}$ converge a $f^{-1}(y)$. Suponga que no es así y use el teorema 5.5.6 aplicado al compacto $[a, b]$.
5. Para cada $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua denotaremos por $\|f\|$ el máximo de $|f|$, es decir, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Demuestre que
- $\|cf\| = |c|\|f\|$ para cualquier real c ;
 - $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$;
 - $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$;
 - De ejemplos que muestren que las desigualdades en b) y c) pueden ser estrictas.
6. * En este ejercicio se demuestra que todo polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real.
- Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ impar tal que $g(x)/x^n \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y también cuando $x \rightarrow -\infty$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n + g(c) = 0$. *Ayuda:* Sea $h(x) = g(x) + x^n$. Use un razonamiento indirecto para mostrar que h cambia de signo.
 - Sea $n \in \mathbb{N}$ impar y sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$. Use la parte a) para probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 + a_1c + a_2c^2 + \dots + a_nc^n = 0$.

6.5. Funciones monótonas

Igual que en las secciones precedentes, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función definida en un subconjunto A de \mathbb{R} . En las definiciones que siguen x e y denotarán elementos de A . Diremos que f es **creciente**, si $f(x) \leq f(y)$ cuando $x < y$; **estrictamente creciente**, si $f(x) < f(y)$ cuando $x < y$; **decreciente**, si $f(x) \geq f(y)$ cuando $x < y$ y **estrictamente decreciente**, si $f(x) > f(y)$ cuando $x < y$.

Una función se dice que es **monótona** si es creciente o decreciente; y diremos que es **estrictamente monótona** cuando es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. En esta sección mostraremos que las funciones biyectivas y continuas definidas sobre intervalos tienen inversa continua. También mostraremos que las funciones monótonas definidas en intervalos son casi continuas. Con esto queremos decir que su conjunto de discontinuidades es numerable.

Teorema 6.5.1. *Sea A un intervalo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.*

Demostración: Primero trataremos el caso cuando A es un intervalo cerrado y acotado y después el caso general (el ejercicio 5 contiene un argumento alternativo que no necesita considerar varios casos).

Caso $A = [a, b]$. Hay dos casos posibles: $f(a) < f(b)$ ó $f(a) > f(b)$. Trataremos sólo el primero pues el otro se analiza de manera análoga (vea el ejercicio 4). Mostraremos que si $f(a) < f(b)$, entonces f es estrictamente creciente.

(i) Primero veremos que si $a < x < b$, entonces $f(a) < f(x) < f(b)$. En efecto, si no fuera así entonces existiría $x \in [a, b]$ tal que $f(x) < f(a) < f(b)$ ó $f(a) < f(b) < f(x)$. En la primera alternativa podemos usar el teorema de los valores intermedios 6.4.6 en el intervalo $[x, b]$ y concluir que existe $z \in [x, b]$ tal que $f(z) = f(a)$, lo cual contradice la inyectividad de f pues $z \neq a$. La segunda alternativa se trata de manera similar y conduce a que existe $z \in [a, x]$ tal que $f(z) = f(b)$ lo cual también contradice la inyectividad de f . Así hemos probado la afirmación.

(ii) Ahora mostraremos que f es estrictamente creciente. Sean $a \leq c < d \leq b$. Entonces por lo visto en (i) concluimos que $f(a) < f(d)$ y de nuevo por lo hecho en (i) (aplicado ahora al intervalo $[a, d]$) obtenemos que $f(c) < f(d)$.

Caso general Podemos suponer que A tiene al menos dos puntos pues en otro caso no hay nada que demostrar. Fijemos a, b en A con $a < b$. De nuevo hay dos alternativas posibles: $f(a) < f(b)$ ó $f(a) > f(b)$. Ambas se analizan de manera similar y sólo trataremos la primera. Supondremos entonces que $f(a) < f(b)$ y mostraremos que f es estrictamente creciente.

Sean $c, d \in A$ arbitrarios con $c < d$. Mostraremos que $f(c) < f(d)$. En efecto, sea $k = \min\{a, c\}$ y $l = \max\{b, d\}$. Entonces $a, b, c, d \in [k, l]$. Por lo probado anteriormente sabemos que f es estrictamente monótona en $[k, l]$. Como $f(a) < f(b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[k, l]$, en consecuencia $f(c) < f(d)$.

■

Ahora mostraremos que la inversa de una función continua y biyectiva definida sobre un intervalo es continua. Pero primero veremos un ejemplo que muestra que en general no es cierto que la inversa de una función continua es continua.

Ejemplo 6.5.2. Considere la función $f : \{0\} \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 1$ y $f(x) = x/(x+1)$ si $x \geq 1$. El lector verificará que f es inyectiva y que su rango es $[1/2, 1]$. Por lo tanto, restringiendo el contradominio de f obtenemos una función $f : \{0\} \cup [1, +\infty) \rightarrow [1/2, 1]$ biyectiva y continua. Pero su inversa no es continua en 1.

Observe que el dominio de f no es un intervalo, ni es un conjunto compacto. ¿Puede el lector, usando la proposición 6.4.1, mostrar que la inversa de f no puede ser continua sin necesidad de mostrar en que punto f^{-1} no es continua?.

Teorema 6.5.3. *Sea A un intervalo y sea $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ una biyección continua. Entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.*

Demostración: Del teorema 6.5.1 concluimos que f es estrictamente monótona. Supondremos que f es estrictamente creciente. Dejaremos a cargo del lector tratar el caso de una función estrictamente decreciente (ver el ejercicio 4).

Para ver que f^{-1} es continua usaremos el teorema 6.3.2, esto es, mostraremos que si $\{y_n\}_n$ es una sucesión en $f(A)$ convergente a un punto y de $f(A)$, entonces $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$. Antes de comenzar la prueba necesitamos hacer algunas consideraciones.

Como $f(A)$ es un intervalo (por ser f continua y A un intervalo), entonces existen $c, d \in f(A)$ tales que $c \leq y_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (verificar). Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Como f es estrictamente creciente, entonces $a \leq b$ y $a \leq f^{-1}(y_n) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe además que $[a, b] \subset A$ por ser A un intervalo.

Para simplificar la notación, sea $x_n = f^{-1}(y_n)$ y $x = f^{-1}(y)$. Queremos mostrar que $x_n \rightarrow x$. Supongamos que no es así, entonces tenemos que

$$\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n |x_m - x| \geq \epsilon.$$

De esto se concluye que existe una subsucesión $\{x_{h(k)}\}_k$ tal que $|x_{h(k)} - x| \geq \epsilon$ para todo k (justificar). Ahora bien, la sucesión $\{x_{h(k)}\}_k$ toma sus valores en el conjunto compacto $[a, b]$. Por el teorema 5.5.6, existe una subsucesión $\{x_{g(h(k))}\}_k$ convergente a algún punto z de $[a, b]$ y además $|z - x| \geq \epsilon$ (justificar). Como f es continua, entonces $f(x_{g(h(k))}) \rightarrow f(z)$. Pero $f(x_{g(h(k))}) = y_{g(h(k))}$ y en consecuencia $f(x_{g(h(k))}) \rightarrow f(y)$ (justificar). Esto contradice que $x \neq z$. ■

El teorema 6.5.3 es sumamente útil para dar pruebas cortas de la continuidad de una función. Por ejemplo, considere la función $f(x) = x^n$ para $x \in (0, +\infty)$. El lector podrá constatar que f es continua, estrictamente creciente y su rango es $(0, +\infty)$. Luego por el teorema anterior la inversa de f es continua, es decir la función $x^{1/n}$ es continua en $(0, +\infty)$.

Ahora nos concentraremos en las funciones monótonas en general, no necesariamente continuas. El objetivo principal será mostrar que el conjunto de sus discontinuidades es numerable. Recordemos que $f(x_0+)$ denota el límite de f cuando x tiende a x_0 por la derecha, $f(x_0-)$ denota el límite por la izquierda y $f(+\infty)$ y $f(-\infty)$ denotan, respectivamente, el límite cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$. Cuando $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen, entonces definimos

$s(x_0) := f(x_{0+}) - f(x_{0-})$. Este número se conoce con el nombre de **salto de f en x_0** . Es claro que si f es continua en x_0 , entonces $s(x_0) = 0$. El recíproco no es en general cierto, sin embargo mostraremos que sí es válido para las funciones monótonas; de hecho este resultado será la clave para estudiar el comportamiento de estas funciones.

Proposición 6.5.4. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ creciente.*

- a) *Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación a derecha (resp. a izquierda) de A , entonces $f(x_{0+}) = \inf\{f(x) : x \in A \text{ y } x > x_0\}$ (resp. $f(x_{0-}) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$).*
- b) *Si $x_0 \in A$ es a la vez punto de acumulación a derecha e izquierda de A , entonces $f(x_{0-}) \leq f(x_0) \leq f(x_{0+})$.*
- c) *Si x_0 es un punto de acumulación a derecha, y_0 es un punto de acumulación a izquierda de A y $x_0 < y_0$, entonces $f(x_{0+}) \leq f(y_{0-})$.*
- d) *Si A no está acotado superiormente (resp. inferiormente), entonces $f(+\infty) = \sup f(A)$ (resp. $f(-\infty) = \inf f(A)$).*

Demostración:

- a) Probaremos sólo el caso en el que x_0 es punto de acumulación a derecha de A . En este caso, $(x_0, \infty) \cap A \neq \emptyset$, lo que permite definir $\lambda = \inf\{f(x) : x \in A \text{ y } x > x_0\}$. Note que $-\infty \leq \lambda < +\infty$. Consideremos ahora los dos casos siguientes:

Caso 1. Supongamos que $-\infty < \lambda$. Por definición de ínfimo, dado $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ con $a > x_0$ y tal que $f(a) < \lambda + \epsilon$. Definamos $\delta = a - x_0$. Entonces, para cada $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$ se tiene $x < a$, de donde $f(x) \leq f(a)$. Así, $\lambda - \epsilon < \lambda \leq f(x) \leq f(a) < \lambda + \epsilon$, lo cual equivale a decir que $|f(x) - \lambda| < \epsilon$, si $x_0 < x < x_0 + \delta$. Con esto hemos mostrado que $f(x_{0+}) = \lambda$.

Caso 2. Supongamos que $\lambda = -\infty$. Dado $M > 0$ existe $a \in A$ con $a > x_0$ y tal que $f(a) < -M$. Si ponemos $\delta = a - x_0$ y razonamos como antes, vemos que $f(x) < -M$ si $0 < x - x_0 < \delta$ y esto muestra que $f(x_{0+}) = -\infty$.

- b) Dado $x > x_0$ en A , tenemos $f(x) \geq f(x_0)$, de modo que $f(x_0)$ es cota inferior del conjunto $\{f(x) : x > x_0\}$. De aquí y la parte a), $f(x_0) \leq f(x_{0+})$. De manera análoga, $f(x_{0-}) \leq f(x_0)$.
- c) Fijemos $x \in (x_0, y_0) \cap A \neq \emptyset$. De la parte a) se tiene que $f(x_{0+}) \leq f(x) \leq f(y_{0-})$.
- d) Probaremos sólo el caso en el que A no está acotado superiormente. Para ello pongamos $\lambda = \sup f(A)$ y consideremos los dos casos siguientes:

Caso 1. Supongamos $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ fijemos $a \in A$ tal que $\lambda - \epsilon < f(a)$. Para $x \geq a$, tenemos $\lambda - \epsilon < f(a) \leq f(x) \leq \lambda < \lambda + \epsilon$. Lo cual prueba que $f(x) \rightarrow \lambda$, cuando $x \rightarrow +\infty$.

Caso 2. Supongamos $\lambda = +\infty$. Dado $M > 0$, existe $a \in A$ tal que $f(a) > M$ y el resultado se obtiene como en el caso anterior. ■

Una proposición análoga a la anterior es válida para funciones decrecientes, dejaremos al lector la tarea de enunciarla (ver ejercicio 4).

Teorema 6.5.5. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente, donde $a < b$ están en \mathbb{R} y D el conjunto de aquellos puntos $x \in (a, b)$ donde f no es continua. Entonces D es numerable.*

Demostración: Fijemos $x_0 \in (a, b)$. De las partes a)-b) de la proposición 6.5.4, $f(x_0-)$ y $f(x_0+)$ son números reales. Consideremos el salto de f en x_0 que vimos se define como $s(x_0) := f(x_0+) - f(x_0-)$. Se sigue inmediatamente de 6.5.4(b) que f es continua en x_0 si y sólo si $s(x_0) = 0$. Es decir, $x \in D$ si y sólo si $s(x) > 0$.

Para cada $x \in D$, sea $I(x)$ el intervalo abierto no trivial de extremidades $f(x-)$ y $f(x+)$. De la parte c) de la proposición anterior tenemos que, $I(x) \cap I(y) = \emptyset$, si $x, y \in D$ y $x \neq y$. Entonces $\{I(x) : x \in D\}$ es una colección de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, en consecuencia es numerable (ver ejercicio 3 de la sección 5.1). Es claro también que la función que envía $x \in D$ a $I(x)$ es inyectiva, luego D es numerable (ver la proposición 3.4.2). ■

Recordemos que por el corolario 6.4.6 la imagen continua de un intervalo es un intervalo. A continuación veremos que, cuando la función involucrada es estrictamente monótona y continua, podemos decir mucho más.

Proposición 6.5.6. *Sea A un intervalo y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente.*

a) *Si $A = (a, b)$, entonces $f(A) = (f(a+), f(b-))$.*

b) *Si $A = [a, b)$, entonces $f(A) = [f(a), f(b-))$.*

c) *Si $A = (a, b]$, entonces $f(A) = (f(a+), f(b)]$.*

d) *Si $A = [a, b]$, entonces $f(A) = [f(a), f(b)]$.*

Aquí, $f(a+) = f(-\infty)$, si $a = -\infty$ y $f(b-) = f(+\infty)$, si $b = +\infty$.

Demostración: a) Supongamos primero que $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $x \in (a, b)$. De la proposición 6.5.4, $f(a+) \leq f(x) \leq f(b-)$. Como f es estrictamente creciente, entonces $f(a+) < f(x) < f(b-)$ (justificar). De aquí, $f(A) \subset (f(a+), f(b-))$.

Fijemos ahora $y \in (f(a+), f(b-))$. De la proposición 6.5.4, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) < y < f(x_2)$. Como $f(A)$ es un intervalo (por el corolario 6.4.6), entonces $y \in f(A)$.

Consideremos ahora el caso en que $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$. De la proposición 6.5.4, $f(-\infty) \leq f(x) \leq f(b-)$ y la prueba prosigue como antes.

Los dos casos restantes de la parte a); a saber $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ y $A = \mathbb{R}$; serán dejados a cargo del lector, quien también probará las partes b), c) y d). ■

Ejercicios.

1. Sean $f : A \rightarrow B$; $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes (resp. decrecientes), donde $A, B \subset \mathbb{R}$. Pruebe que $g \circ f$ es creciente (resp. decrecientes). ¿Qué puede Ud. decir en el caso monótono estricto?.
2. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ creciente. Muestre que f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente creciente. En general, una función monótona es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.
3. Sea $f : A \rightarrow B$ una biyección creciente entre subconjuntos de \mathbb{R} . Pruebe que f^{-1} es creciente.
4. Pruebe que f es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente.
5. Complete los detalles que faltan en la siguiente demostración alternativa del teorema 6.5.1. Sea f continua e inyectiva definida sobre un intervalo A . Suponga que f no es estrictamente monótona. Entonces existen $x_0 < x_1, y_0 < y_1$ en A tales que $f(x_0) < f(x_1)$ y $f(y_0) > f(y_1)$. Considere la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(s) = f((1-s)x_0 + sy_0) - f((1-s)x_1 + sy_1)$. Muestre que g es continua y está bien definida. Use el teorema de Bolzano 6.4.4 para mostrar que g se anula en algún punto r de $[0, 1]$ y muestre que esto contradice la inyectividad de f .
6. Pruebe que la aplicación $P_n : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dada por $P_n(x) = x^n$ es una biyección continua y estrictamente creciente, para cada $n \in \mathbb{N}$. Deduzca que la aplicación $R_n : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dada por $R(x) = x^{1/n}$ es una biyección continua estrictamente creciente.
7. Pruebe que para cada racional positivo r , la aplicación $P_r : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dada por $P_r(x) = x^r$ es una biyección continua estrictamente creciente. Deduzca que $x^r > 1$ si $x > 1$. *Ayuda:* Use el ejercicio 6 para expresar P_r como composición de funciones continuas y estrictamente crecientes.
8. De un ejemplo de una función $f : A \rightarrow B$ continua y biyectiva tal que f^{-1} no es continua y además que A y B son ambos conjuntos acotados (compare con el ejemplo 6.5.2).

9. Enuncie y demuestre un resultado análogo a la proposición 6.5.4 para funciones decrecientes *Ayuda:* Use el ejercicio 4.
10. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $g(x) \leq f(y)$ si $x < y$. Pruebe que el conjunto $\{x \in A : f(x) < g(x)\}$ es numerable.
11. * Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Pruebe que bajo cualquiera de las dos condiciones indicadas $f(A)$ es abierto y que $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ es continua.
- a) A es la unión de dos intervalos abiertos.
- b) A es un conjunto abierto.
12. Sea A un intervalo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente tal que $f(A)$ es un intervalo. Muestre que f es continua. *Ayuda:* Muestre que $s(x) = 0$ para todo $x \in A$.

6.6. Continuidad uniforme

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La definición de continuidad nos asegura que para cada $x_0 \in A$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, si $|x - x_0| < \delta$. Lo que deseamos hacer notar es que este δ depende no sólo de ϵ sino también de x_0 . Cuando se pueda tomar el δ independiente de x_0 se dirá que f es uniformemente continua. De manera precisa, diremos que f es **uniformemente continua** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A, \forall z \in A [|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \epsilon]. \quad (6.1)$$

El lector verificará sin dificultad que toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como lo muestra el ejemplo que veremos en seguida. El ejemplo más sencillo de función uniformemente continua es la función identidad. En efecto, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ y $\epsilon > 0$ si ponemos $\delta = \epsilon$ es claro que (6.1) se cumple.

Ejemplo 6.6.1. La función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es obviamente continua, pero veremos en seguida que no es uniformemente continua. Para ello supongamos que la afirmación es falsa y apliquemos la definición de continuidad uniforme, con $\epsilon = 1$, para obtener $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(z)| < 1$, si $|x - z| < \delta$ y $x, z > 0$. Entonces

$$\forall x > 0, \forall z > 0 [|x - z| < \delta \Rightarrow |x^2 - z^2| = |x + z||x - z| < 1]. \quad (6.2)$$

Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > 1$. Tomemos $x_0 = n + \delta/2$ y $z_0 = n$. Entonces $|x_0 - z_0| = \delta/2 < \delta$ y $|x_0 + z_0||x_0 - z_0| = (2n + \delta/2)\delta/2 > n\delta > 1$, lo cual contradice (6.2) y prueba nuestra afirmación.

Por otra parte, si restringimos el dominio a un intervalo compacto $[a, b]$, entonces f si es uniformemente continua. En efecto, notemos que $2a \leq x + z \leq 2b$ para todo $x, z \in [a, b]$. Poniendo $M = \max\{|2a|, |2b|\}$, tenemos que $|x+z| \leq M$ para todo $x, z \in [a, b]$ y en consecuencia

$$|x^2 - z^2| = |x + z||x - z| \leq M|x - z|, \quad \text{si } x, z \in [a, b].$$

En resumen, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/M$ y de la desigualdad anterior se sigue inmediatamente que (6.1) se cumple. Por consiguiente f es uniformemente continua en $[a, b]$.

El teorema que mostraremos a continuación dice que el ejemplo anterior es sólo un caso particular de un resultado general válido para toda función continua con dominio compacto.

Teorema 6.6.2. *Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Daremos un argumento indirecto. Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0 \exists x, y \in A [|x - y| < \delta \text{ y } |f(x) - f(y)| > \varepsilon]. \quad (6.3)$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomando $\delta = 1/n$ en (6.3) obtenemos que existen $x_n, y_n \in A$ tales que

$$|x_n - y_n| < 1/n \text{ y } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \quad (6.4)$$

Como A es compacto, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto z de A . Notemos que $\{y_{n_k}\}_k$ también debe converger a z . En efecto, tenemos que

$$|y_{n_k} - z| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - z| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - z| \quad (6.5)$$

y tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ en (6.5) obtenemos que $y_{n_k} - z \rightarrow 0$.

Por la continuidad de f tenemos que $\{f(y_{n_k})\}_k$ y $\{f(x_{n_k})\}_k$ ambas tienden a $f(z)$. Por consiguiente $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow 0$. Por otra parte (6.4) nos asegura que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$ para todo k y por consiguiente $\lim_k |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Esta es la contradicción buscada. ■

Terminaremos la sección mostrando que toda función uniformemente continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ admite una única extensión continua a \bar{A} , es decir, existe una única función $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. De hecho, F es uniformemente continua, como se indica en el ejercicio 3. Comenzaremos con el siguiente resultado auxiliar, que por sí sólo tiene su interés.

Proposición 6.6.3. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y $\{x_n\}_n$ una sucesión en A . Si $\{x_n\}_n$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_n$ es de Cauchy.*

Demostración: Como f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ escojamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{si } |x - z| < \delta. \quad (6.6)$$

Ya que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ si $m, n > N$. De aquí y (6.6), $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, si $m, n > N$. ■

Teorema 6.6.4. *Toda función uniformemente continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ posee una única extensión continua $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$. De hecho, F es uniformemente continua.*

Demostración: Fijemos $x \in \bar{A}$ y recordemos que por la proposición 5.3.7, existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A que converge a x . En particular, esa sucesión es de Cauchy, y por la proposición anterior, lo mismo vale para $\{f(x_n)\}_n$. De aquí, $\{f(x_n)\}_n$ es convergente, lo que permite definir

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n). \quad (6.7)$$

Debemos ver que esta definición no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}_n$. Con ese fin, sea $\{z_n\}_n$ otra sucesión en A que converge a x y mostremos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n). \quad (6.8)$$

Para ello, fijemos $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, escojamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{si } |x - z| < \delta. \quad (6.9)$$

Como $x_n - z_n \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - z_n| < \delta$, si $n > N$. De aquí y (6.9), $|f(x_n) - f(z_n)| < \epsilon$, si $n > N$. Esto dice que $f(x_n) - f(z_n) \rightarrow 0$ y prueba (6.8). En consecuencia, se tiene una función bien definida $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante (6.7).

Ahora mostraremos que F es una extensión de f . Para esto, fijemos $x \in A$ y pongamos $x_n = x$; para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n \rightarrow x$ y $f(x_n) \rightarrow f(x)$. De aquí y (6.7), $F(x) = f(x)$, lo cual dice que F es una extensión de f .

Veremos ahora que F es uniformemente continua. Dado $\epsilon > 0$ escojamos $\delta > 0$ satisfaciendo (6.9), definamos $\eta = \delta/3$ y fijemos $x, z \in \bar{A}$ tales que $|x - z| < \eta$. Tomemos ahora sucesiones $\{x_n\}_n, \{z_n\}_n$ en A convergiendo a x y z respectivamente. Recordemos que por definición de F , $f(x_n) \rightarrow F(x)$ y $f(z_n) \rightarrow F(x)$. Así,

$$|f(x_n) - f(z_n)| \rightarrow |F(x) - F(z)|. \quad (6.10)$$

Por otra parte, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \eta$ y $|z_n - z| < \eta$ si $n > N$. En particular,

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - x| + |x - z| + |z - z_n| < 3\eta = \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, por (6.9), $|f(x_n) - f(z_n)| < \epsilon$, si $n > N$. De aquí y (6.10), $|F(x) - F(z)| \leq \epsilon$ si $|x - z| < \eta$. Esto prueba que F es uniformemente continua.

Por último, dejaremos a cargo del lector mostrar la unicidad de F (ver el ejercicio 15a de la sección 6.3). ■

Corolario 6.6.5. *Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y A es acotado, entonces $f(A)$ es acotado.*

Demostración: Por el teorema anterior, f posee una extensión continua $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Como A es acotado, entonces \bar{A} también lo es (verificarlo). Por el teorema 5.5.5, \bar{A} es compacto. De aquí y la proposición 6.4.1, $F(\bar{A})$ es compacto y en consecuencia acotado. Como $f(A) \subset F(\bar{A})$, entonces $f(A)$ también es acotado. ■

Ejercicios.

1. Sean a, b en \mathbb{R} con $a < b$. Pruebe que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es uniformemente continua.
2. Pruebe que $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua.
3. Pruebe que las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $h(x) = ax$ (donde $a \in \mathbb{R}$), $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ y $g(x) = xf(x)$ son uniformemente continuas.
4. Muestre que la suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua, pero el producto no lo es necesariamente. Deduzca que $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ es uniformemente continua en $[a, +\infty)$ donde $a > 0$. *Ayuda:* Note que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
5. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Muestre que f es uniformemente continua si y sólo si para cada par de sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ en A tales que $x_n - y_n \rightarrow 0$, se tiene que $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$.
6. Pruebe que si $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión continua de una función uniformemente continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, entonces F es uniformemente continua.
7. En este ejercicio se da una demostración alternativa del teorema 6.6.2. Se hará uso de la compacidad de A a través de cubrimientos abiertos en lugar de usar sucesiones. Fije $\epsilon > 0$. Como f es continua en A , entonces para cada $z \in A$, existe $\delta_z > 0$ tal que

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon/2, \quad \text{si } |x - z| < \delta_z \text{ y } x \in A.$$

Para cada $z \in A$ denote por U_z al intervalo $(z - \delta_z/2, z + \delta_z/2)$. Use la compacidad de A para hallar un conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{U_w : w \in F\}$ cubre a A . Defina $\delta = \min\{\delta_w/2 : w \in F\}$. Muestre que δ satisface lo deseado.

8. * Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y suponga además que f restringida a $(0, +\infty)$ y a $(-\infty, 0)$ es uniformemente continua. Muestre que f es uniformemente continua.
9. * Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que si $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces f es uniformemente continua. *Ayuda:* Dado $\epsilon > 0$ escoja un natural N tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $|x| \geq N$. Use la continuidad uniforme de f en $[-N - 1, N + 1]$ para hallar un δ que sirva en $[-N - 1, N + 1]$. Muestre que ese δ sirve en todo \mathbb{R} .

6.7. Funciones exponenciales y logarítmicas

En la sección 3.2 vimos cómo se define a^r para todo real positivo a y todo racional r . Haremos uso de los resultados de la sección anterior para extender la exponenciación a toda la recta real; es decir, mostraremos cómo se define a^r para cualquier real r . Estas son las *funciones exponenciales* que veremos son continuas y estrictamente crecientes. Sus inversas son las *funciones logarítmicas*.

Vimos en la sección 3.2 que $a^{x+y} = a^x a^y$ si $x, y \in \mathbb{Q}$. El resultado que sigue muestra que esta propiedad caracteriza a una función exponencial.

Proposición 6.7.1. *Sea $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $E(x + y) = E(x)E(y)$. Entonces $E(1) \geq 0$ y $E(r) = E(1)^r$; $r \in \mathbb{Q}$.*

Demostración: Si $E(z) = 0$, para algún z , entonces $E(x) = E(x - z)E(z) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y el resultado es trivial. Supongamos ahora que $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Ya que $E(x) = E(x/2)E(x/2) = E(x/2)^2$, tenemos $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Más aún, como $E(0) = E(0 + 0) = E(0)E(0)$, concluimos que $E(0) = 1$. Por otra parte, de la relación $1 = E(0) = E(x - x) = E(x)E(-x)$, tenemos que

$$E(-x) = E(x)^{-1}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando inducción tenemos $E(nx) = E(x)^n$ si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$; y usando la relación anterior probamos que $E(nx) = E(x)^n$, cualquiera sea $n \in \mathbb{Z}$. Dado $r \in \mathbb{Q}$, podemos escribir $r = m/n$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, $E(1)^m = E(m) = E(nr) = E(r)^n$, lo cual prueba que $E(r) = E(1)^{m/n}$. ■

La proposición que sigue nos indica que la exponenciación es uniformemente continua sobre conjuntos acotados de \mathbb{Q} . Este resultado prepara el terreno para hacer uso del teorema 6.6.4 que dice que una función uniformemente continua se puede extender a la clausura de su dominio.

Proposición 6.7.2. *Sea $a \in \mathbb{R}$ positivo y $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$. Entonces la restricción de f a cualquier conjunto acotado es uniformemente continua. En particular, f es continua.*

Demostración: Basta mostrar (justifique) que la restricción de f a $[-k, k] \cap \mathbb{Q}$ es uniformemente continua, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos primero que $f(x) \rightarrow 1$, cuando $x \rightarrow 0$. En efecto, notemos que $a^{1/n} \rightarrow 1$ y análogamente $a^{-1/n} \rightarrow 1$ (ver el ejercicio 5 de la sección 4.3). Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/N} < 1 + \epsilon$ y $a^{-1/N} > 1 - \epsilon$ (justificar la existencia de este N). Si $x \in [0, 1/N] \cap \mathbb{Q}$, entonces por la monotonía de f (ver ejercicio 1) tenemos que $1 = a^0 \leq a^x \leq a^{1/N} < 1 + \epsilon$. De manera semejante, si $x \in [-1/N, 0] \cap \mathbb{Q}$ entonces $1 \geq a^x \geq a^{-1/N} > 1 - \epsilon$. Hemos probado así que $|a^x - 1| < \epsilon$, si $x \in [-1/N, 1/N] \cap \mathbb{Q}$, y esto demuestra la afirmación.

Ahora mostraremos que f es uniformemente continua en $[-k, k] \cap \mathbb{Q}$. Fijemos $\epsilon > 0$. Como $f(x) \rightarrow 1$, cuando $x \rightarrow 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$ con $z \in \mathbb{Q}$, entonces $|a^z - 1| < \epsilon/a^k$. Notemos que $0 < a^x \leq a^k$ para todo $x \in [-k, k] \cap \mathbb{Q}$. Dado $x, y \in A$, si $|y - x| < \delta$, entonces

$$|a^y - a^x| = |a^x| |a^{y-x} - 1| \leq a^k \cdot \epsilon/a^k = \epsilon.$$

Esto muestra que f es uniformemente continua en $[-k, k] \cap \mathbb{Q}$. Para ver que f es continua basta observar que si $x_n \rightarrow x$, con $x_n, x \in \mathbb{Q}$, entonces el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es acotado y en consecuencia f es (uniformemente) continua en A . Por esto, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. ■

Teorema 6.7.3. *Dado $a \in \mathbb{R}$ positivo, existe una única aplicación continua $E_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ tal que $E_a(1) = a$ y $E_a(x + y) = E_a(x)E_a(y)$. Es más, E_a es una biyección estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$).*

Demostración: Sea $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por f_k a la restricción de f a $[-k, k] \cap \mathbb{Q}$. Por la proposición 6.7.2 sabemos que f_k es uniformemente continua, para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, por el teorema 6.6.4 existe una única función continua $F_k : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f_k . El lector verificará que debido a la unicidad de estas extensiones se cumple que si $k < j$, entonces $F_k(x) = F_j(x)$ para todo $x \in [-k, k]$. Por lo anterior podemos definir $E_a(x) = F_k(x)$ si $x \in [-k, k]$. Notemos que, en particular, $E_a(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Dejamos a cargo del lector mostrar que E_a es continua. En resumen, tenemos que E_a es una extensión continua de f .

Ahora veremos que $E_a(x+y) = E_a(x)E_a(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Comenzamos observando que $f(a+b) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$. Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$. Como \mathbb{Q} es un conjunto denso en \mathbb{R} (ver proposición 5.3.9), entonces existen dos sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ en \mathbb{Q} que convergen respectivamente a x e y . Por la continuidad de E_a y f tenemos que

$$\begin{aligned} E_a(x+y) &= \lim_n E_a(x_n + y_n) = \lim_n f(x_n + y_n) = \lim_n f(x_n)f(y_n) \\ &= \lim_n E_a(x_n)E_a(y_n) = E_a(x)E_a(y). \end{aligned}$$

Veamos que E_a es estrictamente creciente. Para ello, mostraremos primero que $E_a(z) > 1$ para todo $z > 0$. En efecto, fijemos $z > 0$ y escojamos un racional r tal que $0 < r < z$. Ahora fijemos una sucesión $\{z_n\}_n$ en $\mathbb{Q} \cap (r, z)$ tal $z_n \rightarrow z$. Entonces $E_a(z) = \lim_n f(z_n)$ y $f(z_n) > f(r) = a^r > 1$ para todo n y en consecuencia $E_a(z) > 1$ (justificar). Finalmente, sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Entonces poniendo $z = y - x$ obtenemos que $E_a(y) = E_a(x+z) = E_a(z)E_a(x) > E_a(x)$, lo cual muestra que E_a es estrictamente creciente.

Probaremos ahora que E_a es sobreyectiva. Para ello, definamos $b = a - 1 > 0$ y notemos que $E_a(n) = (1+b)^n$ y en consecuencia por la desigualdad de Bernoulli (ver ejercicio 9 de la sección 3.2) tenemos que $E_a(n) \geq 1 + na$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí, $E_a(n) \rightarrow +\infty$. El lector usará ahora la monotonía de E_a para probar que $E_a(x) \rightarrow +\infty$, cuando $x \rightarrow +\infty$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $E_a(-n) = a^{-n} = 1/a^n \rightarrow 0$ y usando la monotonía de E_a una vez más, concluimos que $E_a(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. De aquí y la proposición 6.5.6; parte a); E_a es sobreyectiva y en consecuencia biyectiva.

Por último, veamos la unicidad de E_a . Supongamos que $E, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $E(x+y) = E(x)E(y)$; $F(x+y) = F(x)F(y)$; $E(1) = F(1)$. De la proposición 6.7.1 tenemos que $E(r) = F(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Por otra parte, fijemos $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $\{r_n\}$ en \mathbb{Q} que converge a x . De la continuidad de E y F tenemos que $E(r_n) \rightarrow E(x)$ y $F(r_n) \rightarrow F(x)$. Así, $E(x) = F(x)$. ■

Sea $a \in \mathbb{R}$ positivo. La función E_a , dada por el teorema 6.7.3, se denota por $E_a(x) = a^x$ y se le llama la **función exponencial de base a** . Cuando $a \neq 1$, entonces E_a es biyectiva, su inversa se denota por $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y se llama la **función logarítmica de base a** . Por la proposición 6.5.3, \log_a es continua y por el teorema 6.7.3, esta función tiene las dos propiedades fundamentales siguientes:

$$\log_a(a) = 1; \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Recordemos que el número e se define como el siguiente límite (ver proposición 4.4.4)

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La función logarítmica de base e se denota por \ln y se llama también **logaritmo neperiano**.

Ejercicios.

1. Sea $a > 1$. Pruebe que $a^r < a^s$ si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$.
2. Muestre que la función E_a definida en la demostración del teorema 6.7.3 es continua.
3. Pruebe que si $a > 1$, entonces $E_a(x)/x^p \rightarrow +\infty$, cuando $x \rightarrow +\infty$, cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$.
Ayuda: Note que $E_a(x)/x^p \geq a^{[x]}/(1 + [x])^p$, donde $[x]$ es la parte entera de x . Muestre que $a^n/n^p \rightarrow +\infty$.
4. Pruebe que si $a > 1$, entonces $\log_a(x)/x \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow +\infty$. *Ayuda:* Use el “cambio de variable” $y = \log_a(x)$.

Capítulo 7

Diferenciación

La teoría de diferenciación o derivación, tiene sus orígenes en dos problemas distintos. En el primero de ellos, se trataba de encontrar *rectas tangentes* a una curva plana. Para curvas simples, como circunferencias, parábolas, etc., el problema era fácil, pero en general, era muy complicado. Una primera aproximación fue obtenida por Fermat, cuando queriendo calcular máximos y mínimos de funciones reales, se dió cuenta que las tangentes a las gráficas de tales funciones, eran paralelas al eje x , en los puntos de máximo y mínimo. Sin embargo, fué Leibnitz quien realmente desarrolló la teoría de diferenciación a partir de este punto de vista (el de encontrar rectas tangentes a una curva plana).

La otra motivación de este concepto nos viene de la física y fué desarrollado por Newton, quien estaba interesado en describir la *velocidad* de un cuerpo en movimiento rectilíneo no uniforme. Desde este punto de vista, el concepto de derivada se interpreta como velocidad. Aunque Leibnitz y Newton eran contemporáneos (siglo XVII), sus trabajos fueron realizados de manera independiente.

Nuestra exposición no está guiada por motivaciones físicas ni geométricas. Simplemente queremos exponer la teoría de diferenciación de manera rigurosa, en la creencia de que el lector ha sido suficientemente motivado en los cursos de cálculo.

Los temas tratados en este capítulo son los usuales: regla de la cadena, teoremas de valor medio, derivadas de orden superior y fórmula de Taylor, funciones convexas y aplicaciones al estudio de máximos y mínimos.

7.1. Definición de la derivada

En esta sección, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo abierto (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) y x_0 denota un punto de (a, b) . Definamos $\Delta : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.1)$$

y notemos que x_0 es un punto de acumulación de $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Diremos que **f es derivable en x_0** , si $\Delta(x)$ tiene límite, cuando x tiende a x_0 . Este límite se llama la **derivada de f** en x_0 y usualmente se denota por $f'(x_0)$, es decir,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x). \quad (1.2)$$

De la definición de derivada se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 7.1.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

(i) *f es derivable en x_0 con derivada igual a m.*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| \leq \epsilon |x - x_0| \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta. \quad (1.3)$$

Equivalentemente,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (1.4)$$

Observación 7.1.2. Definamos $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $r(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$. De (1.3) tenemos que f es derivable en x_0 , si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - r(x)| \leq \epsilon |x - x_0|, \quad \text{cuando} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Este hecho se expresa diciendo que f y r **son tangentes** en x_0 . O que las gráficas de r y f son **tangentes en $(x_0, f(x_0))$** . Note que “la gráfica de r es la recta de pendiente m que pasa por $(x_0, f(x_0))$ ”.

Incluir gráfica

- Ejemplos 7.1.3.** 1. Si f es constante, entonces f es derivable en todo punto $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) = 0$. Esta afirmación se obtiene fácilmente observando que $f(x) - f(x_0) = 0$, cualesquiera sean $x, x_0 \in (a, b)$.
2. La función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es derivable en todo punto x_0 de (a, b) y $f'(x_0) = 1$, para cada $x_0 \in (a, b)$. En efecto, si Δ se define como en (1.1), entonces $\Delta(x) = 1$, para cada $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ y de esto se obtiene el resultado fácilmente.

Ahora mostraremos que toda función derivable es continua.

Proposición 7.1.4. *Si f es derivable en x_0 , entonces existen $M, \delta \in \mathbb{R}$ positivos tales que*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|, \text{ si } |x - x_0| < \delta. \quad (1.5)$$

En particular, f es continua en x_0 .

Demostración: Pongamos $m = f'(x_0)$. Aplicando (1.3) con $\epsilon = 1$, obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| \leq |x - x_0|, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

De aquí, $|f(x) - f(x_0)| \leq |m(x - x_0)| + |x - x_0|$, si $|x - x_0| < \delta$. Como $|m(x - x_0)| + |x - x_0| = (1 + |m|)|x - x_0|$, el resultado se obtiene tomando $M = 1 + |m|$.

Para ver que f es continua en x_0 , fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta' = \min\{\delta, \epsilon/M\}$. Si $|x - x_0| < \delta'$, entonces de (1.5) se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq M\delta' \leq \epsilon$. ■

No es cierto que toda función continua en un punto x_0 es derivable en x_0 , como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ y sea $x_0 = 0$. La función $\Delta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (1.1) satisface que $\Delta(x) = 1$, si $x > 0$ y $\Delta(x) = -1$, si $x < 0$. En consecuencia, $\Delta(x)$ no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$ y por esto f no es derivable en $x_0 = 0$. Nótese que la gráfica de f presenta un “pico” o “punto anguloso” en $x = 0$, lo que nos lleva a decir que una función cuya gráfica presenta un “pico” o “punto anguloso” en el punto $x = x_0$ no es derivable en x_0 . Por esta razón, las aplicaciones derivables se conocen también con el nombre de “lisas o suaves”.

Incluir gráfica

Definiremos ahora el concepto de derivada lateral en un punto. Sea Δ la función definida por (1.1); diremos que f tiene **derivada lateral derecha** en x_0 , denotada $f'_+(x_0)$, si $\Delta(x)$ tiene límite cuando $x \rightarrow x_0^+$, es decir,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Análogamente definimos la derivada lateral izquierda en x_0 , denotada $f'_-(x_0)$, si el siguiente límite existe

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El concepto de derivada lateral también tiene sentido para funciones cuyo dominio no es necesariamente un intervalo abierto. Por ejemplo, dada una función $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, se define la derivada lateral derecha de f en a , denotada también $f'_+(a)$, de la misma manera que antes, como $\lim_{x \rightarrow a^+} \Delta(x)$.

Ejercicios.

1. Suponga que f es creciente. Pruebe que si f es derivable en x_0 , entonces $f'(x_0) \geq 0$.
2. Supongamos que f es diferenciable en x_0 y que $f'(x_0) > 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$, si $-\delta < x - x_0 < 0$ y $f(x) > f(x_0)$, si $0 < x - x_0 < \delta$. Enuncie y demuestre un resultado análogo cuando $f'(x_0) < 0$.
3. Supongamos que existen constantes $M > 0$ y $\alpha > 1$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que $f'(x) = 0$, para cada $x \in (a, b)$.
4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en 0. Suponga que f satisface que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $f'(0) = 0$.
5. Una aplicación f que verifique la conclusión de la proposición 7.1.4 se dice **Lipschitziana en x_0** . Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$, $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$ funciones tales que $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in (c, d)$; y sea $x_0 \in (a, b)$ y $y_0 := f(x_0)$. Pruebe que si f es Lipschitziana en x_0 y g es derivable en y_0 , entonces $g'(y_0) \neq 0$.
6. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en un punto $c \in (a, b)$. Sean $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ sucesiones en (a, b) convergiendo ambas a c y tales que $x_n < c < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$f'(c) = \lim_n \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Ayuda: Sea $t_n = \frac{y_n - c}{y_n - x_n}$. Observe que $0 < t_n < 1$. Muestre que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(c) = [\Delta(y_n) - f'(c)]t_n + [\Delta(x_n) - f'(c)](1 - t_n).$$

7. Pruebe que f es derivable en x_0 si y sólo si f tiene derivadas laterales en x_0 y $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

8. Pruebe que si f admite derivada lateral derecha (resp. izquierda) en x_0 , entonces f es continua a derecha (resp. izquierda) en x_0 . Concluya que si f posee derivadas laterales en x_0 , entonces f es continua en x_0 .
9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x \text{ es racional;} \\ 0 & , \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Muestre que f es continua en 0 pero no es derivable ni por la derecha ni por la izquierda en 0.

7.2. Algebra de derivadas y la regla de la cadena

En esta sección demostraremos algunas propiedades de la derivada.

Proposición 7.2.1. Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son derivables en x_0 y se cumple que:

- a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- c) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $1/g$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Demostración: La parte correspondiente a la adición será dejada como ejercicio. Notemos ahora que

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)], \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

De la proposición 7.1.4 sabemos que g es continua en x_0 , así $g(x) \rightarrow g(x_0)$ cuando $x \rightarrow x_0$. Luego por el álgebra de límites (proposición 6.1.5), $f \cdot g$ es diferenciable en x_0 y vale b).

Para terminar la prueba, pongamos $h = 1/g$ y notemos que

$$h(x) - h(x_0) = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x_0)g(x)},$$

de modo que

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = -h(x_0)h(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

y el resultado se obtiene tomando en ambos lados el límite cuando $x \rightarrow x_0$. ■

Teorema 7.2.2. (Regla de la Cadena). Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en x_0 e $y_0 := f(x_0)$ respectivamente. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Demostración: Por la proposición 7.1.4, existen $M_0, \delta_0 > 0$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_0|x - x_0|, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta_0. \quad (2.6)$$

Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y pongamos $M = \max\{M_0, |g'(y_0)|\}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2M$. Ya que f y g son diferenciables en x_0 e y_0 respectivamente, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \epsilon_1|x - x_0|, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta_1; \quad (2.7)$$

$$|g(y) - g(y_0) - g'(y_0)(y - y_0)| < \epsilon_2|y - y_0|, \quad \text{si } |y - y_0| < \delta_2. \quad (2.8)$$

Definamos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2/M\}$. Si $|x - x_0| < \delta$, de (2.6) se obtiene que $|f(x) - f(x_0)| < \delta_2$ (verificar). De modo que por (2.8), (2.6) y la definición de M se tiene que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)]| &< \epsilon_2|f(x) - f(x_0)| \\ &< M\epsilon_2|x - x_0|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) &= \\ g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] &+ \\ g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)]. & \end{aligned}$$

Usando (2.9), (2.7) y las definiciones de δ y de M obtenemos

$$\begin{aligned} |g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0)| &< \\ M\epsilon_2|x - x_0| + |g'(f(x_0))|\epsilon_1|x - x_0| &\leq \epsilon|x - x_0|, \end{aligned}$$

si $|x - x_0| < \delta$. Esto termina la prueba. ■

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, es derivable en cada punto $x \in \mathbb{R}$ y que $f'(x) = nx^{n-1}$. *Ayuda.* Use inducción y la proposición 7.2.1.
2. Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto x_0 de (a, b) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que λf y $f - g$ son derivables en x_0 y que $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ y $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.
3. Sea $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ una biyección entre dos intervalos abiertos y $x_0 \in (a, b)$.
 - a) Si f y f^{-1} son diferenciables en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente, pruebe que $f'(x_0) \neq 0$. *Ayuda:* Use la regla de la cadena.
 - b) Pruebe que si f es diferenciable en x_0 , f^{-1} es continua en $f(x_0)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en $f(x_0)$. *Ayuda:* Sea $y_0 = f(x_0)$ y $y_n \rightarrow y_0$. Entonces
$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}.$$
4. Pruebe que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$; es una biyección con $f'(0) = 0$. ¿Contradice esto lo dicho en el ejercicio 3?
5. Critique la siguiente demostración de la regla de la cadena. Notemos primero que

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como f es continua en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces el límite cuando $x \rightarrow x_0$ del lado derecho de la igualdad anterior existe y en consecuencia se tiene que

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Ayuda: Verifique que las funciones involucradas estén bien definidas.

7.3. Teoremas de valor medio

Esta sección está dedicada a probar los resultados más resaltantes del cálculo diferencial para funciones reales de una variable real.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto A de \mathbb{R} . Diremos que $x_0 \in A$ es un **máximo** (resp. **mínimo**) **relativo** de f si existe un abierto U de \mathbb{R} tal que $x_0 \in U$ y $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) para cada $x \in U \cap A$. Es fácil ver que $x_0 \in A$ es un máximo (resp. mínimo) relativo de f si y sólo si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$), cuando $|x - x_0| < r$. Un máximo o mínimo relativo será llamado un **extremo relativo**.

Proposición 7.3.1. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo A y supongamos que $x_0 \in \text{int}(A)$ es un extremo relativo de f . Si f es derivable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que x_0 es un máximo relativo de f . Luego existe $r > 0$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \text{si } |x - x_0| < r. \quad (3.1)$$

Como $\text{int}(A)$ es abierto, podemos suponer (disminuyendo el tamaño de r si fuera necesario) que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Para facilitar la escritura pondremos $I = (x_0 - r, x_0 + r)$. Definamos ahora $\Delta : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Delta(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$. Ya hemos observado que $\Delta(x) \rightarrow f'(x_0)$ cuando $x \rightarrow x_0$. Por otra parte, de (3.1), $\Delta(x) \leq 0$ si $0 < x - x_0 < r$ y $\Delta(x) \geq 0$ si $-r < x - x_0 < 0$. Dejamos a cargo del lector verificar (vea la proposición 6.1.6) que de esto se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \Delta(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \Delta(x) \geq 0.$$

El resultado se obtiene ahora notando que ambos límites son iguales a $f'(x_0)$. ■

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y sea $A \subset \text{int}(I)$. Diremos que f es **derivable** o **diferenciable** en A si f es diferenciable en cada punto de A . Cuando I es abierto y f es diferenciable en I diremos simplemente que f es diferenciable. En este caso se tiene una aplicación $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ (que envía x en la derivada de f en x) que llamaremos la **diferencial o primera derivada** de f .

El próximo resultado nos dice que si una función derivable toma el mismo valor en los extremos de un intervalo, entonces “el gráfico de f posee una recta tangente horizontal” en algún punto del intervalo.

Incluir gráfica

Teorema 7.3.2. (*Rolle*) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Por el corolario 6.4.2, f alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$, que denotamos por M y m respectivamente. Si $m = M$, entonces f es constante, de modo que $f'(x) = 0$, para cada x de (a, b) . Supongamos ahora que $m < M$ y fijemos c, d en $[a, b]$ tales que $m = f(c)$ y $M = f(d)$. Ya que $f(a) = f(b)$, entonces uno de los puntos c ó d está en (a, b) y, en consecuencia, f tiene un extremo relativo en $\text{int}([a, b])$. El resultado se deduce de la proposición 7.3.1. ■

Incluir gráfica

Teorema 7.3.3. (*Valor Medio*) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Demostración: Necesitaremos definir una función auxiliar, para hacerlo consideremos la recta que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ cuya ecuación es de la forma $y = mx + p$, donde $m, p \in \mathbb{R}$ vienen dados por

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y

$$p = f(a) - ma.$$

Ahora considere la función $h(x) = f(x) - mx - p$. Es claro que h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Además, $h(a) = h(b) = 0$ y $h'(x) = f'(x) - m$. Luego por el teorema de Rolle 7.3.2, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Esto es, $f'(c) = m$ y de aquí se obtiene el resultado. ■

Corolario 7.3.4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Si $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es constante.

Demostración: Probaremos que $f(x) = f(a)$, para cualquier $x \in (a, b)$. Para ello notemos que la restricción de f a $[a, x]$, que seguiremos denotando por f , es continua en $[a, x]$ y diferenciable en (a, x) . De aquí y el teorema 7.3.3, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, entonces $f(x) = f(a)$. ■

Corolario 7.3.5. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I y diferenciable en $\text{int}(I)$.

- a) Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$), para cada $x \in \text{int}(I)$, entonces f es creciente (resp. estrictamente creciente).
- b) Si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$), para cada $x \in \text{int}(I)$, entonces f es decreciente (resp. estrictamente decreciente).

Demostración: Haremos sólo la parte a) y dejamos la otra a cargo del lector. Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Ya que $(a, b) \subset \text{int}(I)$ entonces, por el teorema del Valor Medio, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. De aquí, $f(b) \geq f(a)$ (resp. $f(b) > f(a)$) lo cual termina la prueba. ■

Ya vimos (teorema 6.5.3) que toda función $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ continua y biyectiva tiene inversa continua. Ahora mostraremos que si f es diferenciable en (a, b) , entonces su inversa también lo es.

Teorema 7.3.6. (*Función Inversa*) Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b) tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces $I := f((a, b))$ es un intervalo abierto, $f : (a, b) \rightarrow I$ es biyectiva y $f^{-1} : I \rightarrow (a, b)$ es diferenciable en I . Es más,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Demostración: Se sigue del teorema de Rolle 7.3.2 que f debe ser inyectiva (justificar). En consecuencia, de la proposición 6.5.1 se concluye que f es estrictamente monótona. Por otra parte, de la proposición 6.5.6 sabemos que I , el rango de f , es un intervalo abierto y por el teorema 6.5.3 $f^{-1} : I \rightarrow (a, b)$ es continua.

Fijemos $y_0 \in I$ y veamos que f^{-1} es derivable en y_0 . Para ese fin, definamos $x_0 = f^{-1}(y_0)$ y $\Delta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Delta(x_0) = f'(x_0)$ y

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$. Ya que Δ es continua en x_0 y f^{-1} es continua en y_0 , tenemos que $\Delta \circ f^{-1}$ es continua en y_0 (proposición 6.3.6), es decir

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Delta(f^{-1}(y)) = \Delta(f^{-1}(y_0)) = \Delta(x_0) = f'(x_0).$$

Pero

$$\Delta(f^{-1}(y)) = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)},$$

si $y \neq y_0$, y en consecuencia,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Es decir, f^{-1} es derivable en y_0 y $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$. Así, f^{-1} es diferenciable en I y $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$. ■

Teorema 7.3.7. (*Valor Medio de Cauchy*) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que f, g son diferenciables en (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración: Note primero que $g(a) \neq g(b)$, pues de lo contrario el teorema de Rolle (7.3.2) garantizaría que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ lo cual es imposible por hipótesis. Esto permite definir

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Por otra parte, es fácil ver que la aplicación $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - mg(x)$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle y en consecuencia, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Pero $h'(x) = f'(x) - mg'(x)$, de donde $m = f'(c)/g'(c)$. ■

Observemos que el teorema del valor medio (teorema 7.3.3) se puede deducir del resultado anterior mediante la función $g(x) = x$, pero su utilidad más grande se obtiene en el cálculo de límites indeterminados, por ejemplo para mostrar la regla de L'Hôpital (ver ejercicio 12).

Ejercicios.

1. En este ejercicio estudiaremos si las hipótesis del teorema de Rolle (7.3.2) son necesarias y si su recíproco es válido. Determine si existe una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con las propiedades indicadas.
 - a) f es diferenciable en (a, b) (por lo tanto continua en (a, b) pero no necesariamente en $[a, b]$), $f(a) = f(b)$ y no existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
 - b) f es continua en $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ y no existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
 - c) f continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero $f(a) \neq f(b)$.
2. Pruebe que el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 6x + b$ posee una única raíz, cualquiera sea $b \in \mathbb{R}$.
3. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$.
 - a) Pruebe que si f, g son diferenciables en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.
 - b) Deduzca, de la parte anterior, el teorema 7.3.3 considerando la recta del plano que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

4. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I y diferenciable en $\text{int}(I)$. Pruebe que si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in \text{int}(I)$, entonces f es inyectiva. Concluya que f es monótona estricta.
5. Demuestre la parte b) del corolario 7.3.5.
6. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b) y diferenciable en $(a, b) \setminus \{c\}$, donde $c \in (a, b)$. Pruebe que si $f'(x) \rightarrow \lambda$, cuando $x \rightarrow c$, entonces f es derivable en c y $f'(c) = \lambda$.
7. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **Lipschitziana** en A si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$; para todo $x, y \in A$. Suponga que A es un intervalo, que f es continua en A y diferenciable en $\text{int}(A)$. Pruebe que f es Lipschitziana si y sólo si f' es acotada.
8. (Teorema de Darboux) Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un intervalo abierto I . Pruebe que si $a, b \in I$ y $f'(a) < d < f'(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f'(c) = d$. (Este teorema de valores intermedios fué descubierto por Darboux y no necesita que la función $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua). *Ayuda.* Defina $F(x) = f(x) - dx$ y observe que $F'(a) < 0 < F'(b)$. Suponga primero que $a < b$ y use el ejercicio 2 de la sección 7.1 para ver que existen puntos $p, q \in (a, b)$ tales que $F(p) < F(a)$ y $F(q) < F(b)$. Concluya que el mínimo de F en el compacto $[a, b]$ es alcanzado en un punto $c \in (a, b)$.
9. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$. Pruebe que si $b > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. *Ayuda.* Muestre que para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de reales positivos, tal que $x_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, se cumple que $f(x_n) \rightarrow +\infty$ (use el teorema del Valor Medio).
10. * Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en \mathbb{R} tal que $f'(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Pruebe que $A = \emptyset$ ó $A = \mathbb{R}$. *Ayuda.* Suponga que $A \neq \emptyset$. Por el ejercicio 12 de la sección 5.3 basta mostrar que A es abierto y cerrado. Sean $x_0 \in A$ y $x \in \mathbb{R}$. Pruebe inductivamente que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre x y x_0 tal que $|f(x)| \leq |x - x_0|^n |f(c_n)|$. Deduzca que $(x_0 - 1, x_0 + 1) \subset A$.
11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en \mathbb{R} tal que $f'(x) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $f(0) = 1$, entonces f es una exponencial, es decir, satisface que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Fije y en \mathbb{R} y defina $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x + y) - f(y)f(x)$. Use el ejercicio 10 para mostrar que g es constante igual a cero (observe que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $g(0) = 0$).
12. * (Regla de L'Hôpital). Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en (a, b) tales que:

- i) $f(x) \rightarrow 0$, si $x \rightarrow a^+$,
 - ii) $g(x) \rightarrow 0$, si $x \rightarrow a^+$,
 - iii) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y
 - iv) $f'(x)/g'(x) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, si $x \rightarrow a^+$.
- a) Pruebe que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. *Ayuda.* Use i) y ii) para mostrar que se puede definir f y g en a como $f(a) = g(a) = 0$ de tal manera que f y g sean continuas en $[a, b)$. Ahora use el teorema de Rolle para g .
- b) Pruebe $f(x)/g(x) \rightarrow \lambda$, si $x \rightarrow a^+$. *Ayuda.* Tome una sucesión $x_n \rightarrow a^+$. Use el teorema 7.3.7 para hallar t_n tal que $f(x_n)/g(x_n) = f'(t_n)/g'(t_n)$ y compruebe que $t_n \rightarrow a$.

7.4. Derivadas de orden superior

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si f' es continua decimos que f es de **clase C^1** en (a, b) o más simplemente $f \in C^1$, cuando no haya peligro de confusión. En este caso también se dice que f es **continuamente diferenciable**.

Un ejemplo de una función que es diferenciable pero no está en C^1 es $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(0) = 0$ y $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$. En efecto, h' no es continua en 0. En la sección 7.7 daremos las indicaciones de como construir otro ejemplo de una función diferenciable que no es de clase C^1 pero que no hace uso de la función $\cos(x)$ (la cual no ha sido formalmente definida).

En las siguientes proposiciones se enuncian algunas de las propiedades algebraicas de la clase C^1 , su demostración queda a cargo del lector.

Proposición 7.4.1. Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Entonces

- a) $f + g \in C^1$;
- b) $f \cdot g \in C^1$;
- c) $1/g \in C^1$, si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$.

Del teorema 7.2.2 se obtiene lo siguiente:

Proposición 7.4.2. Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$, $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces $g \circ f$ es diferenciable y $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$. En particular, $g \circ f \in C^1$ si $f, g \in C^1$.

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en (a, b) . Si a su vez, f' es diferenciable en (a, b) , diremos que f es **diferenciable de orden dos** en (a, b) y pondremos $f'' = (f')'$. Más generalmente,

supongamos definido inductivamente, el concepto de **función n veces diferenciable** en (a, b) , para algún $n \in \mathbb{N}$. Diremos que f es $n + 1$ **veces diferenciable** en (a, b) , si f es diferenciable en (a, b) y f' es n veces diferenciable en (a, b) .

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función n veces diferenciable. La **n -ésima derivada** de f se define inductivamente como la función $f^{(n)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$; donde, por conveniencia, ponemos $f^{(0)} = f$, para cada función f . Note que, $f^{(1)} = f'$ y $f^{(2)} = f''$. En muchas ocasiones se utiliza la notación f''' , f^{iv} en vez de $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ respectivamente.

Si f es n veces diferenciable en (a, b) y $f^{(n)}$ es continua en (a, b) , decimos que f es de **clase C^n** en (a, b) y ponemos $f \in C^n(a, b)$ ó $f \in C^n$, si no hay peligro de confusión.

Diremos que f es de **clase C^∞** o **infinitamente diferenciable** en (a, b) , si $f \in C^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En fin, pondremos $f \in C^0$ para indicar que f es continua.

Proposición 7.4.3. *Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^n para algún $n \in \mathbb{N}$; entonces $f \in C^{n-1}$. Además, $f^{(n-1)}$ es diferenciable y $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.*

Demostración: Por inducción en n . De la proposición 7.1.4 se tiene que el resultado es válido para $n = 1$. Supongamos ahora que nuestra proposición vale para algún $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^{n+1} . Ya que $g := f'$ es de clase C^n , entonces por la hipótesis inductiva $g \in C^{n-1}$ y $(g^{(n-1)})' = g^{(n)}$. En particular, $f \in C^n$ porque $f' \in C^{n-1}$.

Por definición, $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ y $f^{(n)} = (f')^{(n-1)} = g^{(n-1)}$, de modo que, $f^{(n+1)} = g^{(n)} = (g^{(n-1)})' = (f^{(n)})'$. Esto dice que el resultado es cierto para $n + 1$ y termina la prueba. ■

Proposición 7.4.4. *Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^n , para algún entero $n \geq 0$. Entonces*

- a) $f + g \in C^n$ y $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;
- b) $f \cdot g \in C^n$;
- c) $1/g \in C^n$, si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$.

Demostración: Por inducción en n . La parte a) se deja como ejercicio. b) Para $n = 0$, ya sabemos que el producto de funciones continuas es continua (ver ejercicio 6 de la sección 6.3). Supongamos que b) vale para funciones de clase C^n , para algún $n \geq 0$ y sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^{n+1} . Por la proposición anterior, $f, g \in C^n$ y por definición, $f', g' \in C^n$. Por hipótesis inductiva, $f' \cdot g + f \cdot g' \in C^n$. De aquí y la proposición 7.2.1, $(f \cdot g)' \in C^n$, lo cual muestra que $f \cdot g \in C^{n+1}$. Esto termina la prueba de b).

c) Para el caso $n = 0$ ver el ejercicio 6 de la sección 6.3. Supongamos que c) vale para funciones de clase C^n (algún $n \geq 0$) y sea $g \in C^{n+1}$. Por la proposición anterior y la parte

b), $g^2 = g \cdot g \in C^n$ y por hipótesis inductiva, $1/g^2 \in C^n$. Por definición, $g' \in C^n$ y de aquí es fácil ver que $-g' \in C^n$ (ver ejercicio 2). De la parte b) $-g'/g^2 \in C^n$. Así, $(1/g)' \in C^n$, lo cual termina la prueba. ■

Proposición 7.4.5. Si $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^n , entonces $g \circ f \in C^n$.

Demostración: Para $n = 0$ el resultado se sigue de la proposición 6.3.6. Supongamos que la proposición es cierta para funciones de clase C^n (algún entero $n \geq 0$) y sean f, g de clase C^{n+1} . Por la proposición 7.4.3, $f \in C^n$ y por definición, $f', g' \in C^n$. Por hipótesis inductiva, $g' \circ f \in C^n$ y por la proposición anterior, $(g \circ f) \cdot f' \in C^n$. Por la proposición 7.4.2, $(g \circ f)' \in C^n$. Lo cual termina la prueba. ■

Observación 7.4.6. Las proposiciones 7.4.3-7.4.5 permanecen válidas si reemplazamos la frase “función de clase C^n ” por la frase “función n veces diferenciable” (resp. “función de clase C^∞ ”).

Ya vimos (teorema 7.3.6) que toda función $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y diferenciable tiene inversa diferenciable. Ahora veremos que la inversa es de clase C^n , si f lo es.

Proposición 7.4.7. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b) tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Si f es de clase C^n , para algún $n \geq 1$, entonces f^{-1} también lo es.

Demostración: Recordemos que por el teorema 7.3.6,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Para ver que $f^{-1} \in C^n$, procedemos por inducción. Si $n = 1$, entonces f' es continua y como f^{-1} también es continua, lo mismo vale para $(f^{-1})'$. Así, $f^{-1} \in C^1$. Supongamos ahora que nuestro resultado es válido para algún $n \geq 1$ y sea f una función de clase C^{n+1} . Por la proposición 7.4.3, $f \in C^n$ y por la hipótesis inductiva, $f^{-1} \in C^n$. Por definición, $f' \in C^n$ y el resultado se sigue fácilmente de las proposiciones 7.4.5 y 7.4.4. ■

Ejercicios.

1. Demuestre las proposiciones 7.4.1 y 7.4.2.
2. Pruebe que $f \in C^n$ si y sólo si $-f \in C^n$. Pruebe además que $(-f)^{(n)} = -f^{(n)}$.
3. Pruebe que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ si y sólo si f es diferenciable en (a, b) y $f' \in C^\infty$.

4. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que si $f' = f$ entonces $f \in C^\infty$. Concluya que la **función idénticamente nula** ($f(x) = 0$; $x \in (a, b)$) es de clase C^∞ y deduzca que toda función constante es C^∞ . En fin, pruebe que toda aplicación polinomial es C^∞ .
5. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^k$. Use inducción para mostrar que $f'(x) = kx^{k-1}$. Pruebe que $f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, si $n-1 < k$ y deduzca que $f^{(k)}(x) = k!$ y $f^{(n)}(x) = 0$, si $n > k$.
6. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y use inducción para ver que $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! / x^{n+1}$.
7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y definamos $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ por $f(x) = x^{1/k}$. Use el teorema 7.3.6 para ver que $f \in C^\infty$ y que $f'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1-k}{k}}$.
8. Sea $r \in \mathbb{Q}$ y defina $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ por $f(x) = x^r$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y que $f'(x) = rx^{r-1}$.

7.5. La fórmula de Taylor

En esta sección $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ denota una aplicación definida en un intervalo abierto I de \mathbb{R} y x_0 denota un punto de I . Si f es n veces diferenciable, definimos el **polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0** mediante:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i. \quad (5.1)$$

El objetivo de ésta sección es probar que “ $P_n(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$, cuando x está cerca de x_0 ”. Mas precisamente, mostraremos lo siguiente

Teorema 7.5.1. (Fórmula de Taylor) *Supongamos que f es $n + 1$ veces diferenciable en I y $x_0 \in I$. Dado $x \in I$ existe c entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1},$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0 (definido en (5.1)).

En el ejercicio 3 veremos con mas precisión qué tan buena es la aproximación de una función a través de su polinomio de Taylor. Para la demostración de 7.5.1 necesitamos algunos resultados auxiliares. Es claro que $P_n(x)$ y $f(x)$ tiene las mismas primeras n derivadas en x_0 , esto lo enunciamos a continuación y la verificación la dejamos a cargo del lector.

Proposición 7.5.2. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y definamos $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i$. Entonces $Q \in C^n$ y $Q^{(i)}(x_0) = i! a_i$, si $0 \leq i \leq n$ y $Q^{(n+1)}(x) = 0$ para todo x .

Proposición 7.5.3. Sea $n \in \mathbb{N}$, I un intervalo abierto y $x_0 \in I$. Si $R : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función n veces diferenciable tal que $R(x_0) = R'(x_0) = \dots = R^{(n-1)}(x_0) = 0$, entonces para cada $x \in I$ existe c entre x_0 y x (esto es, $|c - x_0| < |x - x_0|$) tal que

$$R(x) = \frac{1}{n!} (x - x_0)^n R^{(n)}(c).$$

Demostración: Como el resultado es trivial para $x = x_0$, podemos asumir que $x \neq x_0$. Más aún, para fijar las ideas, supondremos que $x > x_0$. Procederemos ahora por inducción en $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x_0, x)$ tal que $R(x) - R(x_0) = (x - x_0)R'(c)$, de modo que el resultado vale para $n = 1$. Asumamos que el resultado vale para todas las funciones n veces diferenciables y sea $R : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ veces diferenciable tal que $R^{(i)}(x_0) = 0$ para $0 \leq i \leq n$. Por el teorema del Valor Medio de Cauchy aplicado a las funciones $f(t) = R(t)$ y $g(t) = (t - x_0)^{n+1}$ (definidas en el intervalo $[x_0, x]$), obtenemos $z \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'(z)}{(n + 1)(z - x_0)^n}. \quad (5.2)$$

Por otra parte, la función R' es de clase C^n y aplicando la hipótesis inductiva, tenemos

$$R'(z) = \frac{1}{n!} (z - x_0)^n (R')^{(n)}(c)$$

para algún $c \in (0, z)$. El resultado se deduce ahora de la relación (5.2), recordando que $(R')^{(n)} = R^{(n+1)}$. ■

Ahora ya tenemos todo lo que hace falta para probar la fórmula de Taylor.

Demostración de 7.5.1. Definamos $Q, R : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $Q(h) = P_n(h)$ y $R(h) = f(h) - Q(h)$. De la proposición 7.5.2, $Q^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ para $0 \leq i \leq n$, de modo que $R^{(i)}(x_0) = 0$ si $0 \leq i \leq n$. Como $Q^{(n+1)}(t) = 0$ para todo t , entonces $R^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ para todo t . Por la proposición 7.5.3 tenemos que dado $x \in I$ existe c entre x_0 y x tal que

$$R(x) = \frac{1}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} R^{(n+1)}(c) = \frac{1}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

Para finalizar, recuerde que $f(x) = P_n(x) + R(x)$. ■

Para finalizar esta sección daremos una aplicación importante de la fórmula de Taylor conocida como el método de Newton. Este método es muy útil para aproximar raíces de polinomios.

Incluir gráfica

Teorema 7.5.4. (*Método de Newton*) Supongamos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es 2 veces diferenciable en $I = [a, b]$ y además que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Suponga que existen constantes m y M tales que $f'(x) \geq m > 0$ y $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ y $r \in J$ con $f(r) = 0$ tal que, para cualquier $x_1 \in J$, la sucesión $\{x_n\}_n$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{con } n \geq 1 \quad (5.3)$$

converge a r .

Demostración: Como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces por el teorema de Bolzano (6.4.4) sabemos que existe $r \in I$ tal que $f(r) = 0$. Como f' no se anula en I , entonces por el teorema de Rolle (7.3.2) sabemos que tal r es único (verificar).

Sea $x \in I$ cualquiera. Por la fórmula de Taylor 7.5.1 aplicada a f alrededor de x con $n = 1$, sabemos que existe c entre x y r tal que

$$0 = f(r) = f(x) + f'(x)(r - x) + \frac{f''(c)}{2}(r - x)^2.$$

De lo anterior tenemos que

$$-f(x) = f'(x)(r - x) + \frac{f''(c)}{2}(r - x)^2. \quad (5.4)$$

Definimos

$$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Usando (5.4) se tiene que

$$x' = x + (r - x) + \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x)} (r - x)^2.$$

En consecuencia

$$x' - r = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x)} (r - x)^2.$$

Por lo tanto, denotando $M/2m$ por K y recordando que por hipótesis $|f''(c)| \leq M$ y que $f'(x) > m$, tenemos que

$$|x' - r| \leq K|r - x|^2. \quad (5.5)$$

Fijemos $\delta > 0$ tal que $K\delta < 1$ y además que $(r - \delta, r + \delta) \subset I$. Fijemos $x_1 \in (r - \delta, r + \delta)$.

Definimos, para $n \geq 1$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

De (5.5) se tiene que $|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2$. Por inducción se comprueba que $|x_n - r| < \delta$ para todo $n \geq 1$. De esto se obtiene que $x_n \in I$ y además que $|x_{n+1} - r| < K\delta|x_n - r|$ para todo $n \geq 1$. Luego por inducción se obtiene que $|x_n - r| < (K\delta)^n|x_1 - r|$ para todo $n \geq 1$. Como $K\delta < 1$, se concluye fácilmente que $\{x_n\}_n$ converge a r . ■

Ejemplo 7.5.5. (Cálculo aproximado de $\sqrt{2}$ por el método de Newton) Considere la función $f(x) = x^2 - 2$ para $x \in \mathbb{R}$. En el intervalo $[1, 2]$ se tiene que $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$. Además, $|f'(x)| = 2|x| \geq 2$ y $f''(x) = 2$ para todo $x \in [1, 2]$. La fórmula de iteración (5.3) se convierte en este caso en la siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Tomando $x_1 = 1$, obtenemos $x_2 = 3/2$, $x_3 = 17/12$, $x_4 = 577/408 = 1,414215$ y $x_5 = 665857/470832 = 1,414113562374$. Por el teorema 7.5.4 sabemos que $\{x_n\}_n$ converge a $\sqrt{2}$.

Ejercicios.

1. Sea $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función polinomial de grado $\leq n$. Pruebe que si $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)/h^n = 0$, entonces $Q = 0$. Es decir, $Q(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}$.
2. Sea $n \geq 1$ y $R : J \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ veces diferenciable en un intervalo abierto J que contiene a 0. Suponga que $R(0) = 0$ y que $R^{(i)}(0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Pruebe que $\lim_{h \rightarrow 0} R(h)/h^n = 0$. *Ayuda.* Use inducción y la Regla de L'Hopital.
3. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ veces diferenciable en un intervalo abierto I y fijemos $x_0 \in I$. Pruebe que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0 . Use el ejercicio 1 para probar que $P_n(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ que verifica la relación anterior.

4. Suponga que f es de clase C^{n+1} en I y que $f^{(i)}(x_0) = 0$ para $0 < i \leq n$. Pruebe que si $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ y n es impar, entonces x_0 es un mínimo relativo. Enuncie y demuestre un criterio análogo para máximos relativos.
5. Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $f' = f$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y que $f^{(n)} = f$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que, si además $f(0) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Este ejercicio ya fué resuelto en la sección 7.3 (ver ejercicio 10). Es interesante comparar las dos maneras de resolverlo, pues ahora lo podemos hacer usando la fórmula

de Taylor. Fije $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y use la fórmula de Taylor para encontrar una sucesión $\{c_n\}_n$ entre cero y x tal que $f(x) = f(c_n)x^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto concluya que $f(x) = 0$.

6. Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable tal que $f'' + f \equiv 0$. Pruebe que si $0 = f(0) = f'(0)$, entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Note que f es necesariamente C^∞ y además que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n . Para concluir use un razonamiento similar al del ejercicio 5.

7.6. Extremos relativos y convexidad

El propósito de esta sección es poner en evidencia la utilidad de la segunda derivada. Igual que en las secciones precedentes, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo I .

Supongamos que f es diferenciable. Diremos que $x_0 \in I$ es un **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$. La proposición 7.3.1 dice que todo extremo relativo de f en $\text{int}(I)$ es un punto crítico de f . El recíproco es falso, como lo muestra la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$; la cual tiene a 0 como un punto crítico que no es extremo relativo.

Proposición 7.6.1. *Supongamos que f es derivable y que $x_0 \in \text{int}(I)$ es un punto crítico de f . Si $f''(x_0)$ existe y es positiva (resp. negativa), entonces x_0 es un mínimo (resp. máximo) relativo.*

Demostración: Consideraremos sólo el caso en que $f''(x_0) > 0$, dejando el otro caso a cargo del lector. Para simplificar la notación, sea $g(x) = f'(x)$. Usando (1.3) en la proposición 7.1.1 para la función g con $\epsilon = g'(x_0)/2 = f''(x_0)/2$, concluimos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq (g'(x_0)/2)|x - x_0|, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta. \quad (6.1)$$

De esto se deduce que $g(x) = f'(x) > 0$, si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ y $g(x) = f'(x) < 0$, si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (verificar). De aquí y del corolario 7.3.5 se tiene que f es estrictamente creciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ y estrictamente decreciente en $(x_0 - \delta, x_0)$. Por lo tanto $f(x) > f(x_0)$, si $0 < |x - x_0| < \delta$. Es decir, x_0 es un mínimo relativo. ■

En términos geométricos, una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I , se dice **convexa**, si dados $a < b$ en I se tiene que el gráfico de f en $[a, b]$ está por debajo de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Incluir gráfica

Recordamos que la ecuación de dicha recta viene dada por $y = m(x - a) + f(a)$ donde $m = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Así, podemos dar la siguiente definición (analítica) de convexidad. Se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo I , es **convexa** si dados $a < b$ en I se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{si } a < x < b.$$

El lector comprobará que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, \quad \text{si } a < x < b,$$

puesto que ambas son equivalentes a la desigualdad

$$(b - a)f(x) \leq (b - x)f(a) + (x - a)f(b), \quad \text{si } a < x < b.$$

Proposición 7.6.2. *Si f es convexa, entonces f posee derivadas laterales en todo punto de $\text{int}(I)$. En particular, f es continua en $\text{int}(I)$.*

Demostración: Fijemos $a \in \text{int}(I)$ y fijemos $c, b \in I$ tales que $c < a < b$. De la convexidad de f se sigue que la función $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ es creciente. Por otra parte, $[f(a) - f(c)]/(a - c) \leq \phi(x)$ y, por la parte a) de la proposición 6.5.4, $\phi(x)$ tiene límite lateral derecho en a . Es decir, f tiene derivada lateral derecha en a . La existencia de la derivada lateral izquierda será dejada a cargo del lector. Finalmente, la continuidad de f en todo punto de $\text{int}(I)$ se sigue de la existencia de las derivadas laterales (ver el ejercicio 8 de la sección 7.1). ■

Proposición 7.6.3. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b) = 0$. Si f es derivable en (a, b) y f' es creciente en ese intervalo, entonces $f(x) \leq 0$ para cada $x \in [a, b]$.*

Demostración: Supongamos que el resultado es falso. Entonces el máximo de f es positivo y en consecuencia se alcanza en un punto x_0 de (a, b) . Por la proposición 7.3.1, $f'(x_0) = 0$ y como f' es creciente, entonces $f' \geq 0$ en (x_0, b) . Ahora aplicamos el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_0, b]$ y concluimos que existe $c \in (x_0, b)$ tal que $f(b) - f(x_0) = f'(c)(b - x_0)$. Ya que $f' \geq 0$ en (x_0, b) , se tiene que $f(x_0) \leq f(b)$. Pero $f(x_0) > 0$ y así $f(b) > 0$. Esto contradice que $f(b) = 0$. ■

Teorema 7.6.4. *Supongamos que f es continua en I y diferenciable en $\text{int}(I)$. Entonces f es convexa si y sólo si f' es creciente en $\text{int}(I)$.*

Demostración: Supongamos que f' es creciente en $\text{int}(I)$, fijemos $a < b$ en I y definamos $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + m(x - a)$ donde $m = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Es fácil probar que la función $f - g$ satisface las hipótesis de la proposición precedente y en consecuencia, $f \leq g$ en $[a, b]$. Luego, f es convexa.

Recíprocamente, supongamos que f es convexa y fijemos $a < b$ en $\text{int}(I)$. De la definición de convexidad se tiene $[f(x) - f(a)]/(x - a) \leq m$ para todo $x \in (a, b)$ donde m es como antes. De aquí, $f'(a) \leq m$. Por otra parte, también sabemos que $[f(b) - f(x)]/(b - x) \geq m$ para $a < x < b$; de modo que $f'(b) \geq m$. Así, $f'(b) \geq f'(a)$. ■

Corolario 7.6.5. *Supongamos que f es continua en I y dos veces diferenciable en $\text{int}(I)$. Entonces f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$.*

Demostración: Supongamos que f es convexa. Entonces por el teorema anterior f' es creciente, de esto se sigue fácilmente que $f'' \geq 0$ (verificar). Recíprocamente, supongamos que $f'' \geq 0$, entonces por el corolario 7.3.5 sabemos que f' es creciente en $\text{int}(I)$ y por el teorema anterior f es convexa. ■

Ejercicios.

1. Supongamos que f es 3 veces diferenciable en I y que $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in \text{int}(I)$. Pruebe que si $f^{(iv)}(x_0)$ existe y es positiva, entonces x_0 es un mínimo relativo.
2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Sea M el máximo de f y sea P el conjunto de puntos críticos de f en (a, b) . Pruebe que $M = \max\{f(a), f(b)\}$ si P es vacío. Si P no es vacío, pruebe que el número $M_0 := \max\{f(x) : x \in P\}$ está bien definido y que $M = \max\{f(a), f(b), M_0\}$.
3. Pruebe que f es convexa si y sólo si $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$, cualesquiera sean $a, b \in I$ y $t \in [0, 1]$.
4. Pruebe que una función continua f es convexa si y sólo si $f((x + y)/2) \leq [f(x) + f(y)]/2$, para todo $x, y \in I$. *Ayuda.* Pruebe que la desigualdad del ejercicio 3 vale cuando $t = m/2^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \leq 2^n$ y después extienda el resultado para todo $t \in [0, 1]$ usando la continuidad de f .
5. Pruebe que f es convexa si y sólo si $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$, cualesquiera sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in I$ y $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. *Ayuda.* Use inducción y el ejercicio 3.

6. Recuerde que $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es una función exponencial si $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que toda exponencial continua es convexa.
7. Sean b_1, \dots, b_n números reales positivos. La **media aritmética** de estos números se define como

$$(b_1 + \dots + b_n)/n$$

y la **media geométrica** como

$$(b_1 \dots b_n)^{1/n}$$

Muestre que la media geométrica es menor o igual a la media aritmética. *Ayuda.* Fije $a > 1$ y sea $E_a(x) = a^x$ la exponencial de base a la cual es convexa por el ejercicio 6. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $E_a(x_i) = b_i$. Finalmente use el ejercicio 3 con $t_1 = \dots = t_n = 1/n$.

8. Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(x) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 0^+$. Pruebe que la función $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = f(x)/x$; es creciente. *Ayuda.* Pruebe que la extensión continua $F : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de f es convexa y recuerde que $F(0) = 0$.
9. Pruebe que la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$, para $0 < x \leq 1$, es convexa. Note que f no es continua en $x = 0$.
10. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y sean $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ las derivadas laterales de f . Pruebe que $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y $f'_+(x) \leq f'_-(y)$ si $x < y$. Muestre que el conjunto de puntos donde f no es diferenciable es numerable. *Ayuda.* Use el ejercicio 10 de la sección 6.5.

7.7. Construcción de una función diferenciable que no es C^1

En esta sección daremos indicaciones para construir un ejemplo elemental de una función diferenciable que no es continuamente diferenciable. Esta construcción no se usará en el libro y la incluimos a manera de ejercicio.

1. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $g(0) = g(1)$. Pruebe que g posee una única extensión 1-*periódica*. Es decir, existe una única extensión $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de g tal que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* $f(x) = g(x - [x])$, donde $[x]$ denota la parte entera de x . Pruebe además que si g es continua, entonces f también lo es.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función 1-periódica. Pruebe que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe, entonces f es constante.
3. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(0, 1)$ y supongamos que las derivadas laterales $g'_+(0), g'_-(1)$ existen y son iguales. Suponga además que $g(0) = g(1)$ y sea f la única extensión 1-periódica de g . Pruebe que f es diferenciable y f' es la única extensión 1-periódica de la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $h(0) = g'_+(0)$, $h(1) = g'_-(1)$ y $h(x) = g'(x)$ si $0 < x < 1$.
4. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2(1-x)^2$ y f la extensión 1-periódica de g . Pruebe que f es continuamente diferenciable. Pruebe también que la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $h(0) = 0$ y $h(x) = x^2 f(\frac{1}{x})$, para $x \neq 0$, es diferenciable pero no continuamente diferenciable.

Incluir gráfica

Capítulo 8

Integración

Los orígenes de la teoría de integración hay que buscarlos más de dos mil años atrás, cuando los griegos trataron de calcular el área de ciertas figuras planas. La técnica usada por ellos, conocida como *método exhaustivo*, consistía en introducir en la figura dada, otra figura, cuyo borde fuera poligonal y de área fácil de calcular. Enseguida, se introducían nuevas curvas poligonales, con más lados que las anteriores, de manera que las figuras limitadas por estas poligonales fueran “aproximándose” a la figura inicial. Usando este método, Arquímedes logró calcular el área de unas pocas figuras elementales, no pudiendo hacer más, debido a las limitaciones de naturaleza algebraica de los métodos conocidos en esa época por los matemáticos griegos.

Fué en el siglo XVII cuando el método exhaustivo recibió su mayor impulso, debido principalmente a los trabajos de Newton y Leibnitz. Sin embargo, hubo que esperar hasta el siglo pasado para que, con los trabajos de Riemann, la teoría de integración reposara sobre bases firmes.

Un hecho fundamental a destacar es que el proceso de encontrar rectas tangentes y el proceso de calcular áreas; temas aparentemente distintos; están íntimamente relacionados a través de un resultado conocido como el Teorema Fundamental del Cálculo. De manera informal, este teorema dice que los procesos de derivación e integración son el uno inverso del otro.

Los temas tratados aquí son los usuales: Propiedades Básicas de la Integral de Riemann, Teorema Fundamental del Cálculo, Caracterización de las Funciones Integrables Riemann a través de su conjunto de discontinuidades e Integración Impropia. Este último tema fué tratado de manera unificada, usando teoría de redes.

8.1. Particiones de un intervalo

En lo que sigue, $[a, b]$ denota un intervalo compacto con $a < b$. El número $b - a$ se llama la **longitud** de $[a, b]$ y se denota por $l([a, b])$. Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto

finito de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tales que el menor de ellos es a y el mayor es b . Usaremos la siguiente notación $\{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ para de indicar de una vez el orden en que se encuentran los puntos de la partición.

Ejemplo 8.1.1. Considere para cada natural n la siguiente colección de puntos en $[0, 1]$:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = 1$$

Es claro que ellos forman una partición de $[0, 1]$. Mas generalmente

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

para $k = 0, \dots, n$ forman una partición de $[a, b]$. Esta partición tiene la propiedad que los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ todos tienen longitud igual a $(b-a)/n$.

El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{P}[a, b]$. Dadas $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ diremos que Q es **más fina que** P o que Q es un **refinamiento de** P , si $P \subset Q$. En este caso escribimos $P \leq Q$.

Los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ para $0 \leq i \leq n-1$ se llaman los **intervalos de la partición**. Observe que la unión de todos estos intervalos es claramente $[a, b]$ y además la intersección de dos de estos intervalos es vacía ó contiene un solo punto. Estas dos propiedades caracterizan las particiones, como veremos a continuación. Esta versión más abstracta de las particiones es útil y funciona muy bien en la teoría de integración de funciones de varias variables. La demostración de la proposición que sigue la dejaremos a cargo del lector.

Proposición 8.1.2. *Sea P una familia finita de intervalos compactos no degenerados tales que*

- i) $[a, b]$ es la unión de los elementos de P ;*
- ii) $I \cap J$ es vacío o contiene un sólo elemento, para todo $I, J \in P$ con $I \neq J$.*

Entonces la colección $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ formada por los extremos de los intervalos en P es una partición de $[a, b]$ y además $P = \{[x_i, x_{i+1}] : 0 \leq i \leq n-1\}$.

De ahora en adelante usaremos indistintamente estas dos formas de presentar las particiones: como colección finita de puntos o como familias de intervalos con las dos propiedades enunciadas en la proposición anterior. Podemos expresar la noción de partición mas fina en términos de los intervalos de la partición de la siguiente manera:

Proposición 8.1.3. *Sean P y Q dos particiones de $[a, b]$ entonces Q es mas fina que P , si para cada $I \in Q$ existe $J \in P$ tal que $I \subset J$.*

La demostración la dejaremos a cargo del lector. Para finalizar esta sección mostraremos que la longitud del intervalo $[a, b]$ se expresa en términos de la longitud de los intervalos de cualquier partición de $[a, b]$.

Proposición 8.1.4. *Si P es una partición de $[a, b]$, entonces*

$$\sum_{I \in P} l(I) = b - a.$$

Demostración: Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Entonces

$$\sum_{I \in P} l(I) = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = x_n - x_0 = b - a$$

■

Ejercicios.

1. Pruebe las proposiciones 8.1.2 y 8.1.3.
2. Sea $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ con $P \leq Q$. Dado $J \in P$, pruebe que $Q_J := \{I \in Q : I \subset J\}$ es una partición de J . Pruebe además que Q es la reunión disjunta de los Q_J . Es decir, $Q = \bigcup \{Q_J : J \in P\}$ y $Q_J \cap Q_K = \emptyset$, si $J \neq K$. Describa Q_J en términos de los extremos de los intervalos en Q .
3. Sean $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$. Pruebe que $R := P \cup Q \in \mathcal{P}[a, b]$ es más fina que P y Q simultáneamente. Muestre que los intervalos de R son precisamente $\{I \cap J : I \in P, J \in Q \text{ e } I \cap J \text{ no es degenerado}\}$.
4. Sea $c \in (a, b)$ y sea $R \in \mathcal{P}[a, b]$. Pruebe que existen $P \in \mathcal{P}[a, c]$ y $Q \in \mathcal{P}[c, b]$ tales que $R \leq P \cup Q$. Note que $P \cup Q$ es una partición de $[a, b]$.
5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la partición de $[a, b]$ dada por

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

para $i = 0, \dots, n$. Muestre que para cada par de naturales n, m existe otro natural k tal que P_k es más fina que P_n y P_m .

8.2. La definición de la integral de Riemann

En lo que sigue, $\mathcal{B}([a, b])$ denotará el conjunto de todas las funciones acotadas definidas en el intervalo $[a, b]$; es decir, $f \in \mathcal{B}([a, b])$ si y sólo si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in [a, b]$. De la proposición 6.4.1, toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ está en $\mathcal{B}([a, b])$. Note también que toda función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada. En todo este capítulo, f denotará un elemento de $\mathcal{B}([a, b])$.

Dado $A \subset [a, b]$, definimos

$$M(f, A) = \sup\{f(x) : x \in A\}$$

$$m(f, A) = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Usualmente escribiremos $M(f, A) = \sup(f(A))$ y $m(f, A) = \inf(f(A))$. Dada $P \in \mathcal{P}[a, b]$, definimos

$$U(f, P) = \sum_{I \in P} M(f, I)l(I)$$

$$L(f, P) = \sum_{I \in P} m(f, I)l(I).$$

Incluir gráfica

El primero de estos números es llamado **la suma superior de f respecto a P** , mientras que el segundo es llamado **la suma inferior de f respecto a P** . Si $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, las sumas superior e inferior se expresan, respectivamente, de la siguiente manera:

$$U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M(f, [x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

$$L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m(f, [x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i).$$

Note que la relación $m(f, I) \leq M(f, I)$ implica $L(f, P) \leq U(f, P)$.

Proposición 8.2.1. Sean $P, Q \in \mathcal{P}([a, b])$ con $P \leq Q$. Entonces $U(f, Q) \leq U(f, P)$ y $L(f, P) \leq L(f, Q)$.

Demostración: Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Supondremos primero que $Q = P \cup \{r\}$. Entonces existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $x_j < r < x_{j+1}$. Denotaremos $M(f, [x_i, x_{i+1}])$ por M_i . Note que

$$M(f, [x_j, r]) \leq M_j, \quad M(f, [r, x_{j+1}]) \leq M_j$$

y que

$$x_{j+1} - x_j = (x_{j+1} - r) + (r - x_j).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=0, i \neq j}^n M_i(x_{i+1} - x_i) + M_j(x_{j+1} - x_j) \\ &\geq \sum_{i=0, i \neq j}^n M_i(x_{i+1} - x_i) + M(f, [x_j, r])(r - x_j) \\ &\quad + M(f, [r, x_{j+1}]) (x_{j+1} - r) \\ &= U(f, Q). \end{aligned}$$

Para el caso general, si $Q \setminus P$ contiene k puntos, repetimos el argumento anterior k veces (o para ser más precisos, hacemos una prueba por inducción en k). El resto de la prueba será dejado al lector. ■

La proposición anterior dice que “*las sumas superiores (resp. inferiores) decrecen (resp. crecen) cuando se afinan las particiones*”, y será un resultado clave en la definición de integral.

Proposición 8.2.2. $L(f, P) \leq U(f, Q)$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$.

Demostración: Sea $R \in \mathcal{P}[a, b]$ más fina que P y Q (por ejemplo $R = Q \cup P$). Por la proposición anterior, $U(f, R) \leq U(f, Q)$ y $L(f, P) \leq L(f, R)$. El resultado se obtiene ahora recordando que $L(f, R) \leq U(f, R)$. ■

Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. De la proposición 8.1.4 tenemos

$$|U(f, P)| \leq M(b-a) \quad \text{y} \quad |L(f, P)| \leq M(b-a).$$

Esto permite definir **la integral superior** de f en $[a, b]$ y **la integral inferior** de f en $[a, b]$ respectivamente, por las siguientes fórmulas:

$$\overline{\int}_a^b f := \inf\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

$$\int_a^b f := \sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Proposición 8.2.3. Para cada $f \in \mathcal{B}([a, b])$ se tiene que

$$\int_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f.$$

Demostración: Fijemos $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Por la proposición anterior, $U(f, P)$ es una cota superior del conjunto $\{L(f, Q) : Q \in \mathcal{P}([a, b])\}$ y en consecuencia $U(f, P) \geq \underline{\int}_a^b f$. De aquí, $\underline{\int}_a^b f$ es una cota inferior del conjunto $\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ y de esto el resultado se obtiene inmediatamente. ■

Diremos que $f \in \mathcal{B}([a, b])$ es **R-integrable** (o integrable en el sentido de Riemann) en $[a, b]$, si

$$\overline{\int}_a^b f = \int_a^b f.$$

En este caso, ambas integrales serán denotadas por $\int_a^b f$, que llamaremos **la integral (de Riemann)** de f en $[a, b]$. Por razones históricas, se utiliza más a menudo el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ y lo haremos así cuando sea necesario escribir la fórmula explícita de f . El conjunto de todas las funciones R-integrables se denotará por $\mathcal{R}([a, b])$.

Ejemplos 8.2.4. 1. Sea f la función constante $f(x) = 1$. Es fácil ver que $U(f, P) = L(f, P) = b - a$, para cualquier $P \in \mathcal{P}[a, b]$, de modo que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\int_a^b f = b - a$. En la notación histórica esto se expresa mediante el símbolo $\int_a^b dx = b - a$.

2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 0$, si x es racional, y $f(x) = 1$, si x es irracional. Fijemos $P \in \mathcal{P}[a, b]$ e $I \in P$. De la densidad de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (teoremas 2.5.4 y 2.5.5) se tiene que $M(f, I) = 1$, $m(f, I) = 0$ (verificar). De modo que $U(f, P) = 1$ y $L(f, P) = 0$. De aquí, $1 = \overline{\int}_0^1 f > 0 = \underline{\int}_0^1 f$. Es decir, f no es R-integrable en $[0, 1]$.

La siguiente proposición provee un criterio para la R-integrabilidad de una función que usaremos con frecuencia.

Proposición 8.2.5. $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Demostración: Supongamos que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y fijemos $\epsilon > 0$. De las deficiones de integral superior e inferior, existen $Q, R \in \mathcal{P}[a, b]$ tales que

$$U(f, Q) - \epsilon/2 < \overline{\int}_a^b f; \quad L(f, R) + \epsilon/2 > \underline{\int}_a^b f.$$

Sea $P \in \mathcal{P}[a, b]$ más fina que Q y R . De la proposición 8.2.1 y de la definición de integral tenemos que

$$U(f, P) - \epsilon/2 < \int_a^b f \text{ y } L(f, P) + \epsilon/2 > \int_a^b f.$$

De modo que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Para mostrar el recíproco observemos que dada una partición P , por la proposición 8.2.3, se cumple que

$$U(f, P) \geq \overline{\int}_a^b f \geq \underline{\int}_a^b f \geq L(f, P)$$

y en consecuencia, para todo $P \in \mathcal{P}[a, b]$,

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leq U(f, P) - L(f, P).$$

De aquí y nuestra hipótesis, se concluye que para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\overline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$ (ver la proposición 2.2.1). ■

Daremos dos aplicaciones interesantes de la proposición anterior. Pero primero definiremos la **oscilación de f en A** de la manera siguiente

$$\Omega(f, A) := M(f, A) - m(f, A).$$

De acuerdo a la proposición 2.8.5, tenemos la siguiente identidad que será usada repetidas veces:

$$\Omega(f, A) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}.$$

Notemos de una vez por todas que para toda partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ se cumple que

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{I \in P} \Omega(f, I)l(I). \quad (2.1)$$

Teorema 8.2.6. *Si f es monótona, entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Demostración: Usaremos la proposición 8.2.5. Fijemos $\epsilon > 0$ y elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\epsilon > (b - a)|f(b) - f(a)|$ y sea P la partición de $[a, b]$ que lo divide en n partes iguales. Esto es, sea $P = \{I_1, \dots, I_n\}$, donde $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ y $x_k := a + (k/n)(b - a)$ para $k = 0, 1, \dots, n$.

Trataremos sólo el caso cuando f es creciente (el otro caso es similar y será dejado a cargo del lector). Por ser f creciente, se tiene que $\Omega(f, I_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$, y como $l(I_k) = (b-a)/n$ (para $1 \leq k \leq n$); entonces de (2.1) obtenemos

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] < \epsilon.$$

Por la proposición 8.2.5 concluimos que f es R-integrable. ■

Teorema 8.2.7. *Toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es R-integrable en $[a, b]$.*

Demostración: Usaremos la proposición 8.2.5. Fijemos $\epsilon > 0$ y pongamos $\epsilon' = \epsilon/(b-a)$. Como $[a, b]$ es compacto (por el teorema 5.5.2), entonces f es uniformemente continua (por el teorema 6.6.2), y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon' \text{ si } |x - y| \leq \delta.$$

Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > (b-a)$ y sea P como en la demostración de la proposición anterior. Si $I \in P$, entonces $l(I) = (b-a)/n \leq \delta$ y, en consecuencia,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon', \quad \text{si } x, y \in I.$$

Es decir, $\Omega(f, I) \leq \epsilon'$, y por lo tanto,

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \epsilon' \sum_{I \in P} l(I) = \epsilon'(b-a) = \epsilon.$$

Por la proposición 8.2.5 concluimos que f es R-integrable. ■

Ejercicios.

1. Complete la demostración de la proposición 8.2.1.
2. a) Pruebe que la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$; es R-integrable en $[0, 1]$ y que $\int_0^1 f = 1/2$. Es decir, $\int_0^1 x dx = 1/2$. *Ayuda:* Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la partición P_n de $[0, 1]$ que divide ese intervalo en subintervalos de longitud $1/n$. Pruebe que $U(f, P_n) = (n+1)/2n$ y $L(f, P_n) = (n-1)/2n$.
b) Hago lo mismo para las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$ con $0 \leq x \leq 1$.
3. Sea $f(x) = x^2 - x$ y P_n la partición de $[1, 2]$ en n intervalos de longitud $1/n$. Calcule $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ para cada n .

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y P_n la partición de $[a, b]$ en n intervalos de longitud $(b-a)/n$. Suponga que $\lim_n U(f, P_n) = \lim_n L(f, P_n)$. Muestre que f es R -integrable y $\int_a^b f$ es el valor de ese límite.
5. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si $-f \in \mathcal{R}([a, b])$. En este caso, muestre que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.
6. Pruebe que si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f \geq 0$. Concluya que si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. ¿Qué puede decir sobre la integral superior?
7. a) Sea $c \in [a, b]$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \neq c$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y que $\int_a^b f = 0$.
- b) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga que f es R -integrable y que $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ es finito. Muestre que g es R -integrable y que $\int_a^b f = \int_a^b g$.
- c) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in (a, b)$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y que $\int_a^b f = b - a$.
8. Diremos que una función $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es en **escalera**, si existe una partición P de $[a, b]$ tal que ϕ es constante en el interior de cada miembro de P . Es decir, ϕ es en escalera, si existe una partición P de $[a, b]$ y una familia de números $\{c_I : I \in P\}$ tal que

$$\phi(x) = c_I, \quad \text{si } x \in \text{int}(I); \quad I \in P.$$

En este caso también se dice que ϕ es en **escalera respecto a P** . Por ejemplo, toda función constante es una función en escalera. Muestre que toda función en escalera es R -integrable y

$$\int_a^b \phi = \sum_{I \in P} c_I \cdot l(I).$$

9. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición de $[a, b]$. Sean h y g definidas por partes de la siguiente manera: $h(x) = m(f, I)$ y $g(x) = M(f, I)$ para cada $x \in \text{int}(I)$ con $I \in P$; y $h(x) = g(x) = f(x)$ si x es un extremo de algún intervalo de la partición P . Muestre que $h \leq f \leq g$ y $\int_a^b g = U(f, P)$ y $\int_a^b h = L(f, P)$.
10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene a lo sumo una cantidad finita de discontinuidades. Muestre que f es R -integrable.
11. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa (es decir $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$). Suponga que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$, pruebe que $\int_a^b f > 0$.

12. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función R -integrable y $c \in \mathbb{R}$. Defina $g : [a + c, b + c] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x - c)$. Muestre que g es R -integrable y $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g$.
13. * Sea f integrable en $[a, b]$, no negativa y $\int_a^b f = 0$. Muestre que el conjunto de puntos donde f es igual a cero es denso en $[a, b]$. *Ayuda:* Muestre que: (i) Para todo $\epsilon > 0$ y todo subintervalo cerrado J de $[a, b]$, existe otro subintervalo cerrado I de J tal que $M(f, I) < \epsilon$. (ii) Fije $a \leq c < d \leq b$. Use (i) para construir una sucesión de intervalos cerrados encajados I_n con $I_n \subset [c, d]$ y además $M(f, I_n) < 1/n$, para todo n . Muestre que existe $x \in \bigcap_n I_n$ y que $f(x) = 0$.
14. * Sea f la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & , \text{ si } x = p/q \text{ donde } p < q \text{ son enteros no negativos} \\ & \text{y sin divisores comunes,} \\ 0 & , \text{ si } x \text{ es irracional y } 0 < x < 1, \text{ ó si } x = 0 \text{ o } x = 1. \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en todos los irracionales y no lo es en los racionales (en $[0, 1]$). Además, muestre que f es R -integrable y $\int_0^1 f = 0$.

8.3. Propiedades básicas de la integral de Riemann.

Recordemos que $\mathcal{B}([a, b])$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. El lector probará que si $f, g \in \mathcal{B}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f + g, \lambda f, f \cdot g \in \mathcal{B}([a, b])$. Este resultado suele enunciarse diciendo que $\mathcal{B}([a, b])$ es un **álgebra real**. El objeto de esta sección es probar que $\mathcal{R}([a, b])$ es un álgebra real y que \int_a^b “es un funcional lineal continuo y monótono”. Probaremos también que si $c \in (a, b)$, entonces “ $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ ”. Los significados precisos de estas frases serán dados en las seis proposiciones siguientes.

Proposición 8.3.1. (*Linealidad*) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g, \lambda f \in \mathcal{R}([a, b])$ y

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g; \quad (3.1)$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f. \quad (3.2)$$

Demostración: Antes de comenzar la demostración queremos recordar unas propiedades del supremo y del ínfimo. Supongamos que A y B son subconjuntos acotados de \mathbb{R} . Entonces

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad (3.3)$$

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \quad (3.4)$$

Donde $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Recomendamos al lector que verifique estas dos identidades (la primera fué demostrada en la proposición 2.6.3).

Mostraremos simultaneamente que $f + g$ es integrable y que se cumple (3.1). Sea $A \subset [a, b]$ no vacío. Notemos que

$$(f + g)(A) = \{f(x) + g(x) : x \in A\} \subset \{f(x) + g(y) : x, y \in A\} = f(A) + g(A).$$

De aquí y (3.3) obtenemos que $M(f + g, A) \leq M(f, A) + M(g, A)$ y, en consecuencia,

$$U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P) \quad (3.5)$$

para todo $P \in \mathcal{P}([a, b])$. De esto y la definición de integral superior obtenemos que

$$\overline{\int}_a^b f + g \leq U(f, P) + U(g, P)$$

para todo $P \in \mathcal{P}([a, b])$. De esto y (3.4) y sabiendo que f y g son integrables, obtenemos que

$$\overline{\int}_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g. \quad (3.6)$$

Por un argumento similar, el lector probará que

$$\underline{\int}_a^b (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g. \quad (3.7)$$

Las desigualdades (3.6) y (3.7) nos dicen que $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ y que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Ahora mostraremos que λf es R-integrable y que se cumple (3.2). Supondremos primero que $\lambda \geq 0$. Entonces

$$M(\lambda f, A) = \lambda M(f, A),$$

de donde resulta que $\overline{\int}_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$. De manera semejante, $\underline{\int}_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$, lo cual prueba el resultado en el caso en que $\lambda \geq 0$.

En fin, si $\lambda \leq 0$, escribimos $\lambda f = (-\lambda)(-f)$ y el resultado se deduce del caso anterior y del ejercicio 5 de la sección 8.2 (verificar). ■

Proposición 8.3.2. Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$.

Demostración: Probaremos primero que $f^2 := f \cdot f \in \mathcal{R}([a, b])$, para cualquier $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Para ello fijemos $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ y notemos que

$$|f(x)^2 - f(y)^2| = |f(x) + f(y)||f(x) - f(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|.$$

De aquí se concluye que

$$\Omega(f^2, A) \leq 2M\Omega(f, A)$$

para cualquier subconjunto A de $[a, b]$ no vacío. En consecuencia,

$$U(f^2, P) - L(f^2, P) \leq 2M[U(f, P) - L(f, P)], \quad (3.8)$$

para todo $P \in \mathcal{P}[a, b]$.

Usaremos la proposición 8.2.5 para mostrar que f^2 es R-integrable. Fijemos $\epsilon > 0$ y pongamos $\epsilon' = \epsilon/(2M)$. Por la proposición 8.2.5 aplicada a f , existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) \leq \epsilon'$ y de la desigualdad (3.8) se concluye que $U(f^2, P) - L(f^2, P) \leq \epsilon$. De aquí y la proposición 8.2.5, $f^2 \in \mathcal{R}([a, b])$.

Por otra parte,

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

y el resultado se obtiene usando la proposición 8.3.1 (lo detalles quedan a cargo del lector). ■

Las dos proposiciones anteriores nos dicen que $\mathcal{R}([a, b])$ es un álgebra real y que la operación de integración $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f \rightarrow \int_a^b f$; es lineal. Ahora nos encaminamos a mostrar que esta operación es monótona y continua.

Proposición 8.3.3. (Monotonía) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demostración: Primero observemos que si $f \geq 0$ y $f \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces $\int_a^b f \geq 0$. En efecto, notemos que $L(f, P) \geq 0$ para toda partición P de $[a, b]$ (verificar). En consecuencia $\underline{\int}_a^b f \geq 0$. Y como f es intergrable, entonces $\underline{\int}_a^b f = \int_a^b f$.

Por la proposición 8.3.1, $g - f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$. Como $g - f \geq 0$, entonces por lo mostrado anteriormente concluimos que $\int_a^b (g - f) \geq 0$. En consecuencia $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$ y esto es lo que se quería. ■

Proposición 8.3.4. (Continuidad) Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y denotemos por $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a la función que envía x en $|f(x)|$. Entonces $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

En particular, si $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a).$$

Demostración: Obviamente $|f|$ es acotada. Por otra parte, de la desigualdad $||x| - |y|| \leq |x - y|$ se concluye fácilmente que $\Omega(|f|, A) \leq \Omega(f, A)$, para cada subconjunto no vacío A de $[a, b]$. De aquí y usando (2.1) se tiene que

$$U(|f|, P) - L(|f|, P) \leq U(f, P) - L(f, P),$$

para todo $P \in \mathcal{P}([a, b])$. Por la proposición 8.2.5, $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ (verificar).

Por otra parte, $-|f| \leq f \leq |f|$ y por la proposición anterior, $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.

Supongamos que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces por la monotonía de la integral (8.3.3) se tiene que $\int_a^b |f| \leq \int_a^b M$. Pero $\int_a^b M = M(b - a)$ y con esto obtenemos lo afirmado. ■

Corolario 8.3.5. (*Teorema del Valor Medio para Integrales*) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f = (b - a)f(c).$$

Demostración: Por el teorema 6.4.2, f alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$, que denotaremos por M y m respectivamente. Ya que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, se deduce de la proposición 8.3.3 que $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$ y en consecuencia, $m \leq (\int_a^b f)/(b - a) \leq M$. Como f es continua, entonces por el teorema del valor intermedio 6.4.6 sabemos que todo el intervalo $[m, M]$ está contenido en el rango de f . En consecuencia, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = (\int_a^b f)/(b - a)$ y con esto termina la prueba. ■

Fijemos $c \in (a, b)$ y sea $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Las restricciones $f|_{[a, c]}$ y $f|_{[c, b]}$ las seguiremos denotando por f . En particular, si $P \in \mathcal{P}([a, c])$, la suma superior $U(f|_{[a, c]}, P)$ la denotaremos más simplemente por $U(f, P)$. Esperamos que este abuso de notación no será causa de confusión.

Proposición 8.3.6. Sea $c \in (a, b)$ y $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{R}([a, c]) \cap \mathcal{R}([c, b])$. Además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración: Comenzaremos observando una propiedad de las particiones. Sean P, Q particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Es claro que $P \cup Q$ es una partición de $[a, b]$. El lector verificará que

$$U(f, P) + U(f, Q) = U(f, P \cup Q). \quad (3.9)$$

Por otra parte, el lector también verificará que si $R \in \mathcal{P}([a, b])$, entonces existen $P \in \mathcal{P}([a, c])$ y $Q \in \mathcal{P}([c, b])$ tales que $R \leq P \cup Q$, de modo que $U(f, R) \geq U(f, P \cup Q)$. De esto y (3.9) se concluye que

$$\overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f \leq U(f, R)$$

para todo $R \in \mathcal{P}[a, b]$. De lo mostrado hasta ahora y de la definición de integral superior se tiene que

$$\overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f \leq \overline{\int}_a^b f. \quad (3.10)$$

Dado $\epsilon > 0$ escojamos $P \in \mathcal{P}([a, c])$ y $Q \in \mathcal{P}([c, b])$ tales que

$$U(f, P) \leq \epsilon/2 + \overline{\int}_a^c f, \quad U(f, Q) \leq \epsilon/2 + \overline{\int}_c^b f.$$

De (3.9) y (3.10) se tiene

$$\overline{\int}_a^b f \leq U(f, P \cup Q) \leq \epsilon + \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f \leq \epsilon + \overline{\int}_a^b f,$$

lo que prueba que

$$\overline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f.$$

El lector probará que una identidad semejante es válida para las correspondientes integrales inferiores. Es decir,

$$\underline{\int}_{-a}^b f = \underline{\int}_{-a}^c f + \underline{\int}_c^b f.$$

Por lo tanto

$$\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_{-a}^b f = \overline{\int}_a^c f - \underline{\int}_{-a}^c f + \overline{\int}_c^b f - \underline{\int}_c^b f.$$

De esto se deduce que $\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_{-a}^b f = 0$ si y sólo si $\overline{\int}_a^c f - \underline{\int}_{-a}^c f = 0$ y $\overline{\int}_c^b f - \underline{\int}_c^b f = 0$. Lo cual muestra lo afirmado. ■

Terminaremos esta sección introduciendo unas notaciones sumamente útiles para todo lo que sigue. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo A y sean $a, b \in A$ con $a < b$. Si la restricción $f|_{[a,b]}$ es R-integrable en $[a, b]$, escribiremos $\int_a^b f$ en lugar de $\int_a^b f|_{[a,b]}$. También definimos

$$\int_a^a f := 0 \quad \text{si } a \in A$$

y

$$\int_a^b f := - \int_b^a f \quad \text{si } a, b \in A \quad \text{y } b < a.$$

Observe que con estas notaciones se tiene

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

para todo $a, b \in A$. Ahora podemos generalizar las propiedades de la integral que hemos probado en esta sección (específicamente 8.3.1, 8.3.4 y 8.3.6). Lo importante es notar que la integral $\int_a^b f$ tiene sentido sin suponer que $a < b$.

Proposición 8.3.7. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un intervalo A ; sean $a, b, c \in A$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si las integrales de abajo están definidas, entonces

$$i) \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$ii) \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

$$iii) \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$$iv) \int_a^b \lambda = \lambda(b - a).$$

$$v) \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Ejercicios.

1. Demuestre que si $f, g \in \mathcal{B}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f + g, \lambda f, f \cdot g \in \mathcal{B}([a, b])$.
2. Sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{R}(I)$, para cada $I \in P$. En este caso pruebe que $\int_a^b f = \sum_{I \in P} \int_I f$, donde $\int_I f$ denota la integral de Riemann de f en I .
3. Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ y $f(x) = \frac{1}{2^n}$, si $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Muestre que f es R-integrable y calcule $\int_0^1 f(x) dx$.
4. Sea $c \in (a, b)$ y $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Demuestre que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

y también enuncie y demuestre una fórmula análoga para la integral superior.

5. Demuestre la proposición 8.3.7.
6. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función R-integrable.
 - a) Suponga que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Muestre que $\int_{-1}^1 f = 0$.
 - b) Suponga que f sea par (es decir, $f(x) = f(-x)$). Muestre que $\int_{-1}^1 f = 2 \int_0^1 f$.
7. a) Sea $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Muestre que

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{b-1/n} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a+1/n}^b f.$$

- b) Enuncie y demuestre un resultado análogo para la integral inferior.

- c) Use (a) y (b) para mostrar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada con un número finito de discontinuidades, entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
8. Muestre que existe una función R -integrable en el intervalo $[a, b]$ tal que $\int_a^b f$ no es igual a $f(c)(b - a)$ para ningún $c \in [a, b]$.
9. a) Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pruebe que la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$; es Lipschitziana en $[a, b]$. En particular, F es continua en $[a, b]$.
- b) Ahora sólo suponga que f es acotada en $[a, b]$ y defina $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $H(x) = \overline{\int}_a^x f$. Muestre que H es Lipschitziana en $[a, b]$. En particular, H es continua en $[a, b]$.
- c) ¿Qué puede decir si en lugar de la integral superior usamos la inferior?
10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R -integrable y tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Pruebe que la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$ es estrictamente creciente. *Sugerencia:* Use el ejercicio 13 de la sección 8.2.

8.4. El teorema fundamental del cálculo

El objeto de esta sección es poner en evidencia las relaciones existentes entre los conceptos de derivación e integración. El resultado principal dice, grosso modo, que estos procesos son inversos el uno del otro.

Teorema 8.4.1. (*Fundamental del Cálculo*) Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Si f es continua en un punto $c \in (a, b)$, entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f$$

es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Demostración: Pongamos $m = f(c)$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante de valor m . De la proposición 8.3.7(iv) se concluye que $\int_c^x g = m(x - c)$ para todo $x \in [a, b]$. De la parte (iii) de la misma proposición se obtiene que

$$F(x) - F(c) - m(x - c) = \int_c^x (f - g), \quad (4.1)$$

para todo $x \in [a, b]$. Fijemos $\epsilon > 0$. Ya que f es continua en c , existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(c)| < \epsilon$, si $|z - c| < \delta$. De aquí,

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon, \text{ si } |z - c| < \delta. \quad (4.2)$$

De la proposición 8.3.7(v) se tiene que $|\int_c^x (f - g)| \leq |\int_c^x |(f - g)||$. De esta última desigualdad, de (4.2) y de la proposición 8.3.4 se tiene que

$$\left| \int_c^x (f - g) \right| \leq \epsilon |x - c|, \quad \text{si } |x - c| < \delta.$$

Por (4.1),

$$|F(x) - F(c) - m(x - c)| \leq \epsilon |x - c|, \quad \text{si } |x - c| < \delta,$$

lo cual dice que F es diferenciable en c y que $F'(c) = m$. ■

Corolario 8.4.2. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que existe $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Demostración: Como f es continua, entonces f es integrable (por la proposición 8.2.7). Sea F como en el teorema anterior, es decir, $F(x) = \int_a^x f$ para $x \in [a, b]$. Como f es continua en $[a, b]$, en particular es acotada, digamos que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. De esto y de las proposiciones 8.3.4 y 8.3.7 se concluye que $|F(x) - F(y)| = |\int_x^y f| \leq M|x - y|$, para todo $x, y \in [a, b]$. En particular, F es continua en $[a, b]$. Por otra parte, el teorema 8.4.1 nos asegura que F es diferenciable en (a, b) y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. De modo que la función $F - G$ satisface las hipótesis del corolario 7.3.4. Por lo tanto $F - G$ es constante y por esto $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. Es decir, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ y el resultado se obtiene directamente de la definición de F . ■

Una función G que cumpla que $G' = f$ es llamada una **primitiva** de f . El corolario anterior es el que permite, en la práctica, el cálculo de la integral de Riemann. Por ejemplo, sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Ya que la función $G(x) = x^{n+1}/(n+1)$ es una primitiva de f , se sigue del corolario anterior que $\int_a^b f = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$, relación que no es nada obvia a partir de la definición de integral.

Terminaremos esta sección dando soporte teórico a dos métodos de integración conocidos con los nombres de: **cambio de variables** e **integración por partes**. Comenzaremos extendiendo el concepto de función C^1 que vimos en la sección 7.4 referido solamente a funciones definidas en intervalos abiertos. Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de **clase C^1** si existe un intervalo abierto I que contiene a $[a, b]$ y una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que f es la restricción de g a $[a, b]$. En particular, la derivada lateral derecha de f en a y lateral izquierda de f en b existen. Por esta última condición podemos hablar de f' como función definida en $[a, b]$; y además f' es continua.

Corolario 8.4.3. (*Cambio de Variable*) Sea $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 y sea $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $(f \circ g) \cdot g'$ es continua y además

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

Demostración: Ya mencionamos que bajo las condiciones que definen la clase C^1 se tiene que g y g' son continuas, luego por la proposición 6.3.6, $(f \circ g) \cdot g'$ es continua. Definamos ahora $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(y) = \int_c^y f$ y sea $G := F \circ g$. Por la Regla de la Cadena y el teorema 8.4.1, $G' = (f \circ g) \cdot g'$ en (a, b) . Además, G es continua en $[a, b]$ y, por el corolario 8.4.2,

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = G(b) - G(a) = \int_c^{g(b)} f - \int_c^{g(a)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

La última igualdad se dedujo de la proposición 8.3.7(iii). ■

Corolario 8.4.4. (*Integración por Partes*) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Entonces

$$\int_a^b f' \cdot g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f \cdot g'.$$

Demostración: Es fácil verificar que $f \cdot g$ es de clase C^1 (ver ejercicio 2) y que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Además, por el corolario 8.4.2,

$$\int_a^b (f \cdot g)' = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a)$$

y de esto se obtiene inmediatamente el resultado. ■

Proposición 8.4.5. (*Fórmula de Taylor con Resto Integral*) Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^n en un intervalo abierto I , donde $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $a \in I$ y sea P_{n-1} el polinomio de Taylor de orden $n - 1$ de f alrededor de a (definido por la ecuación (5.1) de la sección 7.5). Entonces, para cada $z \in I$, se tiene

$$f(z) = P_{n-1}(z) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^z (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx. \quad (4.3)$$

Demostración: (Por inducción) Para $n = 1$, P_0 es constante igual a $f(a)$ y así la fórmula anterior es equivalente a decir que $f(z) = f(a) + \int_a^z f'$. Luego, para $n = 1$, el resultado se deduce del corolario 8.4.2.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todas las funciones de clase C^n (algún $n \in \mathbb{N}$) y asumamos que $f \in C^{n+1}$. Por la proposición 7.4.3, $f \in C^n$ y por lo tanto, vale la fórmula

(4.3). Por otra parte, aplicando Integración por Partes a las funciones $F(x) := -(z-x)^n/n$ y $G(x) := f^{(n)}(x)$ (para $x \in [a, z]$), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^z (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx &= \int_a^z F'(x)G(x) dx \\ &= F(z)G(z) - F(a)G(a) - \int_a^z F(x)G'(x) dx \\ &= \frac{(z-a)^n}{n} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n} \int_a^z (z-x)^n f^{(n+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

porque $F(z) = 0$. Reemplazando esta igualdad en (4.3) vemos que nuestra fórmula vale para $n+1$ en lugar de n . ■

Proposición 8.4.6. *La aplicación $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{z} dz,$$

*es una función biyectiva de clase C^∞ tal que $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$. Es decir, L es una función logarítmica. Además, $L(e) = 1$. De hecho, la función L se suele denotar por \ln y se llama **logaritmo neperiano**.*

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ positivos, entonces

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{z} dz = \int_1^x \frac{1}{z} dz + \int_x^{xy} \frac{1}{z} dz,$$

y usando el teorema del Cambio de Variables con $z = g(u) = xu$ obtenemos

$$\int_x^{xy} \frac{1}{z} dz = \int_1^y \frac{1}{u} du = L(y).$$

Por otra parte, del teorema fundamental del cálculo (teorema 8.4.1), $L'(x) = 1/x$, de modo que $L' \in C^\infty$ y por ende, $L \in C^\infty$. Note también que L es estrictamente creciente, ya que $L' > 0$. En particular, L es inyectiva.

En fin, por inducción, $L(2^n) = nL(2)$, $L(2^{-n}) = -nL(2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y como $L(2) > L(1) = 0$ concluimos que $L(2^n) \rightarrow +\infty$ y $L(2^{-n}) \rightarrow -\infty$. Como L es continua y su dominio es un intervalo, concluimos que el rango de L es un intervalo (proposición 6.4.6). Por lo anterior, necesariamente el rango de L es \mathbb{R} y por ende L es sobreyectiva.

Por último veamos que $L(e) = 1$. Para esto recordemos que

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, $L'(x) = 1/x$ para todo $x \in (0, +\infty)$. En particular, $L'(1) = 1$. Esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{L(x) - L(1)}{x - 1} = 1.$$

Notando que $L(1) = 0$, lo anterior es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(x+1)}{x} = 1.$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(1 + 1/n)}{1/n} = 1.$$

Como antes, se prueba por inducción que $L(x^n) = nL(x)$. Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L((1 + 1/n)^n) = 1.$$

Como L es continua, concluimos que $L(e) = 1$. ■

La demostración de la siguiente proposición la dejaremos a cargo del lector (ejercicio 3).

Proposición 8.4.7. *Sea L dada por la proposición 8.4.6 y sea $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ su inversa. Entonces E es una función exponencial, es decir, $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además, E es de clase C^∞ y $E'(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Como dijimos en la sección 6.7, la función E dada en la proposición anterior usualmente se denota por e^x (note que $E(1) = e$).

Ejercicios.

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sean $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ extensiones de f de clase C^1 , definidas en intervalos abiertos I, J . Pruebe que $F' = G'$ en $[a, b]$. Esto permite definir $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como la restricción de F' . En particular, f' es continua.
2. Pruebe que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 , entonces $f \cdot g$ también lo es y $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
3. Sea L dada por la proposición 8.4.6 y sea $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ su inversa. Pruebe que E es una exponencial, de clase C^∞ , tal que $E' = E$. Concluya que toda exponencial continua es C^∞ .
4. Use el ejercicio 9 de la sección 8.3 para construir una función Lipschitziana en $[a, b]$ que no sea diferenciable en $[a, b]$.

5. Sea f integrable en $[a, b]$ y suponga que existe $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que G es derivable excepto en un conjunto finito de puntos de (a, b) y además $G'(x) = f(x)$ para todo x donde $G'(x)$ exista. Muestre que $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.
6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Suponga que $\int_0^x f = \int_x^1 f$ para todo $x \in [0, 1]$. Muestre que $f(x) = 0$ para todo x .
7. * Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Muestre que

- a) G está bien definida y que es una función impar (es decir, $G(-x) = -G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$);
- b) G es estrictamente creciente;
- c) Para todo entero positivo k , se cumple que

$$\frac{1}{1+k^2} \leq G(k) - G(k-1) \leq \frac{1}{1+(k-1)^2}.$$

Concluya de lo anterior que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2} \leq G(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k-1)^2}.$$

para todo entero positivo n .

- d) El rango de G es un intervalo abierto $(-a, a)$ para algún real $a > 0$. *Ayuda:* Note que $1/k^2 < 1/k(k-1) = 1/(k-1) - 1/k$ para $k \geq 2$ y use esto para mostrar que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$, para todo entero positivo n .

8.5. Integrabilidad y continuidad.

El objeto de esta sección es caracterizar las funciones Riemann integrables en términos del conjunto de sus discontinuidades. El resultado principal de esta sección dice que $f \in \mathcal{B}([a, b])$ es R-integrable en $[a, b]$ si y sólo si el conjunto D de discontinuidades de f es “pequeño”, en el sentido que: para cualquier $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento de D , por una familia de intervalos abiertos, cuya suma de longitudes no excede ϵ . (Recordemos que la longitud de un intervalo I de extremidades finitas $c < d$ es el número $l(I) = d - c$).

Fijemos $f \in \mathcal{B}([a, b])$ y $c \in [a, b]$. La **oscilación de f en c** es el número no negativo $\omega(f, c)$ definido por:

$$\omega(f, c) := \inf\{\Omega(f, [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)) : \delta > 0\}.$$

Proposición 8.5.1. Sea $f \in \mathcal{B}([a, b])$ y $c \in [a, b]$. Entonces f es continua en c si y sólo si $\omega(f, c) = 0$.

Demostración: Supongamos que f es continua en c y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon/2$ si $|x - c| \leq \delta$. De aquí,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon, \quad \text{si } x, y \in (c - \delta, c + \delta).$$

Es decir, $\Omega(f, [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)) \leq \epsilon$ y por lo tanto, $\omega(f, c) \leq \epsilon$. Como esto ocurre para todo $\epsilon > 0$, entonces $\omega(f, c) = 0$ (ver proposición 2.2.1).

Supongamos ahora que $\omega(f, c) = 0$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(f, [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)) < \epsilon$. En consecuencia se tiene que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, si $|x - c| < \delta$ y $x \in [a, b]$. ■

Proposición 8.5.2. Sea $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $D_\epsilon := \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \epsilon\}$ es cerrado (y en consecuencia, compacto).

Demostración: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de D_ϵ que converge a $x \in \mathbb{R}$. Note que $x \in [a, b]$, porque ese intervalo es cerrado. Supongamos por el absurdo que $x \notin D_\epsilon$, entonces $\omega(f, x) < \epsilon$ y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(f, [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)) < \epsilon$. Por otra parte, como $x_n \rightarrow x$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in (x - \delta, x + \delta)$ y, en consecuencia, existe $r > 0$ tal que $(x_i - r, x_i + r) \subset (x - \delta, x + \delta)$. En particular,

$$\omega(f, x_i) \leq \Omega(f, [a, b] \cap (x_i - r, x_i + r)) \leq \Omega(f, [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)) < \epsilon,$$

lo cual dice que $x_i \notin D_\epsilon$. Con esta contradicción se termina la prueba. ■

Se dice que un subconjunto A de \mathbb{R} tiene **medida cero**; denotado $m(A) = 0$; si para cada $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento \mathcal{U} de A , por intervalos abiertos, tal que la suma de sus longitudes no excede ϵ , es decir, $\sum_{I \in \mathcal{U}} l(I) < \epsilon$. Es evidente que si $A \subset B$ y B tiene medida cero, entonces A tiene medida cero.

Ejemplos 8.5.3. 1. Sea $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de reales. Mostraremos que F tiene medida cero. En efecto, dado $\epsilon > 0$ considere los intervalos abiertos $U_i = (x_i - \epsilon/2n, x_i + \epsilon/2n)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Note que los U_i claramente forman un cubrimiento de F . Por otra parte, $l(U_i) = \epsilon/n$ para cada i y por lo tanto $\sum_{i=1}^n l(U_i) < \epsilon$.

2. Mostraremos que \mathbb{N} tiene medida cero. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el siguiente intervalo abierto

$$U_n = (n - \epsilon/2^{n+2}, n + \epsilon/2^{n+2}).$$

Note que $l(U_n) = \epsilon/2^{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por último observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^{n+1} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n+1} = \epsilon/2.$$

3. Veremos en seguida que \mathbb{Q} también tiene medida cero, por ser un conjunto numerable.

Proposición 8.5.4. *Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos de medida cero, entonces lo mismo ocurre con su unión.*

Demostración: Sea $A := \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fijemos $\epsilon > 0$. Sabemos que cada A_n posee un cubrimiento \mathcal{U}_n , formado por una colección numerable de intervalos abiertos, tal que la suma de sus longitudes es menor que $2^{-n}\epsilon$. Como la unión de una familia numerable de colecciones numerables es numerable (ver proposición 3.4.5), se tiene que la unión \mathcal{U} de estos \mathcal{U}_n es un cubrimiento numerable de A por intervalos abiertos. Notemos que

$$\sum_{I \in \mathcal{U}} l(I) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{I \in \mathcal{U}_n} l(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\epsilon = \epsilon.$$

(en el ejercicio 8 de la sección 4.12 el lector interesado encontrará una justificación precisa de la última afirmación). ■

Proposición 8.5.5. *Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Entonces el conjunto $D_r := \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq r\}$ tiene medida cero para cada $r > 0$.*

Demostración: Fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que por la proposición 8.2.5, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < r\epsilon. \quad (5.1)$$

Considere el conjunto finito F formado por los extremos de los intervalos en P . Vimos en el ejemplo 8.5.3 que F tiene medida cero. Como $D_r \subseteq (D_r \setminus F) \cup F$, entonces, por la proposición 8.5.4, bastará ver que $D_r \setminus F$ tiene medida cero. Sea $E := D_r \setminus F$.

Pongamos $Q = \{I \in P : \text{int}(I) \cap E \neq \emptyset\}$. Dado $x \in E$, existe $I \in P$ tal que $x \in I$, y como $x \notin F$, entonces $x \in \text{int}(I)$. De aquí, el conjunto $\mathcal{U} := \{\text{int}(I) : I \in Q\}$ es un cubrimiento de E por intervalos abiertos. Sea $I \in Q$ y fijemos $c \in \text{int}(I) \cap E$. Fijemos también $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ y notemos que

$$\Omega(f, I) \geq \Omega(f, [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)) \geq \omega(f, c) \geq r.$$

Así,

$$r \sum_{I \in Q} l(I) \leq \sum_{I \in Q} \Omega(f, I) l(I) \leq \sum_{I \in P} \Omega(f, I) l(I) = U(f, P) - L(f, P),$$

y por (5.1), $\sum_{I \in \mathcal{Q}} l(I) \leq \epsilon$. Tenemos entonces que \mathcal{U} es un cubrimiento de E por intervalos abiertos, cuya suma de longitudes es menor que ϵ . ■

Teorema 8.5.6. *Sea $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si el conjunto D , de discontinuidades de f , tiene medida cero.*

Demostración: Supongamos primero que $m(D) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, existen intervalos abiertos I_1, \dots, I_k, \dots tales que

$$D \subset \bigcup_k I_k \text{ y } \sum_k l(I_k) < \frac{\epsilon}{2K}, \quad (5.2)$$

donde K es la oscilación de f en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b] \setminus D$ existe un intervalo abierto J_x de centro x tal que $\Omega(f, [a, b] \cap J_x) \leq \epsilon/2(b-a)$. Como la colección de intervalos I_k y J_x para $k \geq 1$ y $x \in [a, b] \setminus D$ forman un cubrimiento por abiertos del compacto $[a, b]$, entonces existe $m \geq 1$ y x_1, \dots, x_m en $[a, b] \setminus D$ tales que $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_m}$. Sea P la partición de $[a, b]$ formada por los extremos de esos intervalos (que pertenezcan a $[a, b]$). Denotaremos con $[t_{i-1}, t_i]$ los intervalos que están contenidos en algún I_k y con $[s_{j-1}, s_j]$ el resto de los intervalos de P . De (5.2) se tiene que $\sum_i l([t_{i-1}, t_i]) < \epsilon/2K$. Denotemos con Ω_i a $\Omega(f, [a, b] \cap [t_{i-1}, t_i])$. Por la elección de los J_x se tiene también que $\Omega_j := \Omega(f, [a, b] \cap [s_{j-1}, s_j]) \leq \epsilon/2(b-a)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_i \Omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_j \Omega_j \cdot (s_j - s_{j-1}) \\ &< \sum_i K \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_j \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (s_j - s_{j-1}) \\ &< \frac{K\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} = \epsilon \end{aligned}$$

y por la proposición 8.2.5, f es R-integrable en $[a, b]$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y definamos $E_k = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq 1/k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De la proposición 8.5.1, D es la unión de los E_k y, de las proposiciones 8.5.4 y 8.5.5, $m(D) = 0$. ■

Ejercicios.

1. Pruebe que todo conjunto numerable tiene medida cero.
2. Muestre que si $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es denso en \mathbb{R} .

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función R-integrable.
- a) Muestre que dado un intervalo $J \subseteq [a, b]$ con $\text{int}(J) \neq \emptyset$ y dado $\epsilon > 0$, existe $I \subseteq J$ intervalo cerrado tal que $\Omega(f, I) < \epsilon$.
- b) De una prueba directa (sin usar el teorema 8.5.6) de que el conjunto de puntos de continuidad de f es denso en $[a, b]$. *Sugerencia:* Use la parte (a) y vea la sugerencia al ejercicio 13 de la sección 8.2.
4. Sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de $[a, b]$. Muestre que existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que cada $I \in P$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$.
- Sugerencia:* Dado $x \in [a, b]$ escoja $W_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in W_x$. Como W_x es abierto, existe $\delta(x) > 0$ tal que $(x - 2\delta(x), x + 2\delta(x)) \subset W_x$. Por otra parte, $\{(x - \delta(x), x + \delta(x)) : x \in [a, b]\}$ es un cubrimiento abierto de $[a, b]$ y en consecuencia existen $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tales que $\{(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)) : 1 \leq i \leq n\}$ es un cubrimiento de $[a, b]$. Sea $\delta = \min\{\delta(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$; elija $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \alpha := (b - a)/N$ y defina $P = \{[a + (k - 1)\alpha, a + k\alpha] : 1 \leq k \leq N\}$. P es una partición de $[a, b]$ y todo $I \in P$ tiene longitud α . En particular, $|x - c| \leq \alpha$ si $x, c \in I$ e $I \in P$. Muestre que P satisface la conclusión.
5. Suponga que existe $k > 0$ tal que $\omega(f, x) < k$ para todo $x \in [a, b]$. Muestre que existe una partición P de $[a, b]$ tal que $\Omega(f, I) < k$ para todo $I \in P$. En particular, $U(f, P) - L(f, P) \leq k(b - a)$. *Sugerencia:* Para cada $x \in [a, b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\Omega(f, [a, b] \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)) < k$. Entonces $\{(x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [a, b]\}$ es un cubrimiento de $[a, b]$. Use el ejercicio 4.

8.6. Integrales impropias.

La definición de la integral de Riemann requiere que la función a integrar sea acotada y que el intervalo donde se integra sea cerrado y acotado. Veremos en esta sección una extensión natural de la noción de integral de Riemann a funciones que no cumplen algunas de las condiciones mencionadas. Esta extensión se conoce como **integral impropia**.

En esta sección, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo no degenerado I (es decir, I contiene más de un punto). Diremos que f es de **tipo \mathcal{R}** , si f es R-integrable en todo intervalo compacto $J \subset I$. En este caso, dado $J = [a, b] \subset I$, pondremos $\int_J f = \int_a^b f$.

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de tipo \mathcal{R} . Se dice que f es *CR-integrable sobre $(a, b]$* si el siguiente límite existe:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f$$

y en este caso se define la integral impropia $\int_a^b f$ como

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f \quad (6.1)$$

Ejemplo 8.6.1. Sea $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^r$ donde $r \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $r \neq 1$. Dejamos al lector verificar que

$$\int_t^1 f = \frac{1 - t^{1-r}}{1 - r}.$$

Por lo tanto, si $r > 1$, entonces f no es CR-integrable en $(0, 1]$. Pero si $r < 1$, entonces f es CR-integrable en $(0, 1]$ y $\int_0^1 f = 1/(1 - r)$.

Por otra parte, cuando $r = 1$, tenemos de la proposición 8.4.6 que f no es R-integrable en $(0, 1]$ (verificar).

Supongamos que $f : [a, +\infty)$ es de tipo \mathcal{R} . Se dice que f es CR-integrable sobre $[a, +\infty)$ si el siguiente límite existe:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f$$

y en este caso se define la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ como

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f \quad (6.2)$$

Ejemplo 8.6.2. Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^r$ donde $r \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $r \neq 1$. Entonces tenemos que

$$\int_1^t f = \frac{t^{1-r} - 1}{1 - r}.$$

Por lo tanto, si $r > 1$, entonces f es CR-integrable en $[1, +\infty)$ y $\int_1^{+\infty} f = 1/(r - 1)$. Pero si $r < 1$, entonces f no es CR-integrable en $[1, +\infty)$.

Por otra parte, cuando $r = 1$, tenemos de la proposición 8.4.6 que f no es CR-integrable en $[1, +\infty)$ (verificar).

Ahora introduciremos la noción general de función CR-integrable sobre un intervalo cualquiera I . Esto permitirá analizar de manera uniforme todos los casos posibles. Las redes (ver sección 4.12) serán la herramienta fundamental para lo que sigue.

La familia de todos los intervalos compactos J contenidos en I la denotaremos por \mathcal{J} . En particular, \mathcal{J} es un conjunto dirigido por la relación de contención \subset , es decir, dados $J, K \in \mathcal{J}$, existe $L \in \mathcal{J}$ tal que $J \subset L$ y $K \subset L$ (verificar). Por lo tanto, si f es de tipo \mathcal{R} , entonces $\{\int_J f\}_{J \in \mathcal{J}}$ es una red y en el caso que sea convergente, diremos que f es **Cauchy-Riemann integrable** en I y pondremos $f \in \mathcal{CR}(I)$. En este caso, el límite de la red $\{\int_J f\}_{J \in \mathcal{J}}$ será denotado por $\int_I f$ y lo llamaremos la **integral de Cauchy-Riemann** de f en I .

Si $I = [a, b]$ es compacto, entonces $I \in \mathcal{J}$ e I es el máximo de la red \mathcal{J} . En consecuencia, la red $\{\int_J f\}_{J \in \mathcal{J}}$ converge a $\int_I f = \int_a^b f$ (ver el ejercicio 1 de la sección 4.12). Esto dice que si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces $f \in \mathcal{CR}([a, b])$ y que la integral de Cauchy-Riemann de f coincide con la integral de Riemann de f . Esto justifica la notación escogida para denotar la integral de Cauchy-Riemann. El uso de redes permite un tratamiento general de las integrales impropias sin importar el tipo del intervalo I . El siguiente resultado, que se demostrará al final de esta sección, contiene las propiedades más importantes de la integral impropia de Riemann y muestra que las nociones dadas por las ecuaciones (6.1) y (6.2) son casos particulares de la noción de integrabilidad Cauchy-Riemann.

Teorema 8.6.3. *Supongamos que f es de tipo \mathcal{R} en un intervalo no degenerado I .*

- a) *Suponga que $I = [a, b)$ con $b \leq +\infty$. Entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ si y sólo si la función $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f$; tiene límite cuando x tiende a b .*
- b) *Suponga que $I = (a, b]$, con $-\infty \leq a$. Entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ si y sólo si la función $F : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f$; tiene límite cuando x tiende a a .*
- c) *Suponga que $I = (a, b)$. Entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ si y sólo si $f \in \mathcal{CR}((a, c)) \cap \mathcal{CR}((c, b))$, para algún $c \in I$. En este caso, $\int_I f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

A continuación veremos algunas propiedades de las funciones Cauchy-Riemann integrables.

Proposición 8.6.4. *Sea f de tipo \mathcal{R} . Entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que $|\int_H f| < \epsilon$, si $H \in \mathcal{J}$ y $H \cap J_0$ es degenerado.*

Demostración: Supongamos que $f \in \mathcal{CR}(I)$ y fijemos $\epsilon > 0$. Ya que la red $\{\int_J f\}_J$ es de Cauchy (por ser convergente), existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que

$$\left| \int_J f - \int_K f \right| < \epsilon \quad \text{si } J_0 \subset J, K \in \mathcal{J}. \quad (6.3)$$

Mostraremos que J_0 satisface lo deseado. Fijemos $H \in \mathcal{J}$ tal que $H \cap J_0$ es degenerado. Es fácil ver (justificar) que existe $K \in \mathcal{J}$ conteniendo a J_0 tal que $K \cap H$ es un conjunto singular. En particular, $J := K \cup H$ es un intervalo compacto y $\int_J f - \int_K f = \int_H f$ (verificar). De aquí y (6.3), $|\int_H f| < \epsilon$.

Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ fijemos $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que $|\int_H f| < \epsilon/4$ si $H \in \mathcal{J}$ y $H \cap J_0$ es degenerado. Si $J_0 \subset J \in \mathcal{J}$, podemos escribir $J = A \cup J_0 \cup B$, donde $A, B \in \mathcal{J}$ y $A \cap B, A \cap J_0, B \cap J_0$ son degenerados (verificar). De aquí,

$$\int_J f = \int_A f + \int_{J_0} f + \int_B f.$$

Análogamente, si $J_0 \subset K \in \mathcal{J}$, entonces $\int_K f = \int_C f + \int_{J_0} f + \int_D f$, para ciertos intervalos $C, D \in \mathcal{J}$ tales que $C \cap J_0$ y $D \cap J_0$ son degenerados. Así,

$$\left| \int_J f - \int_K f \right| \leq \left| \int_A f \right| + \left| \int_B f \right| + \left| \int_C f \right| + \left| \int_D f \right| < 4(\epsilon/4) = \epsilon,$$

lo cual muestra que $\{\int_J f\}_J$ es de Cauchy y, en consecuencia, es convergente (ver proposición 4.12.6). ■

Proposición 8.6.5. *Supongamos que f es de tipo \mathcal{R} y que la red $\{\int_J f\}_J$ es acotada. Entonces $f, |f| \in \mathcal{CR}(I)$ y*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Demostración: Primero afirmamos que $\{\int_J |f|\}_J$ es convergente. En efecto, por ser $|f| \geq 0$, entonces $\{\int_J |f|\}_J$ es creciente y como $\{\int_J f\}_J$ es acotada, entonces $\{\int_J |f|\}_J$ también lo es. Luego $\{\int_J |f|\}_J$ converge al supremo de $\{\int_J |f| : J \in \mathcal{J}\}$. Dejamos a cargo del lector completar los detalles que faltan (ver ejercicio 4).

Por lo anterior $\{\int_J |f|\}_J$ es convergente es de Cauchy. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{J}$ tal que $\int_J |f| \leq \epsilon$, si $J \in \mathcal{J}$ y $J \cap H$ es degenerado. Se sigue de la proposición 8.3.4 que, para tales J , se tiene que $|\int_J f| \leq \epsilon$, de modo que, por la proposición anterior, $f \in \mathcal{CR}(I)$. Finalmente, por la proposición 8.3.4 tenemos que $|\int_J f| \leq \int_J |f|$ para todo $J \in \mathcal{J}$. De esto se deduce que $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ (ver proposición 4.12.4). ■

Proposición 8.6.6. *Supongamos que f es de tipo \mathcal{R} y sea $c \in \text{int}(I)$. Pongamos $A = (-\infty, c] \cap I$, $B = [c, +\infty) \cap I$, y supongamos que $f \in \mathcal{CR}(A) \cap \mathcal{CR}(B)$. Entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ y*

$$\int_I f = \int_A f + \int_B f.$$

Demostración: Sea \mathcal{J}_A (resp. \mathcal{J}_B) el conjunto de todos los intervalos compactos contenidos en A (resp. B) y fijemos $\epsilon > 0$. Por hipótesis, existen $J^A \in \mathcal{J}_A$, $J^B \in \mathcal{J}_B$ tales que

$$\left| \int_A f - \int_C f \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } C \in \mathcal{J}_A \text{ y } C \supset J^A, \quad (6.4)$$

$$\left| \int_B f - \int_D f \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } D \in \mathcal{J}_B \text{ y } D \supset J^B. \quad (6.5)$$

Fijemos $J_0 \in \mathcal{J}$ conteniendo a $J^A \cup J^B$ y sea $J \in \mathcal{J}$ conteniendo a J_0 . Si escribimos $C = J \cap A$, $B = J \cap B$, entonces, de la proposición 8.3.6, se tiene $\int_J f = \int_C f + \int_D f$ (verificar), y de aquí,

$$\left| \int_J f - \int_A f - \int_B f \right| \leq \left| \int_C f - \int_A f \right| + \left| \int_D f - \int_B f \right|.$$

El resultado se deduce ahora de (6.4)-(6.5), puesto que $C \supset J^A$ y $D \supset J^B$. ■

Demostración del teorema 8.6.3. Es claro que la parte c), se deduce de las partes a)-b) y la proposición 8.6.6. Por otra parte, las pruebas de a) y b) son similares entre sí, por lo cual, nos ocuparemos sólo de la prueba de a).

Supongamos que $f \in \mathcal{CR}(I)$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces, existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que $|\int_I f - \int_J f| \leq \epsilon$, si $J \in \mathcal{J}$ y $J \supset J_0$. Escribamos $J_0 = [d, c]$ y sea $x \in [c, b]$; entonces, $[a, x] \supset J_0$ y de aquí

$$\left| \int_I f - \int_a^x f \right| \leq \epsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe y es igual a $\int_I f$.

Recíprocamente, supongamos que el límite anterior existe y denotémoslo por l . Entonces, fijado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|l - \int_a^x f| \leq \epsilon$, si $b - \delta < x < b$. Tomemos $J_0 = [a, b - \delta]$ y sea $J \in \mathcal{J}$ conteniendo a J_0 . Si escribimos $J = [a, x]$, tendremos $x \geq b - \delta$ y de aquí, $|l - \int_a^x f| \leq \epsilon$. Esto prueba que la red $\{\int_J f\}_J$ converge a l . ■

Ejercicios.

1. Pruebe que f es de tipo \mathcal{R} si y sólo si f es acotada en cada subconjunto compacto de I y las discontinuidades de f forman un conjunto de medida cero.
2. Pruebe que la función $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} n & , \text{ si } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \text{ si } x \neq 1/n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

es de tipo \mathcal{R} , pero no acotada.

3. Pruebe que si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ son de tipo \mathcal{R} , entonces $f + g$ y λf también lo son, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Es más, si $f, g \in \mathcal{CR}(I)$, pruebe que $f + g, \lambda f \in \mathcal{CR}(I)$ y que

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g, \quad \int_I \lambda f = \lambda \int_I f.$$

4. Suponga que f es de tipo \mathcal{R} y que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Pruebe que si la red $\{\int_J f\}$ está acotada superiormente, entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ e $\int_I f = \sup\{\int_J f : J \in \mathcal{J}\}$. *Ayuda.* Use la proposición 4.12.5.
5. Pruebe que si f es constante de valor c , entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$ e $\int_I f = c \cdot l(I)$.

6. Suponga que f es acotada de tipo \mathcal{R} . Pruebe que si I es acotado, entonces $f \in \mathcal{CR}(I)$. *Ayuda.* Note que $f + M \geq 0$, para alguna constante M y aplique los dos ejercicios precedentes.
7. Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ decreciente. Pruebe que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge si y sólo si $f \in \mathcal{CR}([1, +\infty))$. Concluya que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

8.7. Una definición alternativa de la integral de Riemann

Los problemas que plantearemos a continuación tienen por objeto presentar una definición alternativa de la integral de Riemann. Esta sección no será usada en el resto del libro y su lectura es opcional. La presentación que haremos de la integral de Riemann tiene la ventaja que fácilmente se generaliza y se obtiene la integral de Lebesgue (ver por ejemplo [1]).

Comenzaremos con una definición. Diremos que una función $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es en **escalera**, si existe una partición P de $[a, b]$ tal que ϕ es constante en el interior de cada miembro de P . Es decir, ϕ es en escalera, si existe una partición P de $[a, b]$ y una familia de números $\{c_I : I \in P\}$ tal que

$$\phi(x) = c_I, \quad \text{si } x \in \text{int}(I); \quad I \in P. \quad (7.6)$$

En este caso también se dice que ϕ es en **escalera respecto a P** . Note que si ϕ es en escalera respecto a P , entonces también lo es con respecto a cualquier partición más fina que P . Obviamente, toda función constante es una función en escalera.

1. Pruebe que si $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son en escalera, entonces $\phi \pm \psi$, $\max\{\phi, \psi\}$, $\min\{\phi, \psi\}$ y $\lambda\phi$ también lo son, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquí, $\max\{\phi, \psi\}$ denota la función que envía x en $\max\{\phi(x), \psi(x)\}$. *Ayuda.* Pruebe que ϕ y ψ son en escalera respecto de una misma partición.

Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalera con respecto a P y $\{c_I : I \in P\}$ la familia de números que satisface (7.6). Definimos la integral de ϕ en $[a, b]$, denotada $\int_a^b \phi$, mediante:

$$\int_a^b \phi = \sum_{I \in P} c_I \cdot l(I).$$

2. Muestre que la definición anterior no depende de la partición P . *Ayuda.* Suponga que ϕ es en escalera con respecto a particiones P, Q y analice primero el caso en que Q es más fina que P . Enseguida considere una partición más fina que ambas.
3. Sean $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalera y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que:

$$a) \quad \int_a^b (\phi + \psi) = \int_a^b \phi + \int_a^b \psi,$$

- b) $\int_a^b \lambda \phi = \lambda \int_a^b \phi$,
- c) $\int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi$, si $\phi \leq \psi$.
- d) La restricción de ϕ a cualquier intervalo $[x, y]$ contenido en $[a, b]$ también es en escalera. Además, si $c \in (a, b)$, entonces $\int_a^b \phi = \int_a^c \phi + \int_c^b \phi$.

4. Dada una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos E^f (resp. E_f) como el conjunto de aquellas funciones en escalera que son mayores (resp. menores) que f . Note que E^f y E_f no son vacíos, porque contienen las funciones constantes de valor M y $-M$, respectivamente, donde M satisface: $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Definimos la **integral inferior** (resp. **superior**) de f en $[a, b]$, denotada $\underline{\int}_a^b f$ (resp. $\overline{\int}_a^b f$), mediante:

$$\underline{\int}_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \phi : \phi \in E_f \right\},$$

$$\overline{\int}_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b \phi : \phi \in E^f \right\}.$$

Pruebe que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas, entonces

- a) $\overline{\int}_a^b (f + g) \leq \overline{\int}_a^b f + \overline{\int}_a^b g$,
- b) $\underline{\int}_a^b (f + g) \geq \underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g$.

Ayuda Pruebe que $E^{f+g} \supset \{\phi + \psi : \phi \in E^f, \psi \in E^g\}$.

5. Se dice que una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es **R-integrable en** $[a, b]$, si $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$. En este caso, ése valor común se denota por $\int_a^b f$ y se le llama la integral de f en $[a, b]$.

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrables en $[a, b]$. Pruebe que

- a) $f + g$ y λf , con $\lambda \in \mathbb{R}$ son R-integrables en $[a, b]$.
- b) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ y $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- c) $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, si $f \leq g$.

6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Pruebe que f es R-integrable en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existen $\phi \in E_f$ y $\psi \in E^f$ tales que $\int_a^b (\psi - \phi) \leq \epsilon$.
7. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $f^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$. Muestre que $2f^+ = f + |f|$.
8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrable en $[a, b]$. Pruebe que

- a) f^+ es R-integrable en $[a, b]$.
- b) $|f|$ es R-integrable en $[a, b]$ y $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Ayuda. Dado $\epsilon > 0$, escoja $\phi \in E_f$ y $\psi \in E^f$ tales que $\int_a^b (\psi - \phi) \leq \epsilon$. Use ahora las relaciones $2g^+ = g + |g|$ y $|\psi| - |\phi| \leq |\psi - \phi| = \psi - \phi$, para probar que $\psi^+ - \phi^+ \leq \psi - \phi$.

9. Muestre que la definición de integral de Riemann que dimos en esta sección es equivalente a la dada en la sección 8.2. *Ayuda:* Vea los ejercicios 8 y 9 de la sección 8.2.

Capítulo 9

Sucesiones de Funciones

Sea $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas en un intervalo I . Se dice que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto, si la sucesión $\{f_n(x)\}_n$ converge, para cada $x \in I$. En este caso, podemos definir una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Inmediatamente surgen varias interrogantes: (a) Si suponemos que cada f_n es continua, ¿Será f continua?; (b) Si cada f_n es diferenciable, ¿Será $\{f'_n\}_n$ convergente?; ¿Será f diferenciable?, y en caso que estas respuestas fueran afirmativas, ¿Convergerá $\{f'_n\}_n$ a f' ?

El objetivo de este capítulo es dar respuesta a éstas y otras preguntas similares relativas a las propiedades de la operación de tomar el límite de una sucesión de funciones.

9.1. Convergencia puntual y uniforme

En esta sección, $\{f_n\}_n$ denota una sucesión de funciones $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas en un intervalo I . Se dice que $\{f_n\}_n$ **converge punto por punto**, si la sucesión $\{f_n(x)\}_n$ converge, para cada $x \in I$. En este caso, podemos definir una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x),$$

y se dirá que f es el **límite puntual** $\{f_n\}_n$ ó que $\{f_n\}_n$ **converge puntualmente** a f .

Ejemplos 9.1.1. 1. Consideremos la sucesión $\{f_n\}_n$ donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_n(x) = x^n$.

Usando lo visto en el ejemplo 2 de la sección 4.1.1 tenemos que $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$. Véase fig

6

Incluir gráfica

2. Sea $\{f_n\}_n$ la sucesión definida por $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^{1/n}$. Tenemos que $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a la función constante $f(x) = 1$ para $x > 0$ (ver ejercicio 5 de la sección 4.3).

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión convergente punto por punto. Dado $x \in I$ y $\epsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ si $n \geq n_0$. El ejercicio 1 pone en evidencia que éste número n_0 depende, en general, tanto de ϵ como de x . Cuando sea posible elegir n_0 independiente de $x \in I$, diremos que la *convergencia es uniforme*. Más precisamente, diremos que una sucesión $\{f_n\}_n$ **converge uniformemente a** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N \text{ y } x \in I.$$

Véase fig. ???. En este caso también se dice que f es el **límite uniforme** de $\{f_n\}_n$.

Incluir gráfica

El resultado que enunciaremos a continuación indica la relación entre los dos tipos de convergencia que hemos introducido hasta ahora. La demostración es inmediata y la dejamos a cargo del lector.

Proposición 9.1.2. *Si $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f , entonces $\{f_n(x)\}_n$ converge a $f(x)$, para cada $x \in I$ (es decir, $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a f).*

El próximo teorema dice que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

Teorema 9.1.3. *Si $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y cada f_n es continua, entonces f también lo es.*

Demostración: Fijemos $x_0 \in I$ y $\epsilon > 0$. De la definición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{si} \quad n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I. \quad (1.1)$$

Por otra parte, como f_N es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta. \quad (1.2)$$

En fin, de la relación

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|,$$

y de las ecuaciones (1.1)-(1.2), se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$, si $|x - x_0| \leq \delta$. ■

El teorema anterior nos proporciona un criterio para saber si una convergencia punto por punto (de una sucesión de funciones continuas) no es uniforme. Pues bastaría saber que el límite puntual no es una función continua. Por ejemplo, la convergencia de la sucesión del ejemplo 1 no es uniforme, porque su límite es la función discontinua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.

Proposición 9.1.4. (Criterio de Cauchy) *Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I. \quad (1.3)$$

Entonces $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración: De (1.3) se concluye fácilmente que $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión de Cauchy, para cada $x \in I$. Esto permite definir una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Tomando límite en (1.3), cuando $m \rightarrow \infty$, queda,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N,$$

lo cual termina la prueba. ■

Ejercicios

1. Considere la sucesión $\{f_n\}_n$ donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_n(x) = x^n$ y fije $x \in (0, 1)$ (ver ejemplo 9.1.1). Dado $\epsilon \in (0, 1)$, calcule el menor número natural n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0,$$

donde f denota el límite puntual de $\{f_n\}_n$. Observe que este número, $n_0 = n_0(\epsilon, x)$, depende de x y de ϵ . Note también que, para cada $\epsilon > 0$ dado, $n_0(\epsilon, x) \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow 0$. Concluya que dado $\epsilon > 0$, no es posible encontrar un natural N tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ y $x \in (0, 1)$.

2. Considere la sucesión $\{f_n\}_n$ definida por $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^{1/n}$ (ver ejemplo 9.1.1). Fije $\epsilon > 0$ y use reducción al absurdo para mostrar que no existe un natural N tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, si $n \geq N$ y $x > 0$.

3. Pruebe que la sucesión $\{f_n\}_n$ donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) &= 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

converge punto por punto. *Ayuda.* Grafique f_n para algunos valores de n .

4. Sea $f_n(x) = \frac{x}{n}$ para $x \in I$. Pruebe que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente si y sólo si I es acotado.
5. Pruebe que si $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ son sucesiones uniformemente convergentes a f y g respectivamente, entonces $\{f_n + g_n\}_n$ converge uniformemente a $f + g$. Muestre un resultado análogo para el producto, suponiendo además que f y g son acotadas.
6. Suponga que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f y sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en I que converge a un punto $x_0 \in I$. Pruebe que $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
7. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 2 - nx, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{si } \frac{2}{n} < x. \end{cases}$$

Pruebe que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a la función constante $f(x) = 0$; $0 \leq x \leq 1$ y use el ejercicio 6 para mostrar que esa convergencia no es uniforme.

8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $\epsilon > 0$. Pruebe que existe una función en escalera (ver definición en la sección 8.7) $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$, para cada $x \in [a, b]$. Concluya que existe una sucesión $\{\phi_n\}_n$, donde cada $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en escalera, que converge uniformemente a f .

9.2. Intercambio de límites con derivadas

En esta sección supondremos que I es un intervalo abierto y que cada f_n es diferenciable. Si $\{f_n\}_n$ converge puntual o uniformemente a una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se abren varias interrogantes: ¿Será $\{f'_n\}_n$ convergente?. ¿Será f diferenciable?, y en caso que estas respuestas fueran afirmativas, ¿Convergerá $\{f'_n\}_n$ a f' ?. Un matemático experimentado sabe que la convergencia de $\{f_n\}_n$ no puede implicar nada sobre la convergencia de $\{f'_n\}_n$, por lo que las respuestas, a las inquietudes anteriores, deben tener una respuesta negativa. Este es el objetivo de los tres ejemplos a continuación.

Ejemplos 9.2.1. 1. Sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}; \\ -\frac{n^2}{2}x^2 + 2nx - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}; \\ \frac{n^2}{2}x^2 + 2nx + \frac{1}{2}, & \text{si } -\frac{2}{n} \leq x \leq -\frac{1}{n}; \\ \frac{3x}{2|x|}, & \text{si } |x| \geq \frac{2}{n}. \end{cases}$$

El lector verificará que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(0) = 0$ y $f(x) = \frac{3x}{2|x|}$, si $x \neq 0$. (*Sugerencia:* Grafique varias de las f_n). Por otra parte, $f'_n(0) = n$, de modo que, $\{f'_n(0)\}_n$ no converge. También se tiene que f no es derivable en $x = 0$.

2. Sea $f_n(x) = |x||x|^{\frac{1}{n}}$. Tenemos que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a la función $f(x) = |x|$ (ver el ejercicio 5 de la sección 4.3). En este caso, $f'(0)$ no existe, aunque $f'_n(0) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^4x^5 - 4n^2x^3 + 7x, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}; \\ \frac{4x}{n|x|}, & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

El lector probará que $|f_n(x)| \leq \frac{12}{n}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in \mathbb{R}$. De aquí deducirá que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a la función constante $f(x) = 0$. Por otra parte, se verifica que f_n es diferenciable en \mathbb{R} y que:

$$f'_n(x) = \begin{cases} 5n^4x^4 - 12n^2x^2 + 7, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

En particular, $f'_n(0) \not\rightarrow f'(0)$. En este ejemplo, $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a la función diferenciable $f = 0$, pero $\{f'_n(0)\}_n$ no converge a $f'(0)$.

Teorema 9.2.2. *Supongamos que $\{f'_n\}_n$ converge uniformemente a una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ y que, para algún $x_0 \in I$, $\{f_n(x_0)\}_n$ converge. Entonces $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a una función diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $f' = g$.*

Demostración: Fijemos $\epsilon > 0$. De la definición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si } n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I. \tag{2.1}$$

De aquí y la desigualdad triangular,

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| \leq \epsilon, \quad \text{si } m, n \geq N \quad \text{y } x \in I.$$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos $\Delta_{mn} : I \rightarrow \mathbb{R}$ por, $\Delta_{mn}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Note enseguida que

$$|\Delta'_{mn}(x)| \leq \epsilon \quad \text{si } m, n \geq N \quad \text{y } x \in I.$$

Por otra parte, dados $x, z \in I$ existe (por el Teorema del Valor Medio) $c \in I$ tal que

$$\Delta_{mn}(x) - \Delta_{mn}(z) = (x - z)\Delta'_{mn}(c),$$

y en consecuencia,

$$|\Delta_{mn}(x) - \Delta_{mn}(z)| \leq \epsilon|x - z|, \quad \text{si } m, n \geq N. \quad (2.2)$$

Ya que $\{f_n(x_0)\}_n$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. Es decir, $|\Delta_{mn}(x_0)| \leq \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. De aquí y (2.2), con $z = x_0$, obtenemos $|\Delta_{mn}(x)| \leq [1 + |x - x_0|]\epsilon$, si $m, n \geq \max\{N, n_0\}$. Esto muestra que $\{f_n(x)\}_n$ es de Cauchy, para cada $x \in I$, lo cual permite definir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, mediante:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Definamos $\Gamma_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ya que $\Gamma_n(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Delta_{nm}(x)$, se sigue de (2.2) que

$$|\Gamma_n(x) - \Gamma_n(z)| \leq \epsilon|x - z|, \quad \text{si } n \geq N. \quad (2.3)$$

Fijemos ahora $z \in I$ y probemos que f es diferenciable en z y que $f'(z) = g(z)$. Comencemos observando que,

$$\begin{aligned} f(x) - f(z) - (x - z)g(z) &= [\Gamma_N(x) - \Gamma_N(z)] + \\ &+ [f_N(x) - f_N(z) - (x - z)f'_N(z)] + (x - z)[f'_N(z) - g(z)], \end{aligned}$$

de manera que por (2.3) y (2.1), queda

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z) - (x - z)g(z)| &\leq \frac{3\epsilon}{2}|x - z| \\ &+ |f_N(x) - f_N(z) - (x - z)f'_N(z)|. \end{aligned}$$

Por otra parte, como f_N es diferenciable en z , existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(z) - (x - z)f'_N(z)| \leq \epsilon|x - z| \quad \text{si } |x - z| \leq \delta,$$

de manera que

$$|f(x) - f(z) - (x - z)g(z)| \leq \frac{5}{2}\epsilon|x - z|, \quad \text{si } |x - z| \leq \delta.$$

■

Ejercicios

1. Pruebe que en el teorema 9.2.2, $\{f_n\}_n$ **converge uniformemente a f en compactos**. Esto significa, por definición, que para cada subconjunto compacto K de I , la sucesión de restricciones $\{f_n|K\}_n$ converge uniformemente a $f|K$.
2. En el teorema 9.2.2, suponga que las f'_n son continuas y use el teorema fundamental del cálculo para mostrar, de manera sencilla, que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a la función $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g$, donde y_0 es el límite de la sucesión $\{f_n(x_0)\}_n$.

9.3. Intercambio de límites con integrales

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado.

Teorema 9.3.1. *Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función R -integrables en $[a, b]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es R -integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración: Fijemos $\epsilon > 0$. Por la definición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{si } n \geq N, x \in [a, b]. \quad (3.1)$$

En particular,

$$|U(f - f_N, P)| \leq \epsilon$$

para cualquier partición P de $[a, b]$. Por otra parte, de la relación $f = (f - f_N) + f_N$ y del argumento en la demostración de la proposición 8.3.1 obtenemos

$$U(f, P) \leq U(f - f_N, P) + U(f_N, P) \leq \epsilon + U(f_N, P),$$

para cualquier partición P de $[a, b]$.

De manera semejante se muestra que, $L(f, P) \geq -\epsilon + L(f_N, P)$ para todo $P \in \mathcal{P}([a, b])$, lo que junto a la desigualdad anterior arroja

$$U(f, P) - L(f, P) \leq 2\epsilon + U(f_N, P) - L(f_N, P), \quad \text{para todo } P \in \mathcal{P}([a, b]).$$

Por otra parte, de la proposición 8.2.5, existe una partición P_N de $[a, b]$ tal que $U(f_N, P_N) - L(f_N, P_N) \leq \epsilon$ y por la desigualdad anterior, $U(f, P_N) - L(f, P_N) \leq 3\epsilon$. De aquí y la proposición 8.2.5, $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

En fin, de las proposiciones 8.3.1 y 8.3.4,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n|,$$

y por (3.1),

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \epsilon, \quad \text{si } n \geq N.$$

■

A continuación daremos un ejemplo para mostrar que el teorema 9.3.1 falla cuando la convergencia es solamente puntual.

Ejemplo 9.3.2. Ya que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es numerable, existe una biyección $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Definamos ahora $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \{h(1), \dots, h(n)\}, \\ 1, & \text{si } x \notin \{h(1), \dots, h(n)\}. \end{cases}$$

Del ejercicio 8 de la sección 8.2, resulta que cada f_n es R-integrable en $[0, 1]$. El lector verificará también que $\{f_n\}_n$ converge punto por punto a la función f del ejemplo 8.2.4 de la sección 8.2, la cual no es R-integrable en $[0, 1]$.

9.4. Series de funciones

Comenzaremos con la definición formal de serie de funciones. Al igual que en las secciones precedentes, $\{f_n\}_n$ denota una sucesión de funciones, definidas en un intervalo no degenerado I de \mathbb{R} .

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante,

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x).$$

Esta función S_n suele denotarse por $\sum_{i=1}^n f_i$ o por $f_1 + \dots + f_n$, y se le llama la *suma de* f_1, \dots, f_n . La sucesión de funciones $\{S_n\}_n$, será llamada **la serie asociada a** $\{f_n\}_n$ y será denotada por $\sum_n f_n$ o por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. También diremos que S_n es **la n-ésima suma parcial** de esa serie.

Observación 9.4.1. Denotemos por $\mathcal{A}(I)$ al conjunto de todas las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que la sucesión $\{f_n\}_n$, no es otra cosa que una función $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}(I)$. Por otra parte, en $\mathcal{A}(I)$ tenemos una ley de composición asociativa, dada por, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, y por el teorema 3.1.3, existe una única aplicación $\Sigma_F : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}(I)$ tal que $\Sigma_F(1) = F(1)$ y $\Sigma_F(n+1) = \Sigma_F(n) + F(n+1)$. El lector probará que $\Sigma_F(n) = S_n$, de manera que la noción de serie, dada en esta sección, coincide con la dada en la sección 3.1.

En lo que sigue, $\sum_n f_n$ denota una serie de funciones definidas en I . El **dominio de convergencia** de $\sum_n f_n$ se define como el conjunto J de aquellos $x \in I$, para los cuales la serie numérica $\sum_n f_n(x)$ es convergente. Es decir, $x \in J$ si y sólo si $\{S_n(x)\}$ converge. El conjunto J puede ser, eventualmente, vacío. En cualquier caso, podemos definir una función

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (4.1)$$

Diremos que la serie $\sum_n f_n$ **converge uniformemente** en un subconjunto K de J , si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge uniformemente en K .

Proposición 9.4.2. (Criterio de Cauchy) *Sea $K \subset J$ y supongamos que, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| \leq \epsilon \quad \text{si } n \geq N; p \in \mathbb{N}, x \in K.$$

Entonces $\sum_n f_n$ converge uniformemente en K .

Demostración: Se tiene, para cada $x \in I$, que

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x).$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \epsilon, \quad \text{si } n \geq N, p \in \mathbb{N}, x \in K,$$

y el resultado se sigue ahora aplicando la proposición 9.1.4 a la sucesión de restricciones $\{S_n|K\}_n$. ■

Proposición 9.4.3. (Criterio de Weierstrass) *Supongamos que existen constantes no negativas M_n tales que $|f_n(x)| \leq M_n$, para cada $x \in I$. Si $\sum_n M_n$ es convergente, entonces $J = I$ y $\sum_n f_n$ converge uniformemente en I .*

Demostración: De la proposición 4.10.1, $J = I$. Sabemos también que la sucesión $\{s_n\}_n$ de sumas parciales $s_n = M_1 + \cdots + M_n$ es convergente y en consecuencia, de Cauchy. De aquí, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_{n+p} - s_n| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ y $p \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} M_i \leq \epsilon, \quad \text{si } n \geq N, p \in \mathbb{N},$$

y en consecuencia, (ver proposición 5.2.5, parte c)),

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} M_i \leq \epsilon, \quad \text{si } n \geq N, p \in \mathbb{N}, x \in I.$$

El resultado se deduce directamente de la proposición anterior. ■

Ejercicios

1. Pruebe que si cada f_n es continua, entonces cada S_n también lo es. *Ayuda.* Pruebe que $S_{n+1} = S_n + f_{n+1}$.
2. Pruebe que si I es abierto y cada f_n es diferenciable en I , entonces cada S_n también lo es y $S'_n = f'_1 + \cdots + f'_n$.
3. Pruebe que si $I = [a, b]$ es compacto y $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces cada S_n es R-integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b S_n = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i$.
4. Suponga que f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\sum_n f_n$ converge uniformemente en un subconjunto K de J . Pruebe que la función f , definida en (4.1), es continua en K .
5. Suponga que I es abierto y que cada f_n es diferenciable en I . Pruebe que si $\sum_n f'_n$ es uniformemente convergente en I y $J \neq \emptyset$, entonces $J = I$. Además, muestre que la función f es diferenciable en cada $x \in I$ y $f'(x) = \sum_n f'_n(x)$.
6. Suponga que $I = [a, b]$ y que cada f_n es R-integrable en $[a, b]$. Pruebe que si $\sum_n f_n$ es uniformemente convergente en $[a, b]$, entonces f también es R-integrable y $\int_a^b f = \sum_n \int_a^b f_n$.

9.5. Series de potencias

En esta sección, $I = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = a_n x^n$, donde $n \geq 0$ es un entero y $a_n \in \mathbb{R}$. Abusando de la notación, la serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ será denotada por $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y será llamada **una serie de potencias**. Los números a_n serán llamados **los coeficientes de la serie** $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

A lo largo de esta sección, J denota el dominio de convergencia de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y definiremos $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x).$$

Note que $0 \in J$.

Proposición 9.5.1. *Si $x_0 \in J$, entonces $(-|x_0|, |x_0|) \subset J$.*

Demostración: Si $x_0 = 0$, no hay nada que mostrar. Supongamos ahora que $x_0 \neq 0$ y fijemos $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Entonces $|x| < |x_0|$, de modo que $0 \leq r := |x/x_0| < 1$.

Por otra parte, por la proposición 4.9.3, la sucesión $\{a_n x_0^n\}_n$ converge (a cero) y en consecuencia es acotada. Así, existe $M > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$; para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| r^n \leq M r^n.$$

De aquí, $\sum_{n \geq 0} x^n$ es absolutamente convergente, porque la serie geométrica $\sum_n r^n$ converge cuando $0 \leq r < 1$. El resultado se deduce de la proposición 4.10.1. ■

Lemma 9.5.2. *Sea L un subconjunto de \mathbb{R} tal que $0 \in L$ y $(-|x_0|, |x_0|) \subset L$ si $x_0 \in L$. Entonces existe $\rho \in [0, +\infty]$ tal que $(-\rho, \rho) \subset L \subset [-\rho, \rho]$. En particular, L es un intervalo.*

Demostración: Pongamos $\rho = \sup(L)$. Si $x \in (-\rho, \rho)$, entonces $|x| < \rho$ y por la proposición 2.6.1, existe $y \in L$ tal que $|x| < y$. Es decir, $x \in (-y, y)$. Pero por hipótesis, $(-y, y) \subset L$ y así, $x \in L$. Esto muestra que $(-\rho, \rho) \subset L$.

Para terminar la prueba, supongamos por el absurdo, que existe $x \in L$ tal que $|x| > \rho$ y fijemos $y \in (\rho, |x|)$. Entonces, $y \in (-|x|, |x|) \subset L$, lo cual es contradictorio porque $y > \rho = \sup(L)$. ■

Por el lema anterior, existe $\rho \in [0, +\infty]$ tal que $(-\rho, \rho) \subset L \subset [-\rho, \rho]$. Este elemento ρ , de la recta extendida, es llamado el **radio de convergencia** de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. En lo que sigue, ρ denota el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Proposición 9.5.3. (i) *Supongamos que la sucesión $\{|a_n|^{1/n}\}_n$ tiene límite c en la recta extendida. Entonces $\rho = 1/c$.*

(ii) *Un resultado análogo vale si $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; y la sucesión $\{|a_{n+1}|/|a_n|\}_n$ tiene límite c en la recta extendida.*

Demostración: Ya que $|a_n x^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n} |x|$, concluimos del Criterio de la Raíz (ejercicio 6, sección 4.11), que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge si $c|x| < 1$ y diverge si $c|x| > 1$. Por lo tanto $\rho = 1/c$. El resto de la proposición se demuestra de manera análoga usando el criterio del cociente (proposición 4.11.5). ■

El siguiente resultado, que usaremos más adelante, es un corolario inmediato de la proposición anterior y del hecho que $n^{1/n} \rightarrow 1$ (ver ejercicio 6 de la sección 4.3).

Proposición 9.5.4. *El radio de convergencia de la serie $\sum_n nx^{n-1}$ es igual a uno.*

Proposición 9.5.5. *Si $[a, b] \subset (-\rho, \rho)$ con $a < b$, entonces $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformemente en $[a, b]$.*

Demostración: El lector probará sin dificultad que existe c en $(0, \rho)$ tal que $[a, b] \subset [-c, c]$. Escoja $d \in (0, \rho)$ tal que $c < d$. Escribamos $r = c/d$ y notemos que, si $x \in [a, b]$, entonces

$$|a_n x^n| \leq |a_n| c^n = |a_n d^n| r^n.$$

Por otra parte, como $\sum_n a_n d^n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n d^n\}_n$ converge a cero y por consiguiente, es acotada. Así, existe $M > 0$ tal que $|a_n d^n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $|a_n x^n| \leq M r^n$ si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a, b]$. Como la serie $\sum_n r^n$ es convergente (justificar), el resultado se deduce ahora del criterio de Weierstrass 9.4.3. ■

Corolario 9.5.6. *f es continua en $(-\rho, \rho)$.*

Demostración: De la proposición 9.5.5 y el ejercicio 4 de la sección 9.4, la restricción $f|_{[a, b]}$ es continua, para cada intervalo $[a, b]$ contenido en $(-\rho, \rho)$. Dejamos a cargo del lector verificar que de esto se deduce fácilmente que f es continua en $(-\rho, \rho)$. ■

Corolario 9.5.7. *Si $[c, d] \subset (-\rho, \rho)$, entonces*

$$\int_c^d f = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}.$$

Demostración: Se deduce directamente de la proposición 9.5.5 junto con el ejercicio 6 de la sección 9.4. ■

La serie $\sum_n n a_n x^{n-1}$ (resp. $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$) será llamada **la serie derivada** (resp. **integral**) de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Corolario 9.5.8. *El dominio de convergencia de la serie integral de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ contiene a $(-\rho, \rho)$. Es más,*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f, \quad \text{para todo } x \in (-\rho, \rho).$$

Demostración: El resultado se deduce del corolario anterior aplicado al intervalo $[0, x]$ (resp. $[x, 0]$, donde $x \in (-\rho, \rho)$ y $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$)). ■

Proposición 9.5.9. Si $\rho > 0$, entonces el dominio de convergencia de la serie derivada de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ contiene a $(-\rho, \rho)$. Es más, f es diferenciable en este intervalo y

$$f'(x) = \sum_n n a_n x^{n-1}, \quad \text{para todo } x \in (-\rho, \rho).$$

Demostración: Fijemos $x \in (-\rho, \rho)$. Ya que $|x| < \rho$, entonces, por la proposición 2.6.1, existe $y \in J$ tal que $|x| < y$. Definiendo $r = |x|/y$ y recordando que la sucesión $\{a_n y^n\}_n$ es acotada, obtenemos

$$|n a_n x^{n-1}| = \frac{1}{y} n |a_n y^n| r^{n-1} \leq \frac{M}{y} n r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

para alguna constante $M > 0$.

Por la proposición 9.5.4 concluimos que $\sum_n n a_n x^{n-1}$ es absolutamente convergente. Esto prueba la primera parte de la proposición.

Fijemos $z \in (-\rho, \rho)$ y escojamos $r > 0$ tal que $[z-r, z+r] \subset (-\rho, \rho)$. De la proposición 9.5.5 y de la primera parte de esta proposición se sigue que la serie derivada converge uniformemente en $[z-r, z+r]$. Aplicando el ejercicio 5 de la sección 9.4 al intervalo $(z-r, z+r)$, concluimos que f es diferenciable en z y que $f'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$. Recuerde que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ es convergente. ■

Ejemplo 9.5.10. (La función exponencial) Considere la siguiente serie de potencias, donde $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.1)$$

Dejamos al lector verificar que el criterio del cociente 9.5.3(ii) garantiza que esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $f(x)$ la función asociada a la serie (5.1). Motraremos que f es precisamente la exponencial e^x . Primero que todo recordemos que e^x se define como la inversa de la función logarítmica dada en la proposición 8.4.6 y además que la derivada de e^x es ella misma (proposición 8.4.7).

Notemos que si derivamos término a término la serie (5.1) obtenemos la misma serie (verificarlo). Por lo tanto, por el ejercicio 5 de la sección 9.4, concluimos que $f' = f$. Por lo tanto, la función $h(x) = f(x) - e^x$ satisface que $h' = h$. Por otra parte $f(1) = e$ (ver proposición 4.4.5), esto dice que $h(1) = 0$. Finalmente, por el ejercicio 10 de la sección 7.3 (vea también el ejercicio 5 de la sección 7.5) se concluye que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En los ejercicios que siguen veremos ejemplos de series que son de potencias pero en realidad no caen dentro de la definición que hemos adoptado. Para subsanar este inconveniente, podemos adoptar la siguiente definición más general. Diremos que la **serie** $\sum_{n \geq 0} f_n$ es de **potencia**, si $f_n(x) = a_n x^{h(n)}$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ es una función inyectiva. El lector

probará que, salvo las proposiciones 9.5.3 y 9.5.9, los resultados de esta sección permanecen válidos para este nuevo concepto de series de potencia. La proposición 9.5.9 permanece válida cuando $h(n)/n^p \rightarrow 0$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Esto ocurre, por ejemplo, cuando h es polinomial: $h(n) = b_0 + b_1n + \dots + b_qn^q$. En fin, el radio de convergencia de estas series de potencia puede ser calculado usando las ideas de la proposición 9.5.3.

Ejercicios.

1. Calcule el dominio de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$a) \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$b) \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$c) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

2. Pruebe que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y sus series derivada e integral tienen, las tres, el mismo radio de convergencia. *Ayuda.* Note que la serie derivada de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ es $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y que la serie integral de $\sum_n n a_n x^{n-1}$ es $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
3. Pruebe que si $\rho > 0$, entonces la restricción de f a $(-\rho, \rho)$ es de clase C^∞ y

$$f^{(N)}(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdots (n+N) a_{n+N} x^n.$$

4. Pruebe que

$$\ln(1+x) = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

si $-1 < x < 1$. *Ayuda.* La serie geométrica $\sum_n x^n$ converge a $1/(1-x)$ si $|x| < 1$, y cambiando x por $-x$, tenemos que $\sum_n (-1)^n x^n$ converge a $1/(1+x)$ en $(-1, 1)$. Utilice ahora el corolario 9.5.7 y la proposición 8.4.6.

Nota. Ya que, por el criterio de las series alternadas (proposición 4.11.6), $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ converge, se sigue de un teorema de Abel (ver, por ejemplo, [8, Pag. 172]) que, la igualdad del ejercicio 4, vale para $x = 1$. Es decir,

$$\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Como es usual, \ln denota la función logaritmo neperiano.

9.6. Las funciones trigonométricas

En esta sección construiremos las funciones seno y coseno.

Teorema 9.6.1. *Existe una única función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dos veces diferenciable, tal que*

$$f'' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (6.1)$$

Además, $g := f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la única función, dos veces diferenciable, que satisface

$$g'' + g = 0, \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = 0. \quad (6.2)$$

Las funciones f y g se conocen como las funciones **seno** y **coseno** y se denotan por *sen* and *cos* respectivamente.

Demostración: Unicidad. Supongamos que $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dos veces diferenciables que verifican (6.1) y definamos $h = F - f$. Entonces $h'' + h = 0$, $h(0) = h'(0) = 0$. Note que h es necesariamente C^∞ y además que $h^{(n)}(0) = 0$ para todo n . Fije $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Usando la fórmula de Taylor (teorema 7.5.1) se tiene directamente que existe una sucesión $\{c_n\}_n$ entre cero y x tal que $h(x) = h(c_n)x^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (verificar). De esto se concluya que $h(x) = 0$. De manera análoga se demuestra la unicidad de g .

Existencia. Es fácil verificar que el criterio del cociente 9.5.3(ii) garantiza que \mathbb{R} es el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. De aquí, tenemos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Es más, por la proposición 9.5.9, f es diferenciable en \mathbb{R} y

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Por la proposición 9.5.9, una vez más, tenemos que f es dos veces diferenciable y que

$$f''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -f(x).$$

Por lo tanto, f satisface las condiciones en (6.1).

Pongamos $g = f'$. De (6.1) tenemos, $f''' + f' = 0$, $f'(0) = 1$, y así, $g'' + g = 0$, $g(0) = 1$. En fin, $g'(0) = f''(0) = -f(0) = 0$. ■

Obtendremos ahora algunas propiedades de las funciones seno y coseno utilizando únicamente las propiedades enunciadas en (6.1) y (6.2). En lo que sigue, f y g denotan las funciones dadas por el teorema 9.6.1.

Proposición 9.6.2. $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, f, g son acotadas.

Demostración: Definamos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$. Entonces h es diferenciable y como $g' = f''$, obtenemos $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$. De aquí, h es constante. Por último observemos que $h(0) = g(0)^2 = 1$. ■

Proposición 9.6.3. Existe $t_0 > 0$ tal que $f(t_0) = 0$.

Demostración: Ya que f es dos veces diferenciable, tenemos que f' es continua, y como $f'(0) = 1 > 0$, existe $r > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, r)$. De aquí y el Teorema del Valor Medio, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, r)$.

Asumamos ahora que la proposición es falsa. Del teorema de Bolzano, concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$ y así $f'' < 0$ en ese intervalo. Es decir, $g = f'$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$, y por la proposición precedente, $g(x)$ tiene límite, digamos b , cuando $x \rightarrow +\infty$. Por otro lado, como f es acotada, se deduce del ejercicio 9 de la sección 7.3, que $b = 0$. Pero $g(0) = 1 > 0$ y g es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$, lo cual implica que $f' = g > 0$ en $(0, \infty)$. En particular, $-f$ es estrictamente decreciente. Como $f''(x) = -f(x) \leq -f(1) < 0$, si $x \geq 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$ existe y es negativo. De nuevo, del ejercicio 9 de la sección 7.3, se concluye que $f'(x) \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow +\infty$. Pero $g(x) = f'(x)$ es acotada. Esta contradicción termina la prueba. ■

Proposición 9.6.4. Existe $T > 0$ tal que $f(T) = 0$ y $f > 0$ en $(0, T)$. Además, $f(x + T) = -f(x)$ y $g(x + T) = -g(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En particular, $f(x + 2T) = f(x)$ y $g(x + 2T) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: La proposición anterior permite definir $T = \inf\{t_0 > 0 : f(t_0) = 0\}$. Como f es continua, entonces $f(T) = 0$. Por otra parte, ya que $f'(0) = 1 > 0$, se tiene que $T > 0$ (justificar). De la definición de T resulta que $f > 0$ en $(0, T)$, porque f' es continua y $f'(0) > 0$. En particular, $g' = f'' = -f < 0$ en $(0, T)$ y de aquí, $g(T) < g(0) = 1$. Pero de la proposición 9.6.2, $g(T) = \pm 1$, de donde, $g(T) = -1$.

Definamos $h(x) = f(x + T) + f(x)$. Es fácil ver que h es dos veces diferenciable y que $h'' + h = 0$. Por otra parte, $h(0) = f(0) + f(T) = 0$ y $h'(0) = f'(0) + f'(T) = g(0) + g(T) = 0$, lo que junto al ejercicio 6 de la sección 7.5, dice que $h = 0$. Así, $f(x + T) = -f(x)$. El resto de la prueba es dejada al lector. ■

Nota. El número T dado por la proposición 9.6.4 es una constante muy importante en matemáticas y se denota por π .

Proposición 9.6.5. $f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ y $g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración: Fijemos $y \in \mathbb{R}$ y definamos $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$h_1(x) = f(x + y), \quad h_2(x) = g(y)f(x) + f(y)g(x).$$

El lector verificará sin dificultad que $h_1(0) = h_2(0)$, $h_1'(0) = h_2'(0)$ y $h_i'' + h_i = 0$ para $i = 1, 2$. Sea $h = h_1 - h_2$. Por el mismo argumento usado en el teorema 9.6.1 para mostrar la unicidad de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\operatorname{cos}(x)$ se obtiene que $h = 0$ y así $h_1 = h_2$, lo cual prueba la primera afirmación. El resto es similar y lo dejaremos a cargo del lector. ■

9.7. Una función continua que no es diferenciable en ningún punto

Esta pequeña sección estará dedicada a construir una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua pero que no es diferenciable en ningún punto. La primera construcción de una función con esas propiedades fue realizada por Weierstrass en 1872. Este resultado causó un profundo impacto en la comunidad matemática de aquella época. El ejemplo de Weierstrass es la siguiente función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \operatorname{cos}(a^n x)$$

donde $0 < b < 1$, a es un entero impar y $ab > 1 + 3\pi/2$. La demostración de que f no es diferenciable en ningún punto es larga y no la haremos aquí (vea por ejemplo [2]). Después del ejemplo de Weierstrass muchos otros ejemplos fueron construidos. Presentaremos uno de ellos (seguiremos la presentación hecha en [4]).

Considere la función

$$K(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2; \\ 1 - x, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Extendamos periódicamente K a toda la recta, es decir, $K(x + 1) = K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dejamos a cargo del lector verificar que K es continua.

Ahora defina

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} K(2^n x). \quad (7.3)$$

Ya que $|K(x)| \leq 1/2$ para todo x y la serie $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots$ es convergente, no es difícil verificar que la serie en (7.3) converge uniformemente y por lo tanto g es continua.

Veamos que g no es diferenciable en ningún punto. Fijemos x_0 un punto cualquiera. Sea α_n y β_n la sucesión de números con las siguientes propiedades: $\alpha_n = i/2^n$, $\beta_n = (i+1)/2^n$ donde i es un entero y

$$\alpha_n \leq x_0 < \beta_n.$$

Considere ahora la siguiente sucesión

$$r_n = \frac{g(\beta_n) - g(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

Observe que para x de la forma $j/2^n$, donde j es un entero, se tiene que la suma en (7.3) es en realidad finita (es decir, $K(2^n x) = 0$ para n suficientemente grande, vea el ejercicio 4). Dejaremos a cargo del lector demostrar que la sucesión $\{r_n\}_n$ no es convergente (vea el ejercicio 5).

Por otra parte, tenemos que

$$r_n = \lambda_n \frac{g(\beta_n) - g(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{g(x_0) - g(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n}$$

donde $\lambda_n = (\beta_n - x_0)/(\beta_n - \alpha_n) \in (0, 1]$. En el caso que $\alpha_n = x_0$ se tiene que $\lambda_n = 1$ y no se incluye el segundo sumando en la expresión de arriba para r_n .

Supongamos que g es diferenciable en x_0 . Entonces, dado $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande se cumple que

$$|r_n - g'(x_0)| < \lambda_n \epsilon + (1 - \lambda_n) \epsilon = \epsilon.$$

Esto dice que r_n es convergente, lo cual es contradictorio.

Ejercicios

1. Muestre que la función K es continua.
2. Muestre que la serie en (7.3) converge uniformemente.
3. Muestre que las sucesiones α_n y β_n están bien definidas.
4. Muestre que para x de la forma $j/2^m$, donde j es un entero, $K(2^n x) = 0$ para $n \geq m$.
5. Muestre que la sucesión $\{r_n\}_n$ no es convergente.

Ayuda:

- a) Observe que r_n es la pendiente de la función

$$\sum_{j=1}^{n-1} K(2^j x) \tag{7.4}$$

en el intervalo (α_n, β_n) .

b) Muestre que alguna de las dos alternativas siguientes se cumple:

(1) $\alpha_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$ y $\beta_{n+1} = \beta_n$

(2) $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ y $\beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$.

c) Haga un dibujo de la función dada en (7.4) en el intervalo (α_n, β_n) y use la parte anterior para mostrar que si (1) se cumple, entonces

$$f(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_n) + (1/2^{n+1})r_n + 1/2^{n+1}$$

Enuncie y demuestre un resultado análogo para el caso cuando (2) se cumpla.

d) Use los resultados anteriores para mostrar que $r_{n+1} = r_n \pm 1$.

9.8. La integral de Riemann-Stieljes

El objetivo de esta sección es hacer una brevísima introducción a la integral de Riemann-Stieljes. En lo que sigue, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo compacto $[a, b]$. Dado un intervalo $I = [c, d] \subset [a, b]$, definimos $l_\alpha(I) = \alpha(d) - \alpha(c)$. Dada una partición P , de $[a, b]$, definimos **la variación de α respecto a P** , por $V(\alpha, P) = \sum_{I \in P} |l_\alpha(I)|$. Si el conjunto $\{V(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ es acotado, diremos que α **es de variación acotada**, y el supremo de ese conjunto será denotado por $V(\alpha)$ y se le conoce como **la variación total de α** .

1. Pruebe que si $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de variación acotada, entonces $\alpha + \beta$ y $c\alpha$ también lo son, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
2. Pruebe que toda función monótona $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada y que $V(\alpha) = |\alpha(a) - \alpha(b)|$.

Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función en escalera respecto a una partición P de $[a, b]$. Definimos **la integral de Riemann-Stieljes de ϕ respecto a α** mediante,

$$\int_a^b \phi d\alpha = \sum_{I \in P} c_I l_\alpha(I),$$

donde c_I es el valor de ϕ en $\text{int}(I)$.

En lo que sigue, $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ denotan funciones de variación acotada y $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ denotan funciones en escalera.

3. Muestre que la definición de integral, dada anteriormente, es correcta. Es decir, no depende de la partición P . Muestre también que valen las siguientes propiedades:

- a) $\int_a^b (\phi + \psi) d\alpha = \int_a^b \phi d\alpha + \int_a^b \psi d\alpha.$
 b) $\int_a^b (c\phi) d\alpha = c \int_a^b \phi d\alpha,$ si $c \in \mathbb{R}.$
 c) $|\int_a^b \phi d\alpha| \leq MV(\alpha),$ si $|\phi(x)| \leq M;$ para todo $x \in [a, b].$
 d) $\int_a^c \phi d\alpha + \int_c^b \phi d\alpha = \int_a^b \phi d\alpha,$ si $c \in (a, b).
 e) \int_a^b \phi d(\alpha + \beta) = \int_a^b \phi d\alpha + \int_a^b \phi d\beta.
 f) \int_a^b \phi d(c\alpha) = c \int_a^b \phi d\alpha,$ si $c \in \mathbb{R}.$

4. Sea $\{\phi_n\}_n$ una sucesión de funciones en escalera definidas en $[a, b],$ la cual converge uniformemente a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$ Pruebe que $\{\int_a^b \phi_n d\alpha\}_n$ es convergente. *Ayuda.* Pruebe que esa sucesión es de Cauchy.
5. Sean $\{\phi_n\}_n, \{\psi_n\}_n$ sucesiones de funciones en escalera, definidas en $[a, b],$ las cuales convergen uniformemente a la misma función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$ Pruebe que $\{\int_a^b \phi_n d\alpha\}_n$ y $\{\int_a^b \psi_n d\alpha\}_n$ convergen al mismo límite.

Sean $\{\phi_n\}_n$ y f como en el problema 4. Definimos **la integral de Riemann-Stieljes de f respecto a α** mediante,

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n d\alpha.$$

Del problema 5 se tiene que esta definición es correcta. Es decir, no depende de la sucesión de funciones en escalera que aproxima a $f.$

6. Pruebe que esta definición de integral goza de las propiedades enunciadas en el problema 3.
7. Use el ejercicio 8 de la sección 9.1 para mostrar que la integral $\int_a^b f d\alpha$ está definida, para cualquier función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier función $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada.

Índice alfabético

- $+\infty$, 27
- $-\infty$, 27
- C^1 , 143
- C^n , 144
- C^∞ , 144
- I_n , 17
- \mathbb{K} , 13
- \mathbb{N} , 15
- \mathbb{Q} , 18
- \mathbb{R} , 20
- \mathbb{Z} , 18
- \emptyset , 2
- $\int_a^b f$, 160
- $\lim_{n \rightarrow \infty}$, 52
- $\lim_{x \rightarrow x_0}$, 103
- $\liminf_{n \rightarrow \infty}$, 68
- $\limsup_{n \rightarrow \infty}$, 68
- $\overline{\int_a^b f}$, 159
- \sum , 71
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, 194
- $\int_a^b f$, 160
- $|f|$, 28
- $|x|$, 28
- e , 61
- e^x , 174, 199
- $f(x) \rightarrow \lambda$, 103
- $x_n \rightarrow a$, 52
- $\mathcal{B}([a, b])$, 158
- $CR(I)$, 180
- $\mathcal{P}(A)$, 3
- $\mathcal{R}([a, b])$, 160
- álgebra real, 164
- anillo, 19
- aplicación, 4
- Arquímedes, 155
- asociativa, 11
- axioma de completitud, 20
- axioma de elección, 4
- axioma de la unión, 2
- axioma de separación, 2
- axioma del conjunto potencia, 3
- binomio de Newton, 40
- cambio de variable para integrales, 172
- cardinal de un conjunto, 41
- cerrado relativo, 92
- clase de equivalencia, 9
- clausura de un conjunto, 90
- coeficientes de la serie, 196
- completitud de \mathbb{R} , 70
- composición de funciones, 5
- conexidad, 87
- conjunto abierto, 85
- conjunto abierto relativo, 89
- conjunto acotado inferiormente, 20
- conjunto acotado superiormente, 20
- conjunto cerrado, 89
- conjunto cociente, 9
- conjunto compacto, 96
- conjunto de medida cero, 176

- conjunto de partes, 3
- conjunto denso, 91
- conjunto dirigido, 78
- conjunto finito, 41
- conjunto inductivo, 15
- conjunto infinito, 41
- conjunto infinito numerable, 41
- conjunto numerable, 41
- conjunto ordenado, 9
- conjunto singular, 2
- conjunto vacío, 2
- conjuntos equipotentes, 40
- conmutativa, 11
- contraimagen, 6
- convergencia puntual, 187
- convergencia uniforme, 188
- cortadura de Dedekind, 23
- cota inferior, 20
- cota superior, 20
- criterio de Cauchy para series, 74, 195
- criterio de la raíz, 78
- criterio de las series alternadas, 76
- criterio de Weierstrass, 195
- criterio del cociente, 75
- cubrimiento abierto, 96
- cuerpo, 13
- cuerpo arquimediano, 20
- cuerpo completo, 20
- cuerpo de los números reales, 20
- cuerpo ordenado, 13

- derivada, 132
- derivada lateral, 133
- desigualdad de Bernoulli, 40
- diferencia simétrica, 13
- diferencial, 138
- dominio de convergencia, 195

- dominio de una función, 4

- elemento invertible, 12
- elemento neutro, 11
- entorno, 51
- extensión continua, 113
- extensión de una función, 8
- extremo relativo, 137

- fórmula de Taylor, 146
- fórmula de Taylor con resto integral, 172
- factorial, 37
- familia disjunta de conjuntos, 7
- Fermat, 131
- función, 4
- función biyectiva, 5
- función Cauchy-Riemann integrable, 180
- función constante, 4
- función continua en un conjunto, 109
- función continua en un punto, 109
- función continuamente diferenciable, 143
- función convexa, 150
- función creciente, 117
- función de clase C^1 , 143
- función de clase C^∞ , 144
- función de clase C^n , 144
- función de variación acotada, 205
- función decreciente, 117
- función derivable, 132, 138
- función diferenciable, 138
- función en escalera, 163, 184
- función estrictamente creciente, 117
- función estrictamente decreciente, 117
- función estrictamente monótona, 117
- función exponencial, 129, 199
- función identidad, 4
- función infinitamente diferenciable, 144

- función inversa, 5
- función inyectiva, 6
- función Lipschitziana, 142
- función logarítmica, 129
- función monótona, 117
- función R-integrable, 160
- función restricción, 8
- función seno, 201
- función sobreyectiva, 6
- función uniformemente continua, 123

- gráfico de una función, 4
- grupo, 12
- grupo abeliano, 12
- grupo conmutativo, 12

- identidad de Pascal, 38
- imagen bajo una función, 4
- infimo, 20
- integración por partes, 172
- integral de Riemann, 160
- integral de Riemann-Stieljes, 205
- integral impropia, 179
- integral inferior, 159
- integral superior, 159
- interior de un conjunto, 88
- intervalo, 83
- intervalo degenerado, 83
- intervalos de una partición, 156

- límite de una función en un punto, 103
- límite inferior, 68
- límite superior, 68
- Leibnitz, 131, 155
- ley de composición, 11
- ley de tricotomía, 14
- Leyes de De Morgan, 8
- logaritmo neperiano, 129, 173

- longitud de un intervalo, 83
- máximo de una función, 113
- máximo relativo, 137
- método de Newton, 148
- método exhaustivo, 155
- mínimo de una función, 113
- mínimo relativo, 137
- media aritmética, 153

- número combinatorio, 38
- número entero, 18
- número irracional, 21
- número natural, 15
- número racional, 18
- Newton, 131, 155

- orden parcial, 9
- oscilación de una función, 161
- oscilación en un punto, 175

- par ordenado, 4
- parte entera, 19
- partición, 155
- polinomio de Taylor, 146
- primitiva de una función, 171
- principio de inducción, 16
- producto cartesiano, 4
- prolongamiento de una función, 8
- propiedad arquimediana, 20
- propiedad del supremo, 20
- propiedad triangular, 28
- punto aislado, 93
- punto crítico, 150
- punto de acumulación, 93
- punto de clausura, 90
- punto límite de un conjunto, 91

- radio de convergencia, 197

- rango de una función, 4
- rango de una sucesión, 53
- recta extendida, 27
- red, 78
- refinamiento de una partición, 156
- regla de L'Hôpital, 142
- regla de la cadena, 136
- relación, 9
- relación antisimétrica, 9
- relación de equivalencia, 9
- relación reflexiva, 9
- relación simétrica, 9
- relación transitiva, 9
- reordenamiento de una serie, 73
- Riemann, 155

- salto de una función en un punto, 120
- semirrecta, 84
- serie, 71
- serie absolutamente convergente, 73
- serie armónica, 72
- serie asociada, 36
- serie condicionalmente convergente, 73
- serie convergente, 71
- serie de funciones, 194
- serie de potencias, 196
- serie derivada, 198
- serie divergente, 71
- serie geométrica, 72
- serie integral, 198
- subcubrimiento, 96
- subsucesión, 65
- sucesión, 51
- sucesión acotada, 53
- sucesión constante, 53
- sucesión convergente, 52
- sucesión creciente, 58

- sucesión de Cauchy, 69
- sucesión decreciente, 58
- sucesión monótona, 58
- suma inferior, 158
- suma parcial de una serie, 71
- suma superior, 158
- supremo, 20

- teorema de Bolzano, 115
- teorema de Bolzano-Weierstrass, 94
- teorema de Darboux, 142
- teorema de Heine-Borel, 98
- teorema de la función inversa, 140
- teorema de los intervalos encajados, 48
- teorema de los valores intermedios, 116
- teorema de Rolle, 138
- teorema de valor medio de Cauchy, 141
- teorema del valor intermedio para integrales,
167
- terna ordenada, 7

- valor absoluto, 28
- variación, 205
- vecindad, 51

- Weierstrass, 203

Bibliografía

- [1] T. Apostol. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, Barcelona, España, segunda edición, 1979.
- [2] D. Bressoud. *A Radical Approach to Real Analysis*. The Mathematical Association of America, 1994. Classroom Resource Materials 2.
- [3] B. Davery and H. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, second edition, 2003.
- [4] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by Its History*. Springer, 1995. Undergraduate texts in Mathematics.
- [5] J. Kelly. *Topología General*. Eudeba, Buenos Aires, Argentina, segunda edición, 1975.
- [6] K. Kunen. *Set Theory, an Introduction to Independence Proofs*. North Holland, Amsterdam New York, 1980.
- [7] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.
- [8] W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, Mexico, segunda edición, 1978.
- [9] M. Spivak. *Calculus. Tomos I y II*. Editorial Reverté S. A., España, 1978.
- [10] K. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth, Inc., USA, 1981.
- [11] A. Tineo. *Topología de Espacios Métricos*. Kari'ña Editores, Mérida, Venezuela, 1995.