# Geometría métrica plana

*Juan Manuel Leal García*

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Comisión de Desarrollo del Pregrado (CODEPRE)
Mérida – Venezuela, 2002

Primera edición, 2002


***Geometría métrica plana***



Diagramación del texto: *Juan Manuel Leal García*.
Diseño de la portada: *Jhonathan Medina* (Imagen Institucional y Diseño).

HECHO EL DEPÓSITO DE LEY
Depósito legal lf23720025103255
ISBN 980-11-0692-1

Impresión: Universidad de Los Andes, Talleres Gráficos Universitarios, Mérida.
Impreso en Venezuela / Printed in Venezuela.

# Contenido

# Prólogo

Para nosotros, un estudio más o menos serio de las Matemáticas, actualmente, debería comenzar con un estudio de la *Aritmética* y la *Geometría*[1], porque éstas son sus fuentes, tanto desde el punto de vista histórico, como desde el punto de vista lógico-sistemático; y porque sus principales conceptos surgen como generalizaciones de las nociones básicas de estos dos campos[2].

Además, somos de la idea de que la enseñanza de estas dos teorías fundamentales debe tomar en cuenta en el estudiante, tanto la *información* que se le suministra, como su *formación* intelectual; y no creemos que deba sacrificarse ninguna de ellas en favor de la otra. Nos parece adecuado proveer al estudiante de los conceptos y resultados que le permitirán adentrarse rápida y vivamente en las profundidades del ámbito matemático; del mismo modo que nos parece indispensable facilitar al estudiante el cultivo de un orden intelectual, que lo habilite para: discernir claramente los ***principios*** que fundamentan los conocimientos que adquiera, tanto en las Matemáticas, como en cualquier otro ámbito de su experiencia vital; y alcanzar nuevos conocimientos de manera independiente.

Dados los desaciertos que, desde uno u otro punto de vista, constatamos en los textos de Geometría que hemos tenido ocasión de revisar durante los diez

[1] Por supuesto, haciendo una breve revisión del lenguaje que ya se ha hecho común y usual entre los matemáticos de hoy en día, es decir, en el que hace uso de las nociones básicas y elementales de la Lógica matemática y de la Teoría de conjuntos.

[2] No nos pronunciamos aquí sobre la manera en que deba hacerse dicho estudio: podría hacerse de una manera formal, rigurosa y/o exhaustiva, o a través de la presentación de algunos problemas que fortalezcan la intuición y provoquen entusiasmo en quien las estudia; sean estos problemas de los que llaman interesantes, curiosos, de ingenio, o fundamentales, bien desde el punto de vista histórico, de actualidad, o del desarrollo futuro de alguna de sus áreas.

años ya cumplidos en la enseñanza de esta materia[3], nos hemos propuesto escribir esta obra sin descuidar ninguno de estos aspectos, y acompañados del entusiasmo natural que se despierta en quienes se dedican a estudiar o enseñar Geometría.

Por otro lado, nos parece fundamental que quien emprenda un estudio más o menos serio de las Matemáticas se habitúe a leer y escribir Matemáticas adecuadamente[4]. La *intuición natural*[5] permite ver rápida y claramente que una cierta afirmación es verdadera y por qué, pero no pocas veces se hace difícil expresar adecuadamente los argumentos por escrito; y, por lo menos al principio, esa intuición se fortalece a partir de la que otros nos están presentando a través de un escrito, que no pocas veces se hace difícil de leer, sobre todo cuando nos enfrentamos con un tipo de lectura completamente nuevo.

Como contribución en esta tarea, por lo demás harto difícil, hemos tratado de escribir esta obra con un estilo uniforme[6], con el propósito de establecer algunos patrones que puedan servirle al estudiante en el momento de expresar sus propios argumentos.

Los temas básicos de la Geometría pueden sin duda exponerse con una ligereza tal que pronto se arribe a los resultados más útiles en la resolución de sus problemas más notables, pasando por alto los pequeños detalles que sirven de amalgama a la totalidad del sistema[7].

Nosotros hemos preferido dejar establecidos en esta obra esos pequeños detalles, por engorrosos que sean, con el propósito de que la obra pueda servir de referencia, tanto para el profesor en su quehacer profesional o en el momento que imparte un curso de Geometría elemental, como para el estudiante que lo cursa; aunque no creemos que necesariamente deban cubrirse todos esos detalles en el salón de clases, sino más bien nuestra intención es ponerlos a la disposición de los estudiantes más interesados.

La obra no ha sido pensada como para que un estudiante lleve a cabo su estudio con éxito por sí mismo[8], aunque cabría esperar excepciones. Es necesaria la guía de un instructor diestro que pueda arrojar luz sobre esos rincones de la

[3]Una lista detallada de dichos textos puede verse en nuestra bibliografía.

[4]Enfrentando y superando, por un lado, las deficiencias de lectura y escritura del idioma materno acarreadas en su propia formación básica y, por otro lado, el prejuicio común de que las Matemáticas no son algo que se lee o que se escribe, sino simplemente algo que se piensa.

[5]Indispensable y clave en el estudio de las Matemáticas, junto con la *memoria*.

[6]Sacrificando muchas veces el aspecto estético.

[7]Efectivamente algunos autores prefieren este estilo, muchos de ellos sin poder substraerse de dejar en el lector la sensación de que está haciendo trampa, puesto que ni siquiera lo pone en alerta respecto a lo que está pasando por alto.

[8]Sobre todo, dadas las condiciones en las que actualmente egresan del nivel previo.

teoría que le suelen ser oscuros, motivando adecuadamente la presentación de los temas e interpretándolos en toda su magnitud y profundidad.

El instructor de un curso de Geometría elemental, que utilice esta obra como texto básico para trabajar con los estudiantes, debe estar en capacidad de extraer, previamente a la exposición de sus resultados, las ideas que sustentan las pruebas que se presentan; no es de nuestro gusto producir una especie de *vademecum* para el instructor, en el que se detallen el tipo de recursos que pudiera utilizar para motivar los temas, cuáles son las ideas de las pruebas, cuál la mejor manera de llevar la dinámica de sus clases, etc. La obra pretende contener lo que un instructor de un curso de Geometría elemental no debería dejar de saber; de ahí en adelante el talento y la creatividad personal deben tomar la batuta, permitiéndose la licencias que mejor considere en la exposición de los temas, pero sabiendo lo que está haciendo y nó sin ese saber.

Ciertamente el trabajo realizado no entra en los cánones que tipifican los trabajos de investigación científica hoy en día, ya que es poco lo que de novedoso se puede escribir sobre los elementos de la Geometría, un campo al que se han dedicado las mentes más preclaras durante más de dos mil años, y especialmente después de la revisión hecha por Hilbert en el siglo pasado. Queda sin embargo abierta la posibilidad que nosotros precisamente empuñamos: recopilar la información que se encuentra dispersa por uno y otro lado, reorganizarla de manera que se vean claras las conexiones de todas sus partes respecto a los principios que se establezcan, y expresarla en los términos que nos parezcan más adecuados: pueden endosarse a nuestra cuenta el ordenamiento y la expresión de los resultados.

Cada capítulo contiene un grupo de *problemas*, los cuales pueden ser resueltos con los resultados obtenidos hasta el punto en que se encuentran[9], y que han sido clasificados en dos triples categorías: los que un estudiante debería resolver bajo la tutela directa del instructor, y los que debe hacer por sí mismo; y cada una de éstas en tres niveles de dificultad (baja, media y alta), por supuesto, sin pretender ser cien por ciento objetivos en esta última clasificación.

Cada capítulo contiene una sección de *comentarios*, los cuales son independientes del desarrollo del contenido de los capítulos: puede realizarse el estudio de la Geometría, tal como proponemos en esta obra, sin necesidad de revisarlos.

[9]Estamos de acuerdo en que esta manera de proponer problemas, dando un marco teórico con el cual se pueden resolver, no es la mejor, puesto que los problemas importantes de las Matemáticas no se presentan así; bajo la condición de que el que intenta resolverlos tenga un cierto nivel de entrenamiento y madurez. Pero, en los inicios del estudio de las Matemáticas nos parece que esta manera es, por demás, indispensable.

Estos están divididos en dos partes: la primera contiene notas numeradas que se encuentran referenciadas en el interior del contenido de cada capítulo, y son de naturaleza muy diversa; la segunda parte de estos comentarios está destinada a recoger algunas opiniones y algunos escritos sobre la Historia de las Matemáticas, especialmente en lo que se refiere a la Geometría, o a introducir algunos conceptos importantes que requerirían, para su estudio formal, de algunas técnicas que se escapan del nivel de la Geometría elemental.

Creemos firmemente que el estudio de la Geometría no puede separarse del de la Historia de las Matemáticas, al menos en sus puntos más notables, ya que hasta el siglo XVII constituía el principal tema de estudio e investigación. Así, hemos tomado como ejemplos, en estos comentarios, a quienes se han dedicado destacadamente a la Geometría y la han marcado de manera relevante (bien sea un personaje particular o toda una civilización en general); y, además, hemos tratado de referirnos, en cada capítulo, a quienes se han destacado por algo que se refiere precisamente al contenido del mismo.

Para finalizar este aparte nos sentimos en la necesidad de decir (debido a que hemos constatado, por diversos lados y de distintas maneras, que su naturaleza y su espíritu no han sido muy bien comprendidos) que todos estos comentarios no son el producto de la fantasía individual del autor, ni meramente su opinión particular y personal respecto a los temas que trata, sino más bien son el resultado natural del deseo saber de cualquier persona que tiene interés en algún tópico del vasto campo del conocimiento humano. Son múltiples los puntos de vista desde los que se puede estudiar cualquier tema específico de las Matemáticas y su historia, y tendría uno que estar en capacidad de poder ubicarse en cualquiera de ellos, si quisiera tener una panorámica general del mismo. Y, no sabemos si por fortuna o desafortunadamente, son muchos los que antes que nosotros han estudiado, hasta donde humanamente les ha sido posible, los temas a los que nos referimos. Las opiniones, por supuesto, pueden ser variadas, e incluso opuestas, y cada uno tomará partido por alguna de ellas de acuerdo a su nivel de comprensión, o expresará algún rasgo que matice o concilie algunas de las ya presentadas. Nosotros, en particular, no escapamos a esta regla general, y nos hemos hecho voceros de aquellas opiniones que, de acuerdo a nuestro parecer actual, nos resultan más acertadas. Para curarnos en salud, como decimos en nuestra lengua, podemos referir al autor a algunas de la múltiples fuentes que sustentan nuestro parecer, ya que se nos hace humanamente imposible destacarlas todas exhaustivamente, puesto que son ya muchos los años en que nos hemos dedicado, formal e informalmente, a estudiar lo que otros han dicho respecto a estos temas. Decimos, entonces, que quienes tengan el deseo de revisar las fuentes de lo que expresamos en estos comentarios pueden dirigirse, aparte de los textos que se encuentran mencionados en la bibliografía al final del libro (muy particularmente [10], [15], [13], [7] y [11]), a las siguientes obras de carácter general:

Joyce D. E., Clark University, *Página Web dedicada a Euclides*:
http://aleph0.clarku.edu/djoyce/java/elements/

Perseus Project, Tuft's University, *Página Web dedicada a Euclides*:
http://perseus.tufts.edu/

Richard Carr, Oxford University, *Página Web dedicada a Euclides*:
http://www.math.columbia.edu/

*Encyclopaedia Britannica*, Univesity of Chicago.

*Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana*, Espasa-Calpe, Madrid.

*Enciclopedia Universal Educativa*, Oceano, Barcelona-España.

*Enciclopedia Barsa*, Buenos Aires.

Quien haya tenido ocasión de revisar los primeros bocetos de esta obra, podrá darse cuenta de cuán agradecido debo estar, como efectivamente lo estoy, a los Profesores que componen la incipiente Coordinación del área de Geometría del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes: *Nelson Viloria* y *Ernesto Zamora*. Su entusiasmo por aclarar hasta el último detalle, sin hacer ningún tipo de concesiones, y su disciplina de trabajo, han permitido precisar conceptos, reordenar contenidos, dar respuesta a los ejercicios propuestos en esta obra y, de aquí, hacer la clasificación de estos arriba mencionada.

Del mismo modo, manifiesto mi agradecimiento por el interés y la dedicación que el Profesor *Jesús Pérez Sánchez* generosamente ha rendido a nuestra obra, y que se han concretado al orientarnos en algunos puntos particularmente escabrosos de la teoría, y de la solución de algunos problemas, desde su atalaya de pericia, tanto en la materia como en su enseñanza, y madurez como matemático.

Esperamos de nuestros colegas la consideración que corresponde a la tentativa que hemos emprendido, en la dirección de realizar una tarea tan grande como la de producir una obra de esta envergadura, así como también todas las recomendaciones que pudieran ayudar al mejoramiento, sin duda posible, de la calidad de esta obra de utilidad colectiva, que ofrecemos como un primer paso en la producción de un material didáctico autóctono.

# Capítulo 1

# Separación de la recta: segmentos y rayos

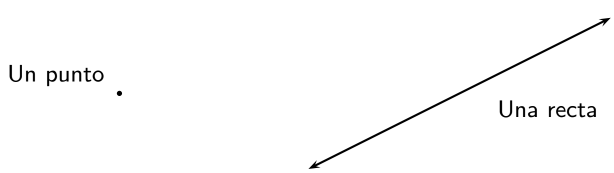
Haremos el estudio de la **Geometría métrica plana** partiendo de:

- un conjunto $\mathscr{P}$, que llamaremos el ***plano***⟨1⟩, a cuyos elementos llamaremos ***puntos***; y
- un tipo distinguido de subconjuntos del plano que llamaremos ***rectas***.

En otras palabras, estudiaremos la Geometría tomando los términos *punto, recta* y *plano* como ***términos primitivos***⟨2⟩.

Desarrollaremos toda esta teoría a partir de siete postulados⟨3⟩.

Tal y como intuitivamente nos los imaginamos (que es, en última instancia, de donde nos vienen sugeridos estos objetos), usaremos como representaciones de *plano*, *punto*, y *recta* las siguientes: del conjunto $\mathscr{P}$ (el plano), la superficie sobre la que exponemos nuestro estudio (una hoja de este libro, una hoja del cuaderno de apuntes, la pizarra); de un punto y de una recta, las que podemos dibujar así⟨4⟩:




Note que, al decir que una recta es un subconjunto del plano, estamos diciendo que una recta es un conjunto de puntos⟨5⟩, es decir, que sus elementos son también puntos.

Con el propósito de expresar sintéticamente nuestro primer postulado, introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.1 (Colineal)**
*Un conjunto de puntos es* ***colineal****, si todos se encuentran sobre*[6] *una misma recta.*

A veces diremos, por abuso del lenguaje, que los puntos mismos de un conjunto colineal, son *colineales* o que *están alineados*.

En primer lugar aceptaremos que la división en tres que hemos hecho de los objetos de los que hemos hablado (*punto*, *recta* y *plano*) no es trivial, es decir, que los unos no se reducen a los otros.

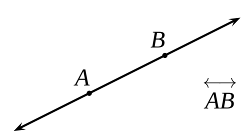
**Postulado 1**

**(a)** *Toda recta contiene al menos dos puntos distintos*[7].
**(b)** *El plano contiene al menos tres puntos no colineales*[8].

La afirmación (a) nos asegura que las rectas son subconjuntos no vacíos del plano y que son distintas de los puntos, indicando algo parecido a lo que nosotros pensamos que significa el hecho de que son *alargadas*; la afirmación (b) nos asegura que el plano es un conjunto no vacío y que es distinto de los puntos y de las rectas, indicando algo parecido a lo que nosotros pensamos que significa el hecho de que es *ancho* o *amplio*.

Este postulado, sin embargo, no nos asegura que haya rectas; sólo nos da garantía de que el plano $\mathscr{P}$ tiene al menos tres puntos, y que los tres puntos no se encuentran todos a la vez en uno de sus subconjuntos que hemos llamado rectas. El siguiente postulado nos da, entre otras cosas, garantía de que podemos contar con algunas rectas.

**Postulado 2 (De la recta)**
*Para cada par de puntos distintos, existe exactamente una recta que los contiene.*
*Si denotamos los puntos mediante los símbolos $A$ y $B$, denotaremos la única recta que los contiene mediante el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$, y la representaremos como en la figura adjunta.*




Otra manera de decir esto mismo es: *por cada par de puntos distintos pasa una única recta*, *dos puntos distintos* **determinan**[9] *una recta*, o, *una recta queda* *determinada por dos de sus puntos*. Note que esta afirmación es del todo distinta a la expresada en la parte (a) del Postulado 1, pues allí afirmábamos que, si teníamos una recta, podíamos contar con por lo menos dos puntos distintos en ella; mientras que aquí afirmamos que, si tenemos dos puntos distintos, podemos contar con una recta única que los contiene.

Siempre que hablemos de una recta $\overleftrightarrow{AB}$, asumiremos que $A \neq B$.

**(1)** *¿Será verdad que* $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$⟨10⟩*?*
**(2)** *¿Con cuántas rectas podemos contar, hasta ahora, en el plano?*

Estudiaremos ahora la *incidencia* entre rectas, entendiendo por incidencia la consideración de los siguientes dos asuntos:

- si se intersectan o no dos figuras geométricas⟨11⟩ y, en caso de que lo hagan, cómo es la intersección;
- si una figura geométrica está contenida en otra.

Sin aceptar ninguna propiedad adicional probaremos el primer resultado de nuestra teoría, y una de sus consecuencias inmediatas.

**Proposición 1.1** *Si dos rectas se cortan en más de un punto, entonces son iguales.*

**Prueba** Consideremos dos rectas $l$ y $m$ cuya intersección contiene al menos dos puntos distintos $A$ y $B$. Por el Postulado de la recta tendremos que $\overleftrightarrow{AB} = l$ (al estar $A$ y $B$ en $l$) y $\overleftrightarrow{AB} = m$ (al estar $A$ y $B$ en $m$). Así, $l = m$.

■

**Corolario 1.1.1** *Si dos rectas se cortan y son distintas, entonces su intersección consiste de exactamente un punto.*

**Prueba** Si la intersección de dos rectas no consistiera de exactamente un punto, tendríamos que: o no se cortan; o se cortan en al menos dos puntos distintos, en cuyo caso tendríamos, por la proposición anterior, que las rectas son iguales.

■

Podemos interpretar la proposición anterior diciendo que nos da garantía de la *delgadez* y de la *rectitud* de las rectas⟨12⟩.

Desde aquí hasta el final de este capítulo centraremos nuestra atención en el estudio de las rectas individualmente, sin ninguna relación entre ellas; es decir, reduciremos nuestro Universo a una recta. Bajo esta perspectiva aceptaremos sólo dos propiedades⟨13⟩, la primera de las cuales nos ofrecerá una manera de definir dos de las figuras geométricas distinguidas en una recta (***segmento*** y ***rayo***) que, a su vez, nos permitirán luego definir nuevas figuras geométricas planas (***ángulo***, ***triángulo***, ***cuadrilátero*** y ***polígono***); y la segunda nos permitirá hacer una descripción de una recta, más cercana a nuestra idea intuitiva.

**Postulado 3**

**(a) (De la distancia)**
*Cada par de puntos tiene asociado un único número real no negativo, al que llamaremos la* ***distancia desde el uno hasta el otro****.*
*Si denotamos los puntos con los símbolos $A$ y $B$, a veces llamaremos a ese número* ***la distancia entre*** *$A$* ***y*** *$B$, y lo denotaremos por $AB$*⟨14⟩.

**(b) (De la Regla⟨15⟩)**

**(i)** *Hay una correspondencia biunívoca⟨16⟩ entre los puntos de cualquier recta y los números reales, y ésta es tal que la distancia entre dos puntos de la recta se obtiene mediante el valor absoluto de la diferencia de los números reales que les corresponden⟨17⟩.*
*A una tal correspondencia la llamaremos un* ***sistema de coordenadas*** *de la recta, y al número real que le corresponde a un punto de la recta lo llamaremos la* ***coordenada del punto*** *(en dicho sistema de coordenadas).*

**(ii) (Colocación de la Regla)**
*Dados dos puntos distintos $A$ y $B$ de una recta, siempre podremos escoger la correspondencia anterior de tal manera que al punto $A$ le corresponda el número real cero (0) y al punto $B$ le corresponda cualquier número real positivo prefijado.*

Note que $AB$ es un número (y no una figura geométrica): ***la distancia entre*** *$A$* ***y*** *$B$*, o, ***el único número real no negativo asociado al par de puntos*** *$A$* ***y*** *$B$.*

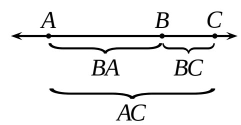
El Postulado de la distancia nos habla de la distancia entre puntos, pero no nos dice de ninguna manera cómo obtenerla. El Postulado de la Regla fija una de las tantas maneras posibles de "medir" esa distancia (es decir, una de las tantas maneras posibles de asignar un número real no negativo a cada par de puntos del plano), describiendo la manera natural en que lo hacemos: utilizando una "regla" tan "grande" y "tupida" que permita medir distancias entre dos puntos cualesquiera.

Note también que el Postulado de la colocación de la Regla nos dice que podemos alterar la escala, trasladándola, alargándola, achicándola o volteándola⟨18⟩.

**(3)** *¿Podremos asegurar que, si $A = B$, entonces $AB = 0$?*
**(4)** *¿Podremos asegurar que, si $AB = 0$, entonces $A = B$?*
**(5)** *¿Podremos asegurar que $AB = BA$?*

A partir del Postulado de la distancia definimos la siguiente relación entre puntos distintos de una recta, que a su vez nos permitirá definir los ***segmentos*** y los ***rayos***.

**Definición 1.2 (Interposición o Separación de la recta[19])**
*Un punto B* ***está entre*** *dos puntos distintos A y C, si:*




**(a)** *B es distinto de A y de C;*
**(b)** *B está en* $\overleftrightarrow{AC}$*; y*
**(c)** $BA + BC = AC$.

*A veces diremos que B* ***separa a*** *A* ***y a*** *C, o que A* ***está separado de*** *C* ***por*** *B, o que A* ***y*** *C* ***están en lados opuestos de*** *B, o que A* ***y*** *B* ***están del mismo lado de*** *C, o que B* ***y*** *C* ***están del mismo lado de*** *A; y este hecho lo denotaremos por A-B-C.*
*Análogamente, si A, B, C y D son cuatro puntos distintos y colineales, A-B-C-D significará que se cumple A-B-C, A-B-D, A-C-D y B-C-D[20].*

Las propiedades esenciales de la relación de Interposición entre puntos de una recta están agrupadas en la siguiente proposición.

**Proposición 1.2 (Propiedades de la Interposición)**

**(S1)** *Si tres puntos A, B y C son tales que A-B-C, entonces son distintos entre sí y colineales.*
**(S2)** *Dados tres puntos A, B y C, se tiene que A-B-C si, y sólo si, C-B-A.*
**(S3)** *Dados tres puntos distintos y colineales, se tiene que exactamente uno de ellos se encuentra entre los otros dos.*
**(S4)** *Dados dos puntos distintos A y B, se tiene que:*
(a) *existe un punto C tal que A-C-B; y*
(b) *existe un punto D tal que A-B-D.*
**(S5)** *Dados cuatro puntos distintos y colineales, se tiene que siempre podremos nombrarlos en un cierto orden A, B, C y D, de tal manera que A-B-C-D.*

**Prueba** Con respecto a la propiedad (S1) hacemos notar que la colinealidad de los puntos está incluida en la definición de Interposición.
Probemos (S2). Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos.
Como $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CA}$, $AC = CA$, y la suma de los números reales es conmutativa, tenemos que $BA + BC = AC$ es equivalente a $BC + BA = CA$. Así, por la definición

de Interposición, *A*-*B*-*C* es equivalente a *C*-*B*-*A*.
Las pruebas de las otras tres propiedades ((S3), (S4) y (S5)) requieren, en nuestra teoría, del Postulado de la Regla. Con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles que pueden hacerla fatigante para el estudiante promedio de este curso, dejaremos la prueba de estos resultados para el Apéndice A, al cual remitimos al lector más exigente.

■

La propiedad (S2) se puede interpretar diciendo que, *el estar entre dos puntos de una recta no depende de la* ***orientación*** *de la recta*⟨21⟩. La propiedad (S4) se podrá interpretar, después de tener la definición de segmento, diciendo que *todo segmento se puede cortar* (la parte (a)) *o extender* (la parte (b)).

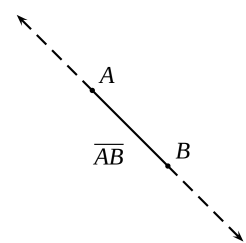
Note que, por (S2), el ordenamiento *A*-*B*-*C*-*D* es el mismo que *D*-*C*-*B*-*A*.

**(6)** *¿Podría cumplirse la segunda condición de la definición de Interposición, y no cumplirse la tercera?*
**(7)** *¿Con cuántos puntos podemos contar en el plano?*
**(8)** *¿Con cuántas rectas podemos contar en el plano?*

A partir de la relación de Interposición, definimos las dos figuras geométricas que destacaremos en cualquier recta: ***segmento*** y ***rayo***⟨22⟩.

**Definición 1.3 (Segmento)**
*Un* ***segmento*** *es una figura geométrica formada por*⟨23⟩*:*

∗ *dos puntos distintos, a los que llamaremos* ***extremos*** *del segmento;* ***y***
∗ *todos los puntos que están entre ellos dos, a los que llamaremos* ***puntos interiores*** *del segmento.*




Es claro que dos puntos distintos cualesquiera *determinan* un solo segmento; pero, si hablamos de un segmento *s*, ¿cómo podemos asegurar que éste determina un par único de puntos como sus extremos? En otras palabras, ¿cuántos pares de puntos pueden ser extremos de un segmento?; o, más llanamente, ***¿cuántos extremos tiene un segmento?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos su prueba para el Apéndice A.

**Proposición 1.3 (Igualdad de segmentos)**
*Dos segmentos son iguales si, y sólo si, sus extremos coinciden.*

Si denotamos los extremos de un segmento con los símbolos $A$ y $B$, denotaremos al segmento por $\overline{AB}$ y lo llamaremos ***el segmento** A B*, ***el segmento que une a** A **y** B*, o ***que une a** A **con** B*, o ***que va desde** A **hasta** B*.

Note que el segmento $\overline{AB}$ está contenido en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Siempre que hablemos de un segmento $\overline{AB}$, asumiremos que $A \neq B$.

**(9)** *¿Podremos asegurar que existen segmentos?*
**(10)** *¿Será verdad que $\overline{AB} = \overline{BA}$?*
**(11)** *¿Podremos asegurar que $\overline{AB} \neq \overleftrightarrow{AB}$ o que $\overline{AB} \neq \{A, B\}$?*

Ahora, como sólo un par de puntos pueden ser extremos de un segmento, podemos formular las siguientes definiciones.

**Definición 1.4 (Punto medio)**
*Un punto es **punto medio** de un segmento, si:*

**(a)** *es punto interior del segmento; y*
**(b)** *equidista*⟨24⟩ *de sus extremos.*

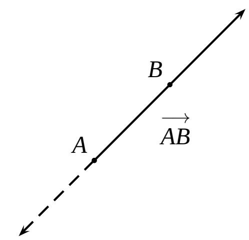
*Por punto medio diremos a veces **punto que biseca**⟨25⟩; **bisecar un segmento** significará contener su punto medio.*

**Definición 1.5 (Longitud de un segmento)**
*La **longitud** de un segmento es la distancia entre sus extremos.*

**Definición 1.6 (Congruencia⟨26⟩ de segmentos)**
*Dos segmentos son **congruentes**, si tienen la misma longitud.*
*Si denotamos los segmentos con los símbolos $s_1$ y $s_2$, el hecho de que ellos sean congruentes lo denotaremos por $s_1 \cong s_2$; y el hecho de que no sean congruentes por $s_1 \ncong s_2$.*

Para exponer juntas las propiedades esenciales de la congruencia de segmentos (proposición 1.5), definimos ahora los rayos.

**Definición 1.7 (Rayo)**
*Un **rayo** es una figura geométrica formada por:*




* *un punto, que llamaremos **origen** o **extremo** del rayo;*
* *otro punto distinto del anterior, del que diremos que **establece la dirección**⟨27⟩ del rayo;*
* *todos los puntos que están del mismo lado, del origen, que el que establece la dirección.*

Es claro que, dos puntos distintos cualesquiera no determinan un rayo: depende de cuál de ellos se tome como origen. Por el otro lado, si hablamos de un rayo $r$, tampoco éste determina un único par de puntos, de los que uno es el origen y el otro el que establece la dirección; como veremos en el siguiente resultado, el único punto que podemos estar seguros que está determinado en un rayo es su origen. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos también su prueba para el Apéndice A.

**Proposición 1.4 (Igualdad de rayos)**
*Dos rayos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo origen y los puntos que establecen la dirección son iguales o están del mismo lado del origen común.*

Si denotamos al origen y al punto que establece la dirección de un rayo con los símbolos $A$ y $B$, respectivamente, denotaremos al rayo por $\overrightarrow{AB}$ y lo llamaremos ***el rayo*** $A\,B$, o ***el rayo de origen*** $A$ ***en la dirección de*** $B$, o ***el rayo que parte de*** $A$ ***en la dirección de*** $B$.

Note que el rayo $\overrightarrow{AB}$ es una figura geométrica formada por:

* el segmento $\overline{AB}$; ***y***
* todos los puntos $C$ tales que $A$-$B$-$C$.

Note también que el rayo $\overrightarrow{AB}$ está contenido en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Siempre que hablemos de un rayo $\overrightarrow{AB}$, asumiremos que $A \neq B$.

**(12)** *¿Podremos asegurar que existen rayos?*
**(13)** *¿Será verdad que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$?*
**(14)** *¿Podremos asegurar que $\overrightarrow{AB} \neq \overline{AB}$, o que $\overrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AB}$, o que $\overrightarrow{AB} \neq \{A, B\}$?*

Ahora estamos en capacidad de enunciar todas las propiedades esenciales de la congruencia de segmentos.

**Proposición 1.5 (Propiedades de la congruencia de segmentos)**

**(CS1)** *La congruencia de segmentos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los segmentos, es decir:*
(a) *todo segmento es congruente consigo mismo;*
(b) *si un segmento $s_1$ es congruente con un segmento $s_2$, entonces el segmento $s_2$ es también congruente con el segmento $s_1$; y*
(c) *si un segmento $s_1$ es congruente con un segmento $s_2$, y el segmento $s_2$ es congruente con un segmento $s_3$, entonces el segmento $s_1$ es también congruente con el segmento $s_3$.*

**(CS2)** *Dados seis puntos $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$ tales que $A$-$B$-$C$, $A'$-$B'$-$C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

**(CS3)** *Dados seis puntos $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$ tales que $A$-$B$-$C$, $A'$-$B'$-$C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, se tiene que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.*

**(CS4)** *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{CD}$, se tiene que existe un único punto $P$ en $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CP} \cong \overline{AB}$.*

**(CS5)** *Todo segmento tiene exactamente un punto medio.*

**Prueba (CS1)** Sean $A$ y $B$, $C$ y $D$, y $E$ y $F$, respectivamente, los extremos de tres segmentos $s_1$, $s_2$ y $s_3$.
(a) Como $AB = AB$, tendremos que $s_1 \cong s_1$.
(b) Supongamos que $s_1 \cong s_2$, es decir, que $AB = CD$. Como también $CD = AB$, tendremos que $s_2 \cong s_1$.
(c) Supongamos que $s_1 \cong s_2$ y que $s_2 \cong s_3$, es decir, que $AB = CD$ y que $CD = EF$. Como, en este caso, $AB = EF$, tendremos que $s_1 \cong s_3$.
**(CS2)** Sean $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$ seis puntos tales que $A$-$B$-$C$, $A'$-$B'$-$C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Como $BA + BC = AC$, $B'A' + B'C' = A'C'$, $AB = A'B'$ y $BC = B'C'$, es claro, al sustituir las dos últimas en la primera ecuación, que $AC = A'C'$; con lo que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
**(CS3)** Sean $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$ seis puntos tales que $A$-$B$-$C$, $A'$-$B'$-$C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Como $BA + BC = AC$, $B'A' + B'C' = A'C'$, $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$, es claro, al sustituir las dos últimas en la primera ecuación, que $BC = B'C'$; con lo que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Las pruebas de las otras dos propiedades ((CS4) y (CS5)) requieren, en nuestra teoría, del Postulado de la Regla. Con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles que pueden hacerla fatigante para el estudiante promedio de este curso, dejaremos la prueba de estos resultados para el Apéndice A, al cual remitimos al lector más exigente.

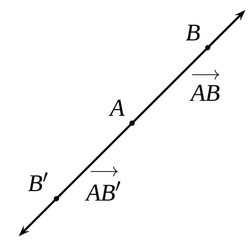
■

La propiedad (CS2) es frecuentemente denominada el *Teorema de la adición de segmentos*, y la propiedad (CS3), el *Teorema de la sustracción de segmentos*. La propiedad (CS4) es frecuentemente denominada el *Teorema de la construcción de segmentos*, ya que, efectivamente, permite construir en un rayo, un segmento a partir de otro.

**(15)** *¿Es lo mismo decir que dos segmentos son **iguales** y decir que son **congruentes**?*
**(16)** *¿Cómo construimos dos segmentos distintos y congruentes?*

Precisemos ahora la siguiente relación entre rayos, muy importante en el desarrollo de nuestra teoría.

**Definición 1.8 (Rayos opuestos)**
*Un rayo **es opuesto a** otro rayo, si:*
**(a)** *tienen el mismo origen;* ***y***
**(b)** *los puntos que establecen la dirección de cada uno de ellos están en lados opuestos del origen común.*
*De dos rayos, de los que uno es opuesto al otro, diremos que son **rayos opuestos**.*




La pregunta que surge naturalmente es ***¿cuántos rayos opuestos tiene un rayo?*** La siguiente proposición justifica lo que es la respuesta natural a esta interrogante.

**Proposición 1.6 (Existencia y unicidad del rayo opuesto)**
*Todo rayo tiene exactamente un rayo opuesto.*

**Prueba** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo.
(Existencia) Tomemos, por (S4), un punto $B'$ tal que $B'$-$A$-$B$. Es claro, por la definición de rayo opuesto, que el rayo $\overrightarrow{AB'}$ es opuesto al rayo $\overrightarrow{AB}$.
(Unicidad) Supongamos que $\overrightarrow{CD}$ es opuesto a $\overrightarrow{AB}$. Por definición de rayo opuesto, $C = A$, y $D$ y $B'$ son iguales o están del mismo lado de $A$ (pues cualquier ubicación de $B$ en $D$-$A$-$B'$ contradice lo supuesto). Así, por la proposición 1.4, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB'}$.

■

Cuando hablemos del rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{AB}$, estaremos hablando de un rayo $\overrightarrow{AB'}$, donde $B'$ es un punto tal que $B'$-$A$-$B$.

**(17)** *¿Serán los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ opuestos?*

Como es de esperar, *todo punto de una recta determina exactamente dos **sentidos** en ella*. Su justificación se encuentra en la siguiente proposición.

**Proposición 1.7**

**(a)** *Todo punto de una recta es origen de exactamente dos rayos opuestos en esa recta.*

**(b)** *Cualesquiera dos rayos opuestos tienen en común sólo su origen, y su unión es igual a la recta que los contiene.*

**Prueba (a)** Sea $m$ una recta y $A$ un punto en ella. Tomemos, por el Postulado 1, un punto $B$ en $m$ distinto de $A$. Tomemos, por (S4), un punto $B'$ tal que $B'$-$A$-$B$. Así, por la definición de rayo opuesto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$ son rayos opuestos contenidos en $m$ (pues cualquier punto de $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{AB'}$ es colineal con $A$ y $B$, o con $A$ y $B'$, que están en $m$) y con origen en $A$.
Sean $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC'}$ rayos opuestos contenidos en $m$ y con origen en $A$. Si $C = B$ tendremos, por la proposición 1.4, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; y, por la proposición 1.6, que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}$. Si $C \neq B$, entonces $A$, $B$ y $C$ son tres puntos distintos y colineales (por estar los tres en $m$). Por (S3) debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones: $A$-$B$-$C$, o $A$-$C$-$B$ o $C$-$A$-$B$. Si se cumple cualquiera de los dos primeros casos tendremos, por la proposición 1.4, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; y, por la proposición 1.6, que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}$. En el tercero de los casos tendremos, por la definición de rayo opuesto, que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos. Así, por la proposición 1.6, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'}$ y $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}$.
Dejaremos la prueba de la parte (b) para el Apéndice A, por las mismas razones expuestas en las proposiciones 1.3 y 1.4.

■

Hasta ahora hemos considerado sólo las condiciones bajo las cuales dos segmentos son congruentes. Para finalizar este capítulo estudiaremos las condiciones bajo las cuales podemos asegurar que dos segmentos no son congruentes y definiremos una nueva relación entre segmentos.

Partiremos de la siguiente pregunta: *¿bajo qué condiciones podemos asegurar que dos segmentos no son congruentes?* Como la congruencia entre segmentos ha sido especificada única y exclusivamente en términos de su longitud, podemos pensar, lícitamente, que la pregunta debiera responderse, también, en estos mismos términos. De hecho,

$$\overline{AB} \ncong \overline{CD} \text{ si, y sólo si, } AB \neq CD.$$

Ahora bien, gracias a la tricotomía del orden de los números reales, respondemos a la pregunta planteada así:

$$\overline{AB} \ncong \overline{CD} \text{ si, y sólo si, } AB < CD \text{ o } CD < AB.$$

Definamos entonces la siguiente relación entre segmentos.

**Definición 1.9 (Es más corto que)**
*El segmento $\overline{AB}$ **es más corto que** el segmento $\overline{CD}$, si $AB < CD$.*
*En algunos casos diremos que el segmento $\overline{AB}$ **es más pequeño que** el segmento $\overline{CD}$, o que **el segmento $\overline{CD}$ es más largo** (o **más grande**) **que el segmento $\overline{AB}$.***

Note que, gracias a la transitividad del orden de los números reales, tendremos que: si el segmento $\overline{AB}$ es más corto que el segmento $\overline{CD}$, y éste es más corto que el segmento $\overline{EF}$, entonces segmento $\overline{AB}$ es más corto que el segmento $\overline{EF}$.

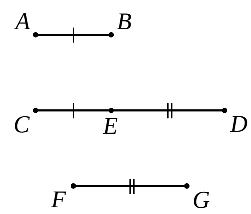
Con esta definición podemos dar una respuesta a la pregunta planteada en términos de la congruencia misma, prescindiendo de la distancia, por medio de la siguiente proposición.

**Proposición 1.8** *El segmento $\overline{AB}$ es más corto que el segmento $\overline{CD}$ si, y sólo si, existe un punto $E$ en el interior de $\overline{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.*

**Prueba** Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos.
Supongamos que el segmento $\overline{AB}$ es más corto que el segmento $\overline{CD}$. Tomemos, por (CS4), el punto $E$ de $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$. Sólo nos falta ver que $C$-$E$-$D$.
Por la definición de segmento, $E \neq C$; y, por el Postulado de la distancia, $E \neq D$ (pues $CE = AB < CD$). Ahora, por la definición de rayo y (S3), debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones: $C$-$D$-$E$ o $C$-$E$-$D$. Si acaso se cumpliera $C$-$D$-$E$ tendríamos, por la definición de Interposición, que $CD + DE = CE$; de donde $CD < CE$, contrario a la tricotomía del orden de los números reales. Por tanto, $C$-$E$-$D$.
Recíprocamente, supongamos que $E$ es un punto tal que $C$-$E$-$D$ y $\overline{CE} \cong \overline{AB}$. Por la definición de Interposición, $CE + ED = CD$; de donde $CE < CD$. Ahora, como $AB = CE$, tendremos, al sustituir, que $AB < CD$; de donde $\overline{AB}$ es más corto que $\overline{CD}$.

∎

Como puede verse en la representación adjunta, utilizaremos pequeños guiones para indicar, en un dibujo, que dos segmentos son congruentes. En este caso estamos indicando que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ son congruentes, así como los segmentos $\overline{ED}$ y $\overline{FG}$.



## Problemas del Capítulo 1

**1.1** **(a)** ¿Qué significa que un conjunto de puntos no es colineal?
**(b)** Si tres puntos no son colineales, ¿tendrán que ser distintos entre sí?

**1.2** Si $m_1$ y $m_2$ son dos rectas distintas, y $P$ y $Q$ son puntos que están en la intersección de $m_1$ y $m_2$, ¿pueden ser distintos $P$ y $Q$?

**1.3** Si $P$ y $Q$ son dos puntos distintos que están a la vez en las rectas $m_1$ y $m_2$, ¿pueden ser distintas $m_1$ y $m_2$?

**1.4** Si $C$ es un punto en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de $A$ y $B$, pruebe que:

**(a)** $A$, $B$ y $C$ son colineales.
**(b)** $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AB}$.
**(c)** $B$ está en $\overleftrightarrow{AC}$ y $A$ está en $\overleftrightarrow{BC}$.

**1.5** Si $A$, $B$ y $C$ son puntos no colineales, verifique que $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AC}$.

**1.6** Fijado un punto $A$, ¿cuántas rectas pasan por $A$?

**1.7** Fijados dos puntos distintos $A$ y $B$, ¿cuántas rectas contienen a $A$ y a $B$?

**1.8** Fijados tres puntos distintos $A$, $B$ y $C$, ¿cuántas rectas determinan?⟨28⟩

**1.9** Fijados cuatro puntos distintos $A$, $B$, $C$ y $D$, ¿cuántas rectas determinan?

**1.10** ¿A lo sumo cuántos puntos puede haber en la intersección de:

**(a)** tres rectas distintas?
**(b)** de cuatro rectas distintas?
**(c)** de cinco rectas distintas?
**(d)** de $n$ rectas distintas?
**(e)** de mil rectas distintas?

**1.11** ¿Puede ser cero la longitud de un segmento?

**1.12** ¿Será el siguiente enunciado una definición de punto medio?
*Un punto $C$ es punto medio de $\overline{AB}$, si $AC = BC$.*

**1.13** Fijados tres puntos $A$, $B$ y $C$ no colineales:

**(a)** ¿Cuántos segmentos determinan?
**(b)** ¿Cuántos rayos determinan?

**1.14** ¿Podemos asegurar que existen rectas que no se cortan?

**1.15** Fijado un punto $A$, ¿cuántos segmentos pasan por $A$ sin tener a $A$ como extremo?

**1.16** **(Teorema de la localización o ubicación de puntos)**
Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ y un número real positivo $x$:

**(a)** Pruebe que existe un punto $P$ en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.
**(b)** ¿Será $P$ único?

**1.17** Verifique que, si una recta está contenida en otra, entonces son iguales.⟨29⟩

**1.18** Verifique que, si dos rectas son distintas, entonces podemos tomar un punto en cada una de ellas que no está en la otra.

**1.19** Si dos rectas se intersectan en exactamente un punto, pruebe que son distintas.

**1.20** Dados tres puntos colineales $A$, $B$ y $C$, con $AB = 8$ y $BC = 14$:

**(a)** ¿Es posible determinar cuál está entre los otros dos?
**(b)** ¿Es posible determinar cuál no está entre los otros dos?
**(c)** ¿Es posible determinar $AC$?
**(d)** ¿De cuántas maneras es posible disponer los tres puntos en la recta que los contiene?
**(e)** Si $AC = 6$, ¿qué punto está entre los otros dos?

**1.21** Fijados cuatro puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ no colineales tres a tres (es decir, *tales que cualesquiera tres de ellos no son colineales*):

**(a)** ¿Cuántos segmentos determinan?
**(b)** ¿Cuántos rayos determinan?

**1.22** Fijados $n$ puntos no colineales tres a tres ($n \geqslant 5$):

**(a)** ¿cuántos segmentos determinan?
**(b)** ¿cuántos rayos determinan?

**1.23** Fijados 1000 puntos no colineales tres a tres:

**(a)** ¿cuántos segmentos determinan?
**(b)** ¿cuántos rayos determinan?

**1.24** Si $A$, $B$ y $C$ son tres puntos distintos de una recta tales que $AC + BC = AB$:

**(a)** ¿cuál es la intersección de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$?
**(b)** ¿cuál es la unión de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$?
**(c)** ¿cuál es la intersección de $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$?
**(d)** ¿cuál es la unión de $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$?

**1.25** Pruebe que dos rayos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo origen y el punto que establece la dirección de uno de los rayos se encuentra sobre el otro rayo.

**1.26** Si $C$ es un punto en $\overrightarrow{AB}$ distinto de $A$ y tal que $AC < AB$, pruebe que $A$-$C$-$B$.

**1.27** Si $C$ es un punto en $\overrightarrow{AB}$ distinto de $A$ y de $B$, pruebe que $A$ no está en $\overline{BC}$.

**1.28** ¿Cuál(es) de los siguientes enunciados es(son) una definición de rayo?

**(a)** *El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de todos los puntos $C$ de $\overleftrightarrow{AB}$ tales que $A$ no está entre $C$ y $B$*, es decir, *el conjunto de los puntos $C$ de $\overleftrightarrow{AB}$ que no están separados de $B$ por $A$*.
**(b)** *Es el conjunto de puntos formado por un segmento y, fijado uno de sus extremos, todos los que son separados de ese extremo por el otro extremo*.
**(c)** *Es el conjunto de puntos formado por un segmento y todos los que no son separados por uno de los extremos, del otro extremo*.

**1.29** Fijado un punto $A$:

**(a)** ¿cuántos segmentos tienen un extremo en $A$?
**(b)** ¿cuántos rayos tienen origen en $A$?
**(c)** ¿cuántos rayos pasan por $A$ sin tener a $A$ como origen?

**1.30** Fijados dos puntos distintos $A$ y $B$:

**(a)** ¿Cuántos segmentos distintos tienen por extremos a $A$ y $B$?
**(b)** ¿Cuántos segmentos distintos contienen a $A$ y $B$ sin que sean sus extremos?
**(c)** ¿Cuántos rayos distintos tienen origen en uno de ellos y contienen al otro?
**(d)** ¿Cuántos rayos distintos contienen a $A$ y a $B$ sin que sean su origen?

**1.31** Si $A$ es un punto de una recta $m$, y $x$ es un número real positivo, ¿cuántos puntos de $m$ están a distancia $x$ de $A$?

**1.32** Consideremos un conjunto formado por tres objetos distintos $\mathscr{P} = \{A, B, C\}$. En este conjunto, consideremos las rectas formadas por los pares de elementos de $\mathscr{P}$, es decir, $\mathscr{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. ¿Cuáles de los postulados no se cumplen, si nuestro plano se redujera a este conjunto?

**1.33** Dados dos puntos distintos $A$ y $B$, pruebe que la unión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ es la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

**1.34** Dados dos puntos distintos $A$ y $B$, pruebe que la intersección de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ es el segmento $\overline{AB}$.

**1.35** Si $A$, $B$ y $C$ son tres puntos distintos de una recta tales que $AC + BC = AB$, ¿cuál es la intersección de $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{BA}$?

**1.36** Si $X$ es un punto de $\overrightarrow{AB}$, y $Q$ y $R$ son puntos tales que $Q$-$X$-$R$, pruebe que $Q$ o $R$ está en $\overrightarrow{AB}$.

# Comentarios del Capítulo 1

⟨1⟩ Este hecho justifica el calificativo **plana** que hemos adosado al nombre de la Geometría que estamos estudiando.

⟨2⟩ ***Pitágoras*** definió **punto** como una *mónada (unidad) con posición*; Platón lo definió como *el principio de una recta*.
***Euclides***, en sus *Elementos*, intentó hacer una definición de algunos de estos términos, mediante:

| | |
|---|---|
| **punto:** | *lo que tiene posición pero no dimensión.* |
| | *lo que no tiene partes.* |
| **recta:** | *lo que tiene sólo una dimensión.* |
| **plano:** | *lo que tiene dos dimensiones.* |

Otros intentos que se podrían realizar son, por ejemplo:

| | |
|---|---|
| **recta:** | *lo que no tiene partes curvas.* |
| | *lo que se extiende sin cambiar la dirección.* |
| | *longitud sin anchura.* |
| | *objeto unidimensional que se extiende indefinidamente en dos direcciones.* |
| | *aquello cuya parte media cubre el final.* |
| | *el flujo de un punto.* |
| **plano:** | *objeto llano bidimensional sin fronteras.* |

Es fácil constatar que estas definiciones dan lugar a descripciones circulares. Las condiciones que definen a el ***plano***, un ***punto*** o a una ***recta***, y que hacen que éstas sean subconjuntos distinguidos del plano, no pueden ser precisadas en una definición; pero, sin embargo, insistimos, aceptaremos que satisfacen algunas propiedades que harán que se parezcan a sus representaciones.

⟨3⟩ No enunciaremos todos los postulados de inmediato, como quizás debería hacerse formalmente, sino que los expondremos a lo largo de todo el estudio. La idea que nos guía en esta disposición es la de ir mostrando las consecuencias que se pueden obtener de cada grupo de postulados, para hacer clara su dependencia respecto a éstos.

⟨4⟩ No significa esto que la Geometría trata de la superficie que usemos como representación; tratará solamente del conjunto $\mathscr{P}$. Lo mismo decimos de las otras dos representaciones.
Como características especiales de la representación de nuestra idea intuitiva de un ***punto*** podemos señalar, a primera vista, el hecho de que son, en el sentido estricto de la palabra, *atómicos* (es decir, que no tiene partes, no es un agregado de otros elementos); respecto a la representación de una ***recta*** podemos señalar que son *delgadas*, que no se *doblan*, y que *se extienden indefinidamente*, ya que las flechas indican precisamente que la recta no termina donde termina su dibujo. Pero esto no significa, en absoluto, que las anteriores características sean *ipso facto* propiedades del punto y de la recta; a través de los postulados y las proposiciones de la teoría trataremos de que queden establecidas de manera formal dichas características especiales.
Aclaramos pues, que no debemos confundir las representaciones (los dibujos) con las ideas intuitivas que tenemos de los objetos con los que trabajaremos, puesto que nadie podrá jamás hacer un dibujo preciso ni de un punto, ni de una recta, sino solamente aproximaciones más o menos fieles.
Los modelos que nosotros mismos usaremos, sólo nos servirán de instrumentos de ayuda a nuestra

intuición. Para resumir: *en un dibujo no debemos asumir nada que no sea expresamente dado como hipótesis o que hayamos deducido previamente.*
Por otro lado, dibujar la representación de un objeto equivale a destacar los puntos que corresponden a la figura que estamos representando, no a crear sus puntos: los puntos están todos dados de antemano en la superficie que estamos tomando como representación del plano.

⟨5⟩ De una vez decimos que, una ***figura geométrica*** no es otra cosa que un subconjunto no vacío cualquiera del plano, es decir, cualquier conjunto no vacío de puntos. Después de expuesto nuestro primer postulado estaremos asegurando, junto con lo que aquí estamos haciendo notar, que las rectas son figuras geométricas.

⟨6⟩ Una observación indispensable sobre la manera de expresarnos es la que corresponde a la expresión *se encuentra sobre*. Estrictamente hablando deberíamos decir *pertenece a*, *está contenido en*, *es subconjunto de* o *es parte de*. Sin embargo, estas expresiones, así como las expresiones *pasa por*, *pasa a través de*, *está sobre*, *está en*, etc., serán usadas como sinónimas y, por esta razón, indistintamente. Del mismo modo, cuando decimos *fuera de*, *externo a*, *no pasa por*, estamos diciendo que *no pertenece a*, *no está contenido en*, etc.
Note que lo que hacemos, según este comentario, es una transcripción de los términos de la Teoría de conjuntos (que para nosotros, en este momento, es como una herramienta) a los términos clásicos de la Geometría.

⟨7⟩ En términos no muy precisos se podría decir: *las rectas no tienen menos de una dimensión*.

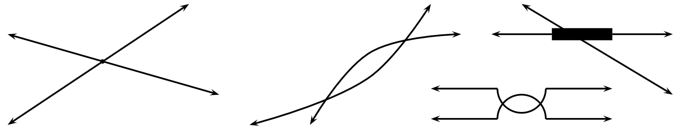
⟨8⟩ En términos no muy precisos se podría decir: *el plano no tiene menos de dos dimensiones*.

⟨9⟩ Queremos decir con el término *determinar*, que no necesitamos ninguna otra condición adicional para tener definida una recta, que dos puntos distintos.

⟨10⟩ Hacemos la aclaratoria de que “=” indicará, siempre que lo usemos entre figuras geométricas, que los términos son iguales como conjuntos, es decir, que contienen exactamente los mismos puntos. En consecuencia, “$\neq$” indicará que los términos son distintos como conjuntos, es decir, que hay al menos un punto en uno de ellos que no está en el otro.

⟨11⟩ Aclaramos que cuando decimos que dos figuras geométricas *se intersectan*, *se cortan*, *se cruzan*, estamos diciendo que su intersección como conjuntos es no vacía (es decir, que contiene al menos un punto) o, lo que es lo mismo, los conjuntos tienen al menos un punto común; y cuando decimos que dos figuras geométricas *no se intersectan*, *no se cortan*, *no se cruzan*, queremos decir que su intersección como conjuntos es vacía (es decir, que no contiene ningún punto) o, lo que es lo mismo, los conjuntos no tienen ningún punto en común.

⟨12⟩ Decimos *delgadez* para indicar que las rectas son *delgadas* en el sentido de que, cualquiera sea la manera en que se conciba la *dimensión* de un punto, no son más gruesas que esta dimensión. Decimos *rectitud* para indicar que las rectas no se doblan, es decir, que puede suceder, en el encuentro de dos rectas, sólo lo que se ilustra en el lado izquierdo, y no en las otras de las siguientes representaciones:



⟨13⟩Por cierto, son esas dos propiedades las que justifican el calificativo **métrica** que hemos adosado al nombre de la Geometría que estamos estudiando.

⟨14⟩Ordinariamente se usan diferentes ***unidades de medida*** para medir distancias entre puntos, obteniendo así diferentes ***escalas***. La distancia entre puntos dependerá entonces de la escala escogida. El Postulado de la distancia **no** fija una unidad de medida. Pero debe quedar claro que los resultados que nosotros obtengamos en nuestra teoría no pueden depender de la unidad de medida escogida. Basta, para ello, que seamos consistentes en la elección de una escala, cualquiera que sea, en el sentido de que *no estará permitido cambiar la escala durante el desarrollo de una prueba, o de la solución de algún problema, en la que intervenga el uso de la distancia entre puntos.*

⟨15⟩Este postulado no es parte de la Geometría euclidiana; más bien es el producto de la revisión de ésta, hecha de manera brillante y exhaustiva en el siglo XIX. Gracias a este postulado enjaezamos definitivamente la Aritmética a la Geometría, obteniendo algo así como lo que se podría llamar una *aritmetización de la Geometría*.
Lo delicado de introducir este postulado al principio de la exposición de la Geometría es que podríamos muy fácilmente deslizarnos hacia el estudio de ésta como si fuera **Geometría analítica cartesiana**, ya que con poco más tendremos a mano un sistema de coordenadas cartesianas al que podremos referir todo lo que estudiemos; y éste no es ciertamente el espíritu de la exposición clásica de la Geometría, que podría de esa manera ser pensada como parte del Álgebra o del Cálculo. Para evitar esto trataremos de prescindir de él en lo posible, refiriéndonos más bien a sus consecuencias fundamentales, que son precisamente las propiedades que destacaremos con los nombres (S1)-(S5) en la proposición 1.2, y (CS1)-(CS5) en la proposición 1.5.
Por otro lado, y sin querer dar una explicación detallada en este punto, este postulado es el único que nos da garantía de que las rectas no tienen huecos, sino que son continuas, tal como acostumbramos a trazarlas.

⟨16⟩Queremos decir con el término *biunívoca* que a cada punto de la recta corresponde un único número real, y que a cada número real corresponde un único punto de la recta.

⟨17⟩El lector podrá darse cuenta de que, con este postulado, no haría falta introducir el *Postulado de la distancia* (sacrificando de este modo la independencia entre los axiomas de la teoría y aumentando innecesariamente el número de ellos), ya que a partir de éste podemos asignar directamente un número real no negativo a cada par de puntos. Hemos decidido introducir aparte el *Postulado de la distancia* sólo para mostrar que las definiciones de ***Interposición***, ***segmento*** y ***rayo*** (y, por tanto, las de ángulo, triángulo, cuadrilátero y polígono en general) no necesitan de un axioma tan fuerte como el de la Regla, sino que basta con muchísimo menos, a saber: una asignación como la del Postulado de la distancia que no está sujeta a ninguna condición adicional.

⟨18⟩Esta parte del postulado se obtiene como consecuencia inmediata de la parte (b).(i), pero su demostración requeriría hacer una consideración aparte del concepto de función y, en particular, de función biyectiva, que en esta oportunidad nos ahorraremos agregándola como parte del postulado.

⟨19⟩La relación de Separación de puntos de una recta fue utilizada por Euclides en sus *Elementos*, sin mencionarla aparte, ni definirla, ni hacer observación alguna ni análisis de ella.

⟨20⟩Para recordarlas sólo basta con observar que son las únicas que se obtienen al eliminar una de las letras en *A-B-C-D*.

⟨21⟩ Sin ninguna precisión respecto al término ***orientación***, ateniéndonos sólo a la idea intuitiva que tenemos de éste.

⟨22⟩ Notará el lector que expondremos las definiciones de ***segmento*** y ***rayo*** de una manera poco usual, pero que a nuestro parecer describen la manera en que se dibujan sus representaciones. Dicha manera tiene la ventaja de que podremos referirnos a los segmentos y los rayos sin necesidad de nombrar los puntos característicos de estas figuras geométricas, y hablar, por ejemplo, del segmento $s$ o del rayo $r$ en cualquier parte de nuestro discurso; cosa que no podríamos hacer si los definimos de la manera más común en los textos de Geometría, ya que, en ese caso, sólo tenemos licencia para hablar, por ejemplo, del segmento $\overline{AB}$ o del rayo $\overrightarrow{AB}$, obligados a mencionar los puntos $A$ y $B$. Por supuesto, el precio que debemos pagar por adoptar este punto de vista es que, si bien la definición de segmento resulta bastante sintética, la de rayo se extiende un poco, por ser una figura geométrica más compleja; pero, en todo caso, por su secuencia descriptiva, no resulta tan difícil de comprender y memorizar.

⟨23⟩ De aquí en adelante, a lo largo de todo el texto, entenderemos que la expresión ***una figura geométrica formada por*** significa que estamos hablando del conjunto de puntos que se obtiene por la unión de todos los conjuntos cuyos elementos son los objetos que se enumeran inmediatamente.

⟨24⟩ Esto quiere decir que ***está a la misma distancia de***.

⟨25⟩ Esto quiere decir que ***divide en dos partes de la misma magnitud***.

⟨26⟩ La palabra ***congruencia*** fue introducida en la Geometría por David Hilbert (1862-1943).

⟨27⟩ En verdad, no sólo establece ***la dirección***, sino también ***el sentido***; pero, por razones de economía en la denominación del punto, sólo diremos que *establece la dirección*.

⟨28⟩ Para hacer conteos precisos, y no utilizar los dibujos que representan los objetos que tenemos que contar, recordaremos las fórmulas de ***Variaciones*** y ***Combinaciones***, y sus conceptos:
Cuando, de $m$ objetos, tenemos que contar las posibles escogencias de $n$ de ellos en un cierto orden, es decir, cuando el orden en que se hace la selección de los $n$ objetos es relevante, tendremos ***Variaciones de** m **tomados** n **a** n* ($n \leqslant m$), que representaremos mediante $V_{m,n}$. La fórmula para este conteo es:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

(esto corresponde a contar las posibles funciones inyectivas que podemos definir desde un conjunto de $n$ elementos, en un conjunto de $m$ elementos).
Cuando, de $m$ objetos, tenemos que contar las posibles escogencias de $n$ de ellos sin tomar en cuenta el orden, es decir, cuando el orden en que se hace la selección de los $n$ objetos es irrelevante, tendremos ***Combinaciones de** m **tomados** n **a** n* ($n \leqslant m$), que representaremos mediante $C_{m,n}$. La fórmula para este conteo es:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

(esto corresponde a contar los subconjuntos de $n$ elementos, en un conjunto de $m$ elementos).

⟨29⟩ Esto significa que, entre rectas, las nociones de ***contención*** e ***igualdad*** coinciden.

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 1

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 1.1 al 1.16; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 1.1 al 1.14 y de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 1.15 al 1.16.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 1.17 al 1.33; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 1.17 al 1.27, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 1.28 al 1.32, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 1.33.

Creemos que los ejercicios del 1.34 al 1.36 son sólo para los estudiantes más aventajados.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**1.10:** Ya contados los que corresponden a $m$ rectas distintas ¿a lo sumo en cuántos puntos cortará la recta número $m+1$ a las $m$ anteriores? Verifique que este cálculo corresponde a la fórmula $\sum_{k=1}^{n-1} k$ y, así, al número $\frac{n(n-1)}{2}$.

**1.35:** Use el ejercicio anterior, verificando que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

La palabra *Geometría* es de origen griego: $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$. Está compuesta de dos palabras: $\gamma\tilde{\eta}$ (*ge*) cuyo significado primero es *tierra, globo terráqueo*, pero que también llegó a significar *Mundo, Universo*; y $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ (*metría*), derivada del verbo $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\varepsilon}\omega$ (*metreo*) que significa *medir*.

Así las cosas, la palabra *Geometría* vendrá a significar *todo lo relacionado con la medición de la tierra, del Mundo, del Universo*, tanto la acción misma de medirlo, como el resultado de la medición.

Hablamos entonces, en la metáfora escondida de la palabra *Geometría*, de *cualquier conocimiento que intente asignarle número a las cosas*, es decir, de la *Ciencia* en general tal como se concibe en el mundo occidental.

Es claro que actualmente se usa el término *Geometría* para designar un conjunto de conocimientos cuyo origen está íntimamente relacionado con lo que podríamos denotar con el nombre de *Agrimensura*, ya que es precisamente en las experiencias de los Egipcios, por la delimitación frecuente de las tierras en las riberas del Nilo, donde se encuentra el embrión; experiencias que les dieron un tipo de conocimiento que no cabe duda que aplicaron excelentemente en la construcción, *v. g.* las Pirámides y la Gran Esfinge.

Pero, para los griegos, decir *Geometría* era lo mismo que decir *Matemática*. La responsabilidad de este hecho recae principalmente en ***Pitágoras***, fuente primordial de las pretensiones de la ciencia actual, por su expresión: *todo en el Universo es número*; un poco más tarde, en su discípulo indirecto ***Platón***, quien en la entrada de su Academia hizo estampar un letrero que decía: *nadie, que no haya comprendido la Geometría, entre*; y finalmente, en un discípulo indirecto de éste, ***Euclides***, por su célebre libro *Elementos*.

Pitágoras
(580 Samos - 475 a. C. Siracusa)

Platón
(427 Atenas - 347 a. C. Atenas)

Euclides de Alejandría
(325 - 265 a. C. Alejandría)

La razón de ser de este hecho es que la *Geometría* fue el primer conjunto de conocimientos en Occidente que se estructuró axiomático-deductivamente, de tal manera que se tuvo como el modelo de la *Matemática* toda. Por esta razón vemos a los principales autores de conocimientos teóricos en la historia del mundo occidental ajustando sus exposiciones a la forma que tiene la Geometría.

En todas sus obras ***René Descartes*** lo hace expreso; vemos a un filósofo como Baruch Spinoza (1632-1677), discípulo de Descartes, dándole título a una de sus más renombradas obras: *etica more geometrico demonstrata* (*Etica demostrada a la manera geométrica*); y vemos al paladín de los físicos modernos, Sir Isaac Newton (04/06/1642 Woolsthorpe - 31/03/1727 Londres), presentando el conjunto de los conocimientos de la Física a la manera Cartesiana de la Geometría, en su obra *Principia* (Principios).

René Descartes
(Renatus Cartesius)
(1596 La Haya - 1650 Estocolmo)

Muy probablemente como huella de su paso por *El Liceo*[1], Alejandro Magno (356-323 a. C.) tuvo como designio reunir y mantener en una isla del territorio

[1]Fundado por Aristóteles (384-322 a. C.) en el año 335 a. C., sede de la llamada *Escuela Peripatética*.

egipcio frente a la desembocadura del Nilo[2], a los hombres más sabios del mundo conocido para que intercambiaran sus conocimientos e hicieran posible su comunicación a todo el que quisiera adquirirlos. Se dio así origen a lo que podríamos llamar hoy en día un centro de estudios superiores, conocido como *El Museo*[3], y no superado por ningún otro hasta hoy.

Entre esos sabios se encontraba ***Euclides***. Como sucede por lo general, es su obra *Elementos* lo que lo hace perdurar en la historia, pues acerca de su persona no conocemos sino pequeñas anécdotas relatadas por Proclo (410-485 d. C.), miembro de *La Academia* fundada por Platón en el año 387 a. C. Euclides, muy probablemente estudiante de la Academia, recopiló y organizó de una manera excepcional todos los conocimientos que se encontraban dispersos (algunos de los cuales databan de varios siglos ya en su tiempo) respecto a lo que hoy llamaríamos Geometría, en su obra de trece libros-capítulos.


Euclides de Alejandría
(325 - 265 a. C. Alejandría)

Sabemos por Proclo que recopiló muchos de los teoremas demostrados por Eudoxo (408-355 a. C. Cnidos) y perfeccionó otros de Teeteto (417-369 a. C. Atenas), ambos miembros de la Academia. Sabemos que vivió en la época del Ptolomeo I, y que respondió a éste mismo, al preguntarle si había algún camino a la Geometría más corto que el de los *Elementos*, que en verdad no había ningún camino ***real*** a la Geometría.

Euclides escribió muchas otras obras, algunas de ellas perdidas en la historia, de las que sólo tenemos referencia por otros escritos (entre las que más se lamenta la pérdida se encuentra un *Tratado sobre Cónicas*), y otras que aún conservamos, como son: *Los Datos, La División de las Figuras, Los Fenómenos* y *La óptica*.

En cuanto a los *Elementos*, los seis primeros libros están dedicados a Triángulos, Rectángulos, Círculos, Polígonos, Proporción y Semejanza, respectivamente; los cuatro siguientes están dedicados a la Aritmética, donde se prueban cosas tan notables como la infinitud de los números primos y la irracionalidad del número $\sqrt{2}$; en el decimoprimero introduce la Geometría del espacio; en el decimosegundo estudia Pirámides, Conos y Cilindros; y, finalmente, en el

[2]Que en su honor llevó el nombre de Alejandría, pues él mismo la fundó en el año 332 a. C.

[3]Fundado por Ptolomeo I Sóter en el año 290 a. C. Éste logró establecer su gobierno en la región egipcia del Imperio Griego después del gran trabajo que suscitó la muerte de Alejandro.

decimotercero diserta sobre los cinco sólidos regulares de Platón (Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro y el Icosaedro). La primera edición impresa de las obras de Euclides, que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín.

Se puede decir que Euclides estaba más preocupado por la manera de organizar el conocimiento para que pueda ser comunicado, que por la investigación de nuevos conocimientos; apoyaríamos esta afirmación en el hecho de que no hay registro de ningún conocimiento nuevo de su parte, pero, sin ninguna duda, se destaca por la forma en que expone el conocimiento. Según parece, éste no fue el primer texto que trata de temas geométricos; hubo otros antes, de los que tenemos sólo referencias y que no soportaron el paso del tiempo. Pero podemos decir que es el primero en el que todo ese conocimiento se organizó de manera sistemática, engendrando de este modo a la Matemática como técnica de organización de todo conocimiento que ha de ser enseñado, con su método hoy llamado axiomático-deductivo. Su desdén por el aspecto práctico y utilitario del conocimiento, que muchas veces deja a la zaga el carácter formativo del mismo, queda registrado en una anécdota recogida por Estobaecio según la cual respondió a uno de sus estudiantes que le preguntaba por la utilidad de aprender lo que le enseñaba, ordenando a un esclavo que le diera unas monedas para que pueda tener alguna ganancia de lo que aprendía.

Hay que destacar el hecho de que, hasta entrado el siglo XIX, todo el que estudiaba Geometría lo hacía por el texto de Euclides. Trátese de imaginar la influencia que pudo haber tenido este texto, que se conservó como el único en su campo durante más de veinte siglos; termina siendo el tratado más antiguo existente sobre las matemáticas. Además, todo el conocimiento llamado científico y filosófico ha tomado como modelo de su exposición precisamente el empleado por Euclides en los *Elementos*.

Bajo la luz del actual estado en que se encuentran las Matemáticas, el desarrollo de la Geometría realizado por Euclides tenía algunas fallas: el conjunto de los postulados sobre el que éste desplegó la teoría era incompleto, en el sentido de que era insuficiente para la deducción de todos los teoremas; no se respeta el rigor en el desarrollo de los razonamientos, ya que en muchas ocasiones se apela a la autoevidencia de algunas afirmaciones, o a las características patentes en las representaciones, que no permite la Matemática sino como punto de apoyo para la formulación de una conjetura, pero no como razón definitiva; son utilizados algunos conceptos que no se han explicado claramente, como el de Interposición de puntos de una recta, así como las definiciones de punto, recta y plano.

La construcción de la Geometría hecha por Euclides se basó en diez axiomas, separados en dos grupos: cinco de ellos clasificados como *nociones comunes*, y cinco postulados propiamente dichos. Pero la diferencia entre estas dos categorías no es muy clara. Las nociones comunes se parecen a lo que cualquier persona podría aceptar como cierto: *las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí, si se adicionan iguales a iguales se obtienen resultados iguales, si se substraen iguales a iguales se obtienen resultados iguales, las cosas que coinciden con otras son iguales unas a otras*, y *el todo es mayor que cualquiera de sus partes*; mientras que los postulados eran considerados como hipótesis propias de la Geometría: *se puede trazar una recta por cualesquiera dos puntos, una recta se puede continuar indefinidamente, se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y cualquier radio, todos los ángulos rectos son iguales* y el quinto postulado es el controversial Postulado de las paralelas del cual hablaremos más adelante.

No está claro, por la manera en que lo usa, si era única la recta que se trazaba entre dos puntos. Luego, la necesidad de expresar el segundo de los postulados hace pensar que lo que llamaba recta era en verdad un segmento. Asumió, sin hacerlo de manera expresa, que un tal prolongamiento se podía hacer de una única manera en cada extremidad de la recta, de modo que dos rectas distintas no pueden tener un segmento en común. De hecho utilizó muchos otros supuestos que no estaban expresados entre las nociones comunes ni en los postulados, lo cual puede ser visto como un grave defecto de los *Elementos*.

Haciendo un examen detallado del Libro I de los Elementos, puede separarse en tres partes: la primera, constituida por las veintiséis primeras proposiciones, trata exclusivamente de la teoría elemental de los triángulos; la segunda consta de ocho proposiciones referentes al tema de las paralelas; el resto lo dedica al tema de las áreas, culminando con una prueba del Teorema de Pitágoras y su recíproco en la proposición 48.

Ahora bien, todas estas fallas, principalmente la que tenía que ver con el Postulado de las paralelas, fueron remediadas por el matemático alemán ***David Hilbert*** con su reconstrucción de la Geometría de Euclides, en su libro *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la Geometría*) de 1899, realizada sobre la base de veintiún axiomas y seis tipos de relaciones entre los objetos geométricos, que acabó la batalla del quinto postulado.

David Hilbert
(23/06/1862 Königsberg - 14/02/1943 Göttingen)

Dicho sea de paso, al culminar el siglo XIX, exactamente en el año 1900, Hilbert dejó planteados veintitrés problemas que debían ocupar el interés de las matemáticas del siglo XX, algunos de ellos todavía sin resolver ya entrado el siglo XXI. Con esto dejó el germen de las subsiguientes investigaciones sobre la coherencia fundamental de las matemáticas, que culminó con los trabajos del lógico norteamericano Kurt Gödel (28/04/1906 Brün - 14/07/1978 Princeton) en 1931, el cual probó de una vez para siempre que era imposible establecer de manera absoluta.

La exposición de la Geometría que nosotros realizamos está basada en una propuesta hecha por ***George David Birkhoff*** en 1941, considerado uno de los matemáticos más hábiles y fecundos de su generación (sus obras están recopiladas en tres volúmenes grandes). Una de las directrices de este conjunto de postulados es la de introducir desde el principio el concepto de medida (tanto de segmentos como de ángulos), describiendo los métodos que todo el mundo emplea (una regla y un transportador). Esto no se le hubiera podido ocurrir a nadie antes del último tercio del siglo XIX, época en la que se dio en las matemáticas un giro Copernicano, por el que la Aritmética se independizó de la Geometría, ya que hasta ese tiempo era la Geometría la que servía de fundamento a la Aritmética.

George David Birkhoff (21/03/1884 Overisel - 12/11/1944 Cambridge)

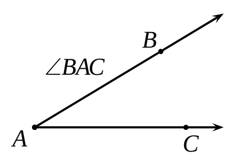
# Capítulo 2

# Separación del plano: ángulos

Descritas ya suficientemente las rectas por sí mismas, describiremos ahora algunos de los subconjuntos principales del plano, aparte de los segmentos y los rayos, a que dan lugar: *ángulos* y *semiplanos*.

Sólo con la definición de *rayo* estamos en capacidad de presentar una de las figuras geométricas más usada y poco conocida con rigurosidad⟨1⟩.

**Definición 2.1 (Ángulo)**
*Un **ángulo** es una figura geométrica formada por dos rayos no colineales⟨2⟩ que tienen el mismo origen.*
*De un ángulo llamaremos: a los rayos, **los lados**; y al origen común, **el vértice**.*




Note que la condición de no colinealidad de los lados de un ángulo evita que un ángulo se reduzca a un rayo o a una recta⟨3⟩.

Por otro lado, es claro que dos rayos no colineales con el mismo origen *determinan* un solo ángulo; pero, si hablamos de un ángulo $\alpha$, ¿cómo podemos asegurar que éste determina un par único de rayos no colineales con el mismo origen? En otras palabras, ¿cuántos pares de rayos pueden ser lados de un ángulo?; o, más llanamente, ***¿cuántos lados tiene un ángulo?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos su prueba para el Apéndice A.

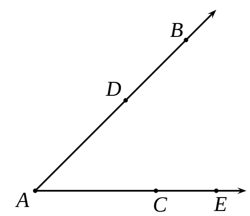
**Proposición 2.1 (Igualdad de ángulos)**
*Dos ángulos son iguales si, y sólo si, cada lado del uno es igual a un lado del otro.*

Si denotamos los lados de un ángulo con los símbolos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, denotaremos al ángulo por $\angle BAC$ (o $\angle CAB$; siempre con el vértice entre los puntos que establecen las direcciones de los lados). Si los lados de un ángulo están previamente determinados, y su vértice es $A$, denotaremos el ángulo mediante $\angle A$.

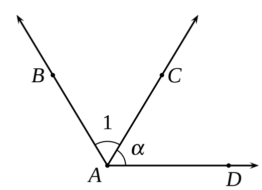
En todo ángulo $\angle BAC$ asumiremos que $A, B$ y $C$ no son colineales.

**Observación 2.1**

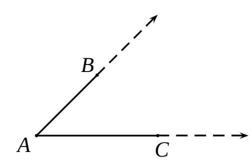
**(a)** *Tal y como los hemos definido, los ángulos no están orientados, como se usa en* ***Trigonometría****; en la definición dada, no importa qué lado se nombra primero*[4]*. Además, gracias a las proposiciones 1.4 y 2.1, no importa qué punto se nombra sobre cada uno de los lados del ángulo. Así, por ejemplo, el ángulo en la figura puede denotarse por $\angle BAC$, $\angle BAE$, $\angle DAC$, $\angle DAE$, $\angle EAD$, $\angle EAB$, y así sucesivamente.*



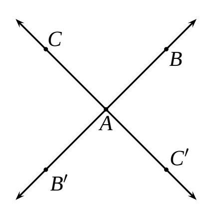

**(b)** *En muchas ocasiones, por la necesidad de diferenciar un ángulo de otros, dibujaremos un arco entre los lados del ángulo que nos interesa; e inclusive escribiremos símbolos que nos permitan simplificar la notación. Así, por ejemplo, en la figura, $\angle 1$ y $\angle BAC$ representan el mismo ángulo; $\angle\alpha$ y $\angle CAD$ también representan el mismo ángulo.*




**(c)** *Note que los lados de un ángulo son rayos y no segmentos; pero, del mismo modo que un segmento determina una recta sin ser recta, o determina un par de rayos sin ser rayo, así mismo un par de segmentos no colineales con un extremo común determinan un ángulo, sin formar ellos mismos un ángulo*[5]*.*




**(d)** *Note además que dos rectas distintas que se cortan, digamos en el punto $A$, forman exactamente cuatro ángulos con vértice en $A$. Para verlo tomemos, por la proposición 1.7, los dos rayos opuestos con origen en $A$ en cada una de las rectas: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$ en una, y $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC'}$ en la otra. Todos los pares de rayos no colineales con origen en $A$ formarán los ángulos $\angle BAC$, $\angle CAB'$, $\angle B'AC'$ y $\angle C'AB$.*



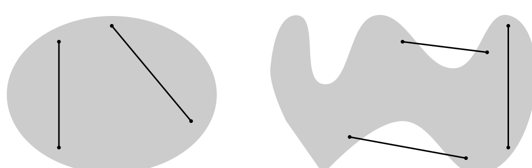

**(1)** *¿Podremos asegurar que existen ángulos?*

Así como asignamos a cada par de puntos del plano un número real no negativo (la distancia entre ellos), postularemos la asignación de un número real positivo a cada ángulo (*la medida del ángulo*), de tal manera que se cumpla todo lo que nos guía en el uso de un transportador. Pero, para poder expresar todas las condiciones de esa *medición de ángulos* de una sola vez, necesitamos algunos conceptos que dependen de una propiedad esencial que tiene el plano y que postularemos previamente. Con el propósito de expresar sintéticamente dicho postulado, introducimos la siguiente definición.

**Definición 2.2 (Convexo⟨6⟩)**
*Un conjunto de puntos es* ***convexo****, si contiene los segmentos que unen a cualesquiera dos de sus puntos distintos.*

En otras palabras, un conjunto de puntos $\mathscr{C}$ es convexo si, dados dos puntos distintos $A$ y $B$ en $\mathscr{C}$, el segmento $\overline{AB}$ está contenido en $\mathscr{C}$.

Una ilustración gráfica de un conjunto convexo, y de uno que no lo es, se puede hacer como sigue:



**(2)** *¿Qué significa que un conjunto de puntos no es convexo?*
**(3)** *¿Podremos asegurar que un punto es convexo?*
**(4)** *¿Podremos asegurar que una recta es convexa?*
**(5)** *¿Podremos asegurar que el plano es convexo?*

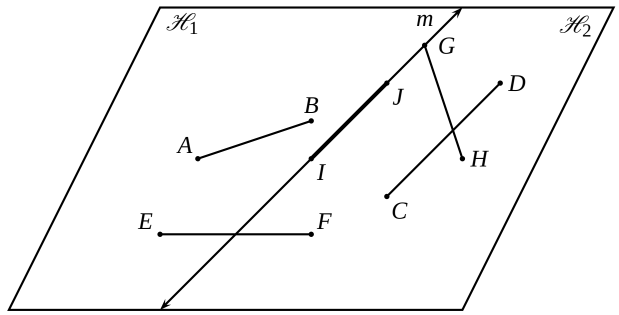
**Postulado 4 (Separación del plano)**
*Dada una recta $m$, el conjunto de los puntos que no están en $m$ es la unión de dos conjuntos $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ que tienen las siguientes propiedades:*

**(a)** *$\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ son convexos, **y***
**(b)** *si $A$ está en $\mathscr{H}_1$ y $B$ está en $\mathscr{H}_2$, entonces $\overline{AB}$ intersecta a $m$.*

*A $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ los llamaremos* ***lados*** *de (o* ***semiplanos*** *determinados por) $m$, y diremos que* ***uno es el opuesto del otro****, o simplemente que* ***son opuestos****; a $m$ la llamaremos* ***borde*** *(****frontera*** *o* ***arista****) de cada uno de sus lados.*

Como $\mathscr{H}_1$ es parte de los puntos que no están en $m$, es claro que no tiene ningún punto en común con $m$; y lo mismo podemos decir de $\mathscr{H}_2$. Por esta razón podemos asegurar que, si un punto está en $m$ y otro está en uno de sus lados, entonces son distintos.

Una representación aproximada de la separación del plano por una recta $m$ se muestra en la figura⟨7⟩. Note que $A$ y $B$ están en $\mathscr{H}_1$, y por eso $\overline{AB}$ no corta la recta $m$; $C$ y $D$ están en $\mathscr{H}_2$, y por eso $\overline{CD}$ no corta la recta $m$; $E$ está en $\mathscr{H}_1$ y $F$ está en $\mathscr{H}_2$, y por eso $\overline{EF}$ corta la recta $m$.




La siguiente observación es crucial en el desarrollo de nuestra teoría, ya que reúne los aspectos más importantes de la separación del plano por una recta.

**Observación 2.2**

**(a)** *Si dos puntos están en lados opuestos de una recta $m$, entonces $\overline{AB}$ cortará a $m$ en uno de sus puntos interiores (ya que $A$ y $B$ no están en $m$).*

**(b)** *Si el segmento determinado por dos puntos distintos corta una recta $m$, siempre se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones, que referiremos a la figura anterior: o uno solo de los extremos del segmento está en $m$ (en cuyo caso ese extremo es el punto de corte, como $\overline{GH}$); o ambos extremos del segmento están en $m$ (en cuyo caso el segmento está contenido en $m$, como $\overline{IJ}$); o ninguno de los dos extremos está en $m$ (en cuyo caso, gracias a la convexidad de los lados de una recta, los extremos del segmento están en lados opuestos de $m$, como $\overline{EF}$).*

**(c)** *Tanto $\mathscr{H}_1$ como $\mathscr{H}_2$ tienen al menos dos puntos distintos.*
*(Tomemos, por el Postulado 1, $C$ en $m$ y $A$ que no está en $m$; tomemos, por (S4) y el Postulado de la recta, $B$ en $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $A$-$C$-$B$, y $D$ y $E$ tales que $A$-$D$-$C$ y $C$-$E$-$B$. Por la definición de segmento, $C$ no está en $\overline{AD}$; así, por el corolario 1.1.1, $\overline{AD}$ no corta a $m$ y, por la parte anterior, $A$ y $D$ están en el mismo lado de $m$. Por los mismos argumentos, $B$ y $E$ también están en el mismo lado de $m$. Como $A$-$C$-$B$ tendremos, por la parte anterior, que $A$ y $B$ están en lados opuestos de $m$. Por tanto, si $A$ está en uno de los semiplanos, digamos en $\mathscr{H}_1$, entonces $D$ está en $\mathscr{H}_1$, y $B$ y $E$ están en $\mathscr{H}_2$).*

**(d)** *$\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ no tienen puntos comunes.*
*(Supongamos que $A$ está en $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$. Tomemos, por la parte anterior, $B$ distinto de $A$ en $\mathscr{H}_1$. Así, $\overline{AB}$ no corta a $m$, por la convexidad de $\mathscr{H}_1$, y $\overline{AB}$*

*corta a m, por estar A en* $\mathscr{H}_1$ *y B en* $\mathscr{H}_2$*; lo cual es una contradicción).*
*Por esta razón podemos asegurar que, si dos puntos se encuentran en lados opuestos de una recta, tienen que ser distintos.*

**(e)** *Tal como está enunciado el Postulado de separación del plano, no hay ninguna condición que nos prohíba intercambiar los papeles de* $\mathscr{H}_1$ *y* $\mathscr{H}_2$*, es decir, que nos permita decidir cuál de los lados de m es* $\mathscr{H}_1$ *y cuál* $\mathscr{H}_2$*. Sin embargo, si fijamos en cuál de los semiplanos está un punto cualquiera P, digamos en* $\mathscr{H}_1$*, tendremos determinados en términos de P, tanto a* $\mathscr{H}_1$ *como* $\mathscr{H}_2$*. Para justificarlo consideremos los siguientes dos conjuntos;*

$\mathscr{H}_{\mathrm{P}}$ : *el conjunto formado por P mismo y todos aquellos puntos Q tales que* $\overline{PQ}$ *no intersecta a m;*

$\mathscr{H}'_{P}$ : *el conjunto formado por todos aquellos puntos Q tales que Q no está en m y* $\overline{PQ}$ *intersecta a m.*

*Así,* $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{\mathrm{P}}$ *(pues, R está en* $\mathscr{H}_1$ *si, y sólo si,* $R = P$ *o* $\overline{RP}$ *no intersecta a m; y esto sucede si, y sólo si, R está en* $\mathscr{H}_{\mathrm{P}}$*) y* $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H}'_{P}$ *(pues, R está en* $\mathscr{H}_2$ *si, y sólo si, R no está en m ni en* $\mathscr{H}_1$*; y esto sucede si, y sólo si, R no está en m y* $\overline{RP}$ *intersecta a m, es decir, R está en* $\mathscr{H}'_{P}$*).*

**(f)** *Es claro, a partir de la aclaratoria anterior, que toda recta tiene exactamente dos lados, pues: si tomamos un punto P que no está en m, serán iguales a* $\mathscr{H}_{\mathrm{P}}$ *los lados de m que contengan a P, y a* $\mathscr{H}'_{P}$ *los otros dos.*
*Por esta razón podemos usar el artículo determinado al hablar de* **los** *lados de m, o de* **el** *lado de m que contiene a un punto P.*

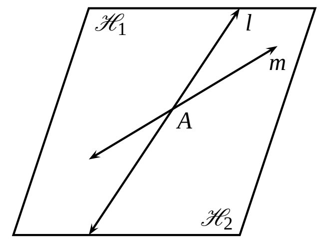
**(g)** *Note que decir que un punto, de un cierto conjunto de puntos, está en uno de los lados de una recta es equivalente a decir que ese conjunto no está contenido en la recta.*

**(6)** *¿Por qué podemos asegurar que, tanto* $\mathscr{H}_1$ *como* $\mathscr{H}_2$ *tienen al menos tres puntos no colineales?*
**(7)** *¿Por qué podemos asegurar que ambos tienen un número indefinido de puntos?*
**(8)** *Si tenemos un punto, ¿podremos asegurar que debe estar en* $\mathscr{H}_1$ *o en* $\mathscr{H}_2$*?*

A partir de esta propiedad que tiene el plano obtenemos los siguientes dos resultados. El primero de ellos establece que, tal como se espera, una recta no queda encerrada en uno solo de los semiplanos determinados por otra recta, si acaso toca el borde.

**Proposición 2.2 (Teorema de transversalidad)**
*Dos rectas se cortan y son distintas si, y sólo si, cada una de ellas contiene puntos en ambos lados de la otra.*

**Prueba** Sean $l$ y $m$ dos rectas.
($\Rightarrow$) Supongamos que $l$ y $m$ son distintas y se cortan en $A$. Tomemos, por la proposición 1.7, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$ los dos rayos opuestos en $m$ que tienen origen $A$. Como, por hipótesis, $B'$ y $B$ no están en $l$ (pues, de lo contrario, $l = m$) y, por la definición de rayos opuestos, $B'$-$A$-$B$, tendremos, por la observación 2.2.(b), que $B$ y $B'$ están en lados opuestos de $l$; con lo que $m$ tiene puntos en ambos lados de $l$.
Intercambiando los papeles de $l$ y $m$ se prueba que $l$ contiene puntos en ambos lados de $m$.



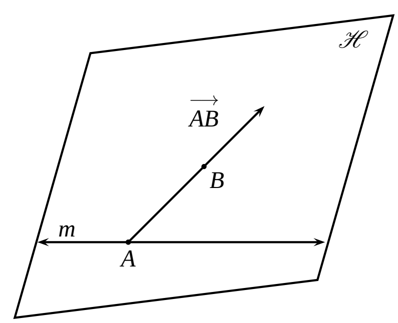

($\Leftarrow$) Supongamos que cada una de ellas tiene puntos en ambos lados de la otra. Es claro que son distintas. Consideremos dos puntos $B$ y $B'$ en $m$, a lados opuestos de $l$. Como, por el Postulado de separación del plano, $\overline{BB'}$ corta a $l$, y $\overline{BB'}$ está contenido en $m$, tendremos que $l$ y $m$ se cortan.

■

El segundo resultado nos garantiza que los rayos que comienzan en una recta que no los contiene, permanecen en uno solo de los lados de esa recta.

**Proposición 2.3** *Dado un rayo con origen en una recta, se tiene que uno de sus puntos está en uno de los lados de la recta si, y sólo si, todos sus puntos, excepto el origen, están en ese mismo lado de la recta.*

**Prueba** Sea $m$ una recta, $\mathscr{H}$ uno de sus lados, y $\overrightarrow{AB}$ un rayo tal que $A$ está en $m$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $B$ está en $\mathscr{H}$, y consideremos un punto $P$ en $\overrightarrow{AB}$ tal que $P \neq A$. Por el Postulado de la recta, $P$ no está en $m$, pues de lo contrario $B$ estaría en $m$. Por el corolario 1.1.1, $P$ no está en el lado opuesto de $\mathscr{H}$, pues, si no, $P$-$A$-$B$; contrario a la definición de rayo. Así, por el Postulado de separación del plano, $P$ está en $\mathscr{H}$.
($\Leftarrow$) Esta parte de la proposición es trivial.




■

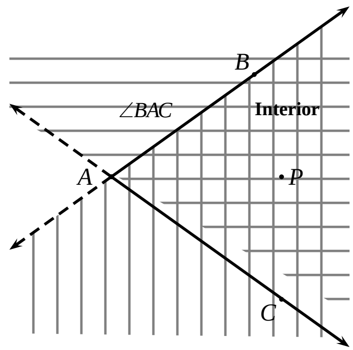
A partir del Postulado de separación del plano definimos dos conjuntos especiales asociados a un ángulo.

**Definición 2.3 (Interior y exterior de un ángulo)**
*El **interior** de un ángulo $\angle BAC$ es el conjunto de los puntos que se encuentran en la intersección del lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a $B$, y el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $C$.*
*En otras palabras, un punto $P$ está en el interior del ángulo $\angle BAC$, si:*

**(a)** *$P$ y $B$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.*

**(b)** *$P$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.*

*El **exterior** de un ángulo es el conjunto de los puntos que no están en el interior del ángulo, ni sobre el ángulo.*

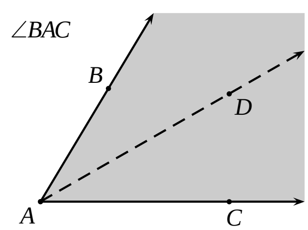



**(9)** *Dado un punto y un ángulo cualquiera, ¿podremos asegurar que ese punto debe estar en el interior o en el exterior del ángulo?*

A partir de la definición y la proposición anteriores obtenemos el siguiente resultado, muy útil en nuestra teoría.

**Corolario 2.3.1** *Dado un rayo con origen en el vértice de un ángulo, se tiene que uno de sus puntos está en el interior del ángulo si, y sólo si, todos sus puntos, excepto su origen, están en el interior del ángulo.*

**Prueba** Es claro a partir de la proposición 2.3, pues: el punto $D$ del rayo $\overrightarrow{AD}$ está en el interior del ángulo $\angle BAC$ si, y sólo si, $D$ está del lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a $B$ y del lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $C$; y esto sucede si, y sólo si, cualquiera de los puntos de $\overrightarrow{AD}$, excepto el origen, está en esos mismo lados, es decir, en el interior de $\angle BAC$.

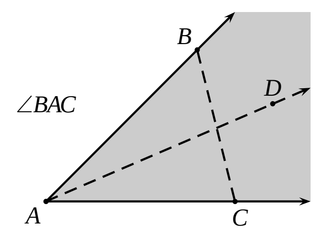



■

Aprovechando la presentación del concepto anterior se puede probar un teorema importante que permite saldar muchos detalles en las pruebas de los resultados de los capítulos posteriores: el *Teorema de la barra transversal*. Este teorema nos proporciona una **caracterización**[8] del interior de un ángulo que nos permitirá verificar que un punto está allí sin usar semiplanos. Como veremos, su enunciado es, aparentemente, muy sencillo, pero su prueba presenta algunas sutilezas; razón por la cual nos parece adecuado presentarla en detalle en el Apéndice B, donde además probaremos, previamente, algunos resultados, útiles por sí mismos, que nos llevarán a alcanzar ese fin.

**Teorema 2.1 (Teorema de la barra transversal)**

*Un punto D está en el interior de un ángulo* $\angle BAC$ *si, y sólo si,* $\overrightarrow{AD}$ *corta* $\overline{BC}$ *en uno de sus puntos interiores.*



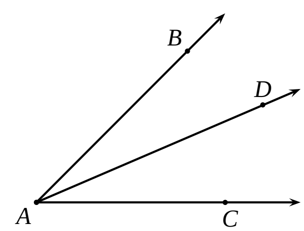

**(10)** *¿Podremos asegurar que el interior de un ángulo es no vacío?*
**(11)** *¿Podremos asegurar que el interior de un ángulo tiene un número indefinido de puntos?*

Con el propósito de expresar sintéticamente el siguiente postulado, que establecerá cómo mediremos los ángulos, introducimos las siguientes dos definiciones.

**Definición 2.4 (Ángulos adyacentes o consecutivos)**

*Un ángulo* ***es adyacente a*** *otro ángulo, si*
**(a)** *tienen un lado común,* ***y***
**(b)** *el punto que establece la dirección de ese lado está en el interior del ángulo formado por los otros dos lados.*

*De dos ángulos, de los que uno es adyacente al otro, diremos que son* ***ángulos adyacentes*** *o* ***consecutivos****; del ángulo formado por los dos lados no comunes diremos que es* ***el ángulo abarcante****.*

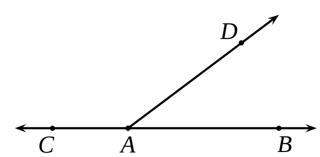



Note que, gracias al corolario 2.3.1, todo el lado común está, excepto su origen, en el interior del ángulo formado por los otros dos lados. Además, un ángulo $\angle BAD$ tiene un número indefinido de adyacentes: por lo menos uno por cada punto $C$ tal que $B$-$D$-$C$ o $D$-$B$-$C$.

**Definición 2.5 (Pareja lineal y par lineal)**

*Un ángulo* ***es pareja lineal de*** *otro ángulo, si*
**(a)** *tienen un lado común;* ***y***
**(b)** *los otros dos lados son rayos opuestos.*

*De dos ángulos, de los que uno es pareja lineal del otro, diremos que* ***forman un par lineal****.*



Note que todo ángulo tiene *exactamente dos parejas lineales*: uno que se forma al tomar el rayo opuesto de uno de los lados, y otro al tomar el rayo opuesto del otro lado.

**Postulado 5 (Del Transportador⟨9⟩)**

**(a) (Medida del ángulo)**
*Cada ángulo tiene asociado un único número real comprendido estrictamente entre 0 y 180, al que llamaremos* ***la medida del ángulo****.*
*Si denotamos a un ángulo con el símbolo* $\angle\alpha$*, denotaremos su medida por* $m\angle\alpha^{\langle 10\rangle}$*.*

**(b) (Construcción de ángulos)**
*Dado un rayo* $\overrightarrow{AB}$ *en el borde de un semiplano* $\mathscr{H}$*, y un número real r estrictamente comprendido entre 0 y 180, se tiene que existe exactamente un rayo* $\overrightarrow{AC}$*, con C en* $\mathscr{H}$*, tal que* $m\angle CAB = r$*.*

**(c) (Adición de ángulos)**
*La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es la medida del ángulo abarcante.*

**(d) (Del par lineal)**
*La suma de las medidas de los ángulos de un par lineal es 180.*

El Postulado de la medida del ángulo nos permite establecer la siguiente relación entre ángulos.

**Definición 2.6 (Congruencia de ángulos)**
*Dos ángulos son* ***congruentes****, si tienen la misma medida.*
*Si denotamos los ángulos con los símbolos* $\angle\alpha$ *y* $\angle\beta$*, el hecho de que ellos sean congruentes lo denotaremos por* $\angle\alpha \cong \angle\beta^{\langle 11\rangle}$*; y el hecho de que no sean congruentes por* $\angle\alpha \ncong \angle\beta$*.*

Las propiedades esenciales de la congruencia de ángulos están agrupadas en la siguiente proposición, cuya prueba dejamos a cargo del lector (ver el ejercicio 2.15).

**Proposición 2.4 (Propiedades de la congruencia de ángulos)**

**(CA1)** *La congruencia de ángulos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los ángulos, es decir:*
(a) *todo ángulo es congruente consigo mismo;*
(b) *si un ángulo* $\angle\alpha$ *es congruente con un ángulo* $\angle\beta$*, entonces el ángulo* $\angle\beta$ *es también congruente con el ángulo* $\angle\alpha$*; y*

(c) *si un ángulo $\angle\alpha$ es congruente con un ángulo $\angle\beta$, y el ángulo $\angle\beta$ es congruente con un ángulo $\angle\gamma$, entonces el ángulo $\angle\alpha$ es también congruente con el ángulo $\angle\gamma$.*

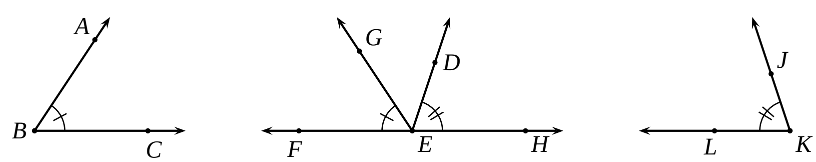
**(CA2)** *Dados un ángulo $\angle BAC$, un rayo $\overrightarrow{A'B'}$, y un semiplano $\mathscr{H}$ cuyo borde contiene a $\overrightarrow{A'B'}$, se tiene que existe exactamente un rayo $\overrightarrow{A'C'}$, con $C'$ en $\mathscr{H}$, tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

**(CA3)** *Dados dos ángulos $\angle BAC$ y $\angle B'A'C'$, y dos puntos $D$ y $D'$ en sus respectivos interiores, tales que $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$, se tiene que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

**(CA4)** *Dados dos ángulos $\angle BAC$ y $\angle B'A'C'$, y dos puntos $D$ y $D'$ en sus respectivos interiores, tales que $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, se tiene que $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.*

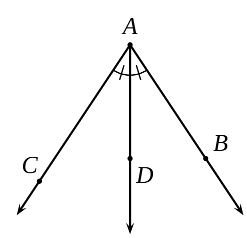
Las propiedades (CA2), (CA3) y (CA4) son comúnmente denominadas: *Teorema de la construcción de ángulos*, *Teorema de la adición de ángulos* y *Teorema de la sustracción de ángulos* , respectivamente.

Como puede verse en la representación adjunta, utilizaremos pequeños guiones para indicar, en un dibujo, que dos ángulos son congruentes. En este caso estamos indicando que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle GEF$ son congruentes, así como los ángulos $\angle DEH$ y $\angle JKL$.




Ahora definimos un rayo muy particular, asociado a un ángulo.

**Definición 2.7 (Bisector de un ángulo)**




***Bisector*** *de un ángulo es un rayo tal que:*

- *su origen es el vértice del ángulo;*
- *el punto que establece su dirección está en el interior del ángulo;* ***y***
- *los ángulos adyacentes que determina, junto con los lados del ángulo, son congruentes.*

*En algunos contextos diremos que este rayo* ***biseca*** *al ángulo;* ***bisecar un ángulo*** *significará contener, o estar contenido en, su bisector.*

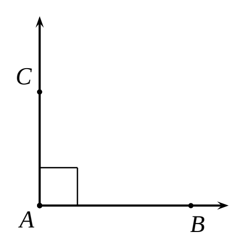
Una pregunta que surge naturalmente es: ***¿cuántos bisectores tiene un ángulo?*** La siguiente proposición establece lo que es la respuesta natural a esta interrogante. Como su prueba involucra técnicas semejantes a las de la prueba del Teorema de la barra transversal, y con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, la presentaremos en el Apéndice B.

**Proposición 2.5 (Existencia y unicidad del bisector)**
*Todo ángulo tiene exactamente un bisector.*

Después de introducir el siguiente postulado daremos una *caracterización* muy importante del bisector de un ángulo (ver la proposición 3.11).

El Postulado del Transportador nos permitirá, además, hacer una clasificación de los ángulos, tal y como veremos de inmediato.

**Definición 2.8 (Ángulo recto y perpendicularidad; ángulo oblicuo)**
*Un ángulo es* ***recto****, si su medida es 90.*
*Dos rayos, dos segmentos, dos rectas, o cualquier combinación entre ellos, son* ***perpendiculares****, si se cortan determinando un ángulo recto.*
*Si denotamos dos de esos objetos con los símbolos r y s, el hecho de que ellos sean perpendiculares lo denotaremos por $r \perp s$, y el hecho de que no sean perpendiculares por $r \not\perp s$.*
*Un ángulo es* ***oblicuo****, si no es recto.*




**(12)** *¿Podremos asegurar que existen ángulos rectos?*⟨12⟩
**(13)** *¿Será lo mismo decir que dos ángulos son* ***iguales*** *y decir que son* ***congruentes****?*
**(14)** *¿Cómo construimos dos ángulos distintos y congruentes?*

A continuación presentamos una *caracterización* de los ángulos rectos, que nos ofrecerá una definición de éstos completamente independiente del uso de la medida del ángulo.

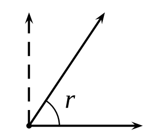
**Proposición 2.6** *Un ángulo es recto si, y sólo si, es congruente a cualquiera de sus dos parejas lineales.*

**Prueba** Consideremos un ángulo $\angle CAB$. Tomemos el rayo $\overrightarrow{AD}$ opuesto al rayo $\overrightarrow{AB}$. Es claro que el ángulo $\angle CAD$ es una pareja lineal del ángulo $\angle CAB$. Ahora bien, por el Postulado del par lineal, $m\angle CAB + m\angle CAD = 180$. De esta manera,

$\angle CAB$ es recto si, y sólo si, $\angle CAD$ es recto, es decir, si, y sólo si, $\angle CAB \cong \angle CAD$. Por tanto, un ángulo es recto si, y sólo si, es congruente a cualquiera de sus dos parejas lineales.

**Definición 2.9 (Ángulo agudo)**

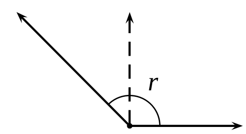
*Un ángulo es* ***agudo****, si su medida es menor que 90.*




$m\angle r < 90$

**Definición 2.10 (Ángulo obtuso)**

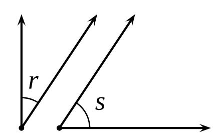
*Un ángulo es* ***obtuso****, si su medida es mayor que 90.*




$m\angle r > 90$

**Definición 2.11 (Ángulos complementarios)**

*Un ángulo* ***es complemento de*** *otro ángulo, si la suma de sus medidas es 90.*
*De dos ángulos, de los que uno es complemento del otro, diremos que son* ***ángulos complementarios****.*

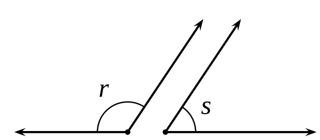



$m\angle r + m\angle s = 90$

**(15)** *¿Podremos asegurar que existen ángulos agudos?*
**(16)** *¿Podremos asegurar que existen ángulos obtusos?*
**(17)** *¿Podremos asegurar que existen ángulos complementarios?*
**(18)** *¿Será verdad que dos ángulos complementarios son agudos?*
**(19)** *¿Qué medida tendrán dos ángulos congruentes y complementarios?*

**Definición 2.12 (Ángulos suplementarios)**
*Un ángulo* ***es suplemento de*** *otro ángulo, si la suma de sus medidas es 180.*
*De dos ángulos, de los que uno es suplemento del otro, diremos que son* ***ángulos suplementarios****.*

El Postulado del par lineal nos asegura que, si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios; pero dos ángulos pueden ser suplementarios sin formar un par lineal, tal y como vemos en la representación.




$m\angle r + m\angle s = 180$

Por su sencillez, dejamos al lector la prueba del siguiente resultado (ver el ejercicio 2.16).

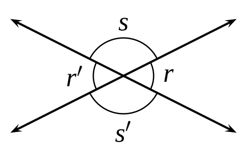
**Proposición 2.7**

**(a)** *Suplementos de ángulos congruentes, son congruentes.*
**(b)** *Complementos de ángulos congruentes, son congruentes.*

**(20)** *¿Será verdad que dos ángulos congruentes y suplementarios son rectos?*
**(21)** *¿Será verdad que, de dos ángulos suplementarios, uno es agudo y el otro obtuso?*

**Definición 2.13 (Ángulos opuestos por el vértice)**

*Un ángulo* ***es opuesto por el vértice a*** *otro ángulo, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.*
*De dos ángulos, de los que uno es opuesto por el vértice al otro, diremos que son* ***ángulos opuestos por el vértice****.*

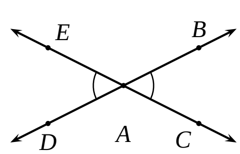



La observación 2.1.(d) nos da garantía de que existen ángulos opuestos por el vértice, al tomar cualesquiera dos rectas distintas que se cortan; los ángulos $\angle BAC$ y $\angle B'AC'$ son ángulos opuestos por el vértice, así como también los ángulos $\angle BAC'$ y $\angle B'AC$.

Las siguientes dos propiedades son muy útiles en el desarrollo de nuestra teoría.

**Proposición 2.8** *Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

**Prueba** Sean $\angle BAC$ y $\angle DAE$ ángulos opuestos por el vértice. Supongamos que $\overrightarrow{AD}$ es el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ y que $\overrightarrow{AE}$ es el rayo opuesto a $\overrightarrow{AC}$. Como $\angle BAC$ y $\angle DAE$ son parejas lineales de $\angle CAD$, tenemos, por el Postulado del par lineal, que $\angle BAC$ y $\angle DAE$ son suplementos de $\angle CAD$. Como, por (CA1), $\angle CAD \cong \angle CAD$, tendremos, por la proposición 2.7, que $\angle BAC \cong \angle DAE$.

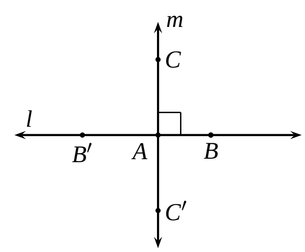



■

**Proposición 2.9** *Dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, los cuatro ángulos que se forman en el corte son rectos.*

**Prueba** Sean $l$ y $m$ dos rectas.

($\Rightarrow$) Supongamos que se cortan en $A$ formando un ángulo recto. Consideremos, por la observación 2.1.(d), los cuatro ángulos que se forman en el corte de $l$ y $m$: $\angle CAB$, $\angle BAC'$, $\angle C'AB'$ y $\angle B'AC$. Supongamos que $\angle CAB$ es recto. Como $\angle BAC'$ y $\angle B'AC$ son parejas lineales de $\angle CAB$, tenemos, por la proposición 2.6, que $\angle BAC'$ y $\angle B'AC$ son rectos. Como $\angle C'AB'$ es opuesto por el vértice de $\angle CAB$, tenemos, por la proposición 2.8, que $\angle C'AB'$ es recto. Así, los cuatro ángulos son rectos.



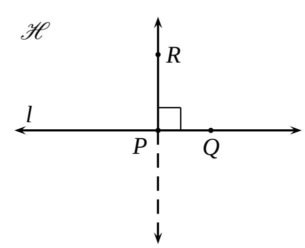

($\Leftarrow$) Esta parte de la proposición es trivial. ■

De la posibilidad de dibujar una recta perpendicular a una recta dada por un punto de ella, intuimos la verdad del siguiente resultado⟨13⟩.

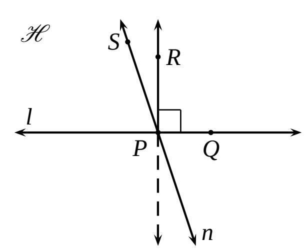
**Proposición 2.10 (Perpendicular a una recta por un punto de ella)** *Dada una recta y un punto en ella, se tiene que existe una única recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado.*

**Prueba** Sea $l$ una recta y $P$ un punto en $l$.

(Existencia) Tomemos, por el Postulado 1, un punto $Q$ en $l$ distinto de $P$, y llamemos, por el Postulado de separación del plano, $\mathscr{H}$ a cualquiera de los dos lados de $l$. Tomemos, por el Postulado de la construcción del ángulo, el único rayo $\overrightarrow{PR}$, con $R$ en $\mathscr{H}$, tal que $m\angle RPQ = 90$. Tomando $m = \overleftrightarrow{PR}$, tenemos que $m \perp l$ y $m$ pasa por $P$.



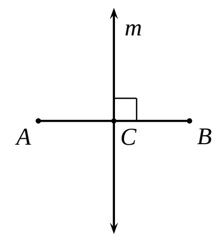

(Unicidad) Supongamos que $n$ es una perpendicular a $l$ en $P$. Tomemos, por el Teorema de transversalidad, un punto $S$ en $n$ tal que $S$ está en $\mathscr{H}$. Como, por la proposición 2.9, $m\angle SPQ = 90$, tendremos, por el Postulado de la construcción del ángulo, que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$; con lo que, por el Postulado de la recta y la proposición 1.4, $n = m$.




■

Gracias a la proposición anterior estamos en capacidad de definir una recta muy particular, asociada a un segmento.

**Definición 2.14 (Mediatriz de un segmento)**
*La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.*
*En algunos contextos diremos que la mediatriz **biseca** al segmento.*




Sabemos, por (CS5) y la proposición 2.10, que esta recta está unívocamente determinada; de tal manera que, cada vez que tengamos un segmento $\overline{AB}$, siempre podemos considerar sin ambigüedad su mediatriz, es decir, ***la*** recta $m$ perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio $C$.

Después de introducir el siguiente postulado daremos una *caracterización* muy importante de la mediatriz de un segmento (ver la proposición 3.5).

Hasta ahora hemos considerado sólo las condiciones bajo las cuales dos ángulos son congruentes. Para finalizar este capítulo estudiaremos las condiciones bajo las cuales podemos asegurar que dos ángulos no son congruentes y definiremos una nueva relación entre ángulos.

Partiremos de la siguiente pregunta: *¿bajo qué condiciones podemos asegurar que dos ángulos no son congruentes?* Como la congruencia entre ángulos ha sido especificada única y exclusivamente en términos de su medida, podemos pensar, lícitamente, que la pregunta debiera responderse, también, en estos mismos términos. De hecho,

$$\angle ABC \ncong \angle DEF \text{ si, y sólo si, } m\angle ABC \neq m\angle DEF,$$

Ahora bien, gracias a la tricotomía del orden de los números reales, respondemos a la pregunta planteada así:

$$\angle ABC \ncong \angle DEF \text{ si, y sólo si, } m\angle ABC < m\angle DEF \text{ o } m\angle DEF < m\angle ABC.$$

Definamos entonces la siguiente relación entre ángulos.

**Definición 2.15 (Es más pequeño que)**
*El ángulo $\angle ABC$ **es más pequeño que** el ángulo $\angle DEF$, si $m\angle ABC < m\angle DEF$.*
*En algunos casos diremos que el ángulo $\angle DEF$ **es más grande que** el ángulo $\angle ABC$.*

Note que los ángulos agudos son más pequeños que los rectos y éstos, a su vez, más pequeños que los obtusos.

Note también que, gracias a la transitividad del orden de los números reales, tendremos que: si el ángulo $\angle ABC$ es más pequeño que el ángulo $\angle DEF$, y éste es más pequeño que el ángulo $\angle GHI$, entonces ángulo $\angle ABC$ es más pequeño que el ángulo $\angle GHI$.

Con esta definición podemos dar una respuesta a la pregunta planteada en términos de la congruencia misma, prescindiendo de la medida de ángulos, por medio de la siguiente proposición[14]. Como su prueba involucra técnicas muy parecidas a las del Teorema de la barra transversal, exponemos su prueba en el Apéndice B.

**Proposición 2.11** *El ángulo $\angle ABC$ **es más pequeño que** el ángulo $\angle DEF$ si, y sólo si, existe un punto $G$ en el interior de $\angle DEF$ tal que $\angle GEF \cong \angle ABC$.*

# Problemas del Capítulo 2

**2.1** Si $P$ y $Q$ están en lados opuestos de la recta $m$, y $Q$ y $T$ también están en lados opuestos de $m$, verifique que $P$ y $T$ están en el mismo lado de $m$.

**2.2** Si $P$ y $Q$ están en lados opuestos de la recta $m$, y $Q$ y $T$ están en el mismo lado de $m$, verifique que $P$ y $T$ están en lados opuestos de $m$.

**2.3** Dado un segmento con un extremo en una recta, pruebe que uno de sus puntos está en uno de los lados de la recta si, y sólo si, todos sus puntos, excepto ese extremo, están en ese mismo lado de la recta.

**2.4** Pruebe que la intersección de dos conjuntos convexos es convexa.

**2.5** Pruebe que:

**(a)** el interior de un ángulo es convexo;
**(b)** el exterior de un ángulo no es convexo.

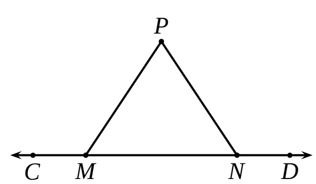
**2.6** Consideremos una recta $m$, y $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ los dos semiplanos en los que $m$ divide al plano.

**(a)** ¿Puede $\mathscr{H}_1$ ser lado de otra recta distinta de $m$?⟨15⟩
**(b)** ¿Es convexo el conjunto formado por $\mathscr{H}_1$ y $m$?

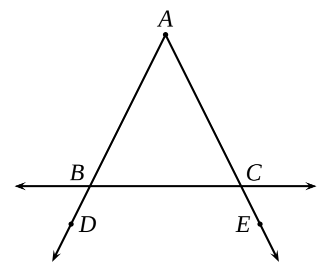
**2.7** Si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$; $D$ está en el interior de $\angle BAC$; $E$ es un punto exterior de $\angle BAC$ tal que $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$ y $C$ está en el interior de $\angle DAE$; entonces:

**(a)** nombre dos pares de ángulos complementarios;
**(b)** nombre un par de ángulos suplementarios;
**(c)** nombre dos pares de ángulos congruentes.

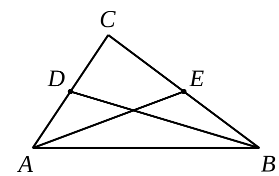
**2.8** Si $\angle PMN \cong \angle PNM$, pruebe que $\angle CMP \cong \angle DNP$.⟨16⟩



**2.9** Si $\angle DBC \cong \angle ECB$, pruebe que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

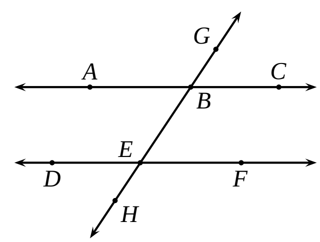



**2.10** Si $\angle BAC \cong \angle ABC$ y $\angle CAE \cong \angle CBD$, pruebe que $\angle EAB \cong \angle DBA$.

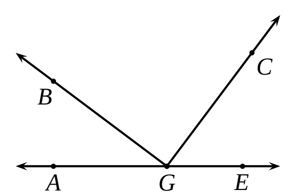



**2.11** Si $\angle GBC \cong \angle BEF$, pruebe que:

**(a)** $\angle ABG \cong \angle DEB \cong \angle FEH \cong \angle CBE$.
**(b)** $\angle ABE \cong \angle DEH \cong \angle BEF \cong \angle GBC$.
**(c)** $m\angle CBE + m\angle FEB = 180$.
**(d)** $m\angle ABE + m\angle DEB = 180$.
**(e)** $m\angle GBC + m\angle FEH = 180$.
**(f)** $m\angle ABG + m\angle DEH = 180$.




**2.12** Si $\overrightarrow{GA}$ es opuesto a $\overrightarrow{GE}$ y $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{GC}$, pruebe que $\angle AGB$ es complementario de $\angle EGC$.




**2.13** Sean $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$ cuatro puntos distintos, no colineales tres a tres (ver el ejercicio 1.21). Sea $m$ una recta que no pasa por ninguno de esos puntos. Si $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_3A_4}$ cortan a $m$:

**(a)** ¿cortará $\overline{A_1A_4}$ a $m$?
**(b)** ¿cortará $\overline{A_2A_3}$ a $m$?

**2.14** Si $A$-$M$-$C$, pruebe que $A$ y $C$ están en lados opuestos de cualquier recta que contiene a $M$ distinta de $\overleftrightarrow{AC}$.

**2.15** Pruebe las propiedades (CA1), (CA2), (CA3) y (CA4) de la proposición 2.4.

**2.16** Pruebe la proposición 2.7.

**2.17** Encuentre un ejemplo de dos conjuntos convexos, cuya unión no es convexa.

**2.18** **(a)** ¿Está el vértice de un ángulo en su interior?, ¿en su exterior?
**(b)** ¿Están los lados de un ángulo en su interior?, ¿en su exterior?
**(c)** ¿Es convexo un ángulo?

**2.19** Si dos rectas no se cortan, verifique que cada una de ellas debe estar contenida en uno solo de los lados de la otra (y así, las rectas tienen que ser distintas).

**2.20** Pruebe que los dos ángulos adyacentes que determina el bisector de un ángulo son agudos.

**2.21** Pruebe que los bisectores de dos ángulos que forman un par lineal son perpendiculares.

**2.22** **(a)** ¿Es convexo un conjunto formado por dos puntos distintos?
**(b)** ¿Es convexo el conjunto formado por una recta menos un punto?
**(c)** ¿Es convexo el conjunto formado por el plano menos un punto?
**(d)** ¿Es convexo el conjunto formado por el plano menos una recta?

**2.23** Si $A$-$M$-$C$, pruebe que $M$ y $A$ están del mismo lado de cualquier recta que contiene a $C$ distinta de $\overleftrightarrow{AC}$.

**2.24** Sean $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$ cuatro puntos distintos no colineales tres a tres. Si $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_3A_4}$ se cortan, pruebe que $A_2$ y $A_4$ del mismo lado de $\overleftrightarrow{A_1A_3}$.

**2.25** Sean $A$, $B$ y $M$ tres puntos tales que $A$-$M$-$B$. Si $D$ y $E$ son dos puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$ tales que $\angle EMB \cong \angle DMA$, pruebe que $D$, $M$ y $E$ son colineales (y, por tanto, $\angle EMB$ y $\angle DMA$ son opuestos por el vértice).

**2.26** Si $D$ es un punto en el interior de $\angle BAC$, pruebe que el rayo $\overrightarrow{AD'}$, opuesto al rayo $\overrightarrow{AD}$, excepto $A$, está en el interior del ángulo opuesto por el vértice a $\angle BAC$.

**2.27** Sean $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ que se cortan en $O$, de tal manera que $M$-$O$-$N$ y $P$-$O$-$Q$. Sean $S$ y $T$ dos puntos en el interior de $\angle QON$ tales que $\angle TOQ \cong \angle TON$ y $\angle SOQ \cong \angle SON$. Si $\overrightarrow{OR}$ biseca $\angle POM$, pruebe que $R$, $S$ y $T$ son colineales

**2.28** Verifique que:

**(a)** Todo segmento es convexo.
**(b)** ¿Es convexo el conjunto formado por un segmento menos un extremo?
**(c)** Todo rayo es convexo.
**(d)** ¿Es convexo el conjunto formado por un rayo menos su origen?

**2.29** ***(Semirrectas)***

**(a)** Verifique que, dado un punto $P$ en una recta $m$, el conjunto de los puntos de $m$ distintos de $P$ es la unión de dos conjuntos $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ tales que:
**(i)** $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ son convexos, y
**(ii)** si $A$ está en $\mathscr{S}_1$ y $B$ está en $\mathscr{S}_2$, entonces $A$-$P$-$B$.

A $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ los llamaremos las ***semirrectas*** de $m$ determinadas por $P$.
(Note la analogía entre esta afirmación y el Postulado de separación del plano).

**(b)** ¿Cuál es la diferencia entre un rayo y una semirrecta?

# Comentarios del Capítulo 2

⟨1⟩ Apoyamos esta afirmación en las revisiones que hemos hecho de los textos de Geometría de nuestro bachillerato que presentan alguna definición de ángulo. Ofreceremos dos ejemplos, de muchos que podemos mostrar (el subrayado es nuestro): Baldor, *Geometría plana y del espacio, y Trigonometría*, J. A., Cultural Venezolana S. A., 1967, página 22; "un ángulo es ***la abertura*** formada por dos semirrectas con un mismo origen ..."; Brett, E. y Suárez, W., *Actividades de matemática, Primero de Ciencias*, Corporación Marca S. A., 2001, página 97: "un ángulo es ***la porción del plano*** limitada por dos semirrectas ...".

⟨2⟩ A pesar de que abusamos un poco del término, entendemos por esto que los dos rayos no se encuentran a la vez sobre la misma recta.

⟨3⟩ En muchos textos de Geometría, la definición de ***ángulo*** que se presenta incluye la posibilidad de que una recta sea un ángulo y que un rayo sea también un ángulo. Nosotros somos del parecer de que estas tres figuras geométricas deberían conservarse en la teoría diferentes entre sí, y que no debería permitirse esa especie de degeneración de los ángulos en rectas o rayos. Esto traerá como consecuencia, más tarde, cuando midamos los ángulos, que no tendrá sentido hablar de ángulos "nulos" (los que miden cero, es decir, los rayos), así como tampoco de ángulos "llanos" (los que miden 180, es decir, las rectas); términos de los que tanto gustan algunos autores de textos de Geometría.

⟨4⟩ Los ángulos orientados son, en verdad, pares ordenados de rayos que tienen el mismo origen, pero este no es el tipo de ángulos con que nos tenemos que ver en Geometría.

⟨5⟩ Es muy importante que la observación que hacemos en este punto sea tomada en cuenta y sea retenida por el lector, ya que lo que decimos aquí nos permitirá luego hablar, sin incoherencias, de los ángulos de un triángulo.

⟨6⟩ El concepto de ***convexidad*** es mucho más importante de lo que puede parecer en el estudio que haremos de este tipo de conjuntos en el contexto de la Geometría, en la cual no haremos un estudio exhaustivo, pero que, sin embargo, incluye la mayor parte de los objetos que nos interesa estudiar. Este concepto aparece en muchas ramas de las Matemáticas, especialmente en la Topología.

⟨7⟩ Exageramos el grueso de uno de los segmentos para hacer más clara la representación; con el mismo propósito, enmarcamos también una parte del plano.

⟨8⟩ Una *caracterización* de un conjunto de puntos es el enunciado de una condición que:

**(a)** satisfacen todos los puntos del conjunto dado, y
**(b)** no es satisfecha por ningún otro punto del plano.

En otras palabras: una *caracterización* constituye una definición equivalente de aquel conjunto que se está caracterizando. Así, por ejemplo: el Teorema de la barra transversal es una caracterización del interior de un ángulo; y la proposición 2.6 es una caracterización de los ángulos rectos.

⟨9⟩ Este postulado tampoco es parte de la exposición clásica de la Geometría. Trataremos de prescindir de él en lo posible, refiriéndonos más bien a sus consecuencias fundamentales, que son precisamente las propiedades que destacaremos con los nombres (CA1)-(CA4) en la proposición 2.4.

⟨10⟩Este postulado fija como unidad de medida, en la medición de ángulos, **el grado** y no **el radián**, como a veces se usa. De igual modo, la unidad de medida podría quedar establecida por cualquier múltiplo de un grado o de un radián. Sin embargo, damos por sentado lo dicho en la Nota ⟨14⟩ del Capítulo 1.

⟨11⟩Note que hemos denotado la congruencia entre ángulos con el mismo símbolo con el que hemos denotado la congruencia entre segmentos. En esto no vemos posibilidad de ambigüedad, ya que siempre estarán bien identificados los objetos que relacionaremos.

⟨12⟩El Postulado del transportador nos permite dar una respuesta afirmativa a esta interrogante. La existencia de, por lo menos, un ángulo recto es crucial en el desarrollo de la Geometría, pues de ello depende que existan objetos que correspondan a una gran cantidad de conceptos, como por ejemplo: la respuesta de las dos preguntas siguientes; ángulos agudos, obtusos y complementarios; triángulos isósceles, escalenos, rectángulos, acutángulos y obtusángulos; perpendicular a una recta por un punto; mediatriz de un segmento; alturas de un triángulo, etc.
La ***Geometría sintética plana***, que se desarrolla sin postular la distancia entre puntos ni la medida de ángulos (es decir, la que sustituye la Regla por un Canto recto, y el Transportador por un Compás), tiene que esperar a introducir el siguiente postulado (el criterio LAL de congruencia de triángulos) para poder demostrar la existencia de un ángulo recto. Es esta manera de estudiar la Geometría la que hace uso exclusivo de las propiedades (CA1)-(CA4), así como de las propiedades (S1)-(S5) y (CS1)-(CS5), para obtener los resultados.
Por otro lado, la definición misma de ángulo recto en la Geometría sintética, que no usa un Transportador para medir ángulos y que, por tanto, no lo puede definir a partir de su medida como hemos hecho, es la que presentaremos en la siguiente proposición.

⟨13⟩Recordemos que el procedimiento para dibujar esta recta es el siguiente: con un compás se trazan dos puntos equidistantes del punto fijado en la recta dada y luego, con centro en esos dos puntos, se trazan dos círculos que se cortan. La recta buscada es la determinada por los dos puntos de corte entre los círculos (note que el procedimiento no depende de ninguna medición de distancias ni de ángulos, es decir, se ha realizado sólo con un canto recto y un compás).

⟨14⟩Notará el lector que en la prueba de esta proposición haremos uso del Postulado del transportador; pero la *caracterización* que se presenta en la siguiente proposición permitirá usar la relación ***es más pequeño que*** prescindiendo de dicho Postulado.

⟨15⟩Otra manera de hacer esta pregunta sería: ¿puede $\mathscr{H}_1$ tener otro borde distinto de $m$? La respuesta a esta pregunta se podría interpretar diciendo que: $m$ queda determinada por cualquiera de sus lados; o, cada semiplano tiene un único borde; o, si dos rectas tienen un lado común, entonces son iguales; o, si dos rectas tienen un lado común, entonces el otro lado también es común; o, cada lado de una recta tiene un único lado opuesto.

⟨16⟩Recordamos aquí lo dicho al final de la Nota ⟨4⟩ del Capítulo 1 sólo para decir que, en algunas ocasiones, debemos hacer algunas concesiones y asumir, en los dibujos, algunos datos evidentes (como colinealidad, el estar de un mismo lado de una recta, etc.), pero en ningún caso medidas de longitudes o de ángulos que se pueden hacer sobre el dibujo (pues esto traería el gravísimo inconveniente de que los datos dependerían de la precisión de los instrumentos que se usen, de la perspectiva desde la que se enfoque el dibujo, y del órgano de la vista de quien lo está analizando).
Por otro lado, todos los problemas cuyos datos están dados en un dibujo podrían enunciarse sin necesidad de usar un dibujo para exponer sus datos, tal como hicimos en el problema anterior; pero esa manera haría innecesariamente complicado su enunciado, tal como puede verse en el

ejercicio 2.25 o 2.27.
Tomaremos en cuenta lo dicho en esta nota para las situaciones futuras en las que los datos de un enunciado están dados en, o deben ser extraídos de, un dibujo.

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 2

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 2.1 al 2.6; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 2.1 al 2.2, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 2.3 al 2.5, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 2.6.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 2.7 al 2.27; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 2.7 al 2.20, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 2.21 al 2.23, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 2.24 al 2.27.

Creemos que los ejercicios del 2.28 al 2.29 son sólo para los estudiantes más aventajados.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**2.21:** verifique que el punto que establece la dirección del lado común, a los ángulos que forman el par lineal, está en el interior del ángulo que se quiere probar que es recto.

**2.24:** use el ejercicio 2.3.

**2.27:** use la unicidad del bisector.

**2.28:** este ejercicio requiere usar las técnicas desarrolladas en el Apéndice A; en particular las que se necesitan para resolver los ejercicios A.2 y A.3.

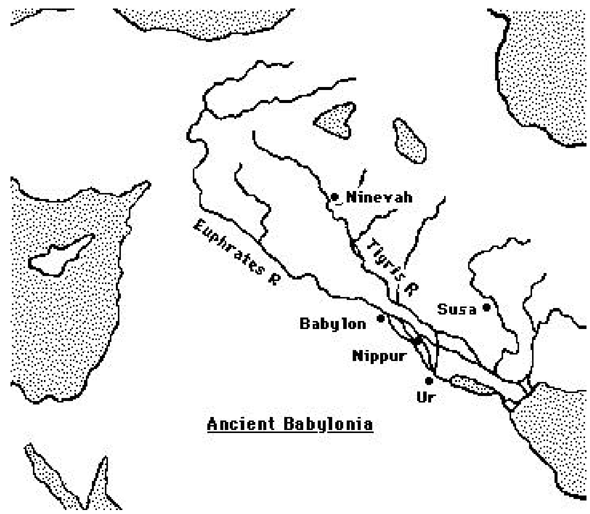
En los cuatro milenios anteriores a la era Cristiana florecieron en Mesopotamia[1] varias civilizaciones, generalmente conocidas como Civilización Babilonia[2]; sociedades ricas y complejas en su organización. La más antigua hasta ahora descubierta es la llamada civilización ***Sumeria***, que tuvo su máximo auge entre los años 3100 y 2000 a. C, ubicada hacia el sureste de la Mesopotamia[3].

[1]Una llanura muy fértil en la región del Asia Menor situada entre los ríos Tigris y Éufrates, hoy conocida como Iraq, 90 kilómetros al sur de Bagdad. Su nombre es de origen griego, proveniente de las palabras $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma$, que significa *entre, en medio de,* y $\pi o\tau\alpha\mu\acute{o}\varsigma$, que significa *río*.

[2]La palabra Babilonia, cuyo significado es *puerta de los dioses*, era a la vez el nombre de una ciudad y de todo un imperio, el cual floreció hacia el 1850 a. C.

[3]La otra civilización importante, con la que convivía la Sumeria, es llamada la civilización ***Acadia*** en el noroeste.

Los sumerios son reconocidos como los inventores de la escritura; invención relacionada, según algunos, con sus necesidades económicas. Su forma de escritura es llamada cuneiforme[4] (en forma de cuñas), y sus símbolos eran escritos en tabletas de arcilla húmeda y luego secadas al sol, de las cuales miles pueden ser leídas por nosotros aún hoy en día. El uso de la arcilla justifica, a los ojos de algunos, el que la escritura fuera cuneiforme, ya que era muy difícil hacer trazos curvos sobre la arcilla húmeda.




Los babilonios usaron el primer sistema de numeración, conocido por la humanidad, en el que los números valían según su posición, y no según su representación (como era el caso en las civilizaciones egipcia, griega y romana). Esta manera posicional de representar los números no fue adoptada por las civilizaciones importantes que siguieron a la babilónica, y fue redescubierta en época relativamente reciente por los hindúes, de quienes el mundo occidental la adoptó por intermedio de los árabes. Los sistemas de numeración egipcio, griego y romano no eran muy aptos para hacer cálculos aritméticos, pues con ellos resulta casi imposible hacer multiplicaciones y divisiones.

Ahora bien, mientras la base de numeración hindú era decimal o de base 10 (tal como se conserva aún entre nosotros), la base de numeración de los babilonios era sexagesimal o de base 60, es decir, tenían a mano sesenta dígitos distintos para representar todos los números; el cual tiene la gran ventaja de que la base de numeración tiene muchos más divisores propios que nuestro

[4]Su alfabeto era pictográfico y estaba compuesto por miles de símbolos que representaban cosas, al menos en un principio.

10, que tiene sólo dos (2 y 5). El único detalle a resaltar entre sus defectos era el hecho de que el manejo aritmético del cero no era claro; razón por la cual, quizás, no fue absorbido por las civilizaciones inmediatamente posteriores. Esta circunstancia tuvo como consecuencia que los números no tuvieran una representación única, pues 1 podía significar, según el contexto, 1, 60 o 3600, pues éstos se representarían, con el cero, mediante 1, 10 y 100, respectivamente.

Uno de los reflejos del uso del sistema sexagesimal de numeración es su forma de división del tiempo, que ha perdurado por más de cuatro mil años. Fueron los babilonios los que dividieron el día en veinticuatro horas, las horas en sesenta minutos y los minutos en sesenta segundos. Así, por ejemplo, el número $3{,}456$ en el sistema decimal es el número $3+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{6}{1000}$; ahora, si $\circledast$ y $\circledcirc$ fueran los símbolos para 25 y 48 en el sistema sexagesimal, entonces, el número $7,\circledast\circledcirc$, es decir, $7+\frac{\circledast}{60}+\frac{\circledcirc}{3600}$, indicaría las siete horas, veinticinco minutos y cuarentayocho segundos, que nosotros solemos escribir $7h\,25'\,48''$.

Tableta babilonia de los años entre 1900 y 1600 a. C.,
en la que hay soluciones de problemas que contienen tripletas pitagóricas, es decir, números $a$, $b$ y $c$ tales que $a^2+b^2=c^2$; es el documento más antiguo de Teoría de números

Parte de una tablilla cuneiforme encontrada en la ciudad de Harmal, de los años entre 1900 y 1600 a. C., se lee: *"4 es el largo y 5 es la diagonal. ¿Cuál es el ancho? Su tamaño no es conocido. 4 veces 4 es 16. 5 veces 5 es 25. Si tomas 16 de 25 quedan 9. ¿Cuál tomaré para que de tantas veces él mismo obtengamos 9? 3 veces 3 es 9. 3 es el ancho."*

Otro de los reflejos del uso del sistema sexagesimal de numeración, y que es el que propiamente nos motiva a presentar estas observaciones sobre babilonia, es el siguiente. Nosotros solemos representar gráficamente situaciones en las que dividimos un círculo en cien partes iguales, en especial aquellas en las que tenemos que representar porcentajes de una magnitud. Para nosotros esto resulta natural, principalmente porque tenemos un sistema de numeración de base diez; pero para los babilonios, que utilizaban un sistema de numeración de base sesenta, resultó muy natural dividirlo en trescientos sesenta partes (los llamados *grados*), y hacer divisiones de cada uno de éstos en sesenta partes (los llamados minutos), y repetir el proceso siempre dividiendo entre sesenta, que era la base de su sistema. Así las cosas, entran los babilonios en la historia de las matemáticas a través del aporte de su ingeniosa invención del *grado* como unidad de medida de los ángulos, que es precisamente la que nosotros hemos fijado en el desarrollo de nuestra teoría.

Los babilonios tenían tablas en las que se registraban los cálculos de cuadrados[5] y raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas, recíprocos[6], exponenciales y logaritmos; conocían la trigonometría y el Teorema de Pitágoras 1200 años de que Pitágoras lo estableciera y conocían, antes de Arquímedes, el número $\pi$; sabían que las soluciones de algunas ecuaciones se reducían a tablas de logaritmos con base el número $e = 2.716$, que es la base del llamado logaritmo natural o neperiano; solucionaban ecuaciones polinómicas de grado 8, reduciéndolas a su forma cuadrática. En fin, se nota que los babilonios, un milenio antes del esplendor de la civilización griega, pensaban más en términos algebraicos y trigonométricos, que en términos geométricos.

Pero los babilonios, al igual que los egipcios, eran muy prácticos en su acercamiento a las matemáticas y no desarrollaron el pensamiento abstracto de las ideas matemáticas, tal como lograron los griegos; no pensaron en los números como cantidades abstractas, sino como cosas específicas y concretas.

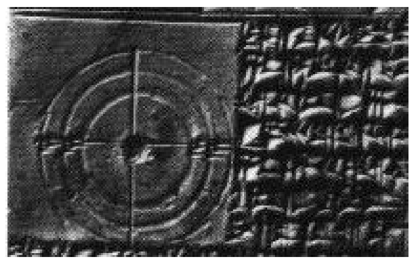
La mayor evidencia de la aplicación de los conocimientos matemáticos de los babilonios fue la construcción masiva. Tal como los egipcios, los babilonios fueron constructores a gran escala. Desafortunadamente construyeron, por ausencia de piedras, con bloques de barro; lo cual hizo que sus ruinas no soportaran el tiempo, como las de los egipcios. No en vano los jardines colgantes de babilonia constituyen una de las maravillas del mundo.

[5]Una tabla encontrada en Senkerah, sobre el Eufrates, y que data del 2000 a. C., ofrece los cuadrados hasta el 59, y los cubos hasta el 32. Como ejemplo damos la expresión del cálculo de $8^2$: $8^2 = 14$, lo cual significa, en base 60, $1 \times 60 + 4 = 64$. Con estas tablas calculaban fácilmente la multiplicación de dos números haciendo uso de la fórmula

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}.$$

[6]Se conservan tablas que contienen los recíprocos de billones de números. Los babilonios usaban estas tablas para hacer el cálculo de la división entre dos números haciendo uso de la fórmula

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}.$$



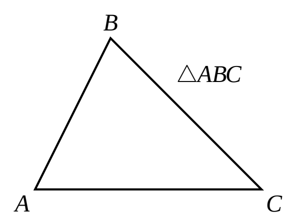
Tableta babilonia que trata de el dibujo y los cálculos de un dique y de unas fosas que debían construirse alrededor de una ciudad. En esa tableta se lee: *"... más allá de la fosa hice un dique, un codo por un codo es la inclinación del dique. ¿Cuál es su base, su alto y su largo? y ¿cuál es la circunferencia?*

# Capítulo 3

# Triángulos

Ahora presentamos otro de los tipos de subconjuntos especiales del plano, que nos ocupará por un buen tiempo en el desarrollo de esta teoría⟨1⟩.

**Definición 3.1 (Triángulo)**
*Un **triángulo** es una figura geométrica formada por los tres segmentos determinados por tres puntos no colineales⟨2⟩.*
*De un triángulo llamaremos: a los tres puntos, **los vértices**; a los tres segmentos, **los lados**; y, a los ángulos determinados por cualesquiera dos de los lados⟨3⟩, **los ángulos** (y, en algunos contextos, **los ángulos interiores** o **los ángulos internos**).*



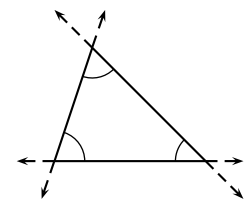

Es claro que tres puntos no colineales cualesquiera *determinan* un solo triángulo; pero, si hablamos de un triángulo $T$, ¿cómo podemos asegurar que éste determina una terna única de puntos como sus vértices? En otras palabras, ¿cuántas ternas de puntos pueden ser vértices de un triángulo?; o, más llanamente, ***¿cuántos vértices tiene un triángulo?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante, y nos ayudará a precisar el concepto de *congruencia de triángulos*. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos su prueba para el Apéndice A.

**Proposición 3.1 (Igualdad de triángulos)**
*Dos triángulos son iguales si, y sólo si, sus vértices coinciden.*

Si denotamos los vértices de un triángulo con los símbolos $A$, $B$ y $C$, denotaremos al triángulo por $\triangle ABC$, y a sus ángulos por $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ (sólo nombrando sus vértices); si $X$ es uno de los vértices del triángulo $\triangle ABC$, algunas veces diremos que $\angle X$ ***es el ángulo del triángulo en el vértice*** $X$.

Cuando hablemos del triángulo $\triangle ABC$, asumiremos que $A$, $B$ y $C$ no son colineales.

Note que, tal y como se muestra en la figura adjunta, un triángulo no contiene a sus ángulos, sino más bien está contenido por la unión de ellos (en verdad, de cualesquiera dos de ellos)[4].

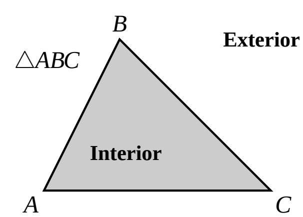


**(1)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos?*

A partir del Postulado de separación del plano definimos dos conjuntos especiales asociados a un triángulo.

**Definición 3.2 (Interior y exterior de un triángulo)**

*El **interior** de un triángulo es el conjunto de los puntos que se encuentran en el interior de sus tres ángulos a la vez*[5].
*El **exterior** de un triángulo es el conjunto de los puntos que no están en el interior del triángulo, ni sobre el triángulo.*




**(2)** *¿Podremos asegurar que el interior de un triángulo es no vacío?*
**(3)** *¿Podremos asegurar que el interior de un triángulo tiene un número indefinido de puntos?*
**(4)** *Dado un punto y un triángulo cualquiera, ¿podremos asegurar que ese punto debe estar en el interior o en el exterior del triángulo?*

Introducimos ahora la idea de la *congruencia de triángulos*. La idea corriente de dos figuras geométricas congruentes es la que se expresa diciendo que *tienen la misma forma y tamaño*[6]. La otra idea corriente de dos figuras geométricas congruentes es la que describe el hecho de que *una de ellas se puede mover rígidamente (sin deformarse) hasta hacerla coincidir con la otra*[7]. Precisaremos matemáticamente esta segunda manera de concebir la congruencia, en el caso de triángulos, para ofrecer una definición precisa de este concepto y poder hacer afirmaciones sobre ella con propiedad. Como veremos, este concepto quedará expresado en función de las otras dos congruencias ya fijadas (la de los segmentos y la de los ángulos).

Como acabamos de ver en la proposición anterior, para mover rígidamente un triángulo hasta hacerlo coincidir con otro (de ser posible), sólo basta con decir cuál vértice del uno corresponde a cuál vértice del otro. Es decir, para que el triángulo $\triangle ABC$ coincida, al moverlo rígidamente, con el triángulo $\triangle DEF$, lo que hay que precisar es una correspondencia biunívoca⟨8⟩ entre sus vértices, como por ejemplo:

$$A \longleftrightarrow D, B \longleftrightarrow E, C \longleftrightarrow F.$$

Si, al aparear los vértices de este modo, los triángulos coinciden, entonces tenemos la idea de que los triángulos son congruentes y de que la tal correspondencia es una congruencia.

Con el propósito de simplificar la notación escribiremos,

$$ABC \longleftrightarrow DEF,$$

bajo el acuerdo de que, cada letra de una de las agrupaciones es la correspondiente de su homóloga en orden de la otra agrupación, sin importar el orden en que se presenten dentro de la agrupación: $BCA \longleftrightarrow EFD$, $CAB \longleftrightarrow FDE$, etc.

Ahora bien, cada correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos trae consigo una correspondencia natural entre lados y ángulos, *v. gr.*, en el caso de la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$:

$$\begin{array}{lcl} \overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE} & \qquad & \angle A \longleftrightarrow \angle D \\ \overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF} & & \angle B \longleftrightarrow \angle E \\ \overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF} & & \angle C \longleftrightarrow \angle F, \end{array}$$

de los cuales diremos que son ***correspondientes***. Y es precisamente de esta relación entre las partes correspondientes (que surge cada vez que establecemos una correspondencia biunívoca entre los vértices), de donde obtenemos la definición de triángulos congruentes.

**Definición 3.3 (Congruencia de triángulos)**
*Dos triángulos son **congruentes**, si existe alguna correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes son congruentes.*
*Si los triángulos son $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y la correspondencia fuera $ABC \longleftrightarrow DEF$, escribiremos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los triángulos son congruentes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos **una congruencia** entre esos dos triángulos; y $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$ para indicar que no son congruentes.*

Note que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nos dice que:

**(a)** $ABC \longleftrightarrow DEF$ es la correspondencia que los hace congruentes;

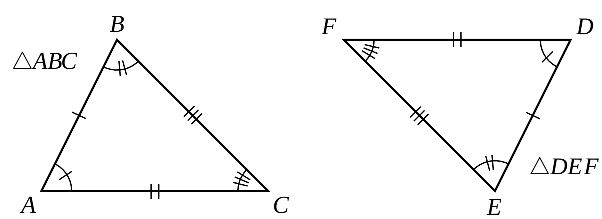
**(b)** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$; y

**(c)** $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$.

Expresaremos las últimas dos consecuencias diciendo:

*Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.*

Haremos también, al dibujar, la siguiente convención: identificaremos las partes correspondientes con igual cantidad de pequeños guiones, *v. gr.*, en el caso de que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$,




**(5)** *¿Cuándo dos triángulos no son congruentes?*

De inmediato probamos un resultado sobre esta relación de congruencia que resulta de mucha utilidad. Como hemos visto ((CS1) y (CA1)), este resultado es igualmente válido para los segmentos y los ángulos.

**Proposición 3.2** *La congruencia de triángulos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los triángulos, es decir:*

**(a)** *todo triángulo es congruente consigo mismo;*

**(b)** *si un triángulo $\triangle_1$ es congruente con un triángulo $\triangle_2$, entonces el triángulo $\triangle_2$ es también congruente con el triángulo $\triangle_1$, y*

**(c)** *si un triángulo $\triangle_1$ es congruente con un triángulo $\triangle_2$, y el triángulo $\triangle_2$ es congruente con un triángulo $\triangle_3$, entonces el triángulo $\triangle_1$ es también congruente con el triángulo $\triangle_3$.*

**Prueba (a)** Consideremos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$. Como $ABC \longleftrightarrow ABC$ es una correspondencia biunívoca entre los vértices de este triángulo con los de él mismo, y tal que las partes correspondientes son exactamente las mismas, tendremos que $\triangle ABC \cong \triangle ABC$.

**(b)** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Como $DEF \longleftrightarrow ABC$ es una correspondencia biunívoca entre sus vértices, tal que las partes correspondientes coinciden con las apareadas por la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$, que es una congruencia, tendremos que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.
**(c)** Consideremos tres triángulos $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ tales que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$. Consideremos la correspondencia $ABC \longleftrightarrow GHI$. Como, de acuerdo con las congruencias $ABC \longleftrightarrow DEF$ y $DEF \longleftrightarrow GHI$, tenemos que $\overline{AB} \cong \overline{GH}$, $\overline{AC} \cong \overline{GI}$, $\overline{BC} \cong \overline{HI}$, $\angle A \cong \angle G$, $\angle B \cong \angle H$ y $\angle C \cong \angle I$, concluimos que $ABC \longleftrightarrow GHI$ es una congruencia, y así $\triangle ABC \cong \triangle GHI$.

∎

Como veremos, en una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos, no necesitamos verificar las seis congruencias entre sus partes correspondientes para saber si son congruentes. Estos resultados constituyen los llamados *criterios de congruencia*, de los cuales aceptaremos el siguiente como postulado, y deduciremos tres más, que completarán todas las posibilidades⟨9⟩. Con el propósito de expresarlos sintéticamente, introducimos la siguiente definición.

**Definición 3.4 (Estar comprendido por; ser opuesto a)**

**(a)** *Un **lado** de un triángulo se dice que **está comprendido por** los **ángulos** del triángulo cuyos vértices son los extremos de ese lado.*

**(b)** *Un **ángulo** de un triángulo se dice que **está comprendido por** los **lados** del triángulo que están sobre los lados de ese ángulo.*

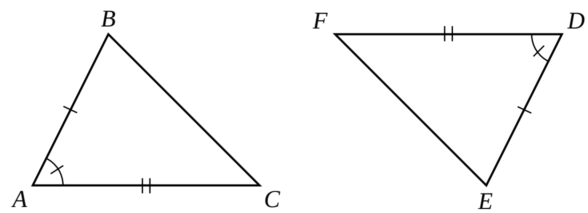
**(c)** *Un **lado** y un **ángulo** de un triángulo son **opuestos**, si el vértice del ángulo no se encuentra sobre dicho lado.*
*Si éste es el caso diremos que ese lado es **opuesto a** ese ángulo, y que ese ángulo es **opuesto a** ese lado.*

**(d)** *Un **lado** y un **vértice** de un triángulo son **opuestos**, si el vértice no se encuentra sobre dicho lado.*
*Si éste es el caso diremos que ese lado es **opuesto a** ese vértice, y que ese vértice es **opuesto a** ese lado.*

Si el triángulo es $\triangle ABC$ tendremos, por ejemplo, que: el lado $\overline{AB}$ está comprendido por los ángulos $\angle A$ y $\angle B$, y el ángulo $\angle A$ está comprendido por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$; que el lado $\overline{AB}$ es opuesto al ángulo $\angle C$, y que el ángulo $\angle A$ es opuesto al lado $\overline{BC}$.

**Postulado 6 (Criterio LAL de congruencia de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos lados y el ángulo comprendido por ellos del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*[10]

*En otras palabras: si* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ *y* $\angle A \cong \angle D$, *entonces* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

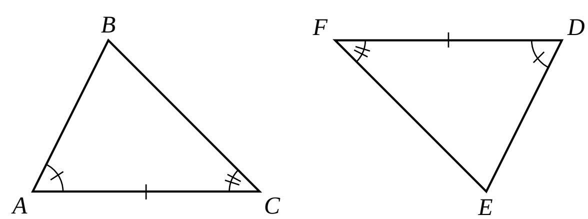



Aclaramos que LAL es una taquigrafía de lado-ángulo-lado, indicando así que el par de ángulos que son congruentes debe estar comprendido por los pares de lados que son congruentes.

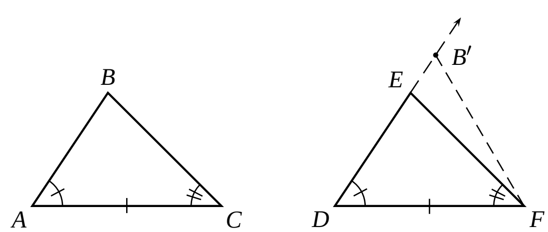
Obtenemos de inmediato un segundo criterio de congruencia de triángulos.

**Teorema 3.1 (Criterio ALA de congruencia de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos ángulos y el lado comprendido por ellos del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*[11]

*En otras palabras: si* $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ *y* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, *entonces* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.




**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.



Tomemos, por (CS4), un punto $B'$ en $\overrightarrow{DE}$ tal que $\overline{DB'} \cong \overline{AB}$. Por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle DB'F$; de donde $\angle DFB' \cong \angle ACB \cong \angle DFE$. Por (CA2), tomando $\overleftrightarrow{DF}$ como borde, tendremos que $\overrightarrow{FB'} = \overrightarrow{FE}$. Pero como, por el corolario 1.1.1, $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{FE}$ se intersectan en un solo punto, tenemos que $B' = E$. Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, como queríamos.

■

Aclaramos que ALA es una taquigrafía de ángulo-lado-ángulo, indicando así que el par de lados que son congruentes debe estar comprendido por los pares de ángulos que son congruentes.

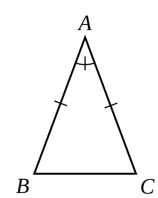
El siguiente resultado será sumamente útil en el desarrollo de nuestra teoría y nos permitirá obtener, entre otras cosas, un tercer criterio de congruencia de triángulos (el criterio LLL).

**Proposición 3.3** *Dos lados de un triángulo son congruentes si, y sólo si, sus ángulos opuestos son congruentes.*

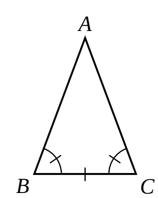
**Prueba**

($\Rightarrow$)(Pappus)[⟨12⟩].

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Como, por (CS1), $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, y por (CA1), $\angle A \cong \angle A$, tendremos, por LAL, que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Así, $\angle B \cong \angle C$ (al ser correspondientes).




($\Leftarrow$) Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ tal que $\angle B \cong \angle C$. Como, por (CA1), $\angle C \cong \angle B$, y por (CS1), $\overline{BC} \cong \overline{BC}$, tendremos, por ALA, que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Así, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (al ser correspondientes).



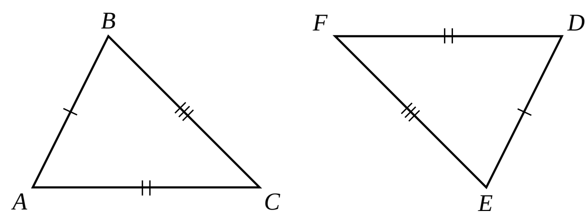

■

Note que, en cualquier triángulo: si dos lados no son congruentes, entonces el ángulo opuesto a uno de ellos debe ser más pequeño que el ángulo opuesto al otro; y, recíprocamente, si dos ángulos no son congruentes, entonces el lado opuesto a uno de ellos debe ser más corto que el lado opuesto al otro. Un poco más adelante (proposición 3.7) precisaremos cuál debe tener menor medida.

Presentamos ahora un tercer criterio de congruencia de triángulos, quizás el más intuitivo de todos. Este criterio muestra que, también en el caso de los triángulos, el tamaño determina la forma, pues fijado el tamaño de tres segmentos con los que se pudiera construir un triángulo, todos los que se construyan resultarán congruentes⟨13⟩.

**Teorema 3.2 (Criterio LLL de congruencia de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que los tres lados del primer triángulo son congruentes con sus lados correspondientes en el segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*⟨14⟩

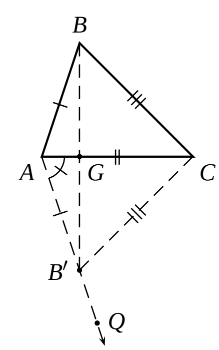
*En otras palabras: si* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ *y* $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, *entonces* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.




**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

Tomemos, por (CA2), un punto $Q$ en el lado opuesto al de $B$, respecto a $\overleftrightarrow{AC}$, tal que $\angle QAC \cong \angle EDF$. Tomemos, por (CS4), un punto $B'$ en $\overrightarrow{AQ}$ tal que $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$. Por LAL tenemos que

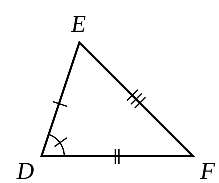
$$(1) \qquad \triangle AB'C \cong \triangle DEF;$$




de donde $\overline{B'C} \cong \overline{EF}$. Como, por la proposición 2.3, $B'$ está en el mismo lado de $Q$, respecto a $\overleftrightarrow{AC}$, que es el opuesto del de $B$, tenemos, por el Postulado de separación del plano, que $\overline{BB'}$ intersecta $\overleftrightarrow{AC}$. Llamemos, por la proposición 1.1, $G$ al punto de corte.

Si acaso $G = A$, tendremos, por la proposición 3.3, que $\angle CBA \cong \angle CB'A$. Por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$, de donde, por (1) y la proposición 3.2, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

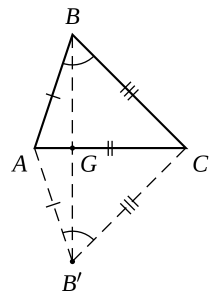
A igual conclusión llegamos, por un razonamiento análogo, si acaso $G = C$.



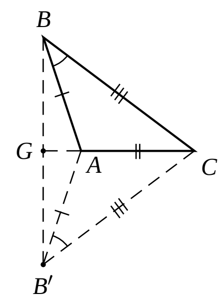

Supongamos, entonces, que $G \neq A$ y $G \neq C$. Por (S3) tendremos que se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$A\text{-}G\text{-}C; \quad G\text{-}A\text{-}C; \quad A\text{-}C\text{-}G.$$

Supongamos que $A$-$G$-$C$.
Por la proposición 3.3, $\angle ABG \cong \angle AB'G$ y $\angle CBG \cong \angle CB'G$. Por el Teorema de la barra transversal, $G$ está en el interior de $\angle ABC$ y en el interior de $\angle AB'C$. De este modo, por (CA3), $\angle ABC \cong \angle AB'C$; de donde, por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$. Así, por (1) y la proposición 3.2, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.




Supongamos, ahora, que $G$-$A$-$C$.
Por la proposición 3.3, $\angle ABG \cong \angle AB'G$ y $\angle CBG \cong \angle CB'G$. Por el Teorema de la barra transversal, $A$ está en el interior de $\angle CB'B$ y en el interior de $\angle CBB'$. De este modo, por (CA4), $\angle ABC \cong \angle AB'C$; de donde, por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$. Así, por (1) y la proposición 3.2, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
A igual conclusión llegamos, por un razonamiento análogo, si suponemos que $A$-$C$-$G$.

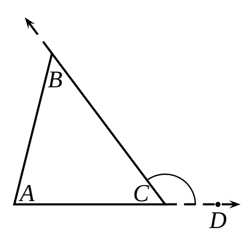



■

Aclaramos que LLL es una taquigrafía de lado-lado-lado.

Probaremos ahora un resultado que consideramos fundamental en el estudio de los triángulos: *el Teorema del ángulo externo*. Éste nos permitirá obtener, entre otras cosas, el último de los criterios de congruencia entre triángulos⟨15⟩. Para expresarlo sintéticamente definiremos los siguientes términos.

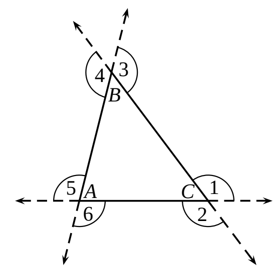
**Definición 3.5 (Ángulo externo)**
*Un **ángulo externo** de un triángulo es una pareja lineal de un ángulo del triángulo.*
*Si $X$ es un vértice de un triángulo, diremos **ángulo externo del triángulo en el vértice** $X$, cuando queramos referirnos a una pareja lineal del ángulo del triángulo en el vértice $X$.*




Note que todo triángulo tiene exactamente dos ángulos externos en cada vértice (pues todo ángulo tiene exactamente dos parejas lineales; refiriéndonos a la siguiente figura: $\angle 1$ y $\angle 2$, en $C$; $\angle 3$ y $\angle 4$, en $B$; y $\angle 5$ y $\angle 6$, en $A$), y que ambos son congruentes (pues son opuestos por el vértice: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$ y $\angle 5 \cong \angle 6$).

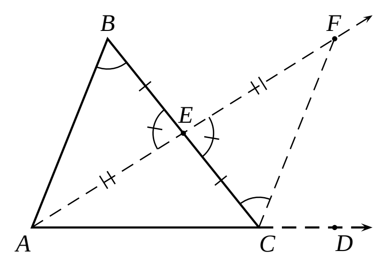
**Definición 3.6 (Ángulo interno no contiguo a un ángulo externo)**
*Un ángulo de un triángulo es* ***ángulo interno no contiguo a un ángulo externo****, si no tiene el mismo vértice.*

Refiriéndonos a la figura: los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos internos no contiguos a los ángulos externos en el vértice $C$ (es decir, a $\angle 1$ y $\angle 2$); los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos internos no contiguos a los ángulos externos en el vértice $B$ (es decir, a $\angle 3$ y $\angle 4$); los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos internos no contiguos a los ángulos externos en el vértice $A$ (es decir, a $\angle 5$ y $\angle 6$).




**Teorema 3.3 (Teorema del ángulo externo)**
*Un ángulo externo de un triángulo es más grande que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.*

**Prueba** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ y uno de sus ángulos externos en un vértice, digamos $\angle BCD$ en el vértice $C$.
Probaremos, en primer lugar, que $\angle BCD$ es más grande que $\angle B$.
Tomemos, por (CS5), $E$ el punto medio de $\overline{BC}$. Llamemos, por (CS4), $F$ al punto del rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{EA}$ tal que $\overline{EF} \cong \overline{EA}$.

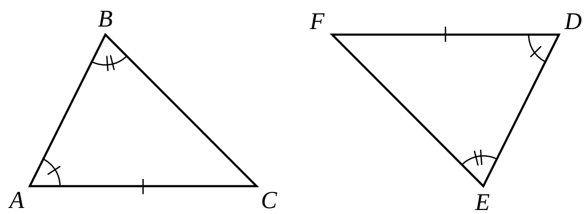



Como $\angle BEA$ y $\angle FEC$ son opuestos por el vértice, tenemos, por la proposición 2.8, que $\angle BEA \cong \angle FEC$. Por LAL tendremos que $\triangle BEA \cong \triangle CEF$. Así, $\angle B \cong \angle ECF$ (al ser correspondientes). Como, por la proposición 2.1, $\angle ECF = \angle BCF$, tenemos que $\angle B \cong \angle BCF$. Probaremos ahora que $F$ está en el interior de $\angle BCD$; con lo que, por la proposición 2.11, $\angle BCD$ será más grande que $\angle B$.
Por el Teorema de la barra transversal, $F$ está en el interior de $\angle BAC$; de modo que $F$ está del mismo lado que $B$, respecto a $\overleftrightarrow{CD}$ (ya que, por el Postulado de la recta, $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CD}$). Ahora bien, como $F$ y $A$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$ (ya que $A$-$E$-$F$), y $D$ y $A$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$ (ya que $A$-$C$-$D$), tenemos que $F$ y $D$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; con lo que, por la definición del interior de un ángulo, $F$ está en el interior de $\angle BCD$.
Intercambiando $A$ y $B$ tendremos, por el mismo argumento, que $\angle BCD$ es más grande que $\angle A$.

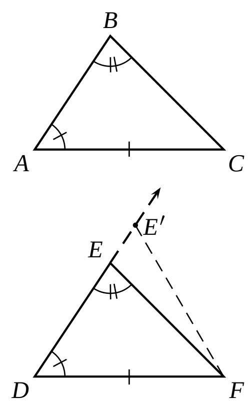
$\blacksquare$

**Teorema 3.4 (Criterio LAA de congruencia de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que un lado y dos ángulos que no lo comprenden del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*[16]

*En otras palabras: si* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$ *y* $\angle B \cong \angle E$, *entonces* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.




**Prueba** (Por reducción al absurdo)
Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$.
Probaremos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; y de este modo, por LAL (o ALA), $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
Tomemos, por (CS4), el punto $E'$ en $\overrightarrow{DE}$ tal que $\overline{DE'} \cong \overline{AB}$. Por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle DE'F$. Así tenemos que: $\angle DEF \cong \angle DE'F$, pues $\angle DE'F \cong \angle B \cong \angle DEF$; y $\overline{AB} \cong \overline{DE'}$.
Supongamos que $E' \neq E$. Así, $D$-$E$-$E'$ o $D$-$E'$-$E$.
Si $D$-$E$-$E'$, tendremos que $\angle DEF$ es un ángulo externo de $\triangle EE'F$ en el vértice $E$. Como $\angle E'$ es uno de sus ángulos internos no contiguos, tendremos, por el Teorema del ángulo externo, que $\angle DEF$ es más grande que $\angle DE'F$; lo cual nos lleva a una contradicción.
Por el mismo argumento llegamos a una contradicción semejante, intercambiando $E$ y $E'$.
Por tanto, $E' = E$ y, así, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.




■

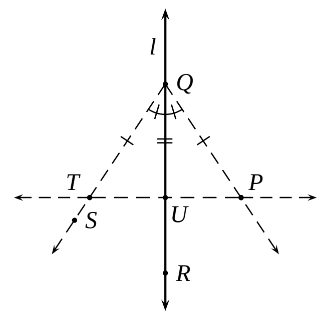
Aclaramos que LAA es una taquigrafía de lado-ángulo-ángulo, indicando así que el par de lados que son congruentes no está comprendido por los pares de ángulos que son congruentes.

**(6)** *Si un lado y dos ángulos de un triángulo son congruentes con un lado y dos ángulos de otro, ¿tendrán que ser congruentes los triángulos?*

Probaremos ahora que podemos trazar una única perpendicular a una recta por un punto que no está sobre ella[17] y, como consecuencia inmediata, una condición sobre los ángulos de un triángulo, que nos permitirá definir una clase muy importante de triángulos: *los rectángulos*. Este resultado nos permitirá, además, definir un poco más adelante (ver la definición 3.9) *las alturas* desde los vértices de un triángulo.

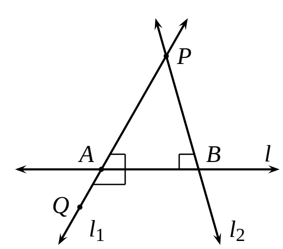
**Proposición 3.4 (Perpendicular a una recta por un punto fuera de ella)**
*Dada una recta y un punto fuera de ella, se tiene que existe una única recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado.*
*Al punto de corte de ambas rectas lo llamaremos* ***pie de la perpendicular*** *desde el punto dado.*

**Prueba** Consideremos una recta $l$ y un punto $P$ fuera de ella.
(Existencia) Tomemos, por el Postulado1, dos puntos $Q$ y $R$ en $l$ tales que $Q \neq R$. Tomemos, por (CA2), un punto $S$ en el lado opuesto al de $P$, respecto a $l$, tal que $\angle SQR \cong \angle PQR$. Tomemos, por (CS4), un punto $T$ en el rayo $\overrightarrow{QS}$ tal que $\overline{QT} \cong \overline{QP}$. Así, $\overline{PT}$ intersecta a $l$ (ya que, por la proposición 2.3, $T$ se encuentra en el mismo lado de $S$, respecto a $l$; que es el opuesto al de $P$).




Tomemos, por el corolario 1.1.1, el punto $U$ de intersección entre $\overline{PT}$ y $l$; con lo que $\overrightarrow{UP}$ y $\overrightarrow{UT}$ son rayos opuestos.
Si $U = Q$ tendremos, por la proposición 2.6, que $\angle PUR$ es recto (por ser congruente a su pareja lineal $\angle TUR$, ya que, por la proposición 2.1, $\angle TUR = \angle SQR$).
Si $U \neq Q$ tendremos, por LAL, que $\triangle PQU \cong \triangle TQU$; de donde, por la proposición 2.6, $\angle PUQ$ es recto (por ser congruente a su pareja lineal $\angle TUQ$).
Así, en cualquiera de los casos, $\overleftrightarrow{PT} \perp l$ y $\overleftrightarrow{PT}$ claramente pasa por $P$.

(Unicidad) Supongamos que $l_1$ y $l_2$ son rectas perpendiculares a $l$ por $P$. Sean $A$ y $B$ sus puntos de corte, respectivamente, con la recta $l$. Tomemos, por (CS4), un punto $Q$, en el rayo opuesto a $\overrightarrow{AP}$. Si acaso $l_1 \neq l_2$, tendríamos que $A \neq B$; en cuyo caso tendríamos, por ser $\angle QAB$ ángulo externo de $\triangle PAB$ en el vértice $A$, que $\angle QAB$ debería ser mayor que $\angle PBA$, no siéndolo. Por tanto, $l_1 = l_2$.




■

El siguiente resultado nos permitirá hacer una clasificación de los triángulos.

**Proposición 3.5**

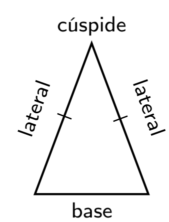
**(a)** *Ningún triángulo puede tener dos ángulos rectos.*
**(b)** *Ningún triángulo puede tener dos ángulos obtusos, ni tampoco uno obtuso y otro recto.*

**Prueba** Consideremos un triángulo $\triangle ABC$.
**(a)** Si acaso $\angle B$ y $\angle C$ rectos, tendríamos que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son dos rectas perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ por el punto $A$, y distintas; contrario a la proposición 3.4.
**(b)** Si $\angle A$ es obtuso tendremos, al ser suplementarios de $\angle A$, que los dos ángulos externos en el vértice $A$ debe ser agudo. Así, por el Teorema del ángulo externo, ninguno de los ángulos en los vértices $B$ y $C$ puede ser recto ni obtuso.

■

**Definición 3.7 (Isósceles, escaleno, equilátero, equiángulo, rectángulo, oblicuo, obtusángulo y acutángulo)**
*Considerando los lados tenemos:*

**(a)** *Un triángulo es* ***isósceles****, si tiene exactamente dos lados congruentes.*
*De un triángulo isósceles llamaremos: al vértice común a los dos lados congruentes,* ***la cúspide****; al tercero de los lados,* ***la base****; a los dos lados congruentes,* ***los laterales****; a los dos ángulos que comprenden a la base,* ***los ángulos de la base****; y, al tercer ángulo,* ***el ángulo de la cúspide****.*

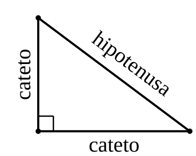



**(b)** *Un triángulo es* ***escaleno****, si no tiene ningún par de lados congruentes.*
**(c)** *Un triángulo es* ***equilátero****, si tiene sus tres lados congruentes.*

*Considerando los ángulos tenemos:*

**(d)** *Un triángulo es* ***equiángulo****, si tiene sus tres ángulos congruentes.*

**(e)** *Un triángulo es* ***rectángulo****, si tiene un ángulo recto.*
*De un triángulo rectángulo llamaremos: al lado opuesto al único ángulo recto,* ***la hipotenusa****; y, a los otros dos lados,* ***los catetos****.*




**(f)** *Un triángulo es* ***oblicuo****, si no es rectángulo.*
**(g)** *Un triángulo es* ***obtusángulo****, si tiene un ángulo obtuso.*
**(h)** *Un triángulo es* ***acutángulo****, si tiene sus tres ángulos agudos.*

La proposición 3.3 nos permite obtener el siguiente resultado del que, por su sencillez, dejaremos la prueba al lector (ver el ejercicio 3.19).

**Proposición 3.6**

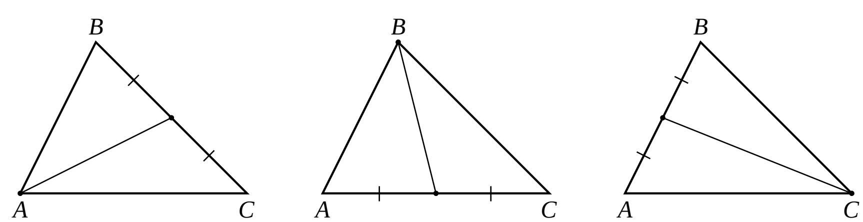
**(a)** *Un triángulo es isósceles si, y sólo si, tiene exactamente dos ángulos congruentes.*
**(b)** *Un triángulo es equilátero si, y sólo si, es equiángulo.*[18]

**(7)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos isósceles?*
**(8)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos escalenos?*
**(9)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos equiláteros?*
**(10)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos rectángulos?*[19]
**(11)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos obtusángulos?*
**(12)** *¿Podremos asegurar que existen triángulos acutángulos?*
**(13)** *¿Será verdad que los ángulos que no son el recto, en un triángulo rectángulo, son agudos?*
**(14)** *¿Será verdad que los ángulos que no son el obtuso, en un triángulo obtusángulo, son agudos?*

Definiremos a continuación tres segmentos especiales, asociados a un triángulo.

**Definición 3.8 (Mediana, bisectriz y altura)**

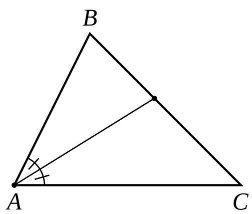
**(a)** *Una* ***mediana*** *de un triángulo desde uno de sus vértices, digamos $X$, es un segmento con un extremo en $X$, y el otro extremo es el punto medio del lado opuesto a $X$; de esta mediana diremos también que es la mediana sobre el lado opuesto al vértice $X$.*
*En algunos contextos llamaremos mediana a la longitud del segmento descrito.*



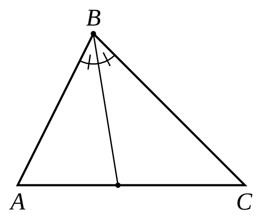

*Mediana desde A* *Mediana desde B* *Mediana desde C*

*(Note que todo triángulo tiene exactamente tres medianas; que las medianas tienen sus extremos sobre el triángulo y que sólo uno de sus extremos es vértice del triángulo).*

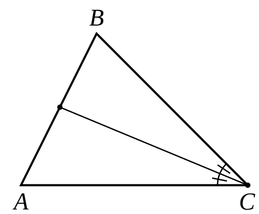
**(b)** *Una **bisectriz** de un triángulo desde uno de sus vértices, digamos $X$, es un segmento con un extremo en $X$, y el otro extremo es el punto de corte del bisector del ángulo $\angle X$ con el lado opuesto a $X$ (que sabemos que existe, por el Teorema de la barra transversal); de esta bisectriz diremos también que es la bisectriz del ángulo $\angle X$, o la bisectriz sobre el lado opuesto a $X$.*
*En algunos contextos llamaremos bisectriz a la longitud del segmento descrito.*



*Bisectriz desde A*



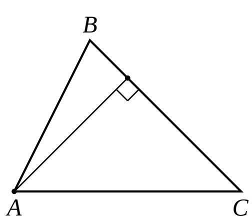
*Bisectriz desde B*



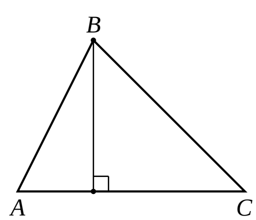
*Bisectriz desde C*

*(Note que todo triángulo tiene exactamente tres bisectrices; que las bisectrices tienen sus extremos sobre el triángulo y que sólo uno de sus extremos es vértice del triángulo).*

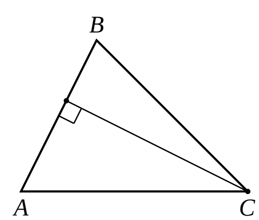
**(c)** *Una **altura** de un triángulo desde uno de sus vértices, digamos $X$, es un segmento con un extremo en $X$, y el otro extremo es el punto de corte de la recta $l$ que contiene al lado opuesto al ángulo $\angle X$, con la perpendicular a $l$ que pasa por $X$; de esta altura diremos también que es la altura sobre el lado opuesto a $X$.*
*Fijada una altura, llamaremos: **base correspondiente** (o **relativa**) **a esa altura**, al lado opuesto al vértice desde donde se toma; **pie de esa altura**, al extremo distinto del vértice desde donde se toma. Fijado un lado como base, llamaremos **altura correspondiente** (o **relativa**) **a esa base**, a la altura que tiene extremo en el vértice opuesto a dicho lado. Llamaremos **proyección del lado** $l_1$ **sobre el lado** $l_2$, si no son perpendiculares, al segmento que tiene un extremo en el vértice común a $l_1$ y $l_2$, y el otro extremo en el pie de la altura correspondiente a $l_2$.*
*En algunos contextos llamaremos altura, base y proyección de un lado, a las longitudes de los segmentos descritos.*



*Altura desde A*

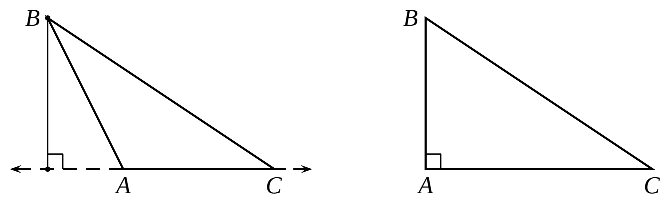


*Altura desde B*

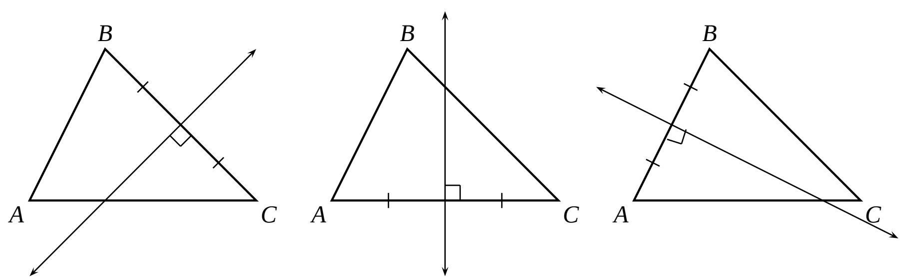


*Altura desde C*

*(Note que todo triángulo tiene exactamente tres alturas, pero el pie de alguna de ellas puede no estar sobre el triángulo o puede ser un vértice del triángulo, tal como mostramos en la siguiente representación).*




Otra terna de figuras geométricas especiales asociada a un triángulo, que juega un papel muy importante en su estudio, la constituyen las ***mediatrices*** de sus lados. Recordemos que éstas son las rectas perpendiculares a los lados por sus puntos medios (ver la definición 2.14). No las hemos destacado en la definición 3.8 porque son rectas y no segmentos.




Mediatriz de $\overline{BC}$ Mediatriz de $\overline{AC}$ Mediatriz de $\overline{AB}$

Tal como veremos en el siguiente resultado, el Teorema del ángulo externo nos permitirá decidir sobre la ubicación de los pies de las alturas de un triángulo, en términos de las medidas de los ángulos que comprenden la base correspondiente.

**Proposición 3.7** *Dada una recta $\overleftrightarrow{AB}$, un punto $C$ fuera de ella, y $D$ el pie de la perpendicular a ella desde $C$, tendremos que:*

**(a)** *$D = A$ si, y sólo si, $\angle CAB$ es recto.*

**(b)** *$D$ está en $\overrightarrow{AB}$ y $D \neq A$ si, y sólo si, $\angle CAB$ es agudo.*

**(c)** *$D$ está en el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ y $D \neq A$ si, y sólo si, $\angle CAB$ es obtuso.*

**Prueba (a)** ($\Rightarrow$) Si $D = A$ tendremos, por definición, que $\angle CAB$ es recto.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\angle CAB$ es recto. Si $D \neq A$ tendríamos que $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ serían dos rectas distintas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ desde el punto $C$, contrario a la proposición 3.4. Por tanto, $D = A$.

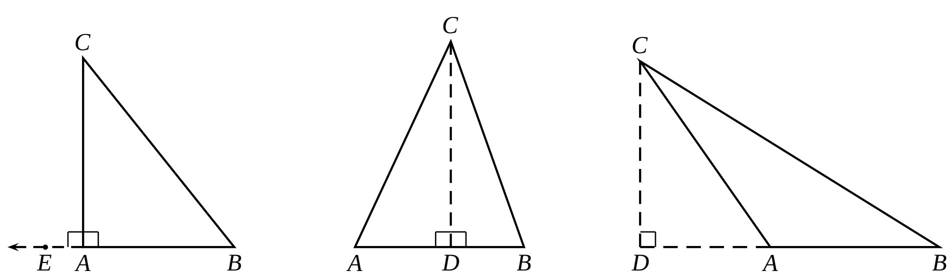
**(b)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $D$ está en $\overrightarrow{AB}$ y $D \neq A$. Tomemos un punto $E$ tal que $A$-$D$-$E$. Como, por la proposición 2.9, $\angle CDE$ es recto, es un ángulo externo del triángulo $\triangle CDA$ en el vértice $D$, y $\angle CAB$ es uno de sus ángulos internos no contiguos, tendremos, por el Teorema del ángulo externo, que $\angle CAB$ es agudo.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\angle CAB$ es agudo. Si acaso $D = A$ tendríamos, por la parte (a), que $\angle CAB$ sería recto; contrario a lo supuesto. Si acaso $D$-$A$-$B$ tendríamos, por lo probado en la implicación anterior, que $\angle CAD$ es agudo; así, $\angle CAB$, suplemento de $\angle CAD$, sería obtuso; contrario a lo supuesto. Por tanto, $D$ está en $\overrightarrow{AB}$.

**(c)** Por lo probado en la parte anterior, $D$ está en el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ y $D \neq A$ si, y sólo si, $\angle CAD$ es agudo; y, al ser $\angle CAD$ suplemento de $\angle CAB$, esto sucede si, y sólo si, $\angle CAB$ es obtuso.

■

**Corolario 3.7.1** *Si $\overline{CD}$ es altura de $\triangle ABC$, tendremos que:*

**(a)** *$D = A$ si, y sólo si, $\angle A$ es recto*
**(b)** *$A$-$D$-$B$ si, y sólo si, $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.*
**(c)** *$D$-$A$-$B$ si, y sólo si, $\angle A$ es obtuso y $\angle B$ es agudo.*




**Prueba** Consideremos la altura $\overline{CD}$ de $\triangle ABC$.

**(a)** Es claro, por la proposición 3.7.(a).

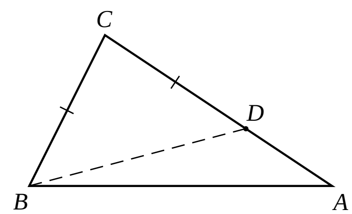
**(b)** Por la definición de rayo, $A$-$D$-$B$ si, y sólo si, $D$ está en $D$ está en $\overrightarrow{AB}$ y en $\overrightarrow{BA}$; y, por la proposición 3.7.(b), esto sucede si, y sólo si, $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.

**(c)** Por la definición de rayo, $D$-$A$-$B$ si, y sólo si, $D$ está en el rayo opuesto de $\overrightarrow{AB}$ y en $\overrightarrow{BA}$; y, por la proposición 3.7.(b) y (c), esto sucede si, y sólo si, $\angle A$ es obtuso y $\angle B$ es agudo.

■

Gracias al Teorema del ángulo externo obtenemos también, con absoluta precisión, a lo que da lugar la negación de la proposición 3.3[20]; y, como consecuencia inmediata, obtendremos uno de los principios más conocidos de la Geometría, a partir del cual mediremos la *distancia entre un punto y una recta*.

**Proposición 3.8** *Un lado de un triángulo es más grande que otro si, y sólo si, su ángulo opuesto es más grande que el del otro.*

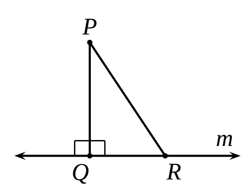



**Prueba** Consideremos un triángulo $\triangle ABC$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{CA}$ es más largo que $\overline{CB}$. Tomemos, por la proposición 1.8, el punto $D$ tal que $C$-$D$-$A$ y $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. Por la proposición 3.3, $\angle CBD \cong \angle CDB$.
Como $\angle CDB$ es un ángulo externo de $\triangle ABD$ en el vértice $D$ tendremos, por el Teorema del ángulo externo, que $\angle CDB$ es más grande que $\angle A$. Como, por el Teorema de la barra transversal, $D$ está en el interior de $\angle B$, tendremos, por la proposición 2.11, que $\angle B$ es más grande que $\angle CBD$. Por lo tanto, $\angle B$ es más grande que $\angle A$.
($\Leftarrow$) (Por reducción el absurdo)
Supongamos ahora que $\angle B$ es más grande que $\angle A$. Si $\overline{CA}$ no fuera más largo que $\overline{CB}$, tendríamos que $\overline{CA}$ es más corto que $\overline{CB}$ o $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. Pero, si $\overline{CA}$ es más corto que $\overline{CB}$, entonces, por la parte anterior, $\angle B$ es más pequeño que $\angle A$; y si $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, entonces, por la proposición 3.3, $\angle B \cong \angle A$; ambas posibilidades contrarias a lo supuesto. Por tanto, $\overline{CA}$ es más largo que $\overline{CB}$.

■

**Corolario 3.8.1** *El segmento más corto que une un punto fuera de una recta y un punto de ella, es el segmento perpendicular a la recta desde el punto que está fuera de ella.*

**Prueba** Consideremos una recta $m$ y un punto $P$ fuera de ella. Llamemos, por las proposiciones 1.1 y 3.4, $Q$ al punto de corte de la perpendicular a $m$ por $P$. Si $R$ es un punto de $m$ distinto de $Q$, tendremos, por el Teorema del ángulo externo, $\angle Q$ es más grande que $\angle R$; y, así, por la proposición 3.8, $\overline{PQ}$ es más corto que $\overline{PR}$.



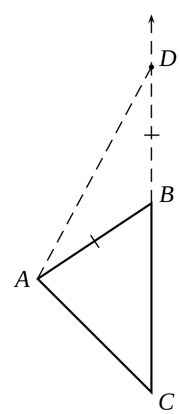

■

**Definición 3.9 (Distancia punto-recta)**
*La **distancia entre un punto y una recta** es: cero (0), si el punto está sobre la recta; la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta, en cualquier otro caso.*
***La distancia entre un punto y un rayo** es: cero (0), si el punto está sobre el rayo; la distancia entre el punto y la recta que contiene al rayo, si la perpendicular a la recta que contiene el rayo, desde el punto, corta al rayo; la distancia entre el punto y el origen del rayo, en cualquier otro caso.*
***La distancia entre un punto y un segmento** es: cero (0), si el punto está sobre el segmento; la distancia entre el punto y la recta que contiene al segmento, si la perpendicular a la recta que contiene el segmento, desde el punto, corta al segmento; la más pequeña de las distancias entre el punto y los extremos del segmento, en cualquier otro caso.*

Ahora estableceremos un criterio para saber cuándo tres segmentos dados ***no*** pueden, de ninguna manera, conformar un triángulo.

**Proposición 3.9 (Desigualdad del triángulo)**
*La longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, y mayor que su diferencia.*⟨21⟩

**Prueba** Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ y llamemos, por (CS4), $D$ al punto en el rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{BC}$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{AB}$. Por la proposición 3.3 tendremos que $\angle ADB \cong \angle DAB$.
Como $D$-$B$-$C$, tendremos que:
(1) Por el Teorema de la barra transversal, $B$ está en el interior de $\angle DAC$ y así, por la proposición 2.11, $\angle DAC$ es más grande que $\angle DAB \cong \angle ADC$; de donde, por la proposición 3.8, $\overline{DC}$ es más largo que $\overline{AC}$;
(2) Como $\overline{BD} \cong \overline{AB}$, tendremos que $DC = AB + BC$.
De (1) y (2) tendremos, al sustituir, que $AB + BC > AC$.
Ahora como, por un razonamiento similar, $AC + BC > AB$, tendremos que $AC > AB - BC$.




■

Apenas en este momento estamos en capacidad de probar una de las propiedades más importantes de la distancia entre dos puntos⟨22⟩.

**Teorema 3.5 (Desigualdad triangular)**
*Dados tres puntos distintos $A$, $B$ y $C$, se tiene que $AC \leqslant AB + BC$. Además, tendremos la igualdad si, y sólo si, $B$ está en el segmento $\overline{AC}$.*

**Prueba** Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos distintos. Si acaso los tres puntos son colineales tendremos, por (S3), que debe cumplirse una y sólo una de las siguientes posibilidades: $A$-$B$-$C$ o $A$-$C$-$B$ o $B$-$A$-$C$. Es claro, a partir de la definición de Interposición en la recta, que $AC < AB + BC$ y que $AC = AB + BC$ en caso de que $A$-$B$-$C$ y sólo en ese caso, es decir, si, y sólo si, $B$ está en el segmento $\overline{AC}$.
Si acaso los tres puntos no son colineales tendremos, por la proposición 3.9, que $AC < AB + BC$.

■

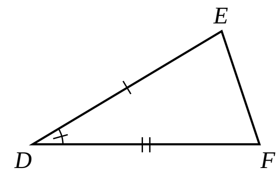
Si nos preguntáramos: *¿bajo qué condiciones podemos asegurar que dos triángulos no son congruentes?*, la respuesta se torna complicada, ya que la congruencia entre triángulos involucra la presencia de siete relaciones distintas, tal como puede verse en la observación que hicimos justo después de la definición de congruencia de triángulos.

El siguiente resultado nos ofrece una respuesta parcial (bajo unas condiciones específicas) a esta interrogante; éste precisará la negación de los criterios LAL y ALA juntos, estableciendo un paralelo con la proposición 3.8⟨23⟩. En el ejercicio 3.16 instamos al lector a que muestre que este paralelismo sólo es parcial, es decir, que no es cierto fuera de esa condición.

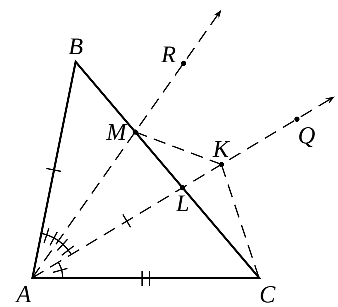
Note que la proposición 3.8 establece las desigualdades entre lados y ángulos en ***un*** mismo triángulo, mientras que el Teorema de la bisagra establecerá las desigualdades entre lados y ángulos para ***dos*** triángulos distintos.

**Teorema 3.6 (Teorema de la bisagra)**
*Si una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos tiene la propiedad de que dos lados de uno de los triángulos son congruentes con sus correspondientes en el otro, se tiene que el ángulo comprendido por esos dos lados del primer triángulo es más grande que el ángulo comprendido por esos dos lados del segundo triángulo si, y sólo si, el tercer lado del primer triángulo es más largo que el tercer lado del segundo.*

**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.




($\Rightarrow$) Supongamos que $\angle A$ es más grande que $\angle D$, y probemos que $\overline{EF}$ es más corto que $\overline{BC}$.
Tomemos, por la proposición 2.11, un punto $Q$ en el interior de $\angle BAC$ tal que $\angle QAC \cong \angle D$.
Tomemos, por (CS4), el punto $K$ en el rayo $\overrightarrow{AQ}$ tal que $\overline{AK} \cong \overline{DE}$. Por la proposición 1.4 tenemos que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ}$ y, por LAL, $\triangle AKC \cong \triangle DEF$.
Tomemos, por el Teorema de la barra transversal, el punto $L$ de corte de $\overrightarrow{AK}$ con $\overline{BC}$, y que satisface $B$-$L$-$C$.
Si $K = L$ tendremos, por el hecho de que $\overline{EF} \cong \overline{KC}$ y que $B$-$K$-$C$, que $\overline{EF}$ es más corto que $\overline{BC}$, como queríamos.



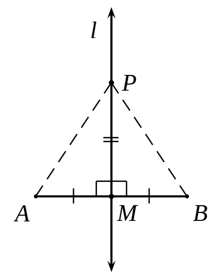

Supongamos que $K \neq L$.
Tomemos, por el Teorema de la barra transversal, el punto $M$ de corte del bisector $\overrightarrow{AR}$, de $\angle BAK$, con $\overline{BC}$, y que satisface $B$-$M$-$L$; de donde, junto a $B$-$L$-$C$, tendremos que $B$-$M$-$C$. Por LAL, $\triangle AMB \cong \triangle AMK$, y así, $\overline{MB} \cong \overline{MK}$. Por la Desigualdad del triangulo en $\triangle CKM$, tenemos que $CK < CM + MK$; de donde, al sustituir, tenemos que $\overline{EF}$ es más corto que $\overline{BC}$, como queríamos.
($\Leftarrow$) (Por reducción al absurdo)
Supongamos que $\overline{EF}$ es más corto que $\overline{BC}$, y probemos que $\angle A$ es más grande que $\angle D$. Si acaso $\angle A$ es más pequeño que $\angle D$ tendremos, por la parte anterior, que $\overline{EF}$ es más largo que $\overline{BC}$; contrario a lo supuesto. Si acaso $\angle A \cong \angle D$ tendremos, por LAL, que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, y así, $\overline{EF} \cong \overline{BC}$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $\angle A$ es más grande que $\angle D$.

■

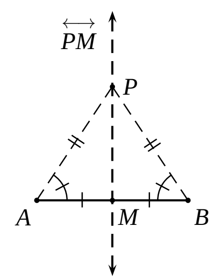
Para finalizar este capítulo estableceremos un par de aplicaciones de algunos de los resultados que hemos obtenido.

El primero de ellos, como aplicación de la proposición 3.3, una *caracterización* de la mediatriz de un segmento⟨24⟩, que nos será de utilidad en el momento en que queramos probar que las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto; y, junto con el Postulado de la recta, una consecuencia inmediata muy útil.

**Proposición 3.10 (Teorema de la mediatriz)**
*La mediatriz de un segmento coincide con el conjunto de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.*




**Prueba** Consideremos un segmento $\overline{AB}$, $M$ su punto medio y $l$ su mediatriz.
Tomemos un punto $P$ en $l$. Si $P = M$, es claro que $P$ equidista de los extremos $A$ y $B$ del segmento. Supongamos que $P \neq M$; con lo que $P$ no está en $\overleftrightarrow{AB}$. Consideremos los triángulos $\triangle PMA$ y $\triangle PMB$. Como $\overline{PM}$ es lado común a los dos triángulos, $\overline{MA} \cong \overline{MB}$ y $\angle PMA \cong \angle PMB$ (pues, por la proposición 2.9, ambos son rectos) tenemos, por LAL, que $\triangle PMA \cong \triangle PMB$. De este modo $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, y así $P$ equidista de los extremos $A$ y $B$ del segmento.
Hemos probado que todos los puntos de $l$ satisfacen la condición dada. Probemos ahora que los puntos que satisfacen esa condición deben estar en $l$.




Consideremos un punto $P$ que equidista de los extremos $A$ y $B$ del segmento. Si $P = M$, es claro que $P$ está en $l$. Supongamos que $P \neq M$; con lo que $P$ no está en $\overleftrightarrow{AB}$. Consideremos la recta $\overleftrightarrow{PM}$. Como, en $\triangle PAB$, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, tenemos, por la proposición 3.3, que $\angle A \cong \angle B$.
Consideremos ahora los triángulos $\triangle PAM$ y $\triangle PBM$. Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ y $\angle A \cong \angle B$, tenemos, por LAL, que $\triangle PAM \cong \triangle PBM$. Ahora bien, $\angle PMA \cong \angle PMB$ y forman un par lineal; de donde, por la proposición 2.6, ambos deben ser rectos. Así, por la proposición 2.10, $\overleftrightarrow{PM} = l$ y, por tanto, $P$ está en $l$.

■

**Corolario 3.10.1** *Si dos puntos distintos de una recta equidistan de los extremos de un segmento, entonces esa recta es la mediatriz del segmento.*

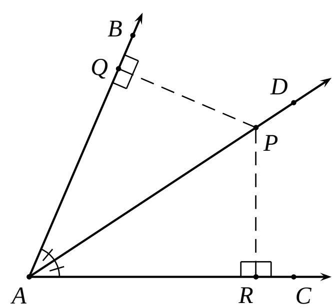
**Prueba** Consideremos un segmento $\overline{AB}$, una recta $m$ con dos puntos $P$ y $Q$ que equidistan de $A$ y $B$. Por la proposición 3.10, $P$ y $Q$ están en la mediatriz $l$ del segmento $\overline{AB}$. Por el Postulado de la recta, $\overleftrightarrow{PQ} = m$ y $\overleftrightarrow{PQ} = l$; de donde $m = l$.

■

El segundo, como aplicación del concepto de distancia entre un punto y una recta, y el criterio LAA de congruencia de triángulos, una *caracterización* del bisector de un ángulo, que nos será de utilidad en el momento en que queramos probar que las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto⟨25⟩.

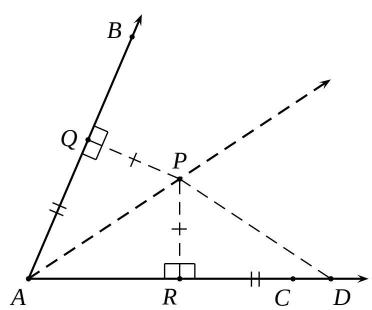
**Proposición 3.11 (Teorema del bisector)**
*El bisector de un ángulo, exceptuando su origen, coincide con el conjunto de todos los puntos del interior del ángulo que equidistan de los lados del ángulo.*

**Prueba** Consideremos un ángulo $\angle BAC$ y su bisector $\overrightarrow{AD}$.




Sea $P$ un punto en $\overrightarrow{AD}$ tal que $P \neq A$. Por el corolario 2.3.1 y la definición de bisector, $P$ está en el interior de $\angle BAC$. Sean $Q$ y $R$, respectivamente, los pies de las perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{AC}$ desde $P$. Por el ejercicio 2.20 y la proposición 3.7 tendremos que $Q$ está en $\overrightarrow{AB}$ y $Q \neq A$, así como $R$ está en $\overrightarrow{AC}$ y $R \neq A$. Por LAA tendremos que $\triangle PQA \cong \triangle PRA$; de donde $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

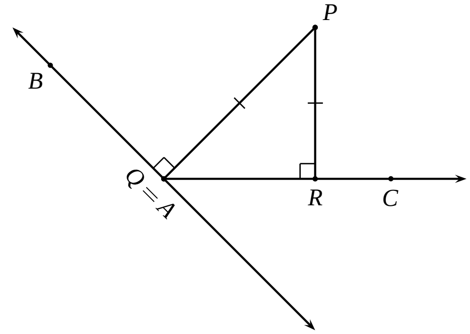
Hemos probado que todos los puntos de $\overrightarrow{AD}$ distintos del origen satisfacen la condición dada. Probemos ahora que los puntos que satisfacen esa condición deben estar en el bisector $\overrightarrow{AD}$.



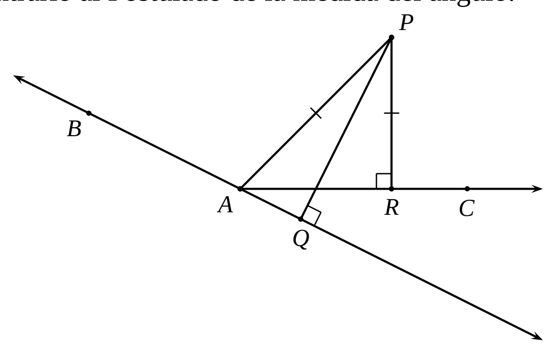

Sea $P$ un punto en el interior del ángulo $\angle BAC$ que equidista de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por la definición del interior de un ángulo, $P$ no está en $\overleftrightarrow{AB}$ ni $\overleftrightarrow{AC}$. Sean $Q$ y $R$, respectivamente, los pies de las perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{AC}$ desde $P$. Dedicaremos la última parte de la prueba a verificar que $Q$ está en $\overrightarrow{AB}$ y $Q \neq A$, así como $R$ está en $\overrightarrow{AC}$ y $R \neq A$.

Supongamos que eso es cierto. Por hipótesis y la definición 3.9, $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$. Tomemos, por (CS4), un punto $D$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{RA}$ tal que $\overline{RD} \cong \overline{AQ}$. Por LAL tendremos que $\triangle PRD \cong \triangle PQA$. Por tanto: $\overline{PD} \cong \overline{PA}$ y $\angle PDR \cong \angle PAQ$. Por la proposición 3.3, $\angle PDR \cong \angle PAR$. Por (CA1) tendremos que $\angle PAR \cong \angle PAQ$; con lo que $\overrightarrow{AP}$ biseca el ángulo $\angle BAC$. Como, por la proposición 2.5, sólo puede haber un bisector, tendremos, por la proposición 1.4, que $P$ está sobre $\overrightarrow{AD}$.

**Afirmación**: $Q$ está en $\overrightarrow{AB}$ y $Q \neq A$, así como $R$ está en $\overrightarrow{AC}$ y $R \neq A$.
Como $P$ está en el interior de $\angle BAC$, los ángulos $\angle BAP$ y $\angle PAC$ son adyacentes. Supongamos que $Q = A$. Así, $R \neq A$; pues en caso contrario, por la proposición 2.10, $A$, $B$ y $C$ serían colineales; contrario a la definición de ángulo. Por el Postulado del transportador tendremos que $m\angle PAC = m\angle BAC - m\angle BAP < 180 - 90 = 90$, es decir, $\angle PAC$ es agudo.




Por la proposición 3.7, $R$ está en $\overrightarrow{AC}$. Así, $\triangle PQR$ es tal que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$, $\angle PQR$ es agudo y $\angle PRQ$ es recto; contrario a la proposición 3.3. Por tanto, $Q \neq A$.
Intercambiando $\overrightarrow{AC}$ por $\overrightarrow{AB}$, y $R$ por $Q$, obtenemos que $R \neq A$.
Supongamos ahora que $Q$ no está en $\overrightarrow{AB}$. Por la proposición 3.7, $\angle PAB$ es obtuso. Por esta razón, $R$ está en $\overrightarrow{AC}$; pues, en caso contrario, por la proposición 3.7, $\angle PAC$ sería también obtuso; en cuyo caso, $m\angle BAC = m\angle BAP + m\angle PAC > 90 + 90 = 180$, del todo contrario al Postulado de la medida del ángulo.




Por el Teorema del ángulo externo, $\angle PAR$ es agudo. Así, $\triangle PAR$ es tal que $\overline{PA} \cong \overline{PR}$, $\angle PAR$ es agudo y $\angle PRA$ es recto; contrario a la proposición 3.3. Por tanto, $Q$ está en $\overrightarrow{AB}$.
Intercambiando $\overrightarrow{AC}$ por $\overrightarrow{AB}$, y $R$ por $Q$, obtenemos que $R$ está en $\overrightarrow{AC}$.

■

## Problemas del Capítulo 3

**3.1** ¿Cuál de los siguientes enunciados define un triángulo?

**(a)** *Un triángulo es la unión de tres segmentos que se intersectan en sus extremos.*

**(b)** *Un triángulo es un conjunto de puntos formado por tres segmentos no colineales dos a dos que se intersectan dos a dos en uno de sus extremos.*

**3.2** ¿Pueden dos ángulos de un triángulo tener un lado común?

**3.3** **(a)** ¿Será verdad que, si dos triángulos son iguales, entonces son congruentes?

**(b)** ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento: *como* $\triangle ABC = \triangle BAC$, *entonces* $\triangle ABC \cong \triangle BAC$?

**(c)** ¿Será verdad que, si dos triángulos son iguales, entonces cualquier correspondencia biunívoca entres sus vértices es una congruencia?

**(d)** Construya dos triángulos congruentes y distintos.⟨26⟩

**3.4** Muestre, con un ejemplo, que no puede haber ningún criterio LLA, ni AAA⟨27⟩, general de congruencia de triángulos.

**3.5** Pruebe que dos triángulos rectángulos son congruentes, si dos lados del uno son congruentes con dos lados de la misma naturaleza del otro, es decir, si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

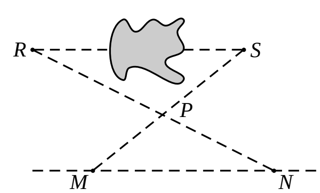
**(a)** **(cateto-cateto)**
los catetos del uno son congruentes con los del otro.

**(b)** **(hipotenusa-cateto)**
la hipotenusa y un cateto del uno son congruentes con la hipotenusa y un cateto del otro.

**3.6** **(a)** Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan, entonces los segmentos que unen sus extremos, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (o $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$), son congruentes.

**(b)** Si $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ se bisecan en $N$, y $\overline{AC}$ y $\overline{BQ}$ se bisecan en $K$, pruebe que $\overline{PC} \cong \overline{QC}$.

**(c)** Explique cómo es posible que dos hombres con sólo una cinta métrica puedan medir la distancia entre los puntos $R$ y $S$ que se encuentran a lados opuestos de un lago⟨28⟩.



**3.7** Pruebe que:

**(a)** la hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de sus catetos.

**(b)** cada lado de un triángulo es más largo que cualquiera de sus proyecciones sobre otro lado (al que no es perpendicular).

**(c)** dos lados de un triángulo son congruentes si, y sólo si, sus proyecciones sobre el tercero de los lados son congruentes.⟨29⟩

**(d)** un lado de un triángulo es mayor que otro si, y sólo si, su proyección sobre el tercer lado es mayor que la del otro.

**3.8** Pruebe que cada lado de un triángulo está, excepto sus extremos, en el interior del ángulo opuesto.

**3.9** **(Caracterizaciones del interior de un triángulo)**
Pruebe que un punto $D$ está en el interior del triángulo $\triangle ABC$ si, y sólo si, se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

**(a)** está en el interior de dos de sus ángulos.

**(b)** $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$ en un punto $P$ tal que $A$-$D$-$P$ y $B$-$P$-$C$.

**3.10** Pruebe que:

**(a)** si, en un triángulo $\triangle ABC$, $D$ es un punto tal que $B$-$D$-$C$, entonces $\overline{AD}$ es más corto que $\overline{AB}$ o que $\overline{AC}$.

**(b)** si, en un triángulo $\triangle ABC$, $D$ es un punto tal que $B$-$D$-$C$, y $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, entonces $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$.

**(c)** el segmento que une dos puntos de un triángulo no es más largo que el lado más largo del triángulo.

**(d)** el segmento que une dos puntos interiores de un triángulo es más corto que el lado más largo del triángulo.

**3.11** El ***perímetro*** de un triángulo es la suma de las longitudes de sus lados.
El ***semiperímetro*** de un triángulo es la mitad de la suma de las longitudes de sus lados (es decir, la mitad del perímetro).
Si $D$ es un punto interior de $\triangle ABC$, pruebe que:

**(a)** $\angle BDC$ es más grande que $\angle BAC$.

**(b)** no puede cumplirse a la vez que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

**(c)** la suma de las distancias desde $D$ a los extremos de un lado, es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

**(d)** la suma de las distancias desde $D$ hasta los vértices del triángulo es menor que el perímetro del triángulo, y mayor que su semiperímetro.

**3.12** Pruebe que el perímetro de un triángulo es mayor que la suma de sus tres alturas.

**3.13** Si la mediana y la bisectriz desde un vértice de un triángulo coinciden, entonces ella es también altura y los lados que parten de dicho vértice son congruentes.

**3.14** **(Concurrencia de las bisectrices e incentro)**
Pruebe que:

**(a)** dos bisectrices de un triángulo se cortan en un punto que equidista de sus tres lados.
**(b)** las tres bisectrices de un triángulo **concurren**⟨30⟩ en un punto que equidista de sus tres lados.
Este punto se llama ***el incentro*** del triángulo. Como veremos en el Capítulo 9, el nombre de este punto proviene del hecho de que desde él se puede trazar un círculo inscrito en el triángulo (es decir, tangente a sus tres lados).⟨31⟩

**3.15** **(a)** Construya un triángulo isósceles cuya base sea más corta que sus laterales.
**(b)** Construya un triángulo isósceles cuya base sea más larga que sus laterales.
**(c)** Construya un triángulo escaleno.
**(d)** Construya un triángulo acutángulo.
**(e)** Construya un triángulo obtusángulo.

**3.16** Muestre, mediante algún ejemplo, que las partes (a) y (b) del Teorema de la bisagra no son ciertas, si dos lados de uno de los triángulos no fueran congruentes con dos lados del otro.

**3.17** Si $C$ y $D$ son puntos en lados opuestos de una recta $\overleftrightarrow{AB}$, pruebe que $\overleftrightarrow{AB}$ es mediatriz de $\overline{CD}$ si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(a)** $\angle CAB \cong \angle DAB$ y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.
**(b)** $\angle CAB \cong \angle DAB$ y $\angle CBA \cong \angle DBA$.

**3.18** **(a)** Fijado un punto $Q$ en la mediatriz $l$ del segmento $\overline{BC}$, pruebe que, si $A$ es un punto cualquiera, entonces $AQ+QB = AQ+QC$.
**(b)** Si $A$ y $B$ son dos puntos en lados opuestos de una recta $l$, ¿cuál es el punto $P$ de $l$ para el que la suma $AP+PB$ es mínima?
**(c)** Si $A$ y $B$ son dos puntos distintos en el mismo lado de una recta $l$, ¿cuál es el punto $P$ de $l$ para el que la suma $AP+PB$ es mínima?
**(d)** Si $A$ y $B$ son dos puntos distintos fuera de una recta $l$, verifique que el punto $P$ de $l$ para el que la suma $AP+PB$ es mínima satisface que los dos ángulos que forman $\overline{AP}$ y $l$ son congruentes a los dos ángulos que forman $\overline{BP}$ y $l$.⟨32⟩

**3.19** Pruebe la proposición 3.6.

**3.20** ¿Puede alguno de los segmentos característicos de un triángulo coincidir con algún lado del triángulo?; ¿y dos de ellos?; ¿y los tres?

**3.21** Pruebe que:

**(a)** la suma de las medidas de dos ángulos de un triángulo es menor que 180.
**(b)** todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos.
**(c)** si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces sus ángulos opuestos son agudos (y, por tanto, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos, así como los tres ángulos de un triángulo equilátero).
**(d)** los ángulos distintos del recto, en un triángulo rectángulo, son agudos.

**3.22** Pruebe que dos triángulos rectángulos son congruentes, si un lado y un ángulo distinto del recto del uno son congruentes con un lado de la misma naturaleza y un ángulo, con la misma ubicación respecto al lado, del otro.

**3.23** Considere el triángulo $T_2$ cuyos vértices son los puntos medios de un triángulo $T_1$. Pruebe que, si dos lados de $T_1$ son congruentes, entonces dos lados de $T_2$ son congruentes (y, por tanto, si $T_1$ es isósceles o equilátero, entonces $T_2$ es isósceles o equilátero).

**3.24** Si dos lados de un triángulo son congruentes, pruebe que la mediana, la bisectriz y la altura sobre el tercer lado coinciden (y, por tanto, la mediana, la bisectriz y la altura sobre la base de un triángulo isósceles coinciden, así como la mediana, la bisectriz y la altura sobre cualquier lado de un triángulo equilátero).

**3.25** Si dos lados de un triángulo son congruentes, pruebe que las medianas sobre ellos son congruentes (y, por tanto, las medianas sobre los laterales de un triángulo isósceles son congruentes, así como las tres medianas de un triángulo equilátero).
*En los ejercicios 5.5.(b) y 6.39.(b) probaremos que el recíproco de esta proposición también es cierto; en este último probaremos además que, si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces sobre el lado más pequeño cae la mediana más larga.*

**3.26** Si dos lados de un triángulo son congruentes, pruebe que las bisectrices sobre ellos son congruentes (y, por tanto, las bisectrices sobre los laterales de un triángulo isósceles son congruentes, así como las tres bisectrices de un triángulo equilátero).
*En el ejercicio 6.45.(b) probaremos que el recíproco de esta proposición también*

*es cierto; allí probaremos además que, si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces al ángulo más pequeño corresponde la bisectriz más larga.*

**3.27** Pruebe que dos lados de un triángulo son congruentes si, y sólo si, las alturas sobre ellos son congruentes (y, por tanto, un triángulo es isósceles si, y sólo si, tiene exactamente dos alturas congruentes; y un triángulo es equilátero si, y sólo si, las tres alturas son congruentes).

**3.28** Si la mediana y la altura desde un vértice de un triángulo coinciden, pruebe que ella es también bisectriz y los lados que parten desde dicho vértice son congruentes.

**3.29** Pruebe que:

**(a)** si la bisectriz y la altura desde un vértice de un triángulo coinciden, entonces ella es también mediana y los lados que parten desde dicho vértice son congruentes.

**(b)** el bisector de un ángulo cualquiera de un triángulo escaleno no puede ser perpendicular al lado opuesto, es decir, no puede contener la altura.

**3.30** Pruebe que:

**(a)** las medianas desde vértices correspondientes de dos triángulos congruentes son congruentes.

**(b)** las bisectrices de ángulos correspondientes de dos triángulos congruentes son congruentes.

**(c)** las alturas desde vértices correspondientes de dos triángulos congruentes son congruentes.

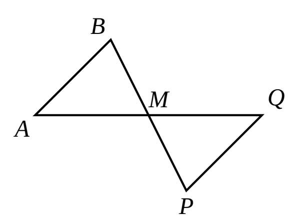
**3.31** Pruebe que:

**(a)** si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{BP} \cong \overline{AQ}$, entonces:

**(i)** $\angle A \cong \angle P$.

**(ii)** $\triangle ABM \cong \triangle PQM$.

**(b)** si $\angle P$ es más grande que $\angle Q$ y $\angle B$ es más grande que $\angle A$, pruebe que $\overline{PB}$ es más corto que $\overline{AQ}$.




**3.32** Pruebe que la mediana sobre un lado de un triángulo es menor que la semisuma de las longitudes de los otros dos lados.

**3.33** Si, en el triángulo $\triangle ABC$, $\overline{AD}$ es una bisectriz, pruebe que $\overline{AC}$ es más largo que $\overline{CD}$.

**3.34** Sea $\triangle HRE$ tal que $\overline{RH} \cong \overline{RE}$. Sean $M$ y $K$ dos puntos tales que $R$-$H$-$M$ y $R$-$E$-$K$. Sea $T$ el punto de intersección de $\overline{EM}$ y $\overline{HK}$. Si $\angle HRT \cong \angle ERT$, pruebe que $\triangle MTH \cong \triangle KTE$.

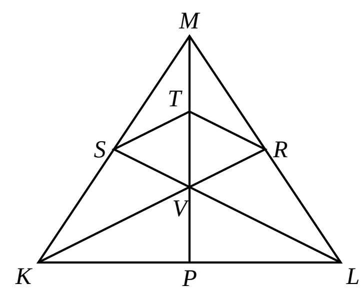
**3.35** Dos lados de un triángulo son congruentes si, y sólo si, equidistan del punto medio del tercer lado.

**3.36** **(Criterios de congruencia para triángulos isósceles)**
Pruebe que dos triángulos isósceles son congruentes bajo cualquiera de las siguientes condiciones:

**(a)** Si un lado y el ángulo de la cúspide del uno son congruentes con un lado de la misma naturaleza y el ángulo de la cúspide del otro.
**(b)** Si un lado y un ángulo de la base del uno son congruentes con un lado de la misma naturaleza y un ángulo de la base del otro.
**(c)** Si un lateral y la base del uno son congruentes con un lateral y la base del otro.

**3.37** **(a)** Sea $\triangle KGH$ un triángulo con $\overline{KG} \cong \overline{KH}$. Sea $P$ un punto de $\overleftrightarrow{GH}$, que no está en $\overline{GH}$. Pruebe que $\overline{KP}$ es más largo que $\overline{KG}$ (y, por tanto, $\overline{KP}$ es también más largo que $\overline{KH}$).
**(b)** Use la parte anterior para idear un procedimiento para construir un triángulo escaleno.

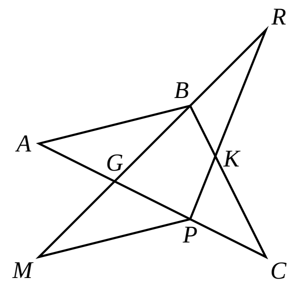
**3.38** Sea $\triangle KVL$ un triángulo con $\overline{KV} \cong \overline{LV}$. Si $P$ es punto medio de $\overline{KL}$, pruebe que $\overline{ST} \cong \overline{RT}$.




**3.39** Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. Si los bisectores de $\angle A$ y $\angle B$ se cortan en el punto $F$, pruebe que $\overleftrightarrow{CF}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

**3.40** Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\overline{BA} \cong \overline{BC}$. Sea $D$ un punto en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ opuesto al de $C$, y tal que $\triangle ABD$ equilátero. Sea $E$ un punto en el lado de $\overleftrightarrow{BC}$ opuesto al de $A$, y tal que $\triangle BCE$ es equilátero. Pruebe que $\overline{AE} \cong \overline{CD}$.

**3.41** Si $G$ y $B$ trisecan (es decir, dividen en tres partes de la misma magnitud) a $\overline{MR}$, $G$ y $P$ trisecan a $\overline{AC}$, y $\overline{AG} \cong \overline{BG}$, pruebe que $\angle R \cong \angle C$.

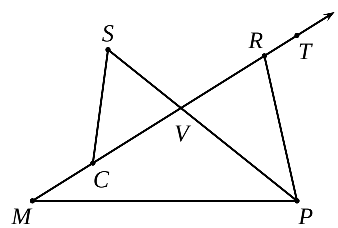



**3.42** La recta $l$ es la mediatriz de $\overline{BC}$, y $A$ es el punto medio de $\overline{BC}$. Los puntos $K$ y $G$ están al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; $K$ al mismo lado de $l$ que $B$, y $G$ al mismo lado de $l$ que $C$, de tal manera que $\angle BAK \cong \angle CAG$. La perpendicular a $\overline{BC}$ en $B$ corta $\overrightarrow{AK}$ en $D$, y la perpendicular a $\overline{BC}$ en $C$ corta $\overrightarrow{AG}$ en $E$. Pruebe que, si $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ se intersectan, lo hacen en $l$.

**3.43** Si una recta $m$ no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo $\triangle ABC$, y corta su lado $\overline{AB}$, pruebe que $m$ corta también uno y sólo uno de los otros dos lados, $\overline{BC}$ o $\overline{AC}$.

**3.44** Pruebe que:

**(a)** Si $\overrightarrow{PS}$ biseca $\angle RPM$, entonces $\angle SCM$ es más grande que $\angle SPR$.
**(b)** Si $\angle SCV \cong \angle PRV$, entonces $\angle PRT$ es más grande que $\angle S$.




**3.45** Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se intersectan en el punto $P$ (distinto de sus extremos), y $Q$ es un punto distinto de $P$, pruebe que $QA+QB+QC+QD > PA+PB+PC+PD$.
(Es decir, el punto de corte es el punto cuya suma de distancias a los extremos de los segmentos es mínima).

**3.46** Si dos lados de un triángulo son congruentes y sus puntos equidistan de un punto del tercer lado, pruebe que ese punto es el punto medio de ese lado.

**3.47** Si una recta corta el interior de un triángulo, pruebe que corta al menos dos de los lados.

**3.48** **(a)** ¿Es convexo un triángulo?
**(b)** ¿Es convexo el interior de un triángulo?
**(c)** ¿Es convexo el exterior de un triángulo?
**(d)** ¿Puede un punto estar en el exterior de un triángulo y, a su vez, en el interior de uno de sus ángulos?
**(e)** ¿Puede un punto estar en el exterior de un triángulo y no estar en el interior de ninguno de sus ángulos?

**3.49** **(a)** Si un triángulo tiene sólo un vértice en común con una recta, pruebe que el interior de ese triángulo está contenido en un lado de esa recta.
**(b)** Si un triángulo está contenido en un lado de una recta, pruebe que el interior de ese triángulo está contenido en ese mismo lado de esa recta.

**3.50** Sean $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ dos rectas que se cortan en $B$, de manera tal que $A$-$B$-$C$. Las perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$, desde $A$ y $C$, intersectan $\overleftrightarrow{BD}$ en $P$ y $Q$, respectivamente. Pruebe que $P$ y $Q$ no están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.

**3.51** En el triángulo $\triangle ABC$, tomamos un punto $F$ tal que $A$-$F$-$C$, y un punto $D$ tal que $A$-$D$-$B$, y de tal manera que $\overline{FC} \cong \overline{DB}$. Pruebe que $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{AC}$ si, y sólo si, $\overline{FB}$ es más largo que $CD$.

# Comentarios del Capítulo 3

⟨1⟩ Nos detendremos por un tiempo en el estudio de los triángulos en sí mismos debido a que éstos son a la Geometría, lo que los números primos son a la Aritmética, en el sentido de que, el estudio de los principales conceptos de la Geometría comienza, por lo general, con el caso particular del triángulo.

⟨2⟩ Ver el ejercicio 1.13.(a).

⟨3⟩ Ver la observación 2.1.(c).

⟨4⟩ Ver el ejercicio 1.13.(b).

⟨5⟩ En el ejercicio 3.9 obtendremos, por medio del Teorema de la barra transversal, dos *caracterizaciones* del interior de un triángulo; además, esos resultados son los que nos permitirán verificar que el interior de un triángulo es, efectivamente, una figura geométrica (es decir, que es no vacío) y, en verdad, que tiene un número indefinido de puntos.

⟨6⟩ La ***congruencia*** es la relación básica del estudio de la Geometría. Su importancia se manifiesta en la producción industrial (en serie) de objetos compuestos de múltiples piezas, en caso de querer tener la posibilidad de reemplazar partes de una máquina, por ejemplo.
Guiados por esta manera de concebir la congruencia, hemos precisado dos casos entre figuras geométricas: el caso más sencillo de todos, el de segmentos, en el que sólo importa el tamaño, pues todos tienen la misma forma; el segundo, el de ángulos, donde vimos que, también, importa sólo su tamaño (pues éste determina la forma).
La palabra *congruencia* es heredada del latín. Está compuesta por la preposición *cum*, que significa: *con, al mismo tiempo que, junto a*; y la otra parte deriva del verbo *ruo* (y no de *gruo*, pues el significado de éste es *gritar*), que significa: *lanzarse, precipitarse, correr, caer, proyectar*. De tal manera que el significado de la palabra *congruencia* es, literal y etimológicamente: *coincidir, concordar, convenir*; y es de este significado de donde tomaremos la idea que precisaremos.
Por otro lado, el símbolo usual para representar la congruencia es “$\cong$”, que se puede ver como dividido en dos partes: la parte de arriba, es decir, el símbolo “$\backsim$”, que indica igualdad de forma; y el símbolo “$=$” que indica igualdad de tamaño.

⟨7⟩ De esta manera vemos que el geómetra, lejos de interesarse por la ubicación precisa de un objeto en el plano, presta su atención fundamentalmente a su tamaño y forma. Así, para hacer alguna ilustración respecto a los triángulos, da lo mismo que el triángulo se dibuje en la hoja de papel o en el pizarrón, puesto que no es de su ubicación de lo que se habla, sino de propiedades que son del todo independientes de ella.

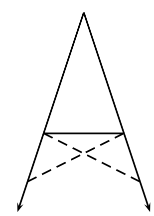
⟨8⟩ Tal como dijimos en el comentario de la Nota ⟨16⟩ del Capítulo 1, esto significa que a cada uno de los vértices $A$, $B$ y $C$, corresponde uno de los vértices $D$, $E$ y $F$, y viceversa; o, en menos palabras, a cada vértice de uno de los triángulos corresponde uno, y sólo uno, de los vértices del otro triángulo.

⟨9⟩ Todas las combinaciones de tres en tres (con repetición) posibles de las letras L y A son: AAA, AAL, ALA, LAA, ALL, LAL, LLA, LLL. Si ellas representaran, respectivamente, un lado y un ángulo de un triángulo, tendríamos que las correspondencias AAL y LAA, así como las ALL y LLA, serían similares. De manera que tendríamos, propiamente hablando, seis tipos no similares de correspondencias entre los vértices de dos triángulos: AAA, ALA, LAA, LLA, LAL y LLL. Veremos, en el ejercicio 3.4, que AAA y LLA no determinan en general congruencias entre triángulos. Por tanto, LAL, ALA, LLL y LAA son todos los tipos de correspondencias entre vértices de dos triángulos que resultan ser congruencias.

⟨10⟩ Este criterio de congruencia de triángulos nos permitirá afirmar que, si conocemos las longitudes de dos lados de un triángulo y la medida del ángulo comprendido por ellos, debemos estar en capacidad de conocer la longitud del tercer lado y las medidas de los otros dos ángulos. Ciertamente esto es así, pero debemos esperar hasta que introduzcamos la noción de semejanza de triángulos en el Capítulo 6, la cual depende fundamentalmente del último de los postulados de nuestra teoría (el *Postulado de las paralelas*), para corroborarlo (ver el ejercicio 6.53).

⟨11⟩ Tal como hemos dicho en la nota anterior, si conocemos las medidas de dos ángulos de un triángulo y la longitud del lado comprendido por ellos, debemos estar en capacidad de conocer la medida del tercer ángulos y las longitudes de los otros dos lados. Ciertamente esto es así, y lo justificaremos en el Capítulo 6 (ver el ejercicio 6.53).

⟨12⟩ La prueba que presentamos de esta proposición se debe a un matemático poco conocido, de principio de nuestra era, llamado *Pappus*. Se cuenta que al alimentar la base de un computador capaz de realizar operaciones de deducción lógica con los elementos básicos de la Geometría, ejecutó la prueba de este resultado tal y como lo hizo Pappus; es de pensar, entonces, que quizás es la prueba más sencilla que se puede realizar. La prueba de Euclides ocupa más de una página impresa, y va acompañada de la siguiente figura, que le dio el nombre de *Teorema del puente de los burros* (el *pons asinorum*), no sabemos bien si por la forma de ésta, o por la sencillez del resultado.



⟨13⟩ Además, este resultado da garantía de que los triángulos son rígidos, en el sentido de que es imposible cambiar los ángulos (la forma) sin cambiar a su vez el tamaño de los lados. Empíricamente se corrobora este hecho uniendo los extremos de tres varitas de madera con clavos de tal manera que dos a dos puedan girar; veremos que después de unir las tres (formando un triángulo), ya no se mueve (se vuelve rígido). Por contraste, cuando hacemos lo mismo con cuatro varitas de madera, constatamos que los cuadriláteros no son rígidos, ya que pueden cambiar la forma sin cambiar el tamaño de sus lados. Es por esta razón que se usan travesaños diagonales en la construcción de puertas y de diversos tipos de muebles.

⟨14⟩ Tal como hemos dicho anteriormente, si conocemos las longitudes de los tres lados de un triángulo, debemos estar en capacidad de conocer las medidas de sus tres ángulos. Ciertamente esto es así, y lo justificaremos en el Capítulo 6 (ver el ejercicio 6.53).

⟨15⟩ El Teorema del ángulo externo nos permitirá obtener, además, la negación de la proposición 3.3 con precisión, la noción de distancia entre un punto y una recta, la Desigualdad triangular y el Teorema de la bisagra.

⟨16⟩ Tal como hemos dicho anteriormente, si conocemos la longitud de un lado de un triángulo y la medida de dos ángulos, debemos estar en capacidad de conocer longitudes de los otros dos lados y la medida del tercer ángulo. Ciertamente esto es así, y lo justificaremos en el Capítulo 6 (ver el ejercicio 6.53).

⟨17⟩Ya hemos probado, en la proposición 2.10, que por un punto de una recta pasa una única perpendicular.

⟨18⟩En virtud de este resultado, las categorías de triángulos definidos en las partes (c) y (d) de la definición 3.7 coinciden.

⟨19⟩Si tenemos asegurada la existencia de un ángulo recto, siempre podremos construir un triángulo rectángulo: basta con tomar sendos puntos en los rayos que conforman el ángulo recto, distintos del vértice, y construir el triángulo formado por esos dos puntos y el vértice del ángulo recto; y con esto podemos construir también triángulos isósceles y escalenos.

⟨20⟩Recuerde que la proposición 3.3 dice que: *dos lados de un triángulo son congruentes si, y sólo si, sus ángulos opuestos son congruentes*. Su negación sería entonces: *dos lados de un triángulo no son congruentes si, y sólo si, sus ángulos opuestos no son congruentes*; la cual se puede dividir en las dos proposiciones siguientes: *si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces sus ángulos opuestos no son congruentes* y, *si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces sus lados opuestos no son congruentes*. Note que la negación pura y simple de la proposición 3.3 no nos dice nada sobre la relación existente entre los lados, ni entre los ángulos, que dejan de ser congruentes; y es por esta razón que decimos que ***precisamos*** a lo que da lugar su negación.

⟨21⟩Tres números reales positivos $a$, $b$ y $c$ pueden representar las longitudes de los lados de un triángulo, sólo si la suma de cualesquiera dos de ellos es mayor que el tercero; en otras palabras, ésta es una *condición necesaria* para ese fin. Así, por ejemplo, no podrá haber ningún triángulo cuyos lados midan 2, 3 y 5. Más adelante (Capítulo 6) probaremos que ésta es también una *condición suficiente*, exponiendo la manera en que se debe construir un triángulo cuyos lados midan $a$, $b$ y $c$ (ver el ejercicio 6.18).
Por otro lado, note que este resultado no permitiría que se cumpliera la tercera condición de la definición de la relación de Interposición, y no se cumpliera la segunda, si conservamos la escala.

⟨22⟩Esta propiedad restringe el uso indiscriminado de unidades de medida diversas en las rectas, ya que establece una conexión entre las escalas que se usan sobre las rectas determinadas por los vértices de un triángulo. Aclarando un poco más: si, en un triángulo $\triangle ABC$, usamos una escala en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, otra en la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y otra más en la recta $\overleftrightarrow{BC}$, éstas están sometidas, por lo menos, a la restricción de que todavía debe cumplirse que $AC \leqslant AB + BC$.

⟨23⟩Considere la situación en la que tenemos una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos lados del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. Los criterios LAL y LLL nos permiten establecer la siguiente equivalencia:
*el ángulo comprendido entre los dos lados en cuestión del primer triángulo es congruente con su correspondiente en el segundo triángulo si, y sólo si, el tercer lado del primer triángulo es congruente con el tercer lado del segundo triángulo*.
La negación de esta equivalencia se puede dividir en las dos proposiciones siguientes:
*si el ángulo comprendido entre los dos lados en cuestión del primer triángulo no es congruente con su correspondiente en el segundo triángulo, entonces el tercer lado de uno de ellos debe ser más largo que el tercer lado del otro*; y,
*si el tercer lado del primer triángulo no es congruente con el tercer lado del segundo triángulo, entonces el ángulo comprendido entre los dos lados en cuestión de uno de ellos debe ser más grande que el ángulo comprendido entre los dos lados del otro.*; y es por esta razón que decimos

que ***precisamos*** a lo que da lugar su negación.

⟨24⟩ Estableceremos una condición que nos permitirá prescindir del transportador para verificar que una recta es la mediatriz de un segmento (es decir, de tener que medir un ángulo de 90 con vértice en el punto medio del segmento), ya que podremos hacerlo, bien con sólo una regla, si se nos permite, o con un canto recto y un compás. Pero podemos decir más aún: es esta caracterización de la mediatriz de un segmento la que da garantía del método que hemos ilustrado para construir una recta perpendicular a otra por uno de sus puntos (ver la Nota ⟨14⟩ del Capítulo 2).

⟨25⟩ Este resultado nos permitirá prescindir del transportador para verificar que un rayo es el bisector de un ángulo (es decir, de tener que medir el ángulo y su mitad), ya que podremos hacerlo, bien con sólo una regla, si se nos permite, o con un canto recto y un compás.

⟨26⟩ Generalmente se utiliza, para este fin, el criterio LAL de congruencia de triángulos; y es por esta razón que lo escogemos como postulado. Pero, si tenemos tres palitos con los que se puede construir un triángulo, se utiliza el criterio LLL.

⟨27⟩ Como se podrá sospechar, para poder construir dos triángulos cuyos ángulos tengan las mismas medidas, necesitaremos del próximo postulado (el Postulado de las paralelas), el cual será presentado en el siguiente capítulo.

⟨28⟩ Podría el expositor hacer este experimento en clase con los estudiantes usando, en lugar del lago, una de las paredes del salón de clases y un punto a cada lado de la pared. Después de introducir el Postulado de las paralelas obtendremos las razones del método más usual en la solución de este problema.

⟨29⟩ Compare este resultado con el de los ejercicios 3.24 y 3.28.

⟨30⟩ Esto quiere decir que ***pasan a la vez por*** o ***se cortan en***.

⟨31⟩ En el Capítulo 4 veremos que las tres mediatrices y las tres rectas que determinan las alturas también concurren en un punto (ver los ejercicios 4.25 4.27); y en el Capítulo 5 veremos que lo mismo sucede con las medianas (ver los ejercicios 5.5).

⟨32⟩ Este resultado es de gran utilidad en la Física, particularmente en la óptica, cuando se trata de determinar un punto $P$ en un espejo plano en el que debe incidir un rayo de luz con fuente en el punto $A$, para que éste se refleje en el punto $B$. También es útil para averiguar el punto $P$ de la banda de una mesa de billar en el que debe rebotar la bola que está ubicada en el punto $A$, para que haga contacto con otra bola ubicada en el punto $B$.

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 3

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 3.1 al 3.18; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 3.1 al 3.7, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 3.8 al 3.10, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 3.11 al 3.18.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 3.19 al 3.51; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 3.19 al 3.33, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 3.34 al 3.45, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 3.46 al 3.51.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**3.5:** para el caso hipotenusa-cateto, haga una copia de uno de los triángulos sobre el cateto que es congruente del otro y use el criterio LAL, la proposición 3.3 y el criterio LAA.

**3.7:** para la parte **(c)**, en el caso en que los ángulos de la base correspondiente sean agudos, tome $E$ en en el rayo opuesto a $\overrightarrow{DB}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{DB}$.

**3.11:** para la parte **(a)**, trace $\overrightarrow{AD}$ y use el Teorema del ángulo externo; para la parte **(c)**, use la Desigualdad del triángulo convenientemente, prolongando uno de los segmentos interiores.

**3.14:** para la parte **(a)**, use el Teorema de la barra transversal y el Teorema del bisector.

**3.15:** para la parte **(c)**, tome, en un triángulo isósceles $\triangle ABC$ cuya base $\overline{BC}$ sea más corta que los laterales, un punto $D$ tal que $B$-$A$-$D$ y pruebe que $\triangle DBC$ es escaleno.

**3.18:** para la parte **(c)**, trace la recta $m$ perpendicular a $l$ desde $B$; llame $M$ al punto de corte entre ambas; llame $C$ al punto del rayo opuesto a $\overrightarrow{MB}$ tal que $\overline{MB} \cong \overline{MC}$; tome $P$ el punto de corte de $\overline{AC}$ y $l$.

**3.32:** tomando la mediana desde $A$ y llamando $M$ al punto medio de $\overline{BC}$, extienda $\overline{AM}$ hasta $D$, de manera tal que $\overline{MD} \cong \overline{MA}$.

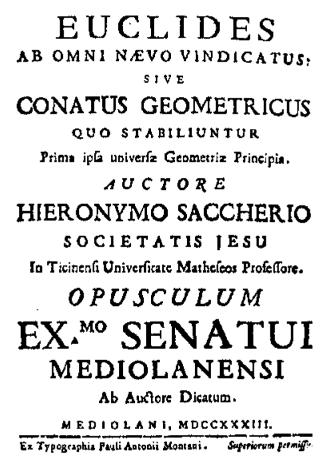
**3.35:** para ($\Leftarrow$), use el Teorema del bisector, o use el criterio hipotenusa-cateto.

**3.43:** $A$ y $B$ están en lados opuestos de $m$; $C$, al no estar en $m$, está en uno de los lados.

En este punto del desarrollo de la Geometría corresponde tomar una decisión: aceptar el *Postulado de las paralelas* como parte de sus postulados (tal como lo haremos en el siguiente capítulo), dando lugar al tipo de Geometría que nosotros desarrollaremos, y que es llamada generalmente *Geometría euclidiana*, en honor a Euclides que lo hizo así por primera vez de manera formal; o proseguir su desarrollo sin hacer uso de esta proposición, lo cual daría lugar a un tipo de Geometría que se ha llamado comúnmente *Geometría Absoluta*.

Con respecto a la Geometría euclidiana debemos decir que el punto de vista que se aborde da lugar a una división de ésta en dos: la *Geometría Métrica*, en la cual se introduce desde el principio la medición de distancias entre puntos, para inferir todo lo referente a las congruencias (tal como lo hemos hecho en nuestro desarrollo), cuyo pionero fue George David Birkhoff; y la *Geometría Sintética*, en la que no se introduce de ninguna manera la noción de distancia entre puntos (sino que más bien se construyen "los números reales" por añadidura), aceptando como términos primitivos de su desarrollo las relaciones de congruencia básicas, de la cual hemos hecho bastantes aclaratorias en los comentarios de los capítulos anteriores, y cuyos representantes más destacados son Euclides mismo y el matemático alemán David Hilbert.

La Geometría Absoluta, por su parte, fue desarrollada formalmente por primera vez por el sacerdote Jesuita y geómetra italiano ***Giovanni Girolamo Saccheri*** (05/09/1667 San Remo - 25/10/1733 Milán) quien, como la mayoría de los geómetras de su tiempo, no estaba satisfecho con la formulación euclidiana del Postulado de las paralelas; pensaba, como los otros, que este postulado se podía inferir del resto de los postulados de la Geometría. Su desarrollo dio forma a un extenso libro llamado *Euclides ab omne naevo vindicatus* (*Euclides librado de toda culpa*), y publicado en 1733[1], en el que pretendió dar una "prueba" de dicho postulado, dando lugar a la comedia más notable de la historia de las matemáticas.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

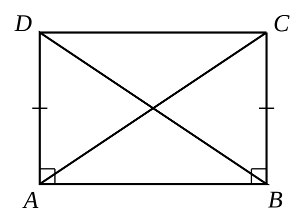
Portada de la obra original de Saccheri

Es claro que la supuesta prueba era falaz, pero sin embargo ofreció como parte de su arsenal una cantidad considerable de resultados insospechados hasta ese momento en la Geometría que, librándolos de la parte errónea del libro, da lugar al primer tratado de Geometría Absoluta; y es por esta obra que se honra justamente a Saccheri, sirviendo su nombre de epónimo a un tipo de figuras geométricas conocida como los *Cuadriláteros de Saccheri*, que terminan siendo rectángulos en la Geometría euclidiana. Como muestra de lo que se pudiera hacer sin el Postulado de las paralelas en Geometría ofrecemos el siguiente

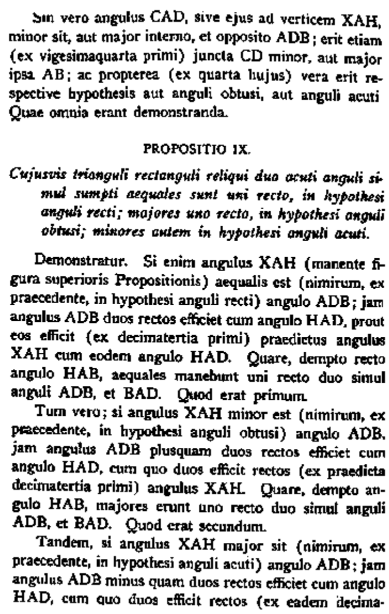
[1] Otras obras de este mismo autor son: *Logica demonstrativa*, publicada en 1697, en el que trata sobre definiciones, postulados y demostraciones en el estilo de Euclides; *Neo-statica*, publicado en 1708; *Quaesita geometrica*, publicada en 1693.

resultado notable: *La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor o igual que 180.*

Lo cómico de este capítulo de la historia de las matemáticas, y que de haber tenido éxito se hubiera convertido en trágico, es que su propósito no era de ninguna manera una reivindicación de Euclides a los ojos de ningún matemático moderno, pues hubiera significado, simplemente, que el postulado era redundante; cosa que es todo lo contrario de una virtud en un sistema de postulados.




Cuadrilátero de Saccheri.
Probó, usando LAL y LLL, que $\angle D \cong \angle C$



Sin vero angulus CAD, sive ejus ad verticem XAH, minor sit, aut major interno, et opposito ADB; erit etiam (ex vigesimaquarta primi) juncta CD minor, aut major ipsa AB; ac propterea (ex quarta hujus) vera erit respective hypothesis aut anguli obtusi, aut anguli acuti Quae omnia erant demonstranda.

PROPOSITIO IX.

*Cujusvis trianguli rectanguli reliqui duo acuti anguli simul sumpti aequales sunt uni recto, in hypothesi anguli recti; majores uno recto, in hypothesi anguli obtusi; minores autem in hypothesi anguli acuti.*

Demonstratur. Si enim angulus XAH (manente figura superioris Propositionis) aequalis est (nimirum, ex praecedente, in hypothesi anguli recti) angulo ADB; jam angulus ADB duos rectos efficiet cum angulo HAD, prout eos efficit (ex decimatertia primi) praedictus angulus XAH cum eodem angulo HAD. Quare, dempto recto angulo HAB, aequales manebunt uni recto duo simul anguli ADB, et BAD. Quod erat primum.

Tum vero; si angulus XAH minor est (nimirum, ex praecedente, in hypothesi anguli obtusi) angulo ADB, jam angulus ADB plusquam duos rectos efficiet cum angulo HAD, cum quo duos efficit rectos (ex praedicta decimatertia primi) angulus XAH. Quare, dempto angulo HAB, majores erunt uno recto duo simul anguli ADB, et BAD. Quod erat secundum.

Tandem, si angulus XAH major sit (nimirum, ex praecedente, in hypothesi anguli acuti) angulo ADB; jam angulus ADB minus quam duos rectos efficiet cum angulo HAD, cum quo duos efficit rectos (ex eadem decima-

Una página de la obra de Saccheri

Dos cosas son fundamentales en una teoría: que sus postulados sean *consistentes* (en el sentido de que no se contradigan entre sí), pues en caso contrario no podríamos ofrecer ningún *modelo* de la supuesta teoría, es decir, un sistema en el que se satisfagan todos sus postulados; que sus postulados sean *independientes* (en el sentido de que ninguno de ellos se puede deducir de los otros), pues en caso contrario tendríamos un postulado *redundante*. Por cierto, para probar la independencia de un postulado respecto a los otros es preciso dar un sistema en el que se cumplan todos los demás y no éste en particular.

En el siglo XIX se demostró que: *si los postulados del sistema de los números reales son consistentes, entonces los postulados de la Geometría Sintética son consistentes*; y luego, que *el Postulado de las paralelas es independiente de los demás postulados de la Geometría* (que constituye propiamente una reivindicación de Euclides, como se lo propuso Saccheri en el título de su libro), del único modo posible: descubriendo Geometrías donde todos los postulados de la Geometría sintética se cumplen, excepto el de las paralelas. Hablaremos un poco de ellas al final del siguiente capítulo, en el que se introduce precisamente el tema.

# Capítulo 4

# Paralelismo

Entraremos, en este capítulo, en una de las páginas más notables de la historia de las matemáticas. El punto de vista que se tome, en relación con este asunto del paralelismo, decidirá cómo es el aspecto de ese conjunto $\mathscr{P}$ que desde el comienzo hemos llamado el ***Plano***.

Con el objeto de entrar de una vez en la discusión, expondremos de inmediato el concepto sobre la que se basa.

**Definición 4.1 (Rectas paralelas)**
*Dos rectas son **paralelas**, si no se cortan.*
*Del mismo modo, dos segmentos, o dos rayos, o cualquier combinación entre ellos, son paralelos, si determinan rectas paralelas.*
*Si denotamos dos de esos objetos con los símbolos $r$ y $s$, el hecho de que ellos sean paralelas lo denotaremos por $r \parallel s$, y el hecho de que no lo sean por $r \nparallel s$.*

**(1)** *¿Cuándo dos rectas no son paralelas?*

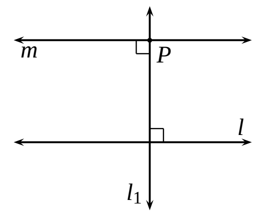
La discusión comienza con la siguiente manera de enunciar uno de los postulados de Euclides, llamado generalmente el *Postulado de las paralelas*:

> *Dada una recta y un punto fuera de ella, se tiene que existe exactamente una recta que pasa por ese punto y es paralela a la recta dada*$^{\langle 1\rangle}$.

Sin embargo, parte de este enunciado lo podemos obtener como consecuencia de lo que hemos desarrollado hasta aquí; y es precisamente la que nos asegura que existen rectas paralelas.

**Proposición 4.1 (Existencia de rectas paralelas)**
*Dada una recta y un punto fuera de ella, se tiene que existe al menos una recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado*⟨2⟩.

**Prueba** Sea $l$ una recta y $P$ un punto fuera de ella. Tomemos, por la proposición 3.4, la recta $l_1$ que pasa por $P$ y es perpendicular a $l$. Tomemos, por la proposición 2.10, la recta $m$ que pasa por $P$ y es perpendicular a $l_1$. Es claro que $m$ es paralela a $l$ (pues, en caso contrario, contradiríamos la proposición 3.4) y pasa por $P$.



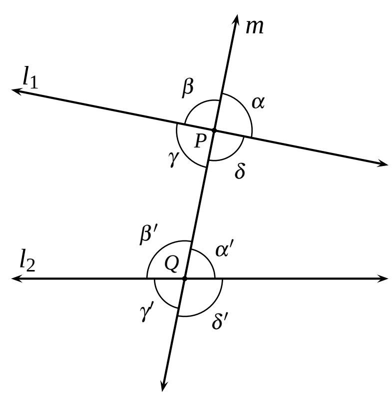

■

Antes de dejar establecido el Postulado de las paralelas que usaremos en el desarrollo de nuestra teoría, determinaremos, por no depender de éste, algunos criterios para decidir cuándo dos rectas son paralelas. Para expresarlos sintéticamente definiremos los siguientes términos.

**Definición 4.2 (Recta transversal a dos rectas)**
*Una recta es* ***transversal*** *a dos rectas, si es distinta de cada una de ellas y las corta a ambas en dos puntos distintos.*
*A veces diremos,* ***recta secante*** *en vez de recta transversal.*

Por abuso del lenguaje diremos: *la recta $m$ es transversal a las rectas $l_1$ y $l_2$ en los puntos $P$ y $Q$*, o *las rectas $l_1$ y $l_2$ están cortadas por una secante $m$ en los puntos $P$ y $Q$*, para indicar explícitamente los puntos de corte de la recta $m$ (transversal a las rectas dadas) con las rectas $l_1$ y $l_2$, respectivamente.

**(2)** *¿Cuándo una recta no es transversal a dos rectas dadas?*




Note que, tal como vemos en la representación, una recta transversal a otras dos determina ocho ángulos: $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$, $\angle\delta$, $\angle\alpha'$, $\angle\beta'$, $\angle\gamma'$ y $\angle\delta'$. Estos ángulos conforman cuatro pares de ángulos opuestos por el vértice:

$$\angle\alpha \text{ y } \angle\gamma,\ \angle\beta \text{ y } \angle\delta,\ \angle\alpha' \text{ y } \angle\gamma' \text{ y } \angle\beta' \text{ y } \angle\delta';$$

que, por tanto, son congruentes entre sí.

Daremos, de inmediato, una clasificación de estos ángulos.

**Definición 4.3 (Ángulos internos y ángulos externos)**
*Son **ángulos internos** los cuatro ángulos determinados por una recta transversal a dos rectas dadas, que contienen a la vez los dos puntos de corte; y son **ángulos externos** los otros cuatro ángulos.*

En la ilustración anterior, los ángulos $\angle\gamma$, $\angle\delta$, $\angle\beta'$ y $\angle\alpha'$ son los ángulos internos; y los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma'$ y $\angle\delta'$ son los ángulos externos.

Los ángulos internos y externos se agrupan, a su vez, formando parejas distinguidas que definimos a continuación.

**Definición 4.4 (Par de ángulos internos alternos)**
*Un par de **ángulos internos alternos** está formado por dos de los ángulos internos que no tienen el mismo vértice, y que contienen puntos a lados opuestos de la transversal.*

En la ilustración anterior, los pares de ángulos $\angle\delta$ y $\angle\beta'$, y $\angle\gamma$ y $\angle\alpha'$, son los dos pares de ángulos internos alternos.

Cuando hablemos del *alterno* de un ángulo interno dado, nos estaremos refiriendo al ángulo interno que forma, con el ángulo dado, un par de ángulos internos alternos.

**Definición 4.5 (Par de ángulos internos a un mismo lado)**
*Un par de **ángulos internos a un mismo lado** está formado por dos de los ángulos internos que no tienen el mismo vértice, y que contienen puntos al mismo lado de la transversal.*

En la ilustración anterior, los pares de ángulos $\angle\alpha'$ y $\angle\delta$, y $\angle\beta'$ y $\angle\gamma$, son los dos pares de ángulos internos a un mismo lado.

**Definición 4.6 (Par de ángulos externos alternos)**
*Un par de **ángulos externos alternos** está formado por dos de los ángulos externos que no tienen el mismo vértice, y que contienen puntos a lados opuestos de la transversal.*

En la ilustración anterior, los pares de ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\gamma'$, y $\angle\beta$ y $\angle\delta'$, son los dos pares de ángulos externos alternos.

Cuando hablemos del *alterno* de un ángulo externo dado, nos estaremos refiriendo al ángulo externo que forma, con el ángulo dado, un par de ángulos externos alternos.

**Definición 4.7 (Par de ángulos externos a un mismo lado)**
*Un par de **ángulos externos a un mismo lado** está formado por dos de los ángulos externos que no tienen el mismo vértice, y que contienen puntos al mismo lado de la transversal.*

En la ilustración anterior, los pares de ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\delta'$, y $\angle\beta$ y $\angle\gamma'$, son los dos pares de ángulos externos a un mismo lado.

**Definición 4.8 (Par de ángulos correspondientes)**
*Un par de **ángulos correspondientes** está formado por uno de los ángulos internos y el opuesto por el vértice de su alterno.*

En la ilustración anterior, los pares de ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\alpha'$, $\angle\beta$ y $\angle\beta'$, $\angle\gamma$ y $\angle\gamma'$, y $\angle\delta$ y $\angle\delta'$ son todos los pares de ángulos correspondientes.

En la siguiente proposición estableceremos la relación que existe entre las cinco categorías de pares de ángulos distinguidos. Por su sencillez, dejaremos la prueba de esta proposición al lector⟨3⟩.

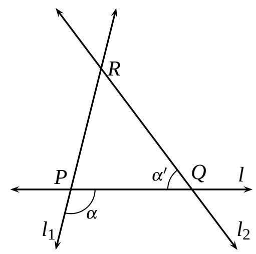
**Proposición 4.2** *Para los ángulos que se forman al cortar dos rectas por una transversal, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

**(a)** *Un par de ángulos internos alternos son congruentes.*
**(b)** *Los dos pares de ángulos internos alternos son congruentes.*
**(c)** *Un par de ángulos internos a un mismo lado son suplementarios.*
**(d)** *Los dos pares de ángulos internos a un mismo lado son suplementarios.*
**(e)** *Un par de ángulos externos alternos son congruentes.*
**(f)** *Los dos pares de ángulos externos alternos son congruentes.*
**(g)** *Un par de ángulos externos a un mismo lado son suplementarios.*
**(h)** *Los dos pares de ángulos externos a un mismo lado son suplementarios.*
**(i)** *Un par de ángulos correspondientes son congruentes.*
**(j)** *Los cuatro pares de ángulos correspondientes son congruentes.*

Estableceremos ahora un criterio para decidir cuándo dos rectas son paralelas, el cual dará lugar, gracias a la proposición anterior, a cuatro criterios adicionales; con ellos obtenemos, además, por medio del Postulado del transportador, algunos métodos para construir rectas paralelas, distintos del usado en la proposición 4.1.

**Proposición 4.3** *Si, al cortar dos rectas por una transversal, un par de ángulos internos alternos son congruentes, entonces las dos rectas son paralelas.*

**Prueba** (Por reducción al absurdo)
Sea $l$ una recta transversal a dos rectas $l_1$ y $l_2$ en los puntos $P$ y $Q$, respectivamente, de tal manera que un par de ángulos internos alternos, digamos $\angle\alpha$ y $\angle\alpha'$, son congruentes. Supongamos que $l_1$ y $l_2$ se cortan en $R$. Así, por el Teorema del ángulo externo para $\triangle PQR$ en $P$, $\angle\alpha$ es más grande que $\angle\alpha'$, contrario a lo supuesto. Por tanto, $l_1 \parallel l_2$.




■

**Observación 4.1** *Gracias a la proposición 4.2, dos rectas serán paralelas si, al cortarlas por una secante, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *Un par de ángulos internos a un mismo lado son suplementarios.*
**(b)** *Un par de ángulos externos alternos son congruentes.*
**(c)** *Un par de ángulos externos a un mismo lado son suplementarios.*
**(d)** *Un par de ángulos correspondientes son congruentes*⟨4⟩.

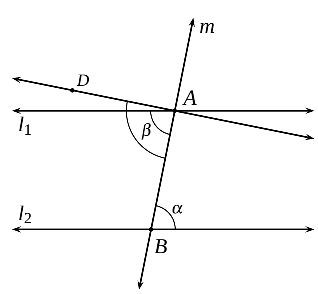
Ahora establecemos la forma del Postulado de las paralelas que usaremos en el desarrollo de nuestra teoría.

**Postulado 7 (De las paralelas)**⟨5⟩
*Dada una recta y un punto fuera de ella, se tiene que existe a lo sumo una recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado.*

Como consecuencia inmediata de este postulado tenemos el recíproco de la proposición 4.3.

**Proposición 4.4** *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces un par de ángulos internos alternos son congruentes.*

**Prueba** (Por reducción al absurdo)
Sea $m$ una recta secante a dos rectas paralelas $l_1$ y $l_2$, en los puntos $A$ y $B$, respectivamente. Consideremos el par de ángulos internos alternos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$. Supongamos que $\angle\alpha \ncong \angle\beta$. Tomemos, por (CA2), la recta $\overleftrightarrow{AD}$ tal que $\angle DAB \cong \angle\alpha$ y $D$ en el lado opuesto de $m$ de aquel en que se encuentran los puntos de $\angle\alpha$.




Como la recta $m$ es secante a $\overleftrightarrow{AD}$ y a $l_2$, y un par de ángulos internos alternos son congruentes, tenemos, por la proposición 4.3, que $\overleftrightarrow{AD} \parallel l_2$ en el punto $A$. Como $\overleftrightarrow{AD}$ y $l_1$ son dos rectas distintas, contradecimos el Postulado de las paralelas. Por tanto, $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

■

**Observación 4.2** *Gracias a la proposición 4.2, si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces se cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones:*

**(a)** *Los dos pares de ángulos internos alternos son congruentes.*
**(b)** *Los dos pares de ángulos internos a un mismo lado son suplementarios.*
**(c)** *Los dos pares de ángulos externos alternos son congruentes.*
**(d)** *Los dos pares de ángulos externos a un mismo lado son suplementarios.*
**(e)** *Los cuatro pares de ángulos correspondientes son congruentes.*

Otras consecuencias inmediatas del Postulado de las paralelas quedan establecidas en las siguientes tres proposiciones.

**Proposición 4.5** *Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí.*

**Prueba** (Por reducción al absurdo)
Sean $l_1$, $l_2$ y $m$ tres rectas tales que $l_1 \parallel m$ y $l_2 \parallel m$. Si acaso $l_1$ intersecta $l_2$, digamos en el punto $P$, tendríamos que $l_1$ y $l_2$ son dos rectas paralelas a la recta $m$ que pasan por el punto $P$ fuera de ella, contrario al Postulado de las paralelas. Por tanto, $l_1 \parallel l_2$.

■

**Proposición 4.6** *Si una recta corta una de dos rectas paralelas, entonces corta a la otra.*

**Prueba** (Por reducción al absurdo)
Sean $l_1$, $l_2$ y $m$ tres rectas tales que $l_1 \parallel l_2$ y $m$ corta a $l_1$, digamos en el punto $P$. Si acaso $m$ no corta $l_2$ tendríamos que $m$ y $l_1$ son dos rectas paralelas a la recta $l_2$ que pasan por el punto $P$ fuera de ella, contrario al Postulado de las paralelas. Por tanto, $m$ corta a $l_2$.

■

**Proposición 4.7** *Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra.*

**Prueba** Sean $l_1$, $l_2$ y $m$ tres rectas tales que $l_1 \parallel l_2$ y $m \perp l_1$. Así, por la proposición 4.6, $m$ corta a $l_2$ y, por la proposición 4.4, $m \perp l_2$.

■

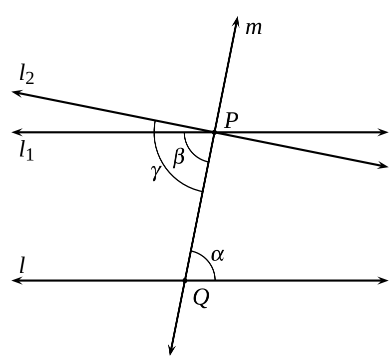
En verdad, tal como veremos a continuación, las proposiciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 son equivalentes al Postulado de las paralelas, es decir, cualquiera de ellas podría sustituir al Postulado 7.

**Proposición 4.8** *En presencia del resto de los resultados obtenidos hasta su postulación, el Postulado de las paralelas es equivalente a cualquiera de las siguientes proposiciones:*

**(a)** *La proposición 4.4.*
**(b)** *La proposición 4.5.*
**(c)** *La proposición 4.6.*
**(d)** *La proposición 4.7.*

**Prueba** Ya tenemos probado que el Postulado de las paralelas es condición suficiente para probar las proposiciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 (es decir, que el Postulado de las paralelas implica a cada una de las proposiciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7). Veamos ahora que también es condición necesaria (es decir, que cada una de las proposiciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 implica, en presencia del resto de los resultados obtenidos hasta su postulación, al Postulado de las paralelas).

(Por reducción al absurdo)
Supongamos que $l_1$ y $l_2$ son dos rectas paralelas a la recta $l$ que pasan por el punto $P$ fuera de ella.
(a) Aceptemos que se cumple la proposición 4.4. Sea $m$ una secante a $l$ y a $l_1$ en los puntos $Q$ y $P$, respectivamente. Así, $\angle\alpha \cong \angle\beta$ y $\angle\alpha \cong \angle\gamma$; con lo que $\angle\beta \cong \angle\gamma$. Pero entonces, por (CA2), tendremos que $l_1 = l_2$; contrario a lo supuesto.




(b) Aceptemos que se cumple la proposición 4.5. Como $l_1 \parallel l$ y $l_2 \parallel l$, tendríamos entonces que $l_1$ no debe intersectar a $l_2$; contrario a lo supuesto.
(c) Aceptemos que se cumple la proposición 4.6. Tomemos, por la proposición 3.4, una recta $m$ una perpendicular a $l$ por el punto $P$. Tendríamos entonces

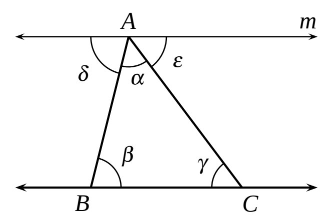
que $l_1$ y $l_2$ son dos rectas perpendiculares a $m$ por el punto $P$; contrario a la proposición 2.10.
(d) Aceptemos que se cumple la proposición 4.7. Como $l \parallel l_1$ y $l_2$ corta a $l_1$, tendríamos entonces que $l_2$ debe intersectar a $l$; contrario a lo supuesto.

■

Otra consecuencia del Postulado de las paralelas, de uso frecuente y común en todo estudio de Geometría, es el que se enuncia en la siguiente proposición⟨6⟩.

**Proposición 4.9** *La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180.*

**Prueba** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$. Tomemos la recta $m$ que es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ y que pasa por el punto $A$. Como, por la proposición 4.4 (al tomar $\overleftrightarrow{AB}$ como secante de $\overleftrightarrow{BC}$ y $m$), $\angle\beta \cong \angle\delta$ y (al tomar $\overleftrightarrow{AC}$ como secante de $\overleftrightarrow{BC}$ y $m$) $\angle\gamma \cong \angle\varepsilon$; y además, $m\angle\delta + m\angle\alpha + m\angle\varepsilon = 180$, tenemos que $m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\gamma = 180$.



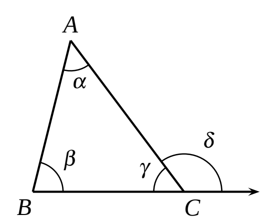

■

Para finalizar este capítulo enlazamos la afirmación anterior con una afirmación acerca de la medida de los ángulos externos de un triángulo.

**Proposición 4.10** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

**(a)** *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180.*
**(b)** *La medida de cualquiera de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.*

**Prueba** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ y $\angle\delta$ un ángulo externo en el vértice $C$. Como $m\angle\delta + m\angle\gamma = 180$, tendremos que $m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\gamma = 180$ si, y sólo si, $m\angle\alpha + m\angle\beta = m\angle\delta$.




■

**(3)** *¿Cuál es la suma de los ángulos externos de un triángulo (uno en cada vértice)?*

# Problemas del Capítulo 4

**4.1** **(a)** ¿Serán complementarios los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
**(b)** ¿Cuánto miden los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles?
**(c)** ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero?
**(d)** ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo, si están en proporción 1:2:3?

**4.2** Si, en una correspondencia entre los vértices de dos triángulos, se tiene que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, pruebe que el tercer par de ángulos también debe ser congruente.

**4.3** Pruebe que dos rectas son paralelas si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(a)** Una de ellas está contenida en un lado de la otra.
**(b)** Son distintas y todos los puntos de una de ellas equidistan de la otra.
(La ***distancia entre dos rectas*** se define así: 0, si las rectas se cortan; la distancia común desde los puntos de una hasta la otra, si las rectas son paralelas).
**(c)** Son distintas y dos puntos distintos de una de ellas equidistan de la otra.[⟨7⟩]

**4.4** Pruebe que, en presencia del resto de los resultados obtenidos hasta su postulación, el Postulado de las paralelas es equivalente a cualquiera de las siguientes proposiciones:

**(a)** Si, al cortar dos rectas por una secante, la suma de las medidas de los ángulos internos a un mismo lado es menor que 180, entonces las rectas se cortan en dicho lado.
**(b)** Si, al cortar dos rectas por una secante, la suma de las medidas de los ángulos internos a un mismo lado es mayor que 180, entonces las rectas se cortan en el otro lado.

**4.5** Construya un triángulo equilátero.

**4.6** Pruebe que:

**(a)** Si $l_1 \parallel l_2$, $t_1$ secante a $l_1$ y $l_2$ en $A$ y $B$, respectivamente, $t_2$ secante a $l_1$ y $l_2$ en $C$ y $D$, respectivamente, y $l_3 \parallel l_1$ corta a $t_1$ en un punto $E$ tal que $A$-$E$-$B$, entonces $l_3$ corta $t_2$ en un punto $F$ tal que $C$-$F$-$D$.
**(b)** Si una recta es paralela a un lado de un triángulo, y corta otro de sus lados en uno de sus puntos interiores, entonces la recta corta al tercer lado en uno de sus puntos interiores.

**4.7** Verifique que no existe ningún criterio AAA general de congruencia de triángulos.

**4.8** Pruebe que:

**(a)** un triángulo es rectángulo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(i)** la mediatriz de uno de sus lados corta otro lado en su punto medio.

**(ii)** existe un punto en uno de sus lados que equidista de los tres vértices.

**(b)** en un triángulo rectángulo no isósceles, la mediana y la altura correspondientes a la hipotenusa determinan un ángulo cuya medida es igual a la diferencia de las medidas de los dos ángulos agudos del triángulo.

**4.9** Pruebe que dos ángulos con lados paralelos (los del uno con los del otro) son congruentes o suplementarios.

**4.10** Si un triángulo tiene dos lados congruentes, pruebe que la suma de las distancias desde cualquier punto del tercer lado, a los lados congruentes, es constante e igual a la altura sobre uno cualquiera de dichos lados.

**4.11** **(a)** Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan, entonces los segmentos que unen sus extremos, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (o $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$), son paralelos.⟨8⟩

**(b)** Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan de tal manera que los segmentos que unen los extremos, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (o $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$), son paralelos y congruentes, pruebe que los segmentos se bisecan.

**(c)** Verifique que no hay ningún par de segmentos, con un extremo en un vértice de un triángulo y el otro en el lado opuesto, que se bisequen.

**(d)** En $\triangle ABC$ tomamos $G$ y $H$ los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. En el rayo opuesto a $\overrightarrow{HA}$ tomamos $R$ tal que $\overline{HR} \cong \overline{HA}$. En el rayo opuesto a $\overrightarrow{GB}$ tomamos $S$ tal que $\overline{GS} \cong \overline{GB}$. Pruebe que $S$, $C$ y $R$ están alineados y que $\overline{CR} \cong \overline{CS}$.

**4.12** En el triángulo $\triangle ABC$, el bisector de $\angle A$ corta $\overline{BC}$ en $D$, y la mediatriz de $\overline{AD}$ corta $\overline{AC}$ en $G$. Pruebe que $\overline{GD}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

**4.13** Dado un triángulo $\triangle ABC$ pruebe que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(a)** Cualquier recta paralela a cualquiera de los lados congruentes, y que corte los otros dos lados en puntos distintos, determina otro triángulo con dos lados congruentes.

**(b)** El bisector de cualquiera de los ángulos externos en $A$ es paralelo a $\overline{BC}$.

**(c)** La recta que pasa por $A$ y es paralela a $\overline{BC}$ biseca a cada uno de los ángulos externos en $A$.

**(d)** $\angle DPB \cong \angle EPC$, donde: $P$ es un punto cualquiera tal que $B$-$P$-$C$; $D$ y $E$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que $A$; $\overleftrightarrow{PD} \parallel \overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{PE} \parallel \overline{AB}$.

**4.14** Dos rectas son paralelas si, y sólo si, al cortarlas por una secante, tenemos que:

**(a)** Los bisectores de los ángulos correspondientes son paralelos.

**(b)** Los bisectores de los ángulos internos a un mismo lado son perpendiculares.

**4.15** En un triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; $D$ es un punto de $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $C$-$B$-$D$; $E$ es un punto de $\overline{AB}$ tal que $A$-$E$-$B$, y tal que $\overline{BD} \cong \overline{BE}$; $\overleftrightarrow{DE}$ intersecta a $\overline{AC}$ en $F$. Pruebe que $m\angle CFE = 3 \cdot m\angle D$.

**4.16** Por un punto $A$ del lado $\overrightarrow{OX}$ del ángulo $\angle XOY$, tomamos la perpendicular a $\overrightarrow{OY}$, que lo corta en el punto $H$. El bisector de $\angle HAO$ encuentra $\overrightarrow{OY}$ en $C$. La perpendicular a $\overrightarrow{OY}$ en $C$ encuentra $\overrightarrow{OX}$ en $B$. Pruebe que $\overline{BA} \cong \overline{BC}$.

**4.17** (**Triángulo 30-60-90**)$^{\langle 9\rangle}$
Pruebe que:

**(a)** la medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 30 si, y sólo si, la longitud del lado opuesto a éste es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

**(b)** en un triángulo 30-60-90, la altura correspondiente a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que están en razón de 1:3.

**4.18** Si $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ (con $C$ y $D$ del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$), los bisectores de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle DBA$ se intersectan en $P$ y $AB = 2 \cdot PB$, halle los valores de $m\angle PBD$ y $m\angle PAC$.

**4.19** Si un triángulo tiene dos lados congruentes y no es rectángulo, pruebe que la recta que une los pies de las alturas sobre los lados congruentes es paralela al tercero de los lados.

**4.20** En $\triangle FGH$, el bisector de $\angle F$ y el bisector de $\angle G$ se cortan en $C$. La recta que pasa por $C$ y es paralela a $\overline{FG}$, corta a $\overline{FH}$ en $A$, y a $\overline{GH}$ en $B$. Pruebe que el perímetro de $\triangle ABH$ es $FH + GH$.

**4.21** En el triángulo $\triangle MPQ$, sea $A$ un punto tal que $M$-$A$-$Q$. Trace desde $A$ una perpendicular a $\overline{PQ}$; llame $B$ el punto de corte de esta recta y $\overline{PQ}$, y llame $C$ el punto de corte de dicha recta y $\overleftrightarrow{PM}$. Pruebe que $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$ si, y sólo si, $\overline{MC} \cong \overline{MA}$.

**4.22** En el triángulo $\triangle ABC$, una recta por $A$ es perpendicular al bisector de $\angle B$ en $K$; otra recta por $K$ es paralela a $\overline{BC}$ y corta $\overline{AB}$ en $M$. Pruebe que $M$ es el punto medio de $\overline{AB}$.

**4.23** En el triángulo $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, tome $P$ un punto interior de $\overline{BC}$. Por los puntos medios, $M$ y $N$, de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$, respectivamente, trace perpendiculares a $\overline{BC}$, las cuales encuentran a $\overline{AB}$ en $E$, y a $\overline{AC}$ en $F$. Pruebe que $\angle EPF \cong \angle A$.

**4.24** Pruebe que la proposición 4.9 es equivalente a la siguiente proposición:
*La suma de las medidas de los ángulos de cualesquiera dos triángulos es la misma*.

**4.25** **(Concurrencia de las mediatrices y circuncentro)**
Pruebe que las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto que equidista de los tres vértices del triángulo.
Este punto se llama ***el circuncentro*** del triángulo. Como veremos en el Capítulo 9, el nombre de este punto proviene del hecho de que desde él se puede trazar un círculo que pasa por los tres vértices del triángulo y, así, un círculo que circunscribe al triángulo o, en otras palabras, permite inscribir cualquier triángulo en un círculo.

**4.26** ¿Donde está el circuncentro de un triángulo rectángulo?

**4.27** **(Concurrencia de las alturas y ortocentro)**
Pruebe que las rectas determinadas por las tres alturas de un triángulo concurren en un punto.
Este punto se llama ***el ortocentro*** del triángulo.

**4.28** Pruebe que dos ángulos, tales que las rectas que contienen sus lados son perpendiculares (las del uno con las del otro), son congruentes o suplementarios.

# Comentarios del Capítulo 4

⟨1⟩ Originalmente Euclides lo enunció en los siguientes términos, no muy claros:

> *Si una recta corta otras dos rectas formando ángulos internos a un mismo lado cuya suma es menor que dos rectos, entonces las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran en el lado en el que están los ángulos cuya suma es menor que dos rectos*.

En el ejercicio 4.4 veremos por qué este enunciado y el que estamos ofreciendo en este momento dicen lo mismo.

⟨2⟩ El problema se suscita, desde el siglo XVII, cuando se intenta, obstinadamente, probar la unicidad de dicha paralela. Muchos pensaban que el postulado de Euclides podía obtenerse como consecuencia del resto de los resultados de la Geometría. Pero, la prueba de la independencia de este postulado respecto al resto de los postulados de la Geometría es lo que dio lugar, en el siglo XIX, a la construcción de distintas Geometrías planas y de sus modelos correspondientes, de las cuales hablaremos al final de estos comentarios.

⟨3⟩ La mayor parte de esta prueba está realizada en la solución del ejercicio 2.11.

⟨4⟩ Esta propiedad es la que da garantía del buen proceder del dibujante técnico al trazar rectas paralelas con una regla T y una escuadra apoyada encima.

⟨5⟩ Este postulado lleva, en algunas obras, el nombre de *Postulado de Playfair*, en honor del Matemático escocés ***John Playfair*** (1748-1819) quien lo enunció en esta forma en 1795, para la comodidad del estudio de los *Elementos*; a pesar de que el primero que lo enunció en esta forma fue ***Proclus*** en el siglo V d. C.

John Playfair
(10/03/1748 Benvie -
20/07/1819 Burntisland)

⟨6⟩ Este resultado es, en verdad, también equivalente al Postulado de las paralelas. Sin embargo, la prueba de la necesidad del Postulado de las paralelas para la obtención de dicho resultado nos obligaría a entrar en la consideración de los cuadriláteros de Saccheri y de la Geometría Hiperbólica, cosa que no haremos en este estudio; de tal manera que nos conformaremos, en esta oportunidad, con demostrar la suficiencia del Postulado de las paralelas para la obtención de dicho resultado.

⟨7⟩ Esta proposición, así como la anterior, ofrecen dos criterios para saber cuándo dos rectas son paralelas. Además, este resultado es el que da garantía del buen proceder al dibujar una recta paralela a otra que ya está dibujada, usando sólo una regla.

⟨8⟩ Ya sabemos, por el ejercicio 3.6, que son congruentes. Además, ésta es la razón por la que una mesa de planchar, cuyas patas se bisecan, siempre es paralela al piso.

⟨9⟩ Este tipo de triángulos aparece con mucha frecuencia en el estudio de la Trigonometría, junto a los triángulos rectángulos isósceles. Reciben este nombre porque, si uno de los ángulos distintos del recto en un triángulo rectángulo mide 30, el otro mide 60.

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 4

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 4.1 al 4.10; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 4.1 al 4.2, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 4.3 al 4.9, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 4.10.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 4.11 al 4.28; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 4.11 al 4.17, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 4.18 al 4.27, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 4.28.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**4.10:** Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle A$ no es recto, $P$ en $\overline{BC}$, $P \neq B$ y $P \neq C$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ los segmentos perpendiculares sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y $\overline{BT}$ es altura, trace una paralela a $\overline{AC}$ por $P$, que intersecta a $\overline{BT}$ en $Q$, y verifique que $PR + PS = BT$.

**4.17:** Si $\angle B$ es recto, tome, en el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$, un punto $D$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ y verifique que el triángulo $\triangle ADC$ es equilátero.

**4.18:** Use el ejercicio 4.14.

**4.24:** Suponga que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es $x$ y, en un triángulo cualquiera, use el segmento determinado por uno cualquiera de sus vértices y cualquier punto que se encuentre entre los otros dos vértices, para probar que $x = 180$.

**4.25:** Use el Teorema de la mediatriz, primero con dos de ellas.

**4.26:** Use el ejercicio 4.8.

**4.27:** Trace paralelas a cada lado por el vértice opuesto, verifique que forman un triángulo y que las alturas originales están en las mediatrices del construido.

En los *Elementos* de Euclides, las primeras veintiséis proposiciones (cubiertas por lo hecho en los cuatro primeros capítulos de este texto) se prueban sin usar el quinto de sus postulados. Las proposiciones que van de la veintisiete a la treinta y cuatro están cubiertas por lo hecho en el presente capítulo. De allí en adelante se usa, con mucha frecuencia, el quinto de los postulados o alguna de sus consecuencias inmediatas.

Hay evidencias de que este quinto postulado fue formulado por Euclides mismo y de que entre sus propios contemporáneos ya se había suscitado la crítica y la sospecha en torno a su formulación. Podríamos conjeturar que las críticas y las sospechas se originaron, principalmente, por los siguientes hechos: su formulación era desproporcionadamente más larga que la de los otros postulados, lo cual la hacía parecer más bien una proposición; aparecía precisamente como la proposición inversa de su proposición veintisiete, que la había probado sin usar el quinto postulado; no tenía ese carácter de *autoevidencia* que caracterizaba la escogencia del resto de los postulados; y, finalmente, su utilización tardía, después de probadas muchas proposiciones sin su medio, levantó definitivamente la sospecha de que, a pesar de que Euclides no pudo hacerlo, se podía demostrar a partir de los otros cuatro.

Como ya lo hemos dicho antes, varios matemáticos han intentado, en vano, probar el quinto postulado (e, incluso, de eliminarlo mediante una redefinición del concepto de rectas paralelas) a partir del resto de los resultados de la Geometría: Ptolomeo (200 a. C.), el neoplatónico Proclus (410-485), Nasiraddin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Giovanni Girolamo Saccheri, John H. Lambert (1728-1777), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Louis Bertrand (1731-1812) y ***Johann Carl Friedrich Gauss***. Y es cierto que, todo aquel que estuviera seriamente interesado en el estudio de las matemáticas hasta el siglo diecisiete, intentó eventualmente probar el quinto postulado de Euclides.

Johann Carl Friedrich Gauss (30/04/1777 Brunswick - 23/02/1855 Göttingen)

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (01/12/1792 Nizhny Novgorod - 24/02/1856 Kazan)

Sin embargo, casi simultáneamente, pero cada uno por su cuenta: el eminente matemático alemán J. C. F. Gauss, el matemático ruso ***Nikolai Ivanovitch Lobachevsky*** y el matemático húngaro ***János Bolyai***, probaron la imposibilidad de cualquier intento de deducir el Postulado de las paralelas, del único modo posible: construir una Geometría en la que no se cumpla dicho postulado, es decir, postular precisamente la negación del Postulado de las paralelas, y obtener todas las consecuencias.

Históricamente se atribuye, por lo general, la prioridad del descubrimiento a Lobachevsky (razón por la cual se ha llamado a ésta, *Geometría Lobachevskiana*), pues logró un desarrollo mayor que la de Bolyai, y tuvo el valor de publicar su trabajo, muy al contrario de Gauss que, dado el gran prestigio que tenía de ser el más grande de los matemáticos de su tiempo, tuvo miedo de parecer ridículo ante sus contemporáneos.

János Bolyai
(15/12/1802 Kolozsvár - 27/01/1860 Marosvásárhely)

Fue Gauss quien dio el nombre de *Geometría no euclidiana* a aquella Geometría en la que la negación del Postulado de las paralelas tiene la forma: *por un punto externo a una recta pasan más de una recta paralela a la dada*. Para esta Geometría dio el matemático francés ***Jules Henri Poincaré*** un modelo que se ha llamado modelo hiperbólico (razón por la cual se le llama con frecuencia *Geometría hiperbólica*).

Jules Henri Poincaré
(29/04/1854 Nancy - 17/07/1912 Paris)

El matemático alemán ***Georg Friedrich Bernhard Riemann***, por su parte, construyó otra Geometría basada en la siguiente negación del Postulado de las paralelas: *por un punto externo a una recta no pasa ninguna paralela*. Notará el lector que en esta Geometría, llamada *Geometría riemanniana*, no se cumplirán todos los postulados de la Geometría euclideana, puesto que la existencia de paralelas se prueba sin necesidad del Postulado de las paralelas. Para esta Geometría dio Riemann mismo un modelo que se ha llamado modelo esférico (razón por la cual se le llama con frecuencia *Geometría esférica*).

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(17/09/1826 Breselenz - 20/07/1866 Selasca)

Fue Riemann quien elevó a sus debidas proporciones el trabajo de Lobachevsky y dio inicio a un segundo período en el desarrollo de las Geometrías euclidianas y no euclidianas, caracterizado por un vertiginoso avance en las investigaciones del punto de vista de la Geometría diferencial, en contraste con los métodos sintéticos hasta ese momento utilizados.

Entre los nombres más notables de este segundo período podemos citar: Lie (que introdujo los grupos de transformación en el estudio de la Geometría), Beltrami (quien fue el primero en demostrar que la consistencia de la Geometría no euclidiana era la misma que la de la Geometría euclidiana, dando un modelo de aquella por medio de una superficie en el espacio euclidiano de tres dimensiones, de tal manera que sus postulados se derivaran de los de la Geometría euclidiana), Cayley, ***Felix Christian Klein***, Clifford (que dieron una bella y brillante clasificación de las Geometrías desde el punto de vista proyectivo-métrico) y Hilbert (que definitivamente acabó con esta pelea, y disipó todas las sospechas respecto al quinto postulado de Euclides).

Felix Christian Klein
(25/04/1849 Düsseldorf - 22/06/1925 Göttingen)

La Teoría de la Relatividad de Albert Einstein (1879-1955) se fundamentó en una Geometría un poco distinta de las dos anteriores, pero resultó de gran estímulo para el estudio de las Geometrías no euclidianas y de sus aplicaciones a la Física, en la descripción del espacio físico y de las leyes que rigen sus fenómenos.

Por supuesto, en estas Geometrías no suceden las mismas cosas que en la Geometría euclidiana, como por ejemplo:

1.- En la Geometría hiperbólica:

(a) *La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es estrictamente menor que 180*, lo cual probaría la equivalencia entre el Postulado de las paralelas y el resultado que afirma que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180 (habiendo probado, por supuesto, que la Geometría hiperbólica conserva el resto de los axiomas de la Geometría euclidiana).

(b) *Dos triángulos no pueden tener la misma forma sin tener el mismo tamaño*, es decir, la semejanza y la congruencia de triángulos son el mismo concepto (no puede haber modelos a escala de un mismo triángulo).

(c) *Ningún cuadrilátero es rectángulo*; es más, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, entonces el cuarto es agudo.

De hecho, cualquiera de estos resultados caracteriza a las Geometrías hiperbólica y euclidiana, en el sentido de que, por ejemplo, si, en un solo triángulo, la suma de las medidas es estrictamente menor que 180, entonces la Geometría es hiperbólica; y si, en un solo triángulo, la suma de las medidas es 180, entonces la Geometría es euclidiana.

2.- En la Geometría esférica:

(a) *Dos puntos no determinan, necesariamente, una única recta.*

(b) *Las rectas tienen longitud finita*, con lo que no podría cumplirse el Postulado de la Regla.

(c) *No necesariamente, para tres puntos colineales, uno está entre los otros dos.*

(d) *La perpendicular a una recta por un punto externo no es, necesariamente, única.*

(e) *La suma de los ángulos de un triángulo es estrictamente mayor que 180.*

(f) *Hay triángulos con dos ángulos rectos.*

(g) *No necesariamente un ángulo externo de un triángulo es mayor que los ángulos internos no contiguos.*

El primero de los problemas de la lista anterior se puede resolver, pero en detrimento del Postulado de separación del plano, amén de no poder resolver el resto de los problemas.

Esto hace pensar, empíricamente, que quizás el espacio en el que vivimos no sea euclidiano, cada vez que al medir los ángulos de un triángulo, la suma de las medidas no sea exactamente 180 (suponiendo, por supuesto, que se satisfacen todos los demás postulados). Sin embargo, no se podría constatar empíricamente que nuestro espacio vital es euclidiano, puesto que ningún número de experimentos de medición, por muy grande que sea el número y por muy exacta que sea la medición, puede darnos prueba de que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180.

Así las cosas, o el Postulado de las paralelas no es válido en nuestro espacio físico, o costará muchísimo más saber la verdad acerca de dicho espacio.

# Capítulo 5

# Cuadriláteros

Estudiaremos ahora otra de las figuras geométricas que bien pudimos haber llamado fundamental, a saber: los **cuadriláteros**⟨1⟩. Comenzamos, como es natural, estableciendo su definición.

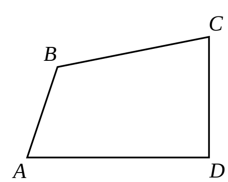
**Definición 5.1 (Cuadriláteros)**
*Un **cuadrilátero** es una figura geométrica formada por la unión de cuatro segmentos tales que:*

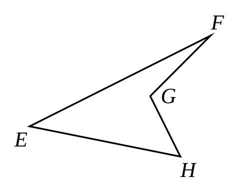
**(a)** *se pueden enumerar en la forma* $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ *y* $\overline{P_4P_1}$, *con los puntos* $P_1$, $P_2$, $P_3$ *y* $P_4$ *distintos entre sí;*

**(b)** *ningún par de ellos se intersectan, salvo en sus extremos;* ***y***

**(c)** *ningún par de ellos con un extremo común son colineales.*

*De un cuadrilátero llamaremos: a los cuatro puntos* $P_1$, $P_2$, $P_3$ *y* $P_4$, ***los vértices****; a los cuatro segmentos,* ***los lados****; y a los cuatro ángulos* $\angle P_4P_1P_2$, $\angle P_1P_2P_3$, $\angle P_2P_3P_4$ *y* $\angle P_3P_4P_1$, ***los ángulos*** *(y, en algunos contextos,* ***los ángulos interiores****, o* ***los ángulos internos****).*




Ahora la pregunta obligada: ***¿cuántos vértices tiene un cuadrilátero?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos su prueba para el Apéndice A.

**Proposición 5.1 (Igualdad de cuadriláteros)**
*Dos cuadriláteros son iguales si, y sólo si, sus vértices coinciden.*

Sólo por comodidad en la referencia a los diferentes elementos que componen un cuadrilátero, haremos de inmediato una clasificación de éstos.

**Definición 5.2** *En un cuadrilátero tendremos que:*

**(a)** *dos* ***vértices*** *son* ***consecutivos****, o* ***contiguos****, si son extremos de un mismo lado.*
**(b)** *dos* ***vértices*** *son* ***opuestos****, si no son consecutivos.*
**(c)** *dos* ***lados*** *son* ***consecutivos****,* ***contiguos****, o* ***adyacentes****, si tienen un extremo común.*
**(d)** *dos* ***lados*** *son* ***opuestos****, si no son consecutivos.*
**(e)** *dos* ***ángulos*** *son* ***consecutivos****,* ***contiguos****, o* ***adyacentes****, si sus vértices son vértices consecutivos del cuadrilátero.*
**(f)** *dos* ***ángulos*** *son* ***opuestos****, si no son consecutivos.*
**(g)** *un* ***vértice*** *y un* ***ángulo*** *son* ***opuestos****, si dicho vértice y el vértice del ángulo son vértices opuestos del cuadrilátero.*
**(h)** *una* ***diagonal*** *es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos.*
**(i)** *un* ***ángulo externo*** *en uno de sus vértices es una pareja lineal del ángulo del cuadrilátero que tiene su vértice en dicho vértice del cuadrilátero.*
**(j)** *el* ***perímetro*** *es la suma de las longitudes de sus lados.*

Si denotamos los vértices de un cuadrilátero con los símbolos $A$, $B$, $C$ y $D$, donde cada uno de ellos, excepto el primero, es consecutivo del anterior, denotaremos al cuadrilátero por $\square ABCD$, y a sus ángulos por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ (sólo nombrando sus vértices); si $X$ es uno de los vértices del cuadrilátero $\square ABCD$, algunas veces diremos que $\angle X$ ***es el ángulo del cuadrilátero en el vértice*** $X$.

Cada vez que hablemos de un cuadrilátero $\square ABCD$, asumiremos que: $A$ es contiguo del vértice $B$, $B$ de $C$, $C$ de $D$ y $D$ de $A$; y que tres vértices $X$, $Y$ y $Z$, para los que cada uno, excepto el primero, es consecutivo del anterior, no son colineales.

En el cuadrilátero $\square ABCD$ tendremos que: los pares de vértices $A$ y $B$, $A$ y $D$, $B$ y $C$, y $C$ y $D$, son consecutivos; los pares de vértices $A$ y $C$, y $B$ y $D$, son opuestos; los pares de lados $\overline{AB}$ y $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, son consecutivos; los pares de lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, son opuestos; los pares de ángulos $\angle A$ y $\angle B$, $\angle A$ y $\angle D$, $\angle B$ y $\angle C$, y $\angle C$ y $\angle D$, son consecutivos; los pares de ángulos $\angle A$ y $\angle C$, y $\angle B$ y $\angle D$, son opuestos; los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales.

A continuación haremos una clasificación de los cuadriláteros que permite diferenciar los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square EFGH$ de la ilustración anterior; y de seguidas estableceremos cinco caracterizaciones de cada una de las clases.

**Definición 5.3 (Cuadrilátero convexo)**
*Un **cuadrilátero** es **convexo**, si todos los vértices, que no son extremos de uno de sus lados, están en uno, y sólo uno, de los semiplanos determinados por la recta que contiene ese lado.*⟨2⟩
*En otras palabras, el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo, si:*

**(1)** *$A$ y $B$ están al mismo lado de $\overleftrightarrow{CD}$;* **(3)** *$C$ y $D$ están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$,* ***y***
**(2)** *$B$ y $C$ están al mismo lado de $\overleftrightarrow{DA}$;* **(4)** *$D$ y $A$ están al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$.*

Refiriéndonos a la ilustración anterior, $\square ABCD$ representa un cuadrilátero convexo, y $\square EFGH$ un cuadrilátero no convexo.

**Proposición 5.2** *Un cuadrilátero es convexo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *cada uno de sus vértices está en el interior de su ángulo opuesto.*
**(b)** *sus diagonales se cortan en un punto interior de ambas.*
**(c)** *los vértices que no están sobre una diagonal, están en lados opuestos de la recta que contiene dicha diagonal.*
**(d)** *no tiene ningún vértice en el interior del triángulo determinado por los otros tres vértices.*
**(e)** *la suma de las medidas de sus ángulos internos es 360.*

**Prueba** Consideremos un cuadrilátero $\square ABCD$.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es convexo, y consideremos dos vértices opuestos, digamos $B$ y $D$. Las condiciones (1) y (2) de la definición 5.3 nos aseguran que $B$ está en el interior de $\angle D$.
($\Leftarrow$) Supongamos que cada uno de los vértices de $\square ABCD$ está en el interior del ángulo opuesto, y consideremos uno de sus lados y un vértice que no es extremo de ese lado, digamos $\overline{BC}$ y $A$. Como $A$ y $C$ son vértices opuestos, tendremos que $A$ está en el interior de $\angle C$. Así, por la definición del interior de un ángulo, se cumple (1) de la definición 5.3. Del mismo modo se prueba que se cumplen también las condiciones (2), (3) y (4).
**(b)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es convexo. Por la parte anterior, $B$ está en el interior de $\angle D$, y $A$ está en el interior de $\angle C$. Por el Teorema de la barra transversal, $\overrightarrow{DB}$ corta $\overline{AC}$ en un punto $P$ tal que $A$-$P$-$C$, y $\overrightarrow{CA}$ corta $\overline{BD}$ en un punto $Q$ tal que $B$-$Q$-$D$. Por la proposición 1.1, $P = Q$ y, así, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en $P$, interior de ambas.

($\Leftarrow$) Supongamos que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en $P$, interior de ambas. Por el Teorema de la barra transversal, cada uno de los vértices de $\square ABCD$ está en el interior del ángulo cuyo vértice está en el vértice opuesto; con lo que, por la parte anterior, $\square ABCD$ es convexo.

**(c)** Es evidente, por la parte anterior y el Postulado de separación del plano.

**(d)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es convexo y, sin perder generalidad, que $C$ está en el interior de $\triangle ABD$. Por el Teorema de la barra transversal, $\overrightarrow{DC}$ corta $\overline{AB}$ en un punto $E$ tal que $A$-$E$-$B$; con lo que $A$ y $B$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{CD}$; contrario a (1). Por tanto, no puede haber ningún vértice en el interior del triángulo determinado por los otros tres.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ no tiene ningún vértice en el interior del triángulo determinado por los otros tres vértices. Si acaso $\square ABCD$ no fuera convexo podemos suponer, sin perder generalidad, que $A$ y $B$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{CD}$. Llamemos $E$ el punto de corte de $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $A$-$E$-$B$. Por la definición de cuadrilátero, $D$-$C$-$E$ o $C$-$D$-$E$. Así, por el ejercicio 3.9, $C$ está en el interior de $\triangle ABD$, o $D$ está en el interior de $\triangle ABC$; contrario a los supuesto. Por tanto, $\square ABCD$ es convexo.

**(e)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es convexo y consideremos la diagonal $\overline{AC}$. Como, por la parte (a), $C$ está en el interior de $\angle BAD$, tenemos, por el Postulado del transportador, que $m\angle A = m\angle BAC + m\angle CAD$. Por las mismas razones $m\angle C = m\angle BCA + m\angle ACD$. Como, por la proposición 4.9, $m\angle B + m\angle BAC + m\angle BCA = 180$ y $m\angle D$ + $m\angle CAD$ + $m\angle ACD = 180$, tenemos que $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$. Si acaso $\square ABCD$ no es convexo podemos suponer, por la parte (d), que uno de sus vértices, digamos $C$, está en el interior de $\triangle BAD$. Como $C$ está en el interior de $\angle B$ y $\angle D$ tenemos, por el Postulado del transportador, que $m\angle CBA = m\angle B - m\angle CBD < m\angle B$ y $m\angle CDA = m\angle D - m\angle CDB < m\angle D$. Así, $360 = m\angle A + m\angle CBA + m\angle CDA + m\angle C < m\angle A + m\angle B + m\angle D + m\angle C = 180 + m\angle C$; de donde $m\angle C > 180$, contrario al Postulado del transportador. Por tanto, $\square ABCD$ es convexo.

$\blacksquare$

**(1)** *¿Podremos asegurar que existen cuadriláteros?*
**(2)** *¿Podremos asegurar que existen cuadriláteros convexos?*
**(3)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es convexo?*
**(4)** *¿Podremos asegurar que existen cuadriláteros no convexos?*
**(5)** *¿Pueden ser obtusos todos los ángulos de un cuadrilátero convexo?*
**(6)** *¿Cuánto es la suma de las medidas de los ángulos externos de un cuadrilátero (uno en cada vértice)?*

Haremos ahora otra clasificación de los cuadriláteros, comenzando por la clase más general, que incluirá todos los demás que especificaremos; y de seguidas probaremos que todos ellos son convexos.

**Definición 5.4 (Trapezoide)**
*Un **trapezoide** es un cuadrilátero que tiene por lo menos dos lados paralelos.*

**Proposición 5.3** *Los trapezoides son cuadriláteros convexos.*

**Prueba** Si uno de los vértices de un cuadrilátero estuviera en el interior del triángulo formado por los otros tres vértices, no podría tener, por el ejercicio 3.9, ningún par de lados paralelos. Por tanto, los trapezoides son cuadriláteros convexos.

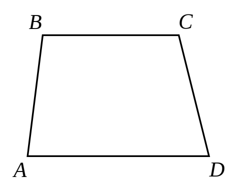
■

**(7)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es trapezoide?*
**(8)** *¿Podremos asegurar que existen trapezoides?*

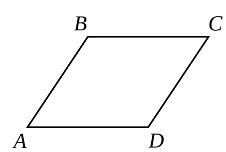
Ahora definimos dos tipos particulares de trapezoides.

**Definición 5.5 (Trapecio y paralelogramo)**

**(a)** *Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos.*
*De un trapecio llamaremos: a los lados paralelos, **las bases**; y, a los otros dos lados, **los laterales**.*




**(b)** *Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.*

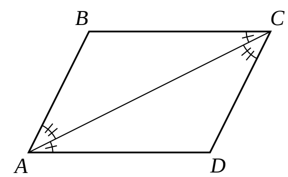



**(9)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es un trapecio?*
**(10)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es un paralelogramo?*
**(11)** *¿Podremos asegurar que existen trapecios?*
**(12)** *¿Podremos asegurar que existen paralelogramos?*

La siguiente propiedad de los paralelogramos es muy útil.

**Lema 5.1** *Cada diagonal de un paralelogramo determina en éste dos triángulos congruentes.*

**Prueba** Sea $\square ABCD$ un paralelogramo, y consideremos la diagonal $\overline{AC}$. Por la proposición 4.4 tenemos que $\angle DAC \cong \angle ACB$ y $\angle BAC \cong \angle DCA$. Así, por ALA, que $\triangle BAC \cong \triangle DCA$. Por un razonamiento similar se prueba, considerando la diagonal $\overline{BD}$, que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.




■

Antes de completar la clasificación de los cuadriláteros presentaremos cinco caracterizaciones de los paralelogramos, que nos ofrecerán sendos criterios para saber cuándo un cuadrilátero es paralelogramo.

**Proposición 5.4** *Un cuadrilátero es paralelogramo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *los lados opuestos son congruentes.*
**(b)** *las diagonales se bisecan.*
**(c)** *tiene dos lados paralelos y congruentes.*
**(d)** *los ángulos opuestos son congruentes.*
**(e)** *los ángulos consecutivos son suplementarios.*

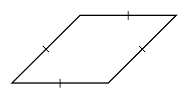
**Prueba** Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero.
**(a)** ($\Rightarrow$) Si $\square ABCD$ es un paralelogramo tendremos, por el lema 5.1, que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Consideremos la diagonal $\overline{AC}$. Por LLL, $\triangle ADC \cong \triangle CBA$; con lo que $\angle ACD \cong \angle CAB$ y $\angle CAD \cong \angle ACB$. Por la proposición 5.2 y el ejercicio 3.11, $\angle ACD$ y $\angle CAB$ forman un par de ángulos internos alternos del corte de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ con la secante $\overleftrightarrow{AC}$, al igual que $\angle CAD$ y $\angle ACB$ del corte de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ con la secante $\overleftrightarrow{AC}$. Así, por la proposición 4.3, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$; de donde $\square ABCD$ es un paralelogramo.
**(b)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un paralelogramo. Como, por definición, $\square ABCD$ es un trapezoide, tendremos, por las proposiciones 5.3 y 5.2, que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan. Por la parte (a) y el ejercicio 4.11, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.
($\Leftarrow$) Si las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan tendremos, por el ejercicio 4.11, que $\square ABCD$ es paralelogramo.
**(c)** ($\Rightarrow$) Si $\square ABCD$ es un paralelogramo tiene, por la parte (a), dos lados paralelos y congruentes.

($\Leftarrow$) Supongamos, sin perder generalidad, que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Como, por definición, $\square ABCD$ es un trapezoide, tendremos, por la proposición 5.3 y la proposición 5.2, que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan; con lo que, por el ejercicio 4.11, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan. Así, por la parte (b), $\square ABCD$ es un paralelogramo.
**(d)** ($\Rightarrow$) Si $\square ABCD$ es un paralelogramo tendremos, por el lema 5.1, que $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$. Por la proposición 5.2 y el ejercicio 3.11, $m\angle A + m\angle D = 180$. Pero, considerando $\overleftrightarrow{AD}$ como secante de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, tenemos que $\angle A$ y $\angle D$ son ángulos internos a un mismo lado. Así, por la observación 4.1, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. De manera análoga se prueba que $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$; de donde $\square ABCD$ es un paralelogramo.
**(e)** Es claro a partir de la parte anterior, pues suplementos de congruentes son congruentes.

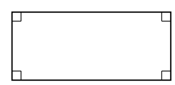
■

**Definición 5.6 (Rombo, rectángulo y cuadrado)**

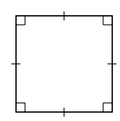
**(a)** *Un **rombo** es un cuadrilátero equilátero.*



**(b)** *Un **rectángulo** es un cuadrilátero equiángulo.*



**(c)** *Un **cuadrado** es un cuadrilátero equilátero y equiángulo.*⟨3⟩



**Observación 5.1** *Note que, por la proposición 5.4, los rombos, rectángulos y cuadrados son paralelogramos; y, por las proposiciones 5.2 y 5.3, todos los ángulos de los rectángulos y cuadrados son rectos (de aquí le viene el nombre a los rectángulos). Note además que un cuadrado es un rombo rectángulo.*

**(13)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es un rombo?*
**(14)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es un rectángulo?*
**(15)** *¿Cuándo un cuadrilátero no es un cuadrado?*
**(16)** *¿Podremos asegurar que existen rombos?*
**(17)** *¿Podremos asegurar que existen rectángulos?*
**(18)** *¿Podremos asegurar que existen cuadrados?*

A continuación presentamos dos caracterizaciones de los rectángulos y dos de los rombos, que nos ofrecerán sendos criterios para determinar cuándo un cuadrilátero es rectángulo y cuándo es rombo.

**Proposición 5.5** *Un cuadrilátero es rectángulo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *es paralelogramo y tiene un ángulo recto.*
**(b)** *es paralelogramo y las diagonales son congruentes.*

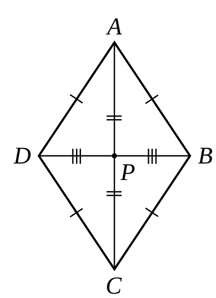
**Prueba** Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero.
**(a)** ($\Rightarrow$) Ya establecido en la observación 5.1.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un paralelogramo con $\angle A$ recto. Por las proposiciones 5.2 y 5.4, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ son rectos. Así, $\square ABCD$ es un rectángulo.
**(b)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un rectángulo. Por la observación 5.1, $\square ABCD$ es paralelogramo. Por la proposición 5.4, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Por LAL, $\triangle ADC \cong \triangle BCD$; de donde $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un paralelogramo tal que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Por la proposición 5.4 y LLL, $\triangle ADC \cong \triangle BCD$; de donde $\angle D \cong \angle C$. Por las proposiciones 5.2 y 5.4, $\angle D$ es recto. Así, por la parte (a), $\square ABCD$ es rectángulo.

■

**Proposición 5.6** *Un cuadrilátero es un rombo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *sus diagonales se bisecan y son perpendiculares.*[4]
**(b)** *las diagonales bisecan los ángulos con vértices en sus extremos.*

**Prueba** Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un rombo. Por la observación 5.1, $\square ABCD$ es paralelogramo. Por la proposición 5.4, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan, digamos en el punto $P$. Por LLL, $\triangle APD \cong \triangle APB$; de donde $\angle APD \cong \angle APB$ y, como forman un par lineal, tendremos que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

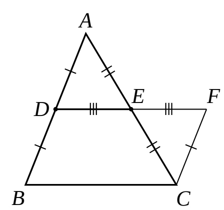



($\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan, digamos en $P$, y son perpendiculares. Por LAL, $\triangle APB \cong \triangle BPC \cong \triangle CPD \cong \triangle APD$. Así, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$; de donde $\square ABCD$ es un rombo.
**(b)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un rombo. Por la proposición 3.3 y LLL, $\angle ADB \cong \angle ABD \cong \angle CDB \cong \angle CBD$; de donde, por la observación 5.1 y las proposiciones 5.2 y 5.3, $\overline{BD}$ biseca los ángulos $\angle B$ y $\angle D$. De manera análoga se prueba que $\overline{AC}$ biseca los ángulos $\angle A$ y $\angle C$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{AC}$ biseca los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, y $\overline{BD}$ biseca los ángulos $\angle B$ y $\angle D$. Por ALA, $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ y $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. Así, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$; de donde $\square ABCD$ es un rombo.

■

Obtenemos ahora algunas aplicaciones del estudio de los cuadriláteros[5].

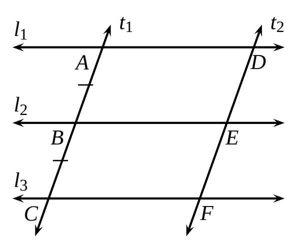
**Proposición 5.7** *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de éste.*

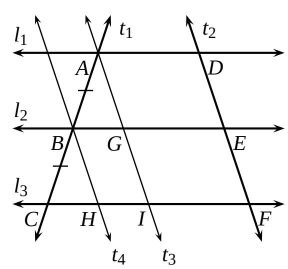



**Prueba** Sea $\triangle ABC$ un triángulo, $D$ el punto medio de $\overline{AB}$ y $E$ el punto medio de $\overline{AC}$. Sea $F$ un punto en el rayo opuesto a $\overrightarrow{ED}$, tal que $\overline{EF} \cong \overline{DE}$. Por LAL, $\triangle FCE \cong \triangle DAE$; con lo que $\angle A \cong \angle FCE$. Por la proposición 4.3 (al tomar $\overleftrightarrow{AC}$ como secante a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CF}$), $\overline{BD} \parallel \overline{CF}$. Por la proposición 5.4, $\square BDFC$ es un paralelogramo; de donde $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Como $DE = \frac{1}{2}DF$ y, por la proposición 5.4, $DF = BC$, tenemos que $DE = \frac{1}{2}BC$.

■

**Proposición 5.8** *Si tres rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.*




**Prueba** Sean $l_1$, $l_2$ y $l_3$ tres rectas paralelas; $t_1$ secante a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos $A$, $B$ y $C$, respectivamente; y $t_2$ secante a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos $D$, $E$ y $F$, respectivamente. Supongamos que $\overline{BA} \cong \overline{BC}$.
**Caso I** $t_1 \parallel t_2$.
Como $\square ADEB$ y $\square BEFC$ son paralelogramos tenemos, por la proposición 5.4, que $\overline{ED} \cong \overline{EF}$.
**Caso II** $t_1$ y $t_2$ no paralelas.
Tomemos, por $A$ y por $B$, sendas paralelas a $t_2$, que llamaremos $t_3$ y $t_4$, respectivamente. Como $\angle CBH \cong \angle BAG$ (al ser correspondientes), y $\angle BCH \cong \angle ABG$ (al ser correspondientes), tendremos, por $ALA$, que $\triangle BCH \cong \triangle ABG$; de donde $\overline{AG} \cong \overline{BH}$. Como $\square BGIH$ es paralelogramo tendremos, por la proposición 5.4, que $\overline{BH} \cong \overline{GI}$. Así, por el caso anterior entre $t_3$ y $t_2$, $\overline{ED} \cong \overline{EF}$.

■

Dejaremos al lector la prueba de la siguiente generalización de la proposición anterior, con la sugerencia de que ésta se realiza por inducción en el número de rectas paralelas; en el capítulo siguiente obtendremos otra generalización de la misma proposición, pero de una naturaleza distinta.

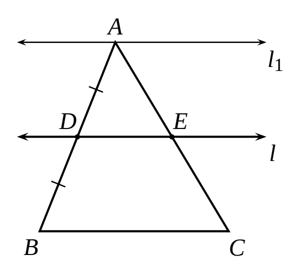
**Corolario 5.8.1** *Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante*$^{\langle 6\rangle}$.

Dejamos también como ejercicio al lector la prueba del siguiente resultado.

**Corolario 5.8.2** *Dado un número natural $n$, todo segmento se puede dividir en $n$ segmentos congruentes.*
*En otras palabras, dado un segmento $\overline{AB}$, se tiene que existen $n+1$ puntos $A_0$, $A_1$, $\ldots$, $A_{n-1}$ y $A_n$ tales que $A_0 = A$, $A_n = B$, $A_{i-1}$-$A_i$-$A_{i+1}$ (para $i = 1,2,\ldots,n-1$) y $A_iA_{i+1} = \dfrac{AB}{n}$ (para $i = 0,1,\ldots,n-1$).*

Obtenemos ahora la siguiente consecuencia de la proposición 5.8, que también será generalizada en el capítulo siguiente.

**Corolario 5.8.3** *Una recta que biseca un lado de un triángulo es paralela a un segundo lado si, y sólo si, biseca al tercer lado.*

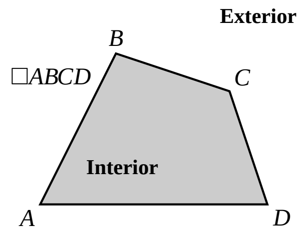



**Prueba** Sea $\triangle ABC$ un triángulo, $D$ el punto medio de $\overline{AB}$ y $l$ una recta que pasa por $D$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $l$ es paralela a $\overline{BC}$. Por el ejercicio 4.6, $l$ corta $\overline{AC}$ en un punto, digamos $E$, tal que $A$-$E$-$C$. Tomamos $l_1 \parallel \overline{BC}$ por $A$. Como $\overleftrightarrow{BC}$, $l$, y $l_1$ determinan segmentos congruentes en la secante $\overleftrightarrow{AB}$, tenemos, por la proposición 5.8, que también deben determinarlos en la secante $\overleftrightarrow{AC}$. Así, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y, por tanto, $E$ es el punto medio de $\overline{AC}$.
($\Leftarrow$) Es parte de los probado en la proposición 5.7.

■

Definimos ahora dos conjuntos especiales asociados a un cuadrilátero convexo.

**Definición 5.7 (Interior y exterior de un cuadrilátero convexo)**
*El **interior** de un cuadrilátero convexo es el conjunto de los puntos que se encuentran en el interior de sus cuatro ángulos a la vez.*
*El **exterior** de un cuadrilátero convexo es el conjunto de los puntos que no están en el interior del cuadrilátero, ni sobre el cuadrilátero.*




Introducimos ahora la idea de la *congruencia de cuadriláteros*, guiados por la misma idea con la que definimos la congruencia de triángulos en el Capítulo 3, y con la ayuda de la proposición 5.1.

**Definición 5.8 (Congruencia de cuadriláteros)**
*Dos cuadriláteros son **congruentes**, si existe alguna correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes son congruentes.*
*Si los cuadriláteros son $\square ABCD$ y $\square EFGH$, y la correspondencia fuera $ABCD \leftrightarrow EFGH$, escribiremos $\square ABCD \cong \square EFGH$ (con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los cuadriláteros son congruentes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos **una congruencia** entre esos dos cuadriláteros; y $\square ABCD \ncong \square EFGH$ para indicar que no son congruentes.*

Por su sencillez, dejaremos las pruebas de las siguientes dos proposiciones como ejercicio al lector (ver el ejercicio 5.19).

**Proposición 5.9** *La congruencia de cuadriláteros es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los cuadriláteros, es decir:*

**(a)** *todo cuadrilátero es congruente consigo mismo;*
**(b)** *si un cuadrilátero $\square_1$ es congruente con un cuadrilátero $\square_2$, entonces el cuadrilátero $\square_2$ es también congruente con el cuadrilátero $\square_1$, y*
**(c)** *si un cuadrilátero $\square_1$ es congruente con un cuadrilátero $\square_2$, y el cuadrilátero $\square_2$ es congruente con un cuadrilátero $\square_3$, entonces el cuadrilátero $\square_1$ es también congruente con el cuadrilátero $\square_3$.*

**Proposición 5.10 (Criterio LALAL de congruencia de cuadriláteros)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos cuadriláteros con la propiedad de que tres lados y los ángulos comprendido por ellos del primer cuadrilátero son congruentes con las partes correspondientes del segundo cuadrilátero, entonces la correspondencia es una congruencia.*

Aclaramos que LALAL es una taquigrafía de lado-ángulo-lado-ángulo-lado, indicando así que los dos pares de ángulos que son congruentes deben estar comprendidos por los tres pares de lados que son congruentes.

## Problemas del Capítulo 5

**5.1** ¿Será el siguiente enunciado una definición de cuadrilátero?
*El conjunto de puntos que se encuentran sobre cuatro segmentos que se cortan sólo en sus extremos, y no son colineales tres a tres.*

**5.2** ¿Cuál(es) de los siguientes enunciados define un cuadrilátero convexo?

- **(a)** *Si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de la recta determinada por uno de sus lados.*
- **(b)** *Todo el cuadrilátero está contenido en uno solo de los lados del plano determinado por la recta que contiene uno de sus lados.*
- **(c)** *La recta determinada por uno de sus lados no corta ningún otro lado del cuadrilátero, excepto en alguno de los extremos.*

**5.3** Pruebe que:

- **(a)** los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero (convexo o no) determinan un paralelogramo.
- **(b)** los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero (convexo o no) se bisecan.
- **(c)** el perímetro del cuadrilátero generado en (a) es la suma de las diagonales del original.
- **(d)** los puntos medios de los lados de un rombo determinan un rectángulo.
- **(e)** los puntos medios de los lados de un rectángulo determinan un rombo.
- **(f)** los puntos medios de los lados de un cuadrado determinan un cuadrado.
- **(g)** si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces los puntos medios de sus lados, junto con el vértice común a los lados congruentes, determinan un rombo.

**5.4** Pruebe que, en todo cuadrilátero convexo $\square ABCD$:

- **(a)** los bisectores de dos ángulos consecutivos se cortan en un punto que no está sobre las rectas que contienen los lados de dichos ángulos.
- **(b)** la medida de dos de los ángulos, formados por el corte de los bisectores de dos ángulos consecutivos, es igual a la semisuma de las medidas de los otros dos ángulos del cuadrilátero.

**5.5** **(Concurrencia de las medianas y baricentro)**

**(a)** Pruebe que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto cuya distancia a los vértices es dos tercios de la longitud de las medianas correspondientes.
Este punto se llama ***el centroide*** o ***el baricentro*** del triángulo. Físicamente este punto corresponde al centro de gravedad, o centro de masa, de una lámina plana triangular de densidad uniforme; punto por el cual se podría colgar la lámina para que permanezca horizontal, o el punto en el cual se puede apoyar la lámina para que permanezca en equilibrio.

**(b)** Enuncie y pruebe el recíproco del ejercicio 3.25.

**(c)** Pruebe que la longitud de una mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los lados adyacentes (es decir, aquellos que parten del mismo vértice que la mediana).

**(d)** Pruebe que la suma de las longitudes de las medianas de un triángulo es mayor que las tres cuartas partes de su perímetro.

**5.6** Si $\triangle ABC$ es un triángulo tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $P$ es un punto interior de $\overline{BC}$, y trazamos por $P$ rectas paralelas a los lados congruentes, pruebe que se forma un paralelogramo cuyo perímetro es igual a $AB + AC$.

**5.7** Pruebe que el punto medio de una diagonal de un paralelogramo biseca cualquier segmento que lo contenga, y que tenga sus extremos sobre lados opuestos del cuadrilátero.

**5.8** Si, en un paralelogramo $\square ABCD$, se toma un punto $E$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$ y un punto $F$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{DA}$, de tal manera que $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DF} \cong \overline{DC}$, pruebe que $\angle DCF \cong \angle BCE$ y que los puntos $F$, $C$ y $E$ son colineales.

**5.9** Si $P$, $Q$ y $R$ son los puntos medios de los lados de un triángulo $\triangle ABC$, pruebe que el perímetro de $\triangle PQR$ es la mitad del perímetro de $\triangle ABC$.

**5.10** Sea $\square ABCD$ un paralelogramo con $AD > AB$. El bisector de $\angle A$ intersecta $\overline{BC}$ en $G$, y el bisector de $\angle B$ intersecta $\overline{AD}$ en $H$. Pruebe que $\square ABGH$ es rombo.

**5.11** Un *cometa* es un cuadrilátero en el que sólo una de las diagonales está en la mediatriz de la otra diagonal.

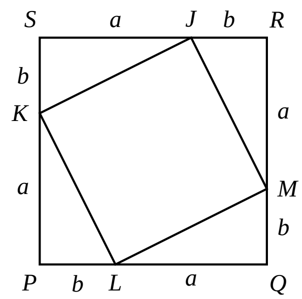
**(a)** Pruebe que un cometa tiene dos pares de lados congruentes, pero que sus lados opuestos no son congruentes.

**(b)** ¿Son los cometas cuadriláteros convexos?

**5.12** Dado un cuadrilátero $\square PQRS$ tal que los puntos $J$, $K$, $L$ y $M$ dividen los lados en las longitudes $a$ y $b$, pruebe que:

**(a)** si $\square PQRS$ es un rombo, entonces $\square JKLM$ es un paralelogramo.

**(b)** si $\square PQRS$ es un cuadrado, entonces $\square JKLM$ es un cuadrado.




**5.13** Pruebe que:

**(a)** los bisectores de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se cortan y son perpendiculares.

**(b)** los bisectores de dos ángulos opuestos de un paralelogramo coinciden en una diagonal, si es rombo, o son paralelos, si no es rombo.

**(c)** los puntos de intersección de los bisectores de los ángulos de un paralelogramo (no rombo) son vértices de un rectángulo.

**5.14** En un paralelogramo, consideremos el par de segmentos determinados por: (1) un vértice y el punto medio de un lado del cual no es extremo y (2) el vértice opuesto al fijado en (1) y el punto medio del lado opuesto al tomado en (1).

**(a)** Pruebe que dividen una diagonal en tres segmentos congruentes.

**(b)** Si se tomara el otro par de segmentos que se construyen como los de antes, ¿contendrán los mismos puntos de corte, con la misma diagonal, que los otros dos?

**5.15** Pruebe que:

**(a)** si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces es rombo.

**(b)** si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares y congruentes, entonces es cuadrado.

**5.16** Pruebe que, si desde el punto donde el bisector de un ángulo de un triángulo encuentra el lado opuesto se trazan paralelas a los otros dos lados, se forma un rombo.

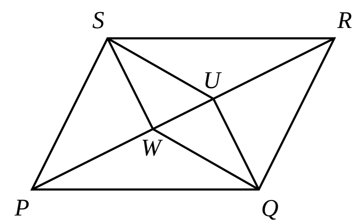
**5.17** Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan perpendicularmente, pruebe que la suma de las longitudes de los segmentos que unen el punto de corte de las diagonales con los puntos medios de los lados es igual a la mitad del perímetro del cuadrilátero.

**5.18** Dado un triángulo cualquiera, pruebe que:

**(a)** la medida del segmento perpendicular a un lado, desde el baricentro, es la tercera parte de la medida de la altura correspondiente a ese lado.
**(b)** las rectas que pasan por el baricentro, y son paralelas a los lados, trisecan cada lado.

**5.19** Pruebe las proposiciones 5.9 y 5.10.

**5.20** Dado un paralelogramo $\square PQRS$, y $\overline{PR}$ una diagonal, pruebe que $\square SWQU$ es un paralelogramo, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:
**(a)** $PW = RU$.
**(b)** $\overline{SW}$ biseca $\angle PSR$ y $\overline{QU}$ biseca $\angle PQR$.
**(c)** $\overline{SW} \perp \overline{PR}$ y $\overline{QU} \perp \overline{PR}$.




**5.21** En un trapecio $\square ABCD$, se unen los puntos medios $M$ y $N$ de sus bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, a los puntos medios $P$ y $Q$ de sus diagonales. Pruebe que:

**(a)** $\square NPMQ$ es un paralelogramo y su perímetro es la suma de las longitudes de los laterales.
**(b)** $\angle M$ y $\angle N$, de $\square NPMQ$, son congruentes al ángulo que determinan las rectas que contienen a los laterales.

**5.22** En un trapezoide $\square ABCD$, con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, pruebe que el segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ satisface las siguientes propiedades:

**(a)** es paralelo a $\overline{AB}$;
**(b)** coincide con el segmento paralelo a $\overline{AB}$, y que pasa por el punto medio de uno de los lados $\overline{AD}$ o $\overline{BC}$;
**(c)** biseca ambas diagonales (y así, los cuatro puntos medios son colineales);
**(d)** mide $\frac{AB+CD}{2}$.
**(e)** Además, si $\square ABCD$ es un trapecio, el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a las bases y mide $\left|\frac{AB-CD}{2}\right|$.

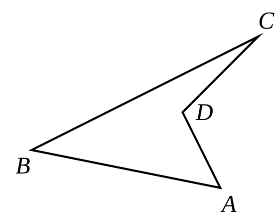
**5.23** **(Trapecio isósceles)**
Un *trapecio isósceles* es un trapecio cuyos laterales son congruentes.
Pruebe que un trapecio es isósceles si, y sólo si, se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

**(a)** los ángulos que comprenden una cualquiera de las bases son congruentes.
**(b)** las diagonales son congruentes.

**5.24** Si un paralelogramo está completamente contenido en uno de los semiplanos determinados por una recta $l$, pruebe que la suma de las distancias hasta $l$, desde dos vértices opuestos, es constante.

**5.25** Si un triángulo está en un semiplano respecto a una recta, pruebe que la distancia desde su centroide, hasta la recta, es la media aritmética de la distancias desde los vértices a la recta.

**5.26** En el cuadrilátero no convexo $\square ABCD$, pruebe que $m\angle ADC = m\angle A + m\angle B + m\angle C$.




**5.27** Pruebe que:

**(a)** un punto está en el interior de un cuadrilátero convexo si, y sólo si, está en el interior de dos ángulos opuestos.

**(b)** el interior de un cuadrilátero convexo es un conjunto convexo.

**5.28** (A la búsqueda de un tesoro perdido)
(Una versión de otro ejercicio que aparece en el texto de *George Gamow* titulado *Uno, dos, tres,..., infinito*, Espasa-Calpe, 1963, Madrid).
El tío-abuelo del joven **X**, que vivía en el continente de los *sabios*, había escondido toda su fortuna en una isla de las costas de su tierra, llamada la isla de los *geómetras*, que para aquel entonces se encontraba desierta. Al morir, dejó indicaciones a **X** para que encontrara ese tesoro, en los siguientes términos: *al llegar a la orilla te encontrarás con dos palmeras, inconfundibles porque tienen sus troncos dorados; y un poco más adentro, por entre las palmeras, encontrarás una horca. Camina desde la horca hasta una de las palmeras y luego, perpendicularmente y tierra adentro, recorre la misma distancia y coloca en ese punto una piedra. Vuelve a la horca y repite el proceso con la otra de las palmeras. El tesoro está, exactamente en la mitad del camino entre ambas piedras*. Siguiendo estas instrucciones se dispone **X** a buscar ese tesoro. Llega a la isla, ubica fácilmente las palmeras, pero la horca no está por ninguna parte. Desilusionado el joven, decide emprender el camino de vuelta a casa; pero ocurre que apareció en ese momento el individuo **Y**, que visitaba esta isla porque allí habían vivido sus ancestros lejanos. El joven, dándole parte de su contratiempo a éste, se decide a hacerlo partícipe de las indicaciones que portaba, y de inmediato el extraño compañero sonrió y, después de pensar un rato, le dijo: *la horca no está, porque muy probablemente nunca estuvo. Además, ese viejo zorro sabía que no hacía*

*falta, y muy bien hubiera podido indicar que caminaras, perpendicularmente, desde el medio de las palmeras, la mitad de lo que ellas distan*. ¿Explique las razones por las que **Y** dio estas segundas indicaciones?

**5.29** (A la búsqueda de otro tesoro perdido)
(Una versión de otro ejercicio que aparece en [9]).
En un antiguo documento se encontraron las siguientes instrucciones:
*Partiendo de la intersección del camino* **A** *con el camino* **B***, seguir hacia el norte por el camino* **A** *y buscar un samán y, después, un cedro. Regresar a la intersección. Hacia el oeste, por el camino* **B***, hay un bucare y hacia el este, por el mismo camino, hay un apamate, a una distancia desde el cruce distinta a la del bucare hasta el cruce. El punto en el que la recta determinada por el samán y el bucare corta a la recta determinada por el cedro y el apamate es uno de los puntos mágicos. El otro punto mágico está situado en la intersección de la recta determinada por el apamate y el samán con la recta determinada por el bucare y el cedro. El tesoro se encuentra enterrado donde la recta que pasa por los dos puntos mágicos corta al camino* **B***.*

**(a)** Unos excursionistas encontraron el bucare a 4 kilómetros de la intersección de los caminos, el apamate a 2 kilómetros y el samán a 3 kilómetros de la misma, pero no encontraron el cedro. Sin embargo, mediante las instrucciones, lograron hallar el tesoro. ¿Muestre cómo fue esto posible?

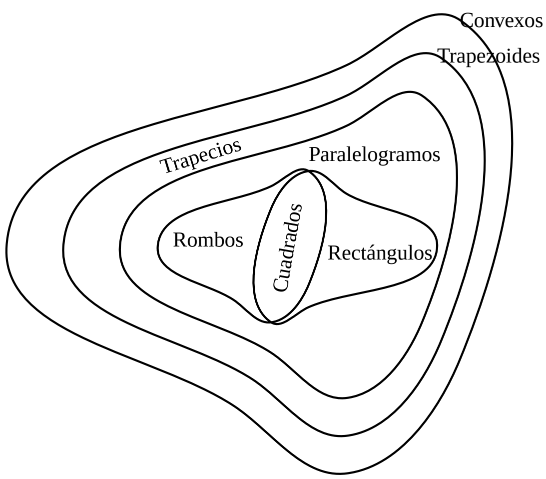
**(b)** Uno de los excursionistas comentó acerca de cuán afortunados habían sido por haber encontrado el samán. El guía de los excursionistas sonrió y dijo: *Tampoco necesitábamos el samán*. Pruebe que estaba en lo cierto.

# Comentarios del Capítulo 5

⟨1⟩De hecho, tal como veremos en la definición inmediata, no necesitamos de la consideración del paralelismo, ni mucho menos del Postulado de las paralelas, para realizar su estudio; pero, como los casos más interesantes de cuadriláteros se presentan usando esta noción, hemos ubicado su estudio justo después de haberlo tratado.

⟨2⟩Note que hay cierta ambigüedad en el uso de la palabra *convexo*, ya que un cuadrilátero no es un conjunto convexo (pues ninguna de las diagonales está contenida en ninguno de sus lados). Esta ambigüedad se vadea mediante la proposición siguiente: *un cuadrilátero es convexo si, y sólo si, su interior es un conjunto convexo*. Pero, para poder definir el interior de un cuadrilátero en general, se necesita de un resultado conocido como *El Teorema de la curva de Jordan*, cuya prueba requiere de las herramientas del Cálculo diferencial. Sin embargo, tal como haremos al final del capítulo, podemos definir, de manera natural, el interior de un cuadrilátero convexo.

⟨3⟩Las clases de cuadriláteros que hemos definido, y que son todas las que vamos a estudiar en detalle, se pueden ordenar de acuerdo al siguiente diagrama




⟨4⟩Notará el lector que, gracias a este resultado, podemos construir rectángulos que no son rombos. De esta manera, entre los cuadriláteros equiángulos y equiláteros no hay ninguna relación, al contrario de lo que sucede en los triángulos, entre los que ambas categorías coinciden. Así vemos también que los cuadriláteros no son figuras rígidas, al contrario de lo que pasa con los triángulos: los cuadriláteros pueden conservar el tamaño y variar la forma.

⟨5⟩Con la ayuda de los cuadriláteros obtenemos también información sobre proporcionalidad en secantes a varias rectas paralelas. Aquí desarrollaremos sólo un caso especial (en el que hay congruencia, es decir, aquel en el que las paralelas equidistan entre sí), dejando para el próximo capítulo el estudio del caso general.

⟨6⟩Note que lo interesante de este resultado se hace patente al pensarlo en términos de las distancias entre las rectas paralelas, ya que nos dice que: *si tres o más rectas paralelas equidistan entre sí, entonces estas rectas determinan segmentos congruentes en cualquier secante.*

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 5

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 5.1 al 5.5; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 5.1 al 5.3, de ***dificultad intermedia*** el ejercicio 5.4, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 5.5.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 5.6 al 5.27; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 5.6 al 5.18, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 5.19 al 5.22, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 5.23 al 5.27.

Creemos que los ejercicios del 5.28 al 5.29 son sólo para los estudiantes más aventajados.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**5.3:** trace las diagonales del original.

**5.5:** para la parte (a), verifique primero que dos medianas cualesquiera se cortan. Llame $P$ el punto de corte de las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Llame $S$ y $R$ los puntos medios de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, respectivamente. Verifique que $\square DESR$ es un paralelogramo. Repita luego el proceso con la mediana desde $C$ y la mediana desde $A$, y verifique que los puntos de corte coinciden. Para la parte (c), llame $M$ el punto medio de $\overline{BC}$ y tome $D$, en el rayo opuesto a $\overrightarrow{MA}$ y tal que $\overline{MA} \cong \overline{MD}$; establezca una congruencia de triángulos y use la Desigualdad del triángulo.

**5.5:** tome $D$ el punto medio de $\overline{BC}$ y $E$ punto medio de $\overline{AB}$. Trace paralelas a $\overline{AD}$ por $C$, por $B$ y por los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$, y utilice el corolario 5.8.1.

**5.17:** use el ejercicio 4.8.

**5.19:** para la prueba de la proposición 5.10, divida primero en los casos convexos (para el cual use una diagonal) y no convexos (para el cual use ambas diagonales).

**5.21:** para verificar que las tales rectas se cortan, use el ejercicio 4.4.

**5.23:** para la parte (a), trace, por uno de los extremos de una base, una paralela al lateral que no lo contiene; para la parte (b), para el recíproco, considere las alturas desde los extremos de una de las bases.

**5.24:** use el ejercicio 5.22 con el punto de corte de las diagonales.

**5.25:** use el ejercicio 5.22, tomando trapecios convenientes desde los puntos de trisección de una mediana.

**5.27:** trace perpendiculares, desde la horca y desde las dos piedras, hasta la recta que contiene las palmeras y, descubriendo las congruencias de los triángulos que se forman, use el ejercicio anterior.

La longitud de la circunferencia de la Tierra, en el ecuador, es de aproximadamente 40.000 kilómetros. En el siglo XV, según parece, se creía que era menor, puesto que cuando Cristóbal Colón desembarcó en una de las islas Bahamas, de camino a las Indias, creyó que había llegado efectivamente a éstas; de manera que cometió un error del tamaño del ancho de los Estados Unidos de América más el océano Pacífico.

Los griegos del tercer siglo antes de Cristo sabían un poco más. *Eratóstenes* de Cyrene fue el primer hombre, que se sepa en el hemisferio occidental, que midió, con una precisión del dos por ciento, la longitud de la circunferencia de la Tierra; pero lo interesante a destacar es la ingeniosa idea que tuvo para lograrlo, y de la cual hablaremos inmediatamente después de esbozar un poco el perfil de este histórico personaje.

Nació en el año 276 a.C., en Cyrene, Libya (al norte de áfrica, al lado de Egipto), antigua colonia griega, fundada en el 631 a.C. por un grupo de emigrantes de la isla de Thera, en el mar Egeo; y murió en el año 194 a.C., en Alejandría, Egipto; respecto a su muerte se dice que, afligido por la ceguera en su vejez, se suicidó por inanición voluntaria. Su trabajo matemático es conocido principalmente por las obras de Pappus de Alejandría. Como anécdota curiosa: se dice que sus contemporáneos lo llamaban *beta* (la segunda letra del alfabeto), porque él era el segundo en todo, y nunca el mejor en nada. Hoy en día se le ponen, como es costumbre entre nosotros, muchos títulos: matemático, escritor científico, geógrafo, astrónomo, poeta; pero, como dice la máxima *por sus frutos los conoceréis*, ofrecemos algunas muestras de sus fértiles trabajos:

(a) Es reconocido como el tercero de los bibliotecarios de la gran biblioteca del Museo, en Alejandría.
(b) Fue autor de un trabajo titulado γεωγραφική (*geographiké*); el primero en tener la palabra *geografía* como título.
(c) Es reconocido como *el padre de la cronología*, ya que ideó las bases del método de sistematización cronográfica llamado *documental*, por medio del cual se sincronizan los eventos históricos con las Olimpíadas Griegas, celebradas cada cuatro años, dejando una gran cantidad de tablas de fechas, a partir de las cuales se fecha la caída de Troya en el año 1184 o 1183 a.C.; método que se popularizó, sobre todo, por las crónicas del segundo siglo de Apolodoro de Atenas. Logró estructurar un calendario que incluyó años bisiestos, en el que precisamente trató de fijar las fechas de sucesos literarios y políticos desde el asedio de Troya.
(d) Preparó un mapa del valle del río Nilo, esbozando su ruta hacia el sur del moderno Khartoum, corrigiendo las anteriores, al incluir sus dos afluentes

etíopes, y sugirió que las fuentes de éste podrían ser unos lagos. De este modo anticipó la explicación correcta de las crecidas del Nilo, diciendo que era suficiente para rendir cuenta de las inundaciones, las fuertes lluvias que se habían observado que sucedían en las partes superiores del río.

(e) Sus escrituras incluyen un poema inspirado en la astronomía, así como también trabajó sobre el teatro y sobre la ética.

(f) Midió el grado de oblicuidad de la eclíptica, o inclinación del eje de la Tierra, con gran exactitud, y recopiló un catálogo de estrellas.

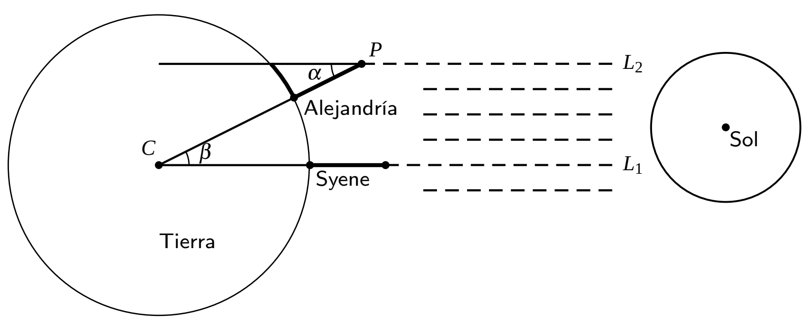
(g) Ideó un método que facilita la búsqueda de números primos, conocido como el método del *tamizado* o de *la criba de Eratóstenes*, y que mostraremos en qué consiste por medio del siguiente ejemplo: se enumeran los números naturales entre $2$ y $100$ en orden creciente, se desechan los números pares mayores que $2$, pues son divisibles por $2$ y por tanto no son primos; entre los que quedan, se sacan los múltiplos de $3$ mayores que $3$, pues son divisibles por $3$ y por tanto no son primos; se continúa el proceso de cernido tachando los múltiplos de $5$ mayores que $5$, los múltiplos de $7$ mayores que $7$, etc.: los números que quedan son todos los primos menores que $100$. Este proceso de tamizado, aunque laborioso para hacerlo manualmente, es muy eficiente, pues no es necesario tamizar los números que son múltiplos de un número mayor que $11$, pues, de los restantes, el próximo múltiplo de $11$, mayor que $11$, es $11^2 = 121$, que no se toma en cuenta por ser mayor que $100$. Para el caso general, cuando el tamiz de Eratóstenes se usa para encontrar todos los números primos menores que un número natural $n$ predeterminado, sólo hace falta verificar el cernido para los múltiplos de los números naturales menores que $\sqrt{n}$.

(h) Se considera uno de los fundadores de la *geodesia*, por haber sido el primero en describir y aplicar un método científico de medición para determinar el tamaño de la Tierra. Sobre este método centraremos el resto de estos comentarios

Eratóstenes había observado que en la ciudad de Syene (actualmente Aswan), en la ribera del Nilo, 800 kilómetros al sudeste de Alejandría, al mediodía en el solsticio de verano, el Sol estaba exactamente en el cenit, es decir, que al mediodía de ese día particular, un mástil no proyectaba ninguna sombra, o lo que es lo mismo, el fondo de un pozo cavado en la tierra quedaba completamente iluminado.

Al mediodía de ese mismo día observó que en Alejandría, en la misma fecha y hora, la luz del sol proyectaba una sombra en un mástil vertical; midió, entonces, el ángulo $\angle\alpha$ formado por ese mástil vertical y el rayo de luz solar que pasaba por el extremo superior de éste y por el extremo de su sombra. Encontró que dicho ángulo era aproximadamente de 7 grados y 12 minutos, alrededor del $\frac{1}{50}$ de una circunferencia completa.

Asumió que los rayos solares, observados desde la Tierra, eran paralelos uno a otro, como efectivamente casi lo son, debido a la enorme distancia que separa a la Tierra del Sol. Pero entonces, tal como se muestra en la figura, llamando $C$ al centro de la Tierra y $P$ al extremo superior del mástil colocado en Alejandría, y suponiendo que $L_1$ y $L_2$ son paralelas, tendremos que $\angle\beta \cong \angle\alpha$ (al ser ángulos internos alternos que se forman en el corte de las rectas $L_1$ y $L_2$ por la secante $\overleftrightarrow{CP}$). De este modo dedujo que la distancia entre Syene y Alejandría tendría que ser aproximadamente el $\frac{1}{50}$ de la longitud de la circunferencia de la Tierra.




Ahora bien, lo único que necesitaba saber era la distancia exacta entre Syene y Alejandría, y luego multiplicarla por 50. Probablemente usando los datos obtenidos de los agrimensores, estimó que esta distancia es de 5.000 estadios griegos[1]. Concluyó así Eratóstenes que la longitud de la circunferencia de la Tierra era de 250.000 estadios, es decir, de 39.689 kilómetros: de manera que el error de Eratóstenes fue menor del dos por ciento. Se dice que más tarde hizo una aproximación mejor (252.000 estadios), pero no quedó registro del método por el cual la obtuvo.

[1]Un *estadio* era la unidad de medida de longitud corriente en la época Helenística, que equivale aproximadamente a 158.75 metros

# Capítulo 6

# Proporcionalidad y semejanza

El estudio de la semejanza de triángulos tiene su asiento en el *Teorema de Thales* (Teorema 6.1), que generaliza la proposición 5.8, y del cual obtendremos una generalización del corolario 5.8.3, a través del resultado que llamaremos el *Teorema fundamental de proporcionalidad* (Teorema 6.2). Éste último nos ofrecerá un criterio de paralelismo puramente aritmético, en términos de proporciones entre números; números que representan distancias entre puntos.

Por otro lado, así como con el Postulado de las paralelas obtenemos las relaciones métricas entre los ángulos de un triángulo (la suma de todos ellos es 180), con la semejanza de triángulos obtendremos las relaciones métricas entre los lados de un triángulo (el Teorema de Pitágoras, Teorema 6.4, y su consecuencia, el corolario 6.4.1), y entre sus lados y ángulos (el ejercicio 6.52: *la Trigonometría*)⟨1⟩.

Para enunciar el Teorema de Thales y definir el concepto de semejanza de triángulos en los términos clásicos, debemos recordar, en primer lugar, el concepto de colecciones de números proporcionales: dos ***colecciones finitas de*** $n$ ***números reales positivos*** $r_1, r_2, \ldots, r_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son ***proporcionales***, si

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \ldots = \frac{r_n}{s_n} = k;$$

o, en otras palabras, si los cocientes de los términos con el mismo subíndice permanecen constantes. El número real $k$ es llamado la *razón de proporcionalidad* o la *constante de proporcionalidad*⟨2⟩.

Note que: decir que las dos colecciones de números reales positivos son proporcionales con razón de proporcionalidad $k = 1$ equivale a decir que las dos colecciones son iguales término a término; por otro lado, si la colección de números reales positivos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ es proporcional a la colección de números reales positivos $s_1, s_2, \ldots, s_n$, también es cierto que la colección $s_1, s_2, \ldots, s_n$ es proporcional a la colección $r_1, r_2, \ldots, r_n$; lo único que cambia es que la constante de proporcionalidad, en un caso, es la recíproca de la otra, es decir

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \ldots = \frac{s_n}{r_n} = \frac{1}{k}.$$

Cuando las colecciones finitas tienen sólo dos términos, se suele llamar a la igualdad de los cocientes

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$$

una ***proporción***.

Ciertamente los segmentos no son números; pero, para hablar en los términos clásicos, haremos las siguientes convenciones: cuando digamos que ***una colección de segmentos es proporcional a otra colección de segmentos***, querremos decir que la colección de las longitudes de los primeros es proporcional a la colección de longitudes de los segundos; y cuando digamos, por ejemplo, ***el cuadrado del lado***, o ***el doble del lado***, querremos decir el cuadrado de la longitud del lado, o el doble de la longitud del lado.

En segundo lugar, recordando que los números racionales son los que se pueden representar como cocientes de la forma $\frac{a}{b}$ con $a$ y $b$ números enteros y $b \neq 0$; y que los racionales positivos son los de la forma $\frac{a}{b}$ con $a$ y $b$ números enteros positivos, debemos tener a mano una propiedad de los números reales (llamada *la densidad de los racionales en los reales*) que dice: *entre cualesquiera dos números reales distintos existe un número racional*.

De esta propiedad se obtiene una manera de averiguar cuándo dos números reales son iguales que, a pesar de ser casi evidente, es la piedra angular de los resultados que nos proponemos obtener, a saber:

*Dados dos números reales $r$ y $s$ tales que, para cualquier número racional $\frac{a}{b}$, se satisface*

$$\frac{a}{b} < r \text{ si, y sólo si, } \frac{a}{b} < s,$$

*se tiene que $r = s$*$^{\langle 3 \rangle}$.

Con estas observaciones sobre los números reales procedemos a enunciar y probar el primer resultado mencionado.

**Teorema 6.1 (Teorema de Thales)**
*Tres rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en cualesquiera dos secantes*[4].
*En otras palabras: si* $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$*;* $t_1$ *y* $t_2$ *son secantes a* $l_1$*,* $l_2$ *y* $l_3$ *en los puntos* $A$*,* $B$*,* $C$*, y* $A'$*,* $B'$*,* $C'$*, respectivamente, entonces*

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'}.$$

**Prueba** Sean $l_1$, $l_2$, $l_3$, $t_1$ y $t_2$ cinco rectas tales que $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$; $t_1$ y $t_2$ son secantes a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos $A$, $B$, $C$, y $A'$, $B'$, $C'$, respectivamente. Como $l_1$, $l_2$ y $l_3$ son paralelas tendremos que $A$, $B$, $C$, y $A'$, $B'$, $C'$, son puntos distintos entre sí, y que están en las rectas $t_1$ y $t_2$, respectivamente. Por (S3) debe cumplirse una, y sólo una, en cada grupo de afirmaciones siguientes

$$(1)\ A\text{-}B\text{-}C \qquad (2)\ B\text{-}A\text{-}C \qquad (3)\ A\text{-}C\text{-}B$$

y

$$(1')\ A'\text{-}B'\text{-}C' \qquad (2')\ B'\text{-}A'\text{-}C' \qquad (3')\ A'\text{-}C'\text{-}B'.$$

Por el ejercicio 4.6 tendremos que: se cumple (1) si, y sólo si, se cumple (1'); se cumple (2) si, y sólo si, se cumple (2'); y se cumple (3) si, y sólo si, se cumple (3').
Supongamos que se cumple (1), es decir, que $A$-$B$-$C$ y $A'$-$B'$-$C'$. Llamemos

$$r = \tfrac{BC}{BA} \quad \text{y} \quad s = \tfrac{B'C'}{B'A'}.$$

Probaremos que $r = s$ tomando un número racional $q$, y probando que

(a) si $q < r$, entonces $q < s$; ***y,*** (b) si $q < s$, entonces $q < r$.

Como, tanto $r$ como $s$ son números positivos (pues son cocientes de distancias entre puntos distintos, que siempre son positivas), bastaría con tomar $q > 0$ (pues, por la densidad de los racionales en los reales, siempre podemos tomar un racional entre 0 y $r$, o entre 0 y $s$, según sea el caso).
Consideremos, pues, el número racional $q = \frac{a}{b}$, con $a$ y $b$ números enteros positivos.

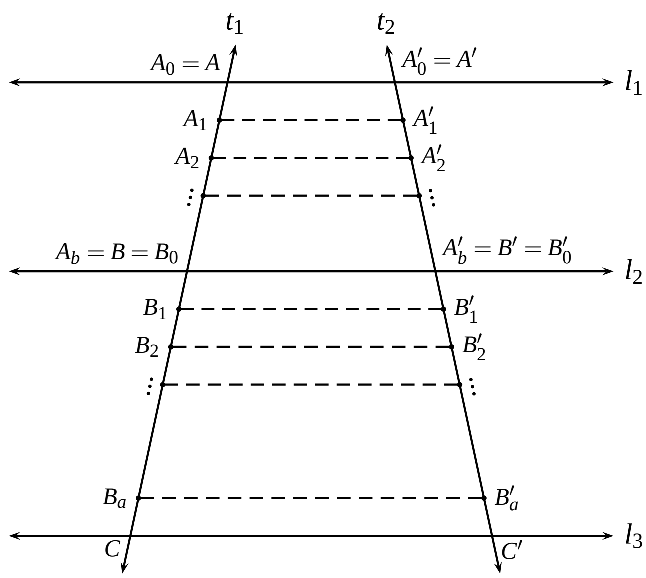
(a) Supongamos que $q < r$, es decir, que $\frac{a}{b} < \frac{BC}{BA}$.

Dividimos, gracias al corolario 5.8.2, $\overline{AB}$ en $b$ segmentos congruentes, es decir: tomamos, por (CS4), $A_0 = A$; $A_1, A_2, \ldots, A_b = B$ una colección de puntos en $\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $A_iA_{i+1} = \frac{AB}{b}$ $(i = 0,\ 1, \ldots,\ b-1)$ y $A$-$A_1$-$A_2$- $\ldots$ -$B$.

Tomamos, por (CS4), $B_0 = B$; $B_1$, $B_2, \ldots$, $B_a$ una colección de puntos en $\overrightarrow{BC}$, de tal manera que $B_iB_{i+1} = \frac{AB}{b}$ $(i = 0,\ 1, \ldots,\ a-1)$ y $B$-$B_1$-$B_2$- $\ldots$ -$B_a$.

Trazamos paralelas a $l_1$ (y por tanto a $l_2$, a $l_3$ y entre sí) por los puntos $A_i$ y por los puntos $B_i$. Por el corolario 5.8.1 y el ejercicio 4.6 obtenemos segmentos congruentes en $\overline{A'B'}$ y en $\overline{B'C'}$ de extremos $A'_0 = A'$; $A'_1$, $A'_2, \ldots$, $A'_b = B = B'_0$, $B'_1$, $B'_2, \ldots$, $B'_a$; con la particularidad de que $A'$-$A'_1$-$A'_2$- $\ldots$ -$B'$ y $B'$-$B'_1$-$B'_2$- $\ldots$ -$B'_a$.

Como $\frac{BB_a}{BA} = \frac{a \cdot \frac{BA}{b}}{BA} = \frac{a}{b}$, tenemos, por el corolario 5.8.1, que $\frac{B'B'_a}{B'A'} = \frac{a}{b}$.




Como $\frac{a}{b} < \frac{BC}{BA}$, es decir $\frac{a}{b} \cdot BA < BC$, es decir $BB_a < BC$, tenemos que $B$-$B_a$-$C$. Así, por el ejercicio 4.6, $B'$-$B'_a$-$C'$, es decir, $B'B'_a < B'C'$, es decir, $\frac{a}{b} \cdot B'A' < B'C'$, es decir, $\frac{a}{b} < \frac{B'C'}{B'A'} = s$; como queríamos.

(b) Supongamos que $q < s$, es decir, que $\frac{a}{b} < \frac{B'C'}{B'A'}$.

Este caso se prueba de manera análoga al anterior, intercambiando los papeles de $t_1$ y $t_2$.

Por lo tanto $r = s$, es decir, $\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$.

Si se cumpliera (2) tendríamos probado, por el caso (1), que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$. Pero,

entonces, $\frac{AC}{AB}+1=\frac{A'C'}{A'B'}+1$, es decir, $\frac{AC+AB}{AB}=\frac{A'C'+A'B'}{A'B'}$; con lo que $\frac{BC}{BA}=\frac{B'C'}{B'A'}$.
Si se cumpliera (3) tendríamos probado, por el caso (1), que $\frac{CB}{CA}=\frac{C'B'}{C'A'}$, que es lo mismo que $\frac{CA}{CB}=\frac{C'A'}{C'B'}$. Pero, entonces, $\frac{CA}{CB}+1=\frac{C'A'}{C'B'}+1$, es decir, $\frac{CA+CB}{CB}=\frac{C'A'+C'B'}{C'B'}$, es decir, $\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$; con lo que $\frac{BC}{BA}=\frac{B'C'}{B'A'}$.
Es claro que cualquiera de los resultados es lo mismo que $\frac{BC}{B'C'}=\frac{BA}{B'A'}$.

■

Note que los puntos $B$ y $B'$ en el enunciado del Teorema de Thales no están sometidos a ninguna condición particular. Por esta razón, también son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'} \quad y \quad \frac{CB}{C'B'}=\frac{CA}{C'A'};$$

y las recíprocas de todas las anteriores, es decir,

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{B'A'}{BA}, \quad \frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB} \quad y \quad \frac{C'B'}{CB}=\frac{C'A'}{CA}.$$

Por inducción en el número de rectas paralelas tendremos el siguiente resultado.

**Corolario 6.1.1** *Tres o más rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en cualesquiera dos secantes.*⟨5⟩
*En otras palabras: si $n$ es un número natural, $n \geqslant 3$, $l_1 \parallel l_2 \parallel \cdots \parallel l_n$, $t_1$ y $t_2$ son secantes a $l_1, l_2, \ldots, l_n$, y éstas determinan, respectivamente en $t_1$ y $t_2$, segmentos de longitudes $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ y $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, entonces*

$$\frac{r_1}{s_1}=\frac{r_2}{s_2}=\ldots=\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}.$$

**Prueba** La base inductiva estaría verificada por el Teorema de Thales mismo. Al pasar a la etapa inductiva, suponiendo que se cumple para $k$ rectas paralelas ($k>3$), aplicamos de nuevo el Teorema de Thales entre $l_{k+1}$, $l_k$ y $l_{k-1}$. Luego manipulamos algebraicamente las proporciones obtenidas hasta alcanzar el resultado deseado.

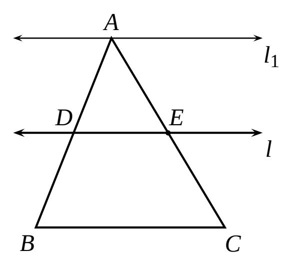
■

Ahora estamos en capacidad de probar el resultado fundamental de la semejanza de triángulos.

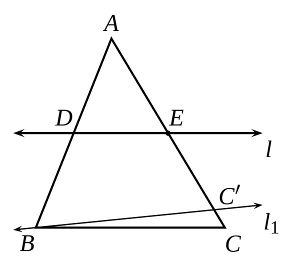
**Teorema 6.2 (Teorema fundamental de proporcionalidad)**
*Una recta que corta dos lados de un triángulo en puntos distintos de sus extremos, es paralela al tercero de los lados si, y sólo si, los segmentos que determina en esos dos lados son proporcionales.*⟨6⟩
*En otras palabras: dado un triángulo* $\triangle ABC$ *y una recta* $l$ *que corta los lados* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$ *en los puntos* $D$ *y* $E$ *distintos de* $A$, $B$ *y* $C$, *respectivamente, se tiene que*

$$l \parallel \overline{BC} \text{ si, y sólo si, } \frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA} \qquad (*)$$

**Prueba** Tomemos un triángulo $\triangle ABC$ y una recta $l$ que corta los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos $D$ y $E$ distintos de $A$, $B$ y $C$, respectivamente.




($\Rightarrow$) Supongamos que $l \parallel \overline{BC}$. Tomando una recta $l_1$ paralela a $\overline{BC}$ por $A$ tendremos, por el Teorema de Thales, que $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$.




($\Leftarrow$) Supongamos que $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$. Tomemos una recta $l_1$ paralela a $l$ por $B$, y supongamos que intersecta $\overrightarrow{AC}$ en $C'$. Como $A$-$D$-$B$, se tiene, por el ejercicio 4.6, que $A$-$E$-$C'$. Por lo probado anteriormente $\frac{DB}{DA} = \frac{EC'}{EA}$. Así $\frac{EC'}{EA} = \frac{EC}{EA}$, es decir, $EC' = EC$; de donde, por (CS4), $C = C'$. De este modo $\overline{BC}$ está contenido en $l_1$ y, por tanto, $l \parallel \overline{BC}$.

■

Note que, de la proporción dada en $(*)$ obtenemos:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \text{ y } \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE};$$

$$\frac{DB}{DA} + 1 = \frac{EC}{EA} + 1, \text{ es decir, } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}; \ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ y } \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC};$$

$$\frac{DA}{DB} + 1 = \frac{EA}{EC} + 1, \text{ es decir, } \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}; \ \frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA} \text{ y } \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC};$$

y, además, de cualquiera de estas proporciones entre los segmentos obtenemos todas las demás.

Corrientemente se dice que dos figuras geométricas son semejantes, si tienen la misma forma$^{\langle 7\rangle}$. Concebida así tendríamos, por ejemplo, que: dos segmentos cualesquiera serían semejantes, dos triángulos equiláteros cualesquiera serían semejantes, dos cuadrados cualesquiera serían semejantes. Pero, precisemos matemáticamente esta idea para los triángulos en general.

**Definición 6.1 (Semejanza de triángulos)**
*Dos triángulos son **semejantes**, si existe alguna correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.*
*Si los triángulos son $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y la correspondencia fuera $ABC \longleftrightarrow DEF$, escribiremos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los triángulos son semejantes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos una **semejanza** entre esos dos triángulos; y $\triangle ABC \nsim \triangle DEF$ para indicar que no son semejantes.*

Note que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ nos dice que:

**(a)** $ABC \longleftrightarrow DEF$ es la correspondencia que los hace semejantes;

**(b)** $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (*los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son congruentes*); y

**(c)** $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (*los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales*).

Note además que la congruencia de triángulos es un caso particular de la semejanza de triángulos, donde la constante de proporcionalidad entre los lados correspondientes es 1; es decir, si dos triángulos son congruentes, entonces son semejantes.

De inmediato probamos un par de resultados sobre esta relación de semejanza que resultan de mucha utilidad. Por su sencillez dejaremos la prueba del segundo de ellos al lector (ver ejercicio 6.7).

**Proposición 6.1** *La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los triángulos, es decir:*

**(a)** *todo triángulo es semejante consigo mismo;*
**(b)** *si un triángulo $\triangle_1$ es semejante a un triángulo $\triangle_2$, entonces el triángulo $\triangle_2$ es también semejante al triángulo $\triangle_1$, y*
**(c)** *si un triángulo $\triangle_1$ es semejante a un triángulo $\triangle_2$, y el triángulo $\triangle_2$ es semejante a un triángulo $\triangle_3$, entonces el triángulo $\triangle_1$ es también semejante al triángulo $\triangle_3$.*

**Prueba** **(a)** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$. Como $ABC \longleftrightarrow ABC$ es una correspondencia entre los vértices de este triángulo con los de él mismo, y tal que las partes correspondientes son exactamente las mismas, tendremos que $\triangle ABC \sim \triangle ABC$.
**(b)** Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Como $DEF \longleftrightarrow ABC$ es una correspondencia entre sus vértices, tal que las partes correspondientes coinciden con las apareadas por la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$, que es una semejanza, tendremos que $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.
**(c)** Sean $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ tales que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \sim \triangle GHI$. Consideremos la correspondencia $ABC \longleftrightarrow GHI$. Como, de acuerdo con las semejanzas $ABC \longleftrightarrow DEF$ y $DEF \longleftrightarrow GHI$, tenemos que $\angle A \cong \angle G$, $\angle B \cong \angle H$, $\angle C \cong \angle I$, $\frac{AB}{GH} = \frac{AC}{GI} = \frac{BC}{HI}$, concluimos que $ABC \longleftrightarrow GHI$ es una semejanza, y así, $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.

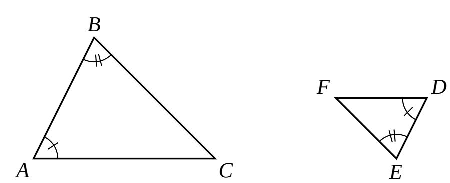
■

**Proposición 6.2** *Si $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ son tales que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.*

Como veremos a continuación, en los triángulos basta que se cumpla una de las condiciones que definen la semejanza para que necesariamente se cumpla la otra⟨8⟩: basta que los ángulos correspondientes sean congruentes para que los lados correspondientes sean proporcionales. Esto nos permite verificar, de paso, que la forma de un triángulo está determinada efectivamente por los ángulos. Ahora, gracias a que la suma de los ángulos de un triángulo es 180, es claro que dos de ellos determinan al tercero; por esta razón llamamos al criterio "AA", sin nombrar una tercera "A".

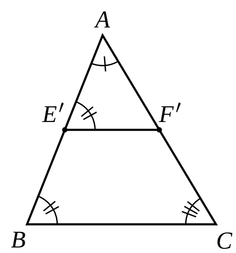
**Teorema 6.3 (Criterio AA de semejanza de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.*

*En otras palabras: si*
*$\angle A \cong \angle D$, y*
*$\angle B \cong \angle E$,*
*entonces*
*$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*



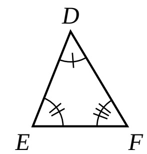

**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$.

Debemos probar que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Probaremos primero que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Para ello tomemos, por (CS4), un punto $E'$ en $\overrightarrow{AB}$ y un punto $F'$ en $\overrightarrow{AC}$ tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por LAL, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$; de donde $\angle AE'F' \cong \angle E \cong \angle B$.




**Caso I** $E' = B$.
En este caso, $\triangle AE'F' \cong \triangle ABC$ (pues, por el Teorema de la construcción del ángulo, $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{BC}$) y así $\triangle ABC \cong \triangle DEF$; de donde $1 = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

**Caso II** $E' \neq B$.
En este caso, $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (porque los ángulos correspondientes, al cortarlas con la secante $\overleftrightarrow{AB}$, son congruentes). Por el Teorema fundamental de proporcionalidad tendremos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$; de donde, por la construcción, tendremos que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.



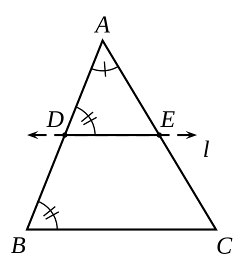

Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180 (es decir, gracias al Postulado de las paralelas), tendremos que $\angle C \cong \angle F$. Por un razonamiento análogo, intercambiando $C$ con $A$ y $F$ con $D$, tendremos la segunda igualdad ($\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$).

■

Con este criterio de semejanza de triángulos obtenemos una versión más elegante del *Teorema fundamental de proporcionalidad*.

**Corolario 6.3.1** *Una recta que corta dos lados de un triángulo en puntos distintos de sus extremos, es paralela al tercero de los lados si, y sólo si, el triángulo que determina es semejante al dado.*

**Prueba** Sea $l$ una recta que intersecta dos lados del triángulo $\triangle ABC$, digamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, en dos puntos distintos, digamos $D$ y $E$, respectivamente.
$l \parallel \overline{BC}$ si, y sólo si, $\angle B \cong \angle D$ (al ser correspondientes); y esto sucede si, y sólo si, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (gracias al criterio AA de semejanza de triángulos).




■

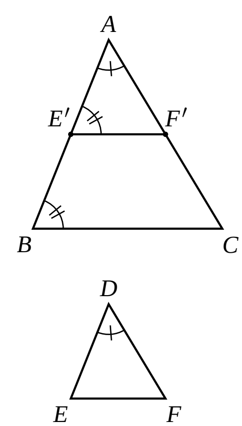
De inmediato obtendremos dos criterios más de semejanza de triángulos, que tienen una forma análoga a dos de los de congruencia: LAL y LLL.

**Proposición 6.3 (Criterio LAL de semejanza de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos lados del primer triángulo son proporcionales a sus correspondientes del segundo, y el ángulo comprendido por los dos lados citados del primero es congruente a su correspondiente del segundo, entonces la correspondencia es una semejanza.*
*En otras palabras: si*

$$\angle A \cong \angle D \quad y \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

*entonces* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\angle A \cong \angle D$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.
Tomemos, por (CS4), un punto $E'$ en $\overrightarrow{AB}$ y un punto $F'$ en $\overrightarrow{AC}$ tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por LAL, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$.
**Caso I** $E' = B$.
En este caso, por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (pues $DE = AB$ y, de $1 = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, tenemos que $AC = DF$). Así, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
**Caso II** $E' \neq B$.
Como $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, tendremos, por el Teorema fundamental de proporcionalidad, que $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, y así $\angle B \cong \angle AE'F'$. Por AA, $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$ y así, por la proposición 6.2, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



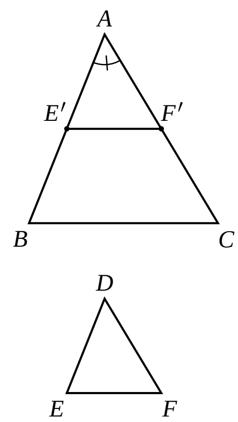

■

**Proposición 6.4 (Criterio LLL de semejanza de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.*⟨9⟩
*En otras palabras: si*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

*entonces* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

**Prueba** Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ tal que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.
Tomemos, por (CS4), un punto $E'$ en $\overrightarrow{AB}$ y un punto $F'$ en $\overrightarrow{AC}$ tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Como $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, tendremos, por el criterio LAL de semejanza de triángulos, que $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$; de donde $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$. Como $E'F' = BC \cdot \frac{AE'}{AB} = BC \cdot \frac{DE}{AB} = BC \cdot \frac{EF}{BC} = EF$, tendremos, por LLL, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. Así, por la proposición 6.2, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.




■

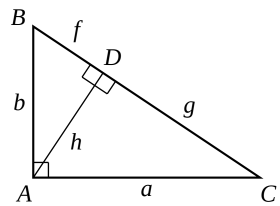
Nos proponemos ahora probar el resultado clave para obtener las relaciones métricas entre los lados de un triángulo: el *Teorema de Pitágoras*; aprovecharemos la ocasión para probar también su recíproco, que nos proveerá de un criterio para saber cuándo un triángulo es rectángulo.

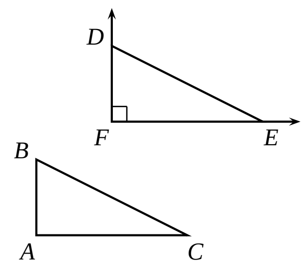
**Teorema 6.4**

**(a) (Teorema de Pitágoras)**
*Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de su hipotenusa es la suma de los cuadrados de sus catetos.*⟨10⟩

**(b) (Recíproco del Teorema de Pitágoras)**
*Si, en un triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo con dicho ángulo recto.*

**Prueba**
**(a)** Consideremos el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto $\angle A$. Consideremos la altura $\overline{AD}$ desde el vértice $A$. Por el corolario 3.7.1 sabemos que $B$-$D$-$C$ (ver la figura de la izquierda).
Llamemos por comodidad $a = AC$, $b = AB$, $c = BC$, $h = AD$, $f = BD$ y $g = CD$.
Por el criterio AA de semejanza de triángulos tenemos que $\triangle BDA \sim \triangle BCA \sim \triangle ADC$.
Como $\frac{f}{b} = \frac{b}{c}$ y $\frac{g}{a} = \frac{a}{c}$, tenemos que $f = \frac{b^2}{c}$ y $g = \frac{a^2}{c}$. Así, $f + g = c = \frac{a^2+b^2}{c}$ y, por tanto, $a^2 + b^2 = c^2$.




**(b)** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ tal que $AB^2+AC^2=BC^2$. Consideremos un ángulo recto $\angle EFD$ tal que $DF=AB$ y $EF=AC$. Por el Teorema de Pitágoras, $DE^2=DF^2+EF^2$; con lo que, al sustituir, $DE=BC$. Por LLL, $\triangle BAC\cong\triangle DFE$, y así $\triangle ABC$ es rectángulo con ángulo recto $\angle A$.

■

Note que las dos partes del Teorema anterior se podrían enunciar en una sola proposición, de la siguiente manera: *un triángulo es rectángulo con $\angle\alpha$ recto si, y sólo si, el cuadrado del lado opuesto a $\angle\alpha$ es la suma de los cuadrados de los otros dos lados*. Su negación, en consecuencia, se podría enunciar así: *un triángulo no tiene $\angle\alpha$ recto si, y sólo si, el cuadrado del lado opuesto a $\angle\alpha$ no es la suma de los cuadrados de los otros dos lados*. En el ejercicio 6.42 precisaremos esta afirmación, discerniendo qué tipo de ángulo es $\angle\alpha$ mediante la relación entre el cuadrado del lado opuesto a $\angle\alpha$, y la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Tal como afirmamos en la introducción de este capítulo, la siguiente proposición, consecuencia inmediata del Teorema de Pitágoras, permite hallar todas las relaciones métricas en un triángulo. Para ofrecer algunos ejemplos: podemos hallar las longitudes de las medianas (ejercicio 6.39) y de las bisectrices (ejercicio 6.45); y podemos calcular todos los elementos básicos de un triángulo (lados y ángulos) a partir de los datos mínimos que nos ofrecen los criterios de congruencia de triángulos (ejercicio 6.53).

**Corolario 6.4.1** *En cualquier triángulo:*

**(a)** *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo* ***obtuso*** *es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos dos lados por la proyección del otro sobre ese lado.*
*Dicho de otro modo: si, en el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B$ es obtuso y $\overline{AD}$ es altura,*
$$AC^2=AB^2+BC^2+2\cdot BC\cdot BD;$$

**(b)** *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo* ***agudo*** *es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de uno de estos dos lados por la proyección del otro sobre ese lado.*
*Dicho de otro modo: si, en el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B$ es agudo y $\overline{AD}$ es altura,*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BD;$$

**(c)** *en el triángulo $\triangle ABC$, la altura $\overline{AD}$ y las proyecciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sobre el lado $\overline{BC}$ son:*

$$BD = \pm \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC} \qquad (-,\ \text{si } \angle B \text{ es obtuso})$$

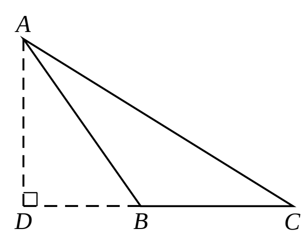
$$CD = \pm \frac{BC^2 - AB^2 + AC^2}{2 \cdot BC} \qquad (-,\ \text{si } \angle C \text{ es obtuso})$$

$$AD = \frac{2}{BC} \sqrt{s \cdot (s - AB) \cdot (s - AC) \cdot (s - BC)}$$

*donde s es el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$.*

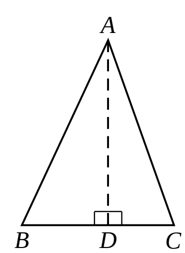
**Prueba** Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ y la altura $\overline{AD}$.

**(a)** Supongamos que el ángulo $\angle B$ es obtuso. Por el corolario 3.7.1, $D$-$B$-$C$. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras, y sabiendo que $CD = BC + BD$, tenemos que




$$\begin{aligned} AC^2 &= CD^2 + AD^2 \\ &= (BC + BD)^2 + AB^2 - BD^2 \\ &= BC^2 + 2 \cdot BC \cdot BD + BD^2 + AB^2 - BD^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot BD \end{aligned}$$

**(b)** Supongamos que el ángulo $\angle B$ es agudo. Por el corolario 3.7.1, $B$-$D$-$C$. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras, y sabiendo que $BD = BC - CD$, tenemos que




$$\begin{aligned} AC^2 &= CD^2 + AD^2 \\ &= (BC - BD)^2 + AB^2 - BD^2 \\ &= BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BD + BD^2 + AB^2 - BD^2 \\ &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \end{aligned}$$

**(c)** Calculamos $BD$ despejándolo en las fórmulas anteriores.
Calculamos $CD$ mediante $BC \pm BD$, de acuerdo al ángulo $\angle B$ que corresponda (incluyendo el caso en que sea recto).
Para calcular $AD$ sustituimos el valor de $BD$ en el siguiente valor inicial que nos ofrece el Teorema de Pitágoras y manipulamos la ecuación algebraicamente:

$$\begin{aligned}
AD^2 &= AB^2 - BD^2\\
&= AB^2 - \left(\pm\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC}\right)^2\\
&= AB^2 - \left(\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC}\right)^2\\
&= \left(AB - \frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC}\right)\cdot\left(AB + \frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC}\right)\\
&= \frac{(2\cdot AB\cdot BC - BC^2 - AB^2 + AC^2)}{2\cdot BC}\cdot\frac{(2\cdot AB\cdot BC + BC^2 + AB^2 - AC^2)}{2\cdot BC}\\
&= \frac{AC^2-(AB-BC)^2}{2\cdot BC}\cdot\frac{(AB+BC)^2-AC^2}{2\cdot BC}\\
&= \frac{(AC-AB+BC)\cdot(AC+AB-BC)\cdot(AB+BC-AC)\cdot(AB+BC+AC)}{4\cdot BC^2}\\
&= \frac{16\cdot s\cdot(s-AB)\cdot(s-AC)\cdot(s-BC)}{4\cdot BC^2}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $AD = \dfrac{2}{BC}\sqrt{s\cdot(s-AB)\cdot(s-AC)\cdot(s-BC)}$.

■

Ofreceremos ahora la definición de cuadriláteros semejantes.

**Definición 6.2 (Semejanza de cuadriláteros)**
*Dos cuadriláteros son* ***semejantes****, si existe alguna correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.*
*Si los cuadriláteros son $\square ABCD$ y $\square EFGH$, y la correspondencia fuera $ABCD \longleftrightarrow EFGH$, escribiremos $\square ABCD \sim \square EFGH$ (con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los cuadriláteros son semejantes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos una* ***semejanza*** *entre esos dos cuadriláteros; y $\square ABCD \nsim \square EFGH$ para indicar que no son semejantes.*

Note que no tenemos nada parecido a los criterios AA y LLL para cuadriláteros. Aún entre los cuadriláteros convexos, de los que sabemos que la suma de sus ángulos es 360, la congruencia de los ángulos no nos garantiza la proporcionalidad de los lados. Por ejemplo: cualquier correspondencia entre los vértices de dos rectángulos tiene la propiedad de que los ángulos correspondientes son congruentes, pero, por supuesto, no necesariamente tienen sus lados correspondientes proporcionales (basta tomar un cuadrado y un rectángulo no cuadrado); cualquier correspondencia entre los vértices de dos rombos tiene la propiedad de que los lados correspondientes son proporcionales, pero, por supuesto, no necesariamente tienen sus ángulos correspondientes congruentes (basta tomar un cuadrado y un rombo no rectángulo).

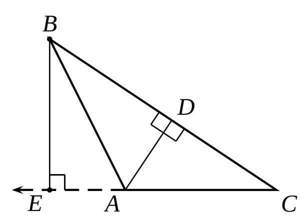
Pero, por otro lado, tendremos un criterio LAL entre paralelogramos, puesto que los ángulos y los lados opuestos son congruentes, y los ángulos consecutivos son suplementarios.

Para finalizar este capítulo estableceremos el enclave del tema tratado en el capítulo siguiente, ya que este resultado es fundamental en el estudio de áreas.

**Proposición 6.5** *En cualquier triángulo, el producto de una altura por su base correspondiente es independiente de la elección de la altura, y su valor es*

$$2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-AB) \cdot (s-AC) \cdot (s-BC)}.$$

**Prueba** Consideremos las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ del triángulo $\triangle ABC$. Queremos probar que $AD \cdot BC = BE \cdot AC$. Como $D = C$ si, y sólo si, $E = C$ (porque el ángulo $\angle C$ sería recto), tenemos que, si $D = C$, el resultado es obvio.




Supongamos entonces que $D \neq C$ (con lo que $E \neq C$). Por el criterio AA de semejanza tenemos que $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Así, $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$; de donde $AD \cdot BC = BE \cdot AC$.
A partir del resultado anterior es claro que el valor de ese producto es

$$\begin{aligned} BC \cdot AD &= BC \cdot \frac{2}{BC}\sqrt{s \cdot (s-AB) \cdot (s-AC) \cdot (s-BC)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-AB) \cdot (s-AC) \cdot (s-BC)}. \end{aligned}$$

■

## Problemas del Capítulo 6

**6.1** Si $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ y $f$ son seis números reales no nulos tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$, pruebe que:

**(a)** $\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$. **(b)** $\frac{a-c}{b-d} = k$. **(c)** $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = k^n$, para todo $n$ natural.

**6.2** Si $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, se dice que $c$ es la ***media geométrica*** de $a$ y $b$, es decir, $c = \sqrt{ab}$. Pruebe que la media geométrica de dos números reales positivos es menor que su ***media aritmética***, es decir, $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

**6.3** **(División de un segmento en una razón dada)**
Fijado un número real positivo $k$ y un segmento $\overline{AC}$ de longitud $a$, ¿a qué distancia del punto $A$ debemos ubicar un punto $B$, para que la razón entre $AB$ y $BC$ sea $k$?

**6.4** **(El número de oro o la proporción áurea)**
En un segmento $\overline{AC}$ de longitud $a$, ¿a qué distancia del punto $A$ debemos ubicar un punto $B$, para que la razón entre $AB$ y $AC$ sea la misma que entre $BC$ y $AB$, es decir, para que $AB$ sea la media geométrica de $AC$ y $BC$?
(La constante de proporcionalidad de esas razones es llamada el ***número de oro***, ***proporción áurea*** o, también, ***proporción pitagórica***).

**6.5** Un impresor quiere hacer una tarjeta de 15 centímetros de largo, y de ancho tal, que al doblarla por la mitad tenga la misma forma que abierta: ¿cuál debe ser el ancho de la tarjeta?

**6.6** ¿Cuándo dos triángulos no son semejantes?

**6.7** Pruebe la proposición 6.2.

**6.8** Verifique que:

**(a)** cualesquiera dos triángulos equiláteros son semejantes;
**(b)** cualesquiera dos cuadrados son semejantes.

**6.9** **(a)** ¿Será verdad que, si dos triángulos son iguales, entonces son semejantes?
**(b)** ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento: *como* $\triangle ABC = \triangle BCA$, *entonces* $\triangle ABC \sim \triangle BCA$?
**(c)** ¿Será verdad que, si dos triángulos son iguales, entonces cualquier correspondencia biunívoca entre sus vértices es una semejanza?
**(d)** ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo $\triangle ABC$ que es semejante al triángulo $\triangle BCA$?
**(e)** Construya dos triángulos semejantes y distintos.

**6.10** Trate de idear un procedimiento para calcular aproximadamente la altura de un árbol

**(a)** comparando el tamaño de la sombra del árbol con la suya (suponiendo, como se puede suponer, que los rayos del sol son paralelos);
**(b)** con su dedo pulgar.

**6.11** Si $D$ y $E$ son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente, pruebe que $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

**6.12** Si una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos es una semejanza y un par de lados correspondientes son congruentes, pruebe que la correspondencia es una congruencia.

**6.13** Pruebe que las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes están en la misma proporción que los lados correspondientes.

**6.14** Si dos lados de un triángulo no son congruentes, pruebe que al lado más corto corresponde la altura más larga.$^{\langle 11\rangle}$

**6.15** **(Semejanza en triángulos rectángulos)**
Pruebe que:

**(a)** La altura correspondiente a la hipotenusa determina otros dos triángulos semejantes entre sí, y semejantes también al triángulo original.
**(b)** (**Teorema de la altura de Euclides**)
La altura correspondiente a la hipotenusa es la media geométrica de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
**(c)** (**Teorema del cateto de Euclides**)
Cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y su proyección sobre ésta.
**(d)** **(Un ángulo)**
Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente, entonces son semejantes.
**(e)** **(Los catetos)**
Si los catetos de dos triángulos rectángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.
**(f)** **(Hipotenusa-cateto)**
Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son proporcionales con la hipotenusa y un cateto de otro, entonces los triángulos son semejantes.
**(g)** La razón entre los cuadrados de los catetos es igual a la razón entre sus proyecciones sobre la hipotenusa.
**(h)** El inverso del cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es la suma de los inversos de los cuadrados de los catetos.

**6.16** **(a)** Dados $l_1 \parallel l_2$, $t_1$ y $t_2$ secantes a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos $A$, $B$, $C$, y $A'$, $B'$, $C'$, respectivamente, se tiene que $l_3$ es paralela a $l_1$ si, y sólo si,

$$\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}.$$

**(b)** Pruebe que el Teorema de Thales y el Teorema fundamental de proporcionalidad son equivalentes.

**6.17** Sea $\square ABCD$ un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; sean $P$ y $Q$ puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, tales que $P$ y $Q$ no son vértices consecutivos y $\overline{PQ} \neq \overline{AC}$; y sea $E$ el punto de intersección de $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$. Pruebe que:

**(a)** $E$ divide a $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ en segmentos proporcionales, es decir $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{EP}{EQ}$;

**(b)** para $P = B$ y $Q = D$, si $\triangle AED \sim \triangle BEC$, entonces $\square ABCD$ es un ***trapecio isósceles*** (es decir, que $AD = BC$).

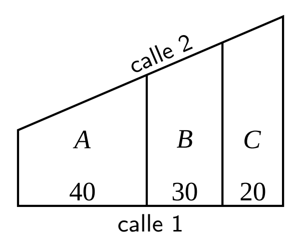
**6.18** Atendiendo a las siguientes indicaciones verifique que, cualesquiera sean los números reales positivos $a$, $b$ y $c$ tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero, existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes $a$, $b$ y $c$.⟨12⟩

**(a)** Los tres números reales positivos $a$, $b$ y $c$ se pueden ordenar en orden creciente: suponga que $a \leqslant b \leqslant c$.

**(b)** El número $a_1 = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c}$ satisface: $a_1 > 0$, $a_1 < a$ y $a_1 < c$.

**(c)** El triángulo $\triangle ABC$ construido de la siguiente manera es el buscado: un segmento $\overline{AB}$ de longitud $c$; en $\overrightarrow{BA}$ tomamos un punto $D$ tal que $BD = a_1$; así, $A$-$D$-$B$; un segmento $\overline{DC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ en $D$ y tal que $DC = \sqrt{a^2 - {a_1}^2}$.

**6.19** Si tres solares están dispuestos entre las calles 1 y 2 tal como indica la figura, los linderos son perpendiculares a la calle 1 y el frente total de los solares en la calle 2 mide 120, halle los valores de los frentes de cada solar en la calle 2.




**6.20** Pruebe que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado, es semejante a éste.

**6.21** Pruebe que dos triángulos, cada uno de ellos con dos lados congruentes, son semejantes, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(a)** los ángulos comprendidos por los lados congruentes son congruentes.
**(b)** un ángulo con vértice en el tercero de los lados del uno, es congruente con un ángulo con vértice en el tercero de los lados del otro.

**6.22** Dados dos triángulos semejantes, pruebe que están en la misma proporción que los lados⟨13⟩:

**(a)** las medianas correspondientes.
**(b)** las bisectrices de los ángulos correspondientes.
**(c)** los perímetros.

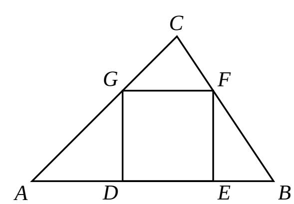
**6.23** Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cruzan en $E$ tal que $A$-$E$-$B$ y $C$-$E$-$D$. Pruebe que son equivalentes:

**(a)** $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.
**(b)** $\triangle ACE \sim \triangle BDE$.
**(c)** $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{EC}{ED}$.

**6.24** Consideremos un triángulo $\triangle GHK$ tal que $KG = KH$, y $P$ un punto interior de $\overline{GH}$. Si $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son perpendiculares a $\overline{HK}$ y $\overline{GK}$ en $Q$ y $R$, respectivamente, pruebe que $\dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{HQ}{GR}$.

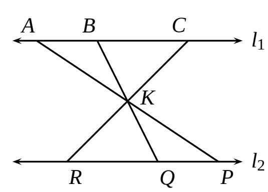
**6.25** Sea $\square PQRT$ un trapecio tal que $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$, $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$. Si $\overline{ST} \perp \overline{PR}$ en $S$, pruebe que $\dfrac{QR}{QP} = \dfrac{SP}{ST}$.

**6.26** Si $\square DEFG$ es un cuadrado y $\angle C$ es recto, pruebe que:
(a) $\triangle ADG \sim \triangle GCF$.
(b) $\triangle ADG \sim \triangle FEB$.
(c) $AD \cdot EB = DG \cdot FE$.
(d) $DE = \sqrt{AD \cdot EB}$.




**6.27** Si $l_1 \parallel l_2$, pruebe que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}.$$



**6.28** Consideremos el paralelogramo $\square ABCD$. Si una recta que pasa por $B$ intersecta a $\overline{AC}$ en $E$, a $\overline{DC}$ en $G$ y a $\overleftrightarrow{AD}$ en $F$, pruebe que:

**(a)** $\triangle AEF \sim \triangle CEB$.
**(b)** $\triangle ABE \sim \triangle CGE$.
**(c)** $EB$ es la media geométrica de $EG$ y $EF$.

**6.29** Si $\overline{CD}$ y $\overline{SR}$ son medianas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$, respectivamente, tales que $\triangle ADC \sim \triangle PSR$, pruebe que $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

**6.30** En $\triangle ABC$, $D$ es el punto medio de $\overline{AB}$ y $E$ es un punto de $\overline{AC}$ tal que $AE > EC$. Si $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se intersectan en $F$, pruebe que $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{EA}{EC}$.

**6.31** Si $\overline{CD}$ es la altura desde el vértice del ángulo recto $\angle C$, en un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, pruebe que $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

**6.32** Si $a$ y $b$ son números naturales tales que $a > b$, pruebe que todo triángulo cuyos lados miden $a^2 - b^2$, $2 \cdot a \cdot b$ y $a^2 + b^2$ es rectángulo.

**6.33** **(Triángulo rectángulo isósceles)**
Pruebe que:

**(a)** En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el cateto.
**(b)** Si la base de un triángulo isósceles es $\sqrt{2}$ veces el lado, entonces el ángulo del vértice es recto.
**(c)** Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $m$, entonces cada uno de los catetos mide $\frac{\sqrt{2} \cdot m}{2}$.

**6.34** **(Triángulo 30-60-90)**
Pruebe que, en un triángulo 30-60-90, el lado más largo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la hipotenusa.

**6.35** Pruebe que la longitud de la diagonal de un cuadrado es $\sqrt{2}$ veces la longitud del lado.

**6.36** Si $p$ y $q$ son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y $r$ es la longitud de la hipotenusa, pruebe que para cualquier número positivo $k$, los números $k \cdot p$, $k \cdot q$ y $k \cdot r$ son también las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

**6.37** Si las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son $a$ y $b$, determine la longitud $h$ de la altura correspondiente a la hipotenusa, y las proyecciones $a'$ y $b'$ de los catetos sobre la hipotenusa, en términos de $a$ y $b$.

**6.38** Pruebe que la semejanza de cuadriláteros es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los cuadriláteros.

**6.39** Pruebe que:

**(a)** la mediana $\overline{AM}$ de un triángulo $\triangle ABC$ en términos de sus lados es

$$AM = \frac{\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2}}{2}.$$

**(b)** si dos medianas de un triángulo son congruentes, entonces los lados sobre los que caen son congruentes.⟨14⟩

**(c)** si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces sobre el lado más pequeño cae la mediana más larga.⟨15⟩

**6.40** **(a)** Pruebe que, en todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

**(b)** Use la parte anterior para dar otra prueba del cálculo de la mediana $AM$, tomando un punto $D$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{MA}$, tal que $MD = MA$ y considere el paralelogramo $\square ABDC$.

**6.41** Pruebe que la suma de los cuadrados de las longitudes de las tres medianas de un triángulo es igual a $\frac{3}{4}$ de la suma de los cuadrados de las longitudes de los tres lados.

**6.42** Para un triángulo $\triangle ABC$, pruebe que:

**(a)** $AB^2 < AC^2 + BC^2$ si, y sólo si, el ángulo $\angle C$ es agudo.

**(b)** $AB^2 > AC^2 + BC^2$ si, y sólo si, el ángulo $\angle C$ es obtuso.

**6.43** **(a)** Pruebe que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a sus lados adyacentes, es decir:

si $\overline{AV}$ es bisectriz de $\triangle ABC$, entonces $\frac{BV}{CV} = \frac{BA}{CA}$.

**(b)** Verifique que, en las condiciones de la parte anterior, $BV$ y $CV$ en términos de los lados son

$$BV = \frac{BC}{AB + AC} \cdot AB$$

$$CV = \frac{BC}{AB + AC} \cdot AC$$

**(c)** Pruebe que, si el bisector de un ángulo externo en un vértice de un triángulo corta la recta que contiene a lado opuesto, entonces determina segmentos proporcionales a sus lados adyacentes, es decir:

si, en $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AE}$ es bisector de un ángulo externo en el vértice $A$, con $E$ tal que $C$-$B$-$E$, entonces $\frac{BE}{CE} = \frac{BA}{CA}$.

**(d)** Si, en un triángulo $\triangle ABC$, los bisectores de los ángulos interno y externo en $A$ intersectan $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos $V$ y $E$, respectivamente, pruebe que:

**(i)** $\frac{BE}{BV} = \frac{CE}{CV}$.

**(ii)** $\frac{\sqrt{AV^2+AE^2}}{BV} - \frac{\sqrt{AV^2+AE^2}}{CV} = 2$.

**(e)** Enuncie y pruebe el recíproco del resultado de la parte (a).

**6.44** Si la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide la hipotenusa en dos segmentos cuyas longitudes están en razón $k$, pruebe que la altura desde el mismo vértice la divide en la proporción $k^2$.

**6.45** Pruebe que:

**(a)** la bisectriz $\overline{AV}$ de un triángulo $\triangle ABC$ en términos de sus lados es

$$AV = \sqrt{AB \cdot AC \cdot \left[1 - \left(\frac{BC}{AB+AC}\right)^2\right]}.$$

**(b)** $AV = \dfrac{2}{AB+AC} \cdot \sqrt{2 \cdot AB \cdot AC \cdot s \cdot (s - BC)}$ (donde $s$ es el semiperímetro).

**(c)** $AV = \sqrt{AB \cdot AC - VB \cdot VC}$.

**(d)** si dos bisectrices de un triángulo son congruentes, entonces los lados sobre los que caen son congruentes (y, por tanto, los ángulos que bisecan son congruentes).⟨16⟩

**(e)** si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces al ángulo más pequeño corresponde la bisectriz más larga.⟨17⟩

**6.46** **(a)** Dado un triángulo $\triangle ABC$ con altura $\overline{AD}$ y $H$ un punto tal que $B$-$H$-$C$, pruebe que

$$AH = \sqrt{AB^2 + BH^2 - \frac{BH}{BC} \cdot (BC^2 + AB^2 - AC^2)}$$

**(b)** Use la parte anterior para dar otra prueba del cálculo de la mediana $AM$ y la bisectriz $AV$ de un triángulo $\triangle ABC$, sustituyendo $H = M$ y $H = V$, respectivamente.

**6.47** Si, en $\triangle PQR$, $PQ = PR$, y $S$ y $T$ son dos puntos tales que $P$-$Q$-$S$ y $P$-$R$-$T$, pruebe que $ST > QR$.

**6.48** **(a)** Si dos triángulos son tales que las rectas que determinan sus lados son paralelas (las del uno con las del otro), pruebe que son semejantes.

**(b)** Si dos triángulos son tales que las rectas que determinan sus lados son perpendiculares (las del uno con las del otro), pruebe que son semejantes.

**6.49** Sean $P$, $Q$, $R$ y $X$ cuatro puntos tales que cualesquiera tres de ellos no son colineales. Considere los segmentos $\overline{XP}$, $\overline{XQ}$ y $\overline{XR}$. Sea $A$ un punto cualquiera de $\overline{XR}$ y trace una recta por $A$ paralela a $\overline{PR}$, que intersecta $\overline{XP}$ en $B$. Trace una recta por $B$ paralela a $\overline{PQ}$, que intersecta $\overline{XQ}$ en $C$. Pruebe que $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$.
(Este resultado da garantía del buen proceder del dibujante técnico, al dibujar perspectivas desde un punto de fuga dado).

**6.50** Sea $\square ABCD$ un trapecio, con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $CD < AB$. Se trazan segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$ tales que $E$ y $F$ están en la base mayor; $\overline{CF} \parallel \overline{AD}$; $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; $\overline{CF}$ intersecta la diagonal $\overline{DB}$ en $M$; $\overline{DE}$ intersecta la diagonal $\overline{AC}$ en $N$. Por $F$ y $E$ se trazan paralelas a las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, respectivamente; éstas últimas intersectan a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ en los puntos $P$ y $Q$, respectivamente. Pruebe que $M$, $N$, $P$ y $Q$ son colineales.

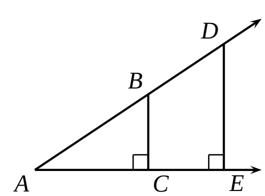
**6.51** **(a)** Considere un trapecio $\square ABCD$ tal que: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $P$ es el punto de corte de las diagonales; y $Q$ es el punto de corte de $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Pruebe que $\overline{PQ}$ biseca las dos bases.

**(b)** (Recíproco del anterior) Si $M$ es el punto medio de $\overline{DC}$; $P$ y $Q$ son puntos tales que $Q$-$M$-$P$; y $\overrightarrow{DP}$ y $\overrightarrow{CP}$ cortan $\overrightarrow{QC}$ y $\overrightarrow{QD}$ en $A$ y $B$, respectivamente, pruebe que $\square ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

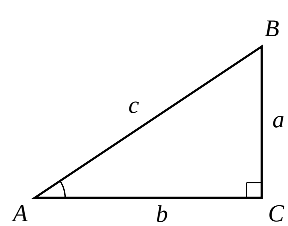
**6.52** **(Razones trigonométricas de ángulos agudos)**

Dado un ángulo agudo $\angle A$, y tomando $\overline{BC} \perp \overrightarrow{AC}$ y $\overline{DE} \perp \overrightarrow{AC}$ como en la figura, es claro, debido a que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, que

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}\ , \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}.$$




De tal manera que, dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle C$ recto, los cocientes $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ y $\frac{a}{b}$ dependen de la forma y no del tamaño del triángulo (es decir, se conservan en cualquier triángulo semejante a $\triangle ABC$).




Además, la forma del $\triangle ABC$ está determinada por el ángulo $\angle A$, puesto que el único ángulo que falta por determinar para conocer su forma es el ángulo $\angle B$, y éste está determinado por $\angle A$, pues es su complemento.

Estos cocientes son llamados *razones trigonométricas*: respectivamente, *seno*, *coseno* y *tangente*; y de ordinario se designa a cada uno de ellos, con respecto al ángulo $\angle A$ y en los términos clásicos, mediante:

$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{a}{c} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\cos\angle A = \frac{b}{c} = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\tan\angle A = \frac{a}{b} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

Si $m\angle A = r$, entonces se escribe

$$\frac{a}{c} = \operatorname{sen} r; \quad \frac{b}{c} = \cos r; \quad \frac{a}{b} = \tan r.$$

En las partes (d), (e) y (f) veremos cómo se designarían cada una de ellas respecto al ángulo $\angle B$.

Note que, por el ejercicio 3.7.(a), para cualquier ángulo agudo $\angle A$:

$$0 < \operatorname{sen}\angle A < 1; \; 0 < \cos\angle A < 1 \text{ y } 0 < \tan\angle A.$$

Si conocemos $m\angle A$, algunos ángulos (llamados *notables*) permiten calcular fácilmente estas razones, como veremos en (a), (b) y (c).

**(a)** Pruebe que $\operatorname{sen}45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan 45 = 1$.
**(b)** Pruebe que $\operatorname{sen}30 = \frac{1}{2}$; $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
**(c)** Del anterior, pruebe que $\operatorname{sen}60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60 = \frac{1}{2}$ y $\tan 60 = \sqrt{3}$.
**(d)** Pruebe que el coseno de un ángulo agudo es igual al seno de su complemento, es decir, $\cos r = \operatorname{sen}(90 - r)$.⟨18⟩
**(e)** Pruebe que el seno de un ángulo agudo es igual al coseno de su complemento, es decir, $\operatorname{sen} r = \cos(90 - r)$.
**(f)** Pruebe que el producto de la tangente de un ángulo agudo y la tangente de su complemento es igual a 1.
**(g)** Verifique que, para cualquier ángulo agudo $r$, $\tan r = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos r}$.
**(h)** (**Identidad trigonométrica fundamental**)
Pruebe que, para cualquier ángulo agudo $\angle A$,

$$\operatorname{sen}^2\angle A + \cos^2\angle A = 1.$$

**(i)** Definiendo la *cotangente* como el recíproco de la tangente, pruebe que la tangente de un ángulo es la cotangente de su complemento y que la cotangente de un ángulo es la tangente de su complemento.

**(j)** Definiendo la *secante* como el recíproco del coseno, pruebe que, para cualquier ángulo agudo $\angle A$,

$$1+\tan^2\angle A=\sec^2\angle A.$$

**(k)** Definiendo la *cosecante* como el recíproco del seno, pruebe que la secante de un ángulo agudo es la cosecante de su complemento y que, para cualquier ángulo agudo $\angle A$,

$$1+\cot^2\angle A=\csc^2\angle A.$$

**(l)** Pruebe, usando el diagrama y las indicaciones que se dan a continuación, que, siempre que $0<\alpha+\beta<90$, se tiene que:

**(i)** $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.

**(ii)** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.

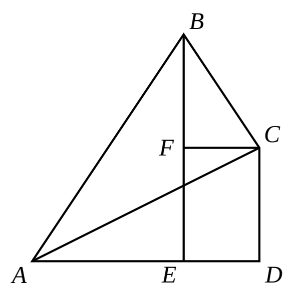
Si $\angle BFC$, $\angle BCA$, $\angle BED$ y $\angle CDE$ son rectos, entonces:

**(i)** $\triangle BFC\sim\triangle ADC$.

**(ii)** $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CD}{AC}\cdot\dfrac{AC}{AB}+\dfrac{AD}{AC}\cdot\dfrac{BC}{AB}$.

**(iii)** $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}\cdot\dfrac{AC}{AB}-\dfrac{CD}{AC}\cdot\dfrac{BC}{AB}$.

**(iv)** Llame $\alpha=m\angle CAD$ y $\beta=m\angle CAB$.




**(m)** Dados dos ángulos agudos de medidas $\alpha$ y $\beta$, pruebe que $\alpha<\beta$ si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

**(i)** $\operatorname{sen}\alpha<\operatorname{sen}\beta$.

**(ii)** $\cos\alpha>\cos\beta$.

**(iii)** $\tan\alpha<\tan\beta$.

**(n)** (**Teorema del coseno**)
Si, en $\triangle ABC$, $\angle A$ es agudo, pruebe que

$$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos\angle A.$$

**(o)** (**Teorema del seno**)
Si $\triangle ABC$ es acutángulo, entonces

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A}=\frac{AC}{\operatorname{sen}\angle B}=\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle C}.$$

**(p)** Si $h$ es la longitud de la altura $\overline{CD}$ desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $c$ es la longitud de su hipotenusa, y $\alpha$ y $\beta$ son las medidas de sus ángulos agudos, pruebe que $h=c\cdot\dfrac{\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$.

**6.53** Pruebe que:

**(a)** Si conocemos un ángulo y los lados que lo comprenden, conocemos, por LAL, el tercer lado y los otros dos ángulos.
**(b)** Si conocemos un lado y los ángulos que lo comprenden, conocemos, por ALA, los otros dos lados y el tercer ángulo.
**(c)** Si conocemos los tres lados, conocemos, por LLL, los tres ángulos.
**(d)** Si conocemos un lado y dos ángulos que no lo comprenden, conocemos, por LAA, los otros dos lados y el tercer ángulo.

# Comentarios del Capítulo 6

⟨1⟩Se podría decir que la idea que está detrás del estudio de la semejanza de triángulos, incluyendo el Teorema de Thales y el estudio de la Trigonometría, es la de obtener la medida de magnitudes relativamente grandes, como lo son la altura de un edificio o la distancia entre los astros, por medio de magnitudes relativamente pequeñas, como lo son el tamaño del propio cuerpo, o una parte de él, y las cuerdas que se obtienen en un astrolabio o un compás.

⟨2⟩Clásicamente se diría, *los términos de igual lugar se encuentran en la misma **razón***. Hagamos, a este respecto, las siguientes reflexiones.

Cada vez que se expresan ideas que involucran magnitudes, se están comparando números o cantidades. Así, por ejemplo, cada vez que se dice que algo mide 3 ***metros***, se está comparando su longitud con la de la unidad de medida, en este caso ***el metro***; si se dice que un ángulo mide 45 ***grados***, se compara su dimensión con la de la unidad de medida, en este caso ***el grado***. Si alguien dijera que su casa tiene 10 ***metros*** de frente y 14 ***metros*** de fondo, todo el mundo podría hacerse fácilmente una idea de las dimensiones de la casa. Las unidades de medida son una de las más útiles convenciones que ha hecho el hombre, en el sentido de que facilita enormemente la comunicación, aún entre culturas muy extrañas unas a otras. Así mismo, cuando alguien dice que tal artículo es *caro*, o que tal o cual cosa es *muy grande*, es claro que está comparándolos con otros que toma como referencia.

Ahora bien, estas comparaciones siempre se hacen entre ***cantidades semejantes***, en el sentido de que ambas deben corresponder a mediciones por medio de los mismos patrones. Por ejemplo, no tendría sentido comparar la longitud de un segmento con la medida de un ángulo y decir *tal segmento es más pequeño que tal ángulo*. Del mismo modo, tampoco tendría sentido comparar, por ejemplo, las magnitudes de dos segmentos, si no los medimos con la misma unidad: a nadie se le ocurriría decir que un segmento de 100 centímetros es más grande que uno de 2 metros, por el hecho de que 100 es mayor que 2. Entiéndase bien, no importa qué unidad de medida se utilice, lo importante es que sea la misma.

Hacemos estas reflexiones sólo para aclarar que, cuando establezcamos razones o proporciones entre magnitudes, la razón de proporcionalidad no estará expresada en ninguna unidad de medida, es un número absoluto o abstracto, es decir, no depende de las unidades de medida que se hayan utilizado para medir las magnitudes comparadas.

⟨3⟩Note que son dos las condiciones que deben cumplirse:

$$\text{(1) si } \tfrac{a}{b} < r, \text{ entonces } \tfrac{a}{b} < s; \quad \textbf{\textit{y,}} \quad \text{(2) si } \tfrac{a}{b} < s, \text{ entonces } \tfrac{a}{b} < r.$$

La prueba es evidente, tomando en cuenta la tricotomía del orden de los números reales, pues: suponer que $r \neq s$ equivale a decir que $r < s$ o $s < r$; pero, en ambos casos tendremos un racional $\frac{a}{b}$ (o $\frac{c}{d}$) tal que $r < \frac{a}{b} < s$ (o $s < \frac{c}{d} < r$); lo cual contradice (1) (o (2)).

⟨4⟩Decimos que esta proposición generaliza la proposición 5.8 porque ésta se obtiene de aquella tomando la razón de proporcionalidad igual a 1.

Estas situaciones se hacen más comprensibles pensándolas en términos de las distancias entre las rectas paralelas: tres rectas paralelas determinarán segmentos en una secante cuyas longitudes estarán en la misma razón que las distancias entre ellas. Ilustremos lo que decimos con un ejemplo: si tres rectas paralelas $l_1$, $l_2$ y $l_3$, son tales que la distancia $d_{1,2}$ entre $l_1$ y $l_2$ es $k$ veces la distancia $d_{2,3}$ entre $l_2$ y $l_3$ (donde $k$ es cualquier número real positivo), entonces se tiene que el segmento

$\overline{AB}$ determinado por $l_1$ y $l_2$ en una secante $t$, a las tres rectas, tendrá siempre una longitud que es $k$ veces la longitud del segmento $\overline{BC}$ determinado por $l_2$ y $l_3$ en $t$. Para simplificar la ilustración aún más decimos que, si $d_{1,2} = k \cdot d_{2,3}$, entonces $AB = k \cdot BC$; en otras palabras, $\frac{d_{1,2}}{d_{2,3}} = \frac{AB}{BC} = k$, lo que es lo mismo que decir que los segmentos son proporcionales a las distancias entre las rectas $l_1$, $l_2$ y $l_3$. Esto resulta así a partir de este Teorema de Thales, al tomar como una de las secantes una recta que es perpendicular a las tres rectas $l_1$, $l_2$ y $l_3$.
Por otro lado, enunciado de una forma ligeramente distinta, pero con el mismo significado, se puede decir que el recíproco del Teorema de Thales también es cierto, a saber: *dados $l_1 \parallel l_2$, $t_1$ y $t_2$ secantes a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos A, B, C, y $A'$, $B'$, $C'$, respectivamente, se tiene que $l_3$ es paralela a $l_1$ si, y sólo si,*

$$\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}.$$

Pero, como éste no es el enunciado clásico del Teorema de Thales, hemos preferido la forma en que lo hemos expuesto. De todos modos, en el ejercicio 6.16, se plantea al lector probar el Teorema de Thales enunciado en esta forma.

⟨5⟩Como podrá observar el lector, este resultado generaliza al corolario 5.8.1.

⟨6⟩Decimos que este Teorema generaliza el corolario 5.8.3 porque éste se obtiene de aquél tomando la razón de proporcionalidad igual a 1.
Por otro lado, este resultado es, en verdad, equivalente al Teorema de Thales: en el ejercicio 6.16 se plantea al lector probar esta equivalencia.

⟨7⟩Aunque no tengan el mismo tamaño. En otras palabras, dos figuras geométricas son semejantes cuando una de ellas es un modelo a escala de la otra (bien que se alargue la escala o se contraiga). Así podemos pensar en el diseño que el arquitecto tiene dibujado en sus planos y el proyecto ya realizado; una fotografía y cualquier ampliación o reducción; el dibujo del levantamiento topográfico de un terreno hecho por un topógrafo y el terreno mismo.

⟨8⟩El concepto de semejanza exige dos cosas:
(1) que los ángulos correspondientes deben ser congruentes, ***y***
(2) que los lados correspondientes deben ser proporcionales.
Esto es debido a que, entre figuras geométricas no triangulares (en los cuadriláteros, por ejemplo), pueden cumplirse por separado, mientras que en los triángulos nó.

⟨9⟩Es decir, si los lados son proporcionales, entonces los ángulos correspondientes son congruentes; de este modo, los criterios AAA y LLL de semejanza de triángulos son recíprocos el uno del otro.

⟨10⟩La demostración dada por Euclides de este teorema depende de los postulados de área. Cuando estudiemos áreas, en el Capítulo 7, daremos otras demostraciones adicionales. Además, sólo después de estudiar áreas es que se puede hacer una interpretación elegante de este teorema, también conocida por no pocos.

⟨11⟩Compare con los ejercicios 3.27, 6.39 y 6.45.

⟨12⟩ Esto satisface lo prometido en la Nota ⟨22⟩ del Capítulo 3, pues es exactamente el recíproco de la proposición 3.9; que nos da la suficiencia de la condición expuesta en esa proposición.

⟨13⟩Compare con el ejercicio 6.13.

⟨14⟩Revise el ejercicio 3.25, y compare con el ejercicio 5.5.(b).

⟨15⟩Compare con los ejercicios 6.14 y 6.45.

⟨16⟩Revise el ejercicio 3.26.

⟨17⟩Compare con los ejercicios 6.14 y 6.39.

⟨18⟩De hecho, la palabra ***coseno*** es una abreviatura de la expresión latina ***complementi sinus***, que significa ***seno del complemento***. Por otro lado, la palabra ***seno*** llegó a nuestro idioma a través del latín y su origen nos ofrece una curiosa anécdota. Las matemáticas, tanto griegas como hindúes, llegaron al mundo occidental a través de los árabes, principalmente durante el siglo XII d. C. De los dos puntos de vista predominantes respecto al abordaje de la Trigonometría, expuestos en el *Sidhanta Sironami* hindú y el *Almagesto* griego (palabra árabe, que se translitera en el alfabeto latín *al-majisti*, con la cual los árabes tradujeron la palabra griega *μέγιστος*, que significa *el más grande*, refiriéndose a la compilación matemática, en el sentido de astronomía, más grande), los árabes optaron por el hindú en el siglo IX o X d. C. La palabra sánscrita que corresponde a nuestra palabra ***seno*** se translitera en el alfabeto latino *jiva* (que significa *lo que es*, o *jya*, que significa *cuerda*, según otros autores); los árabes la adoptaron fonéticamente en su idioma mediante la palabra que se translitera en el alfabeto latino *jiba*. Ahora, como en la escritura árabe clásica no se colocan las vocales, sino sólo las consonantes, ese término aparecía en los textos árabes como *jb*. Pero, los traductores de estas obras del árabe al latín interpretaron esta palabra, completando las vocales que consideraron que faltaban, como si fuera la palabra *jaib*, que significa en latín *sinus*, y que en nuestra lengua se traduce como *bahía* o *ensenada*.

## Orientación para la solución de los problemas del Capítulo 6

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 6.1 al 6.18; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 6.1 al 6.12, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 6.13 al 6.16, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 6.17 al 6.18.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 6.19 al 6.47, así como los ejercicios del 6.52 al 6.53; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 6.19 al 6.38, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 6.39 al 6.42, así como los ejercicios del 6.52 al 6.53, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 6.43 al 6.47.

Creemos que los ejercicios del 6.48 al 6.51 son sólo para los estudiantes más aventajados.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**6.1:** exprese cada uno de los numeradores en términos de $k$ y los denominadores correspondientes.

**6.2:** cuando $a \neq b$, verifique que $0 < (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$.

**6.22:** para la parte (c), use el ejercicio 6.1.

**6.30:** trace la recta paralela a $\overline{AB}$ por $C$, y que intersecta a $\overline{EF}$ en $P$.

**6.34:** use el ejercicio 4.17.

**6.39:** aplique el corolario 6.4.1.

**6.40:** trace las alturas desde dos vértices consecutivos.

**6.42:** razone por el absurdo, usando el corolario 6.4.1.

**6.43:** para la parte (a), trace $l$ paralela a $\overline{AV}$ por $C$; llame $F$ el punto de corte de $l$ y $\overleftrightarrow{AB}$, y verifique que $AC = AF$. Para la parte (c), trace $m$ paralela a $\overline{AE}$ por $B$; llame $G$ al punto de corte de $m$ y $\overline{AC}$, y verifique que $AG = AB$. Para la parte (d).(ii), descomponga $BE = VE - BV$, $CE = CV + VE$, y use el ejercicio 2.21 y el Teorema de Pitágoras.

**6.45:** para la parte (a), aplique el corolario 6.4.1 y el ejercicio 6.43.(b); para la parte (d), trate de desarrollar la ecuación que resulta de igualar la fórmulas correspondientes obtenidas en la parte (a), y obtenga una expresión de la forma $xy = 0$, con $y > 0$ y $x$ correspondiente a la diferencia de las longitudes de los lados en cuestión.

**6.47:** en caso de que $PS = PT$, use el criterio LAL de semejanza de triángulos; en caso de que $PS < PT$, tome $U$ en $\overline{PT}$ tal que $P$-$R$-$U$ y $PU = PS$, aplique lo obtenido para el caso anterior, el Teorema del ángulo externo y la proposición 3.8.

**6.49:** considere $X$ dentro o fuera de $\triangle PQR$.

**6.50:** vea el ejercicio 5.22.

**6.52:** para la parte (a), use cualquier triángulo rectángulo isósceles; para la parte (b), use una altura de cualquier triángulo equilátero; para la parte (h), comience con la relación dada por el Teorema de Pitágoras; para la parte (ii) de las indicaciones, sustituya $AD \cdot BC$ por su correspondiente según la parte (i); para la parte (m).(i), use la proposición 2.11, la definición del seno y el Teorema de la barra transversal; para la parte (n), use el corolario 6.4.1; para la parte (o), trace un par de alturas.

***Thales de Mileto***, reconocido como *uno de los siete sabios* de Grecia, fue un rico comerciante que vivió aproximadamente en 624-545 a. C. Sus ocupaciones como mercader lo pusieron en contacto con muchos países y tuvo el don de aprender fácilmente de lo novedoso que encontraba; particularmente lo que encontró en el contacto con los sacerdotes egipcios. Después de retirarse tempranamente de los negocios, dedicó su ocio a la filosofía y a las matemáticas, y dio muestra, como lo esbozaremos en las líneas que siguen, de cómo se puede combinar la perspicacia práctica con una sabiduría auténtica.

La tradición occidental toda (a partir del siglo IV a.C. por lo menos) está completamente de acuerdo en que Thales fue el primero de los filósofos griegos, a pesar de que en su tiempo no existía todavía la palabra *filósofo*; en su época *sabio* significaba *creativo y de visión profunda, tanto desde el punto de vista práctico como especulativo*. Esta fama se debe fundamentalmente al hecho de que expuso una cosmogonía al margen de la mitología, en la cual todo en el universo estaba sometido a algún orden -$\kappa\acute{o}\sigma\mu o\varsigma$- (posible origen de la designación del universo mediante el término *cosmos*), y su origen sería el elemento *agua*.

Cosechó fama de astrónomo por la acertada predicción de un eclipse solar el 28 de mayo del año 585 a.C. A este respecto es famosa la anécdota según la cual mientras contemplaba las estrellas en un paseo nocturno, se cayó en una zanja; entonces una anciana que le atendió le preguntó: ¿cómo podéis saber lo que ocurre en los cielos, si no veis lo que se encuentra a vuestros pies? Con Thales se sustituye lo que era poco más que un catálogo de estrellas por una ciencia auténtica.

Cosechó fama de matemático por resultados que hoy en día parecen triviales, pero que marcaron una época en el desarrollo de las matemáticas, como por ejemplo: *todo diámetro biseca el círculo, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes, los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, un ángulo inscrito en un semicírculo es recto, un triángulo queda determinado por un lado y los ángulos con vértices en los extremos de ese lado* (criterio ALA de congruencia de triángulos). Con sus resultados sobre proporcionalidad dio origen a los elementos del álgebra, planteándose lo que propiamente se pueden llamar ecuaciones, tal como la de calcular la altura de la gran pirámide comparando su sombra con la de una vara vertical (*sin ningún alboroto ni instrumento*, como dice Plutarco), gestándose entonces la teoría de las proporciones tan cara a los griegos posteriores. Del mismo modo, la idea de abstraer en los objetos, el volumen y el área de su materialidad, y considerarla sólo como función de las líneas que determinan su forma, parece deberse definitivamente a Thales. Así mismo sustentó la idea de que lo más abstracto y general era más valioso para un estudio profundo de las cosas, que lo sensible.

Nunca olvidó la deuda contraída con los sacerdotes egipcios, y cuando ya era anciano, aconsejó firmemente a su discípulo Pitágoras que les hiciera una visita; consejo al cual éste atendió diligentemente, adquiriendo un profundo conocimiento y una amplia experiencia que le fue de gran utilidad cuando, a la larga, se estableció y reunió sus propios discípulos a su alrededor, llegando a ser aún más famoso que su maestro.

***Pitágoras*** se supone que era nativo de Samos y pertenecía, como Thales, a la colonia jónica de griegos establecida en la costa occidental de la actualmente llamada Asia menor. Vivió aproximadamente en 569-490 a. C. En el año 529 se instaló en Crotona, ciudad de la colonia dórica en el sur de Italia. De acuerdo a una tradición de occidente, Pitágoras fue el inventor de la palabra *filosofía*.

Fue conocido por sus contemporáneos como fundador de una escuela de corte esotérico conocida como *Escuela Pitagórica* u *Orden de Pitágoras*, en la cual los integrantes estaban sometidos al juramento de no revelar los secretos y las enseñanzas de la escuela, y de la cual la *pentalfa*, o estrella de cinco puntas, fue un símbolo distintivo. Además se sabe que los pisos de la sede de la escuela eran de cuadrados blancos y negros alternados, sobre los cuales se contemplaba la proyección de la sombra de los pilares, de cuya contemplación se insinúa el origen de las progresiones aritméticas. También dio esto origen a la cuestión sobre la posibilidad de cubrir una región plana con una figura geométrica dada, así como a la de llenar el espacio con un cuerpo geométrico dado, de donde posiblemente surgió el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 y del método de aproximación de áreas por parábolas, elipses o hipérbolas.

A su cátedra acudía una muchedumbre de entusiastas auditores de todas clases. Muchos de clase alta lo escuchaban, e incluso las mujeres violaban la norma que les prohibía asistir a reuniones públicas para acudir a oírle (entre las cuales se encontraba Theano, hija de su huésped Milo, con la cual se casó). Los pitagóricos se interesaban por la ciencia de un modo general, y particularmente por la Filosofía y la Matemática; pero principalmente por lo relativo al conocimiento de la salud en todos los niveles.

En cuanto a las Matemáticas, su contribución fundamental fue el desarrollo de la teoría de números, con el descubrimiento de los números llamados irracionales, y en la geometría de las áreas y volúmenes. Fueron ellos los que probaron por primera vez (que se sepa en occidente) que el número $\sqrt{2}$ es irracional. La prueba de este hecho, que es la que generalmente se presenta todavía actualmente, se encuentra en el libro décimo de los Elementos de Euclides. Este descubrimiento fue sin duda un gran aporte de Pitágoras a la Geometría, al punto de que influenció el desarrollo de toda la Matemática griega a partir de ese momento.

Dice una leyenda que Pitágoras, al encontrar este resultado, sacrificó cien bueyes a los dioses como prueba de su gratitud por el descubrimiento (a lo que, en tono sarcástico, agrega el poeta alemán Heinrich Heine, que *desde* *ese sacrificio los bueyes han temblado siempre que se ha descubierto una gran verdad*).

El Teorema de Pitágoras ya era conocido, en casos particulares en Egipto (3000 a.C.), y en toda su generalidad entre los Sumerios y Babilonios (2000-1000 a.C.); y es bien posible que su demostración haya sido obtenida en Grecia en una época anterior a Pitágoras. De este teorema se han publicado, literalmente, miles de demostraciones. Aquí hemos presentado una de ellas, pero en el siguiente capítulo sugeriremos algunas más.

Para finalizar esta pequeña reseña diremos que uno de los principios establecidos por Pitágoras en su escuela era el que *todo en el universo es número*, que transcrito en términos modernos nos dice *todo en la naturaleza puede ser expresado matemáticamente*. Trate de imaginar cuán arraigado se encuentra en Occidente este principio todavía que, aún en nuestros días, los más grandes sabios de nuestra cultura han dedicado su vida a mostrar que este principio es universalmente válido, y se puede decir que es uno de los aspectos característicos de la cultura occidental. Tanto es así, que todavía se sostiene que toda ciencia es ciencia (es decir, conocimiento) en la medida en que es expresable matemáticamente (no sólo en cuanto a su orden, sino en cuanto a sus principios).

# Capítulo 7

# Área

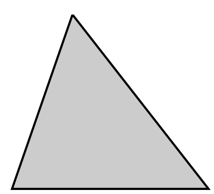
Hasta ahora hemos podido asignar un número real a las figuras geométricas que se pueden expresar como la unión de un número finito de subconjuntos de la recta: a dos puntos les hemos asignado la distancia entre ellos; a un segmento le hemos asignado su longitud; a un ángulo le hemos asignado su medida angular; a los triángulos y los cuadriláteros les hemos asignado sus perímetros.

Nos proponemos ahora asignar un número real a figuras geométricas que no son del tipo de las anteriores, pero que están de todas maneras sometidas a ciertas condiciones⟨1⟩, como por ejemplo: al conjunto formado por un triángulo y su interior, o por un cuadrilátero convexo y su interior.

Tomaremos la primera de las nombradas como elemento básico para la asignación de un número real (*el área*) a las figuras geométricas que estudiaremos en esta ocasión⟨2⟩.

**Definición 7.1 (Región triangular)**

*Una* ***región triangular*** *es una figura geométrica formada por un triángulo y su interior.*
*De una región triangular llamaremos: a cada punto del interior del triángulo,* ***punto interior****; al interior del triángulo,* ***el interior****; al triángulo mismo,* ***la frontera****; y a los vértices del triángulo,* ***los vértices****.*



Es claro que todo triángulo determina una región triangular: la formada por él mismo y su interior.

El último de los resultados del capítulo anterior (la proposición 6.5) nos permite definir sin ambigüedad lo que llamaremos el área de una región triangular.

**Definición 7.2 (Área de una región triangular)**
*El **área de una región triangular** es la mitad del producto de una altura del triángulo que la determina, por la base correspondiente.*
*Si el triángulo que determina la región triangular es $\triangle ABC$, denotaremos al número que representa el área de la región mediante $\alpha\triangle ABC$.*

Frecuentemente diremos ***área del triángulo*** para decir ***área de la región triangular determinada por el triángulo***.

Si una altura del triángulo $\triangle ABC$ mide $h$, y la base correspondiente a $h$ mide $b$, tendremos

$$\alpha\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot h;$$

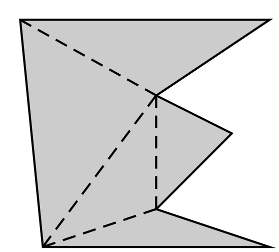
y, gracias a la proposición 6.5, este número en función de los lados del triángulo es

$$\alpha\triangle ABC = \sqrt{s\cdot(s-AB)\cdot(s-AC)\cdot(s-BC)}.^{\langle 3\rangle}$$

Por otro lado, gracias al ejercicio 3.27, ***dos triángulos congruentes tienen la misma área***. Esto nos asegurará, en virtud del *Teorema del área* (Teorema 7.1), que el área de lo que llamaremos una región depende de su tamaño, pero no de su ubicación en el plano, y que la unidad de área sólo depende de la unidad de distancia escogida.

A partir de las regiones triangulares definimos aquellas figuras geométricas a las cuales podremos, en lo inmediato, asignar un número real como su *área*.

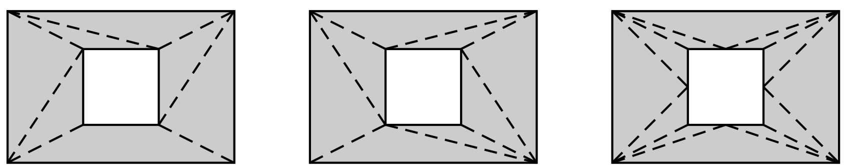
**Definición 7.3 (Región poligonal)**
*Una **región poligonal** es una figura geométrica que se puede expresar como la unión de un número finito de regiones triangulares que no tienen puntos interiores en común.*
*De una región poligonal llamaremos: a cada punto interior de alguna región triangular contenida en la región poligonal, **punto interior**; al conjunto de los puntos interiores, **el interior**; y al conjunto de sus puntos que no están en su interior, **la frontera**.*



Es claro que todo cuadrilátero convexo determina una región poligonal: la formada por él mismo y su interior.

Sólo por comodidad en la manera de hablar de una región poligonal $\mathscr{R}$, convendremos en que: ***una triangulación*** de $\mathscr{R}$ es un conjunto cuyos elementos son regiones triangulares sin puntos interiores en común y cuya unión es $\mathscr{R}$; y ***triangular*** la región poligonal $\mathscr{R}$ consiste en dar una triangulación de $\mathscr{R}$.

Note que, tal como se insinúa en la siguiente representación, una región poligonal se puede triangular de muchas maneras (en verdad, de un número indefinido de maneras).



De aquí en adelante, cada vez que hablemos de una ***región***, debe entenderse que nos referimos a una región poligonal.

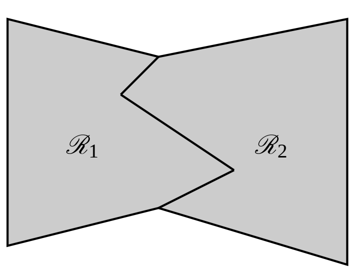
El siguiente Teorema, que se puede probar a partir de los siete postulados que hemos aceptado, y cuya prueba puede ser consultada en el Capítulo 14 de [15], permite asignar un número real positivo a cada región poligonal (su *área*) y obtener fórmulas para calcular las áreas de algunos cuadriláteros convexos.

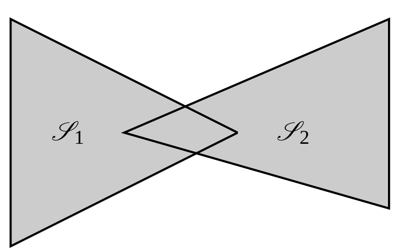
**Teorema 7.1 (Teorema del área)**

**(a)** *A cada región $\mathscr{R}$ corresponde un único número real positivo, al que llamaremos el* ***área*** *de la región $\mathscr{R}$ y que denotaremos por $\alpha\mathscr{R}$.*

**(b) (Adición de áreas)**
*Si la región $\mathscr{R}$ es la unión de dos regiones $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ que no tienen puntos interiores en común, entonces $\alpha\mathscr{R} = \alpha\mathscr{R}_1 + \alpha\mathscr{R}_2$.*

La parte (b) del Teorema del área nos asegura que, por ejemplo, en la figura del lado izquierdo, $\alpha(\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2) = \alpha\mathscr{R}_1 + \alpha\mathscr{R}_2$. Pero, por supuesto, en la figura del lado derecho, $\alpha(\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2)$ es más pequeño que $\alpha\mathscr{S}_1 + \alpha\mathscr{S}_2$



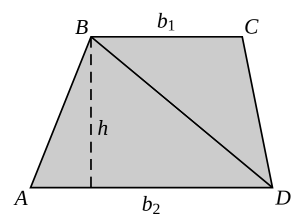
Al igual que antes, diremos con frecuencia ***área del cuadrilátero*** para decir ***área de la región determinada por un cuadrilátero convexo***; en particular hablaremos del ***área de un trapezoide***, ***área de un trapecio***, ***área de un paralelogramo***, etc. Escribiremos $\alpha\square ABCD$, para simbolizar el área del cuadrilátero $\square ABCD$.

Note que, por la parte (b) del Teorema del área, es claro que dos cuadriláteros convexos congruentes tienen la misma área.

Obtendremos ahora las fórmulas de área para las regiones determinadas por la clase más general de los cuadriláteros convexos que estudiamos en el Capítulo 5.

**Proposición 7.1 (Área de un trapezoide)**
*El área de un trapezoide es el producto de la semisuma de dos* ***bases*** *(un par de lados paralelos) por la* ***altura*** *correspondiente (la distancia entre esas bases).*

**Prueba** Sea $\square ABCD$ un trapezoide con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Por comodidad, llamemos $BC = b_1$ y $AD = b_2$. Considerando la diagonal $\overline{BD}$ tenemos que los triángulos $\triangle BCD$ y $\triangle ABD$ tienen la misma altura $h$ con respecto a las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Pero entonces, por el Teorema del área, $\alpha\square ABCD = \alpha\triangle ABD + \alpha\triangle BDC = \frac{1}{2}\cdot b_2 \cdot h + \frac{1}{2}\cdot b_1 \cdot h = \frac{b_1+b_2}{2}\cdot h$.




■

**Corolario 7.1.1 (Área de un paralelogramo)**
*El área de un paralelogramo es el producto de un lado por la altura correspondiente.*

**Prueba** Es claro, pues todo paralelogramo es un trapezoide con bases congruentes.

■

**Corolario 7.1.2 (Área de un rectángulo)**
*El área de un rectángulo es el producto de dos lados consecutivos.*

**Prueba** Es claro, pues todo rectángulo es un paralelogramo en el que, si uno de los lados se toma como base, un lado consecutivo es altura.

■

**Corolario 7.1.3 (Área de un cuadrado)**
*El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado.*

**Prueba** Es claro, pues todo cuadrado es un rectángulo con lados congruentes.

■

**Corolario 7.1.4 (Área de un rombo)**
*El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales.*

**Prueba** Es claro, gracias a la proposición 5.6.(a).

■

El agregar el área a la Geometría como dispositivo básico simplifica considerablemente las pruebas de algunos resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior. Esta manera simplificada de presentar las pruebas resulta poco elegante, ya que daría la ilusión de que dependen del Teorema del área, aunque tiene la inapreciable ventaja de hacer que esos resultados sean exclusivos de la Geometría elemental.

Uno de esos resultados es el Teorema de Thales; en el ejercicio 7.18 encontraremos las indicaciones para realizar una prueba de este Teorema, mucho más sencilla que la que hemos presentado en el capítulo anterior, obteniendo precisamente la prueba que realizó Euclides en sus Elementos.

Otro de esos resultados es el Teorema de Pitágoras, del cual se obtiene también una interpretación muy intuitiva: *el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*. Se podría decir que la prueba usando áreas es una prueba propiamente geométrica, ya que la que hemos dado en el capítulo anterior tiene carácter aritmético: bajo ciertas condiciones, los números $a$, $b$ y $c$ satisfacen la relación $a^2+b^2=c^2$. Encontraremos en los ejercicios 7.11, 7.12, 7.15, 7.16 y 7.17 de este capítulo las indicaciones de otras pruebas famosas de este Teorema, que hacen uso del área.

## Problemas del Capítulo 7

**7.1** ¿Será el siguiente enunciado una definición de región triangular?
*La unión de todos los segmentos que tienen sus extremos en los lados de un triángulo.*

**7.2** ¿Será el siguiente enunciado una definición de región poligonal?
*La unión de un número finito de regiones triangulares tales que, si dos cualesquiera de ellas se intersectan, su intersección es un vértice o un lado de alguno de los triángulos.*

**7.3** ¿Cómo varía el área de un cuadrado si se duplica la longitud de su lado?; ¿y si se reduce a la mitad?; ¿y si se multiplica por un número real positivo $k$?

**7.4** ¿Cómo varía el área de un rectángulo si se duplica la altura y no se altera la base?; ¿y si se duplica la base y no se altera la altura?; ¿y si se duplican la base y la altura?

**7.5** **(a)** Si dos triángulos tienen la misma altura, pruebe que la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases correspondientes.
**(b)** Si dos triángulos tienen la misma base, pruebe que la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus alturas correspondientes.
**(c)** Si dos triángulos tienen una base, y su altura correspondiente, iguales, pruebe que tienen la misma área.

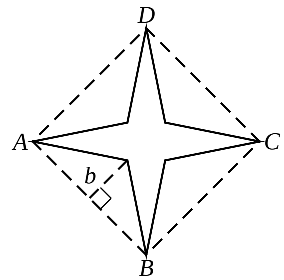
**7.6** Si dos rectángulos tienen la misma base, pruebe que la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas.

**7.7** Si un triángulo y un paralelogramo tienen áreas iguales y bases iguales, ¿cuál es la razón entre sus alturas?

**7.8** Si, en $\triangle ABC$, $\angle A$ tiene medida $r$ y es agudo, pruebe que $\alpha\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \operatorname{sen} r$; y, si $\angle A$ es obtuso, $\alpha\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \operatorname{sen}(180-r)$.

**7.9** Si las diagonales de un cuadrilátero convexo son perpendiculares, pruebe que el área del cuadrilátero es igual a la mitad del producto de las longitudes de las diagonales.

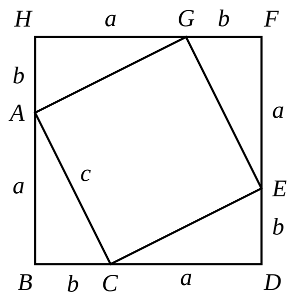
**7.10** Si $\square ABCD$ es un cuadrado de lado $l$ y los segmentos del contorno de la estrella son congruentes, determine el área de la estrella en términos de $l$ y $b$.




**7.11** **(Teorema de Pitágoras)**

(*Llamada prueba China*)

Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle B$ recto, $b = BC$, $a = AB$ y $c = AC$, pruebe que $c^2 = a^2 + b^2$, usando el cuadrado $\square BDFH$ de lado $a+b$ construido a partir de $\triangle ABC$ y verificando:

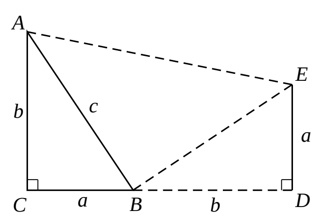



**(a)** ¿Cómo se construye el cuadrado $\square BDFH$?
**(b)** $\triangle ABC \cong \triangle CDE \cong \triangle EFG \cong \triangle GHA$.
**(c)** $\square ACEG$ es un cuadrado.
**(d)** $\alpha\square BDFH = \alpha\square ACEG + 4 \cdot \alpha\triangle ABC$.
**(e)** $c^2 = a^2 + b^2$.

**7.12** **(Teorema de Pitágoras)**

(*Prueba realizada por el General James A. Garfield unos años antes de llegar a ser Presidente de los Estados Unidos, y publicada alrededor de 1875 el New England Journal of Education*)

Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle C$ recto, $b = AC$, $a = BC$ y $c = AB$, pruebe que $a^2 + b^2 = c^2$, usando el trapezoide $\square ACDE$ construido a partir de $\triangle ABC$ y verificando:




**(a)** ¿Cómo se construye el trapezoide $\square ACDE$?
**(b)** ¿Es recto $\angle EBA$?
**(c)** La ecuación que expresa el área del trapecio como la suma de las áreas de los tres triángulos.
**(d)** $c^2 = a^2 + b^2$.

**7.13** Si dos triángulos son semejantes, pruebe que la razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón entre sus lados correspondientes.

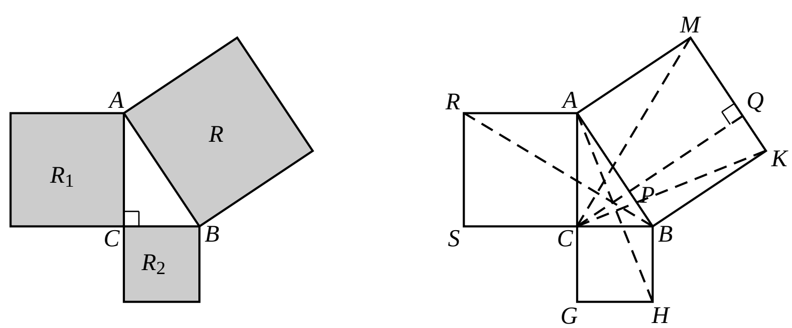
**7.14** Dado un segmento $\overline{AB}$, ¿qué puntos $P$ del plano son tales que a $\alpha\triangle ABP = k$, para $k$ un número real positivo dado?

**7.15 (Teorema de Pitágoras)**

(*Prueba realizada por Euclides*)

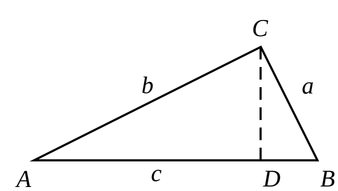
Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en $\angle C$, y $R$, $R_1$ y $R_2$ las regiones cuadradas construidas sobre la hipotenusa y los catetos respectivamente, pruebe que $a^2+b^2=c^2$ respondiendo las siguientes preguntas:

**(a)** ¿Por qué $\angle RAB \cong \angle CAM$?
**(b)** ¿Por qué $\triangle RAB \cong \triangle CAM$?
**(c)** ¿Por qué a $\alpha\triangle RAB = \alpha\triangle CAM$?
**(d)** ¿Alguna altura de $\triangle RAB$ mide $AC$?
**(e)** ¿Por qué $\alpha\square ACSR = 2\cdot\alpha\triangle RAB$?
**(f)** ¿Es $\alpha\square AMQP = 2\cdot\alpha\triangle CAM$?
**(g)** ¿Por qué $\alpha\square ACSR = \alpha\square AMQP$?
**(h)** ¿Es $\alpha\square BHGC = \alpha\square PQKB$?
**(i)** ¿Es $\alpha\square AMKB = \alpha\square AMQP + \alpha\square PQKB$?
**(j)** ¿Por qué $a^2+b^2=c^2$?



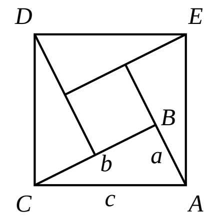

**7.16 (Teorema de Pitágoras)**

Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en $C$, $b=AC$, $a=BC$ $c=AB$ y $\overline{CD}$ la altura correspondiente a la hipotenusa, pruebe que $c^2=a^2+b^2$ verificando que:




**(a)** $\alpha\triangle ABC = \alpha\triangle ACD + \alpha\triangle CBD$.
**(b)** $1 = \dfrac{\alpha\triangle ACD}{\alpha\triangle ABC} + \dfrac{\alpha\triangle CBD}{\alpha\triangle ABC}$.
**(c)** $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$.
**(d)** $1 = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2$.
**(e)** $c^2=a^2+b^2$.

**7.17 (Teorema de Pitágoras)**
(*Llamada prueba hindú, debida a un matemático hindú del siglo XII llamado Bashkara*)
Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en $B$, $b = BC$, $a = AB$ y $c = AC$, pruebe que $c^2 = a^2 + b^2$, usando el cuadrado $\square ACDE$ de lado $c$ construido a partir de la hipotenusa de $\triangle ABC$.

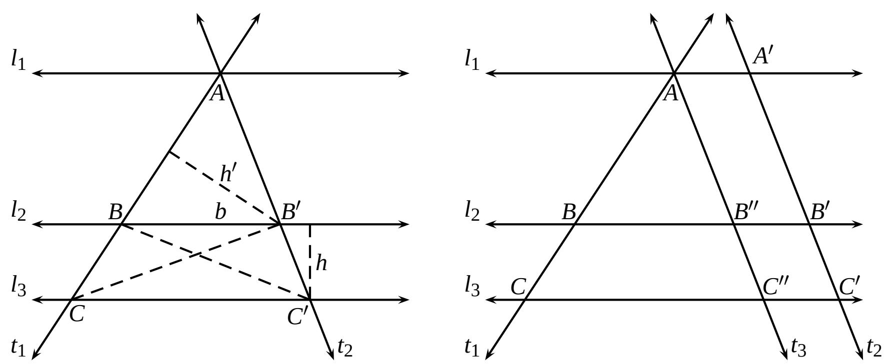



**7.18 (Teorema de Thales)**
Pruebe, usando la figura y las indicaciones siguientes, que tres rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en cualesquiera dos secantes.
Sean $l_1$, $l_2$, $l_3$, $t_1$ y $t_2$ cinco rectas tales que $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$; $t_1$ y $t_2$ son secantes a $l_1$, $l_2$ y $l_3$ en los puntos $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$, respectivamente; $A$-$B$-$C$ y $A'$-$B'$-$C'$.
**Caso I** $A = A'$ (figura de la izquierda).

**(a)** $\alpha\triangle CBB' = \alpha\triangle C'BB'$.
**(b)** $\frac{\alpha\triangle ABB'}{\alpha\triangle CBB'} = \frac{AB}{BC}$.
**(c)** $\frac{\alpha\triangle ABB'}{\alpha\triangle C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'}$.
**(d)** $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$.

**Caso II** $A \neq A'$ (figura de la derecha).
Tome $t_3$ paralela a $t_2$ por $A$, que intersecta a $l_2$ en $B''$ y a $l_3$ en $C''$.

**(e)** $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C''} = \frac{A'B'}{B'C'}$.




**7.19** Pruebe que el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide $s$ es $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$.

**7.20** Dos lados de un triángulo miden $a$ y $b$. La altura cuya base es el tercer lado divide a éste en segmentos de longitud $c$ y $d$. Pruebe que $(a+b)\cdot(a-b) = (c+d)\cdot(c-d)$.

**7.21** En el paralelogramo $\square ABCD$, las bisectrices de $\angle A$ y $\angle C$ intersectan a la diagonal $\overline{BD}$ en $E$ y $F$ respectivamente. Pruebe que las regiones $ABCFE$ y $AEFCD$ tienen igual área.

**7.22** **(a)** Si la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a ésta en dos segmentos de longitudes $r$ y $s$, pruebe que el área del triángulo es el producto de las medias geométrica y aritmética de $r$ y $s$.

**(b)** Si $\triangle ABC$ es rectángulo con ángulo recto en $B$, $\overline{BD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa, $E$ y $F$ son los puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, tales que $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, pruebe que $\alpha\square DEBF = \sqrt{AE \cdot EB \cdot BF \cdot FC}$.

**7.23** Si, en $\triangle PQR$, $G$ y $H$ son los puntos medios de $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$, respectivamente, pruebe que:

**(a)** $\alpha\triangle GHR = \frac{1}{4} \cdot \alpha\triangle PQR$.

**(b)** $\alpha\triangle GHR = \frac{1}{3} \cdot \alpha\square PQHG$.

**7.24** En $\triangle ABC$, $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la base $\overline{AB}$; $l$ es una recta paralela a $\overline{AB}$, que corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en $E$ y $F$, respectivamente, y tal que el área de $\triangle CEF$ es sólo la mitad del área de $\triangle ABC$. Si $l$ intersecta $\overline{CD}$ en el punto $M$, pruebe que $CM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot CD$.

**7.25** Pruebe que cada diagonal de un paralelogramo divide a éste en dos regiones triangulares de la misma área.

**7.26** Pruebe que:

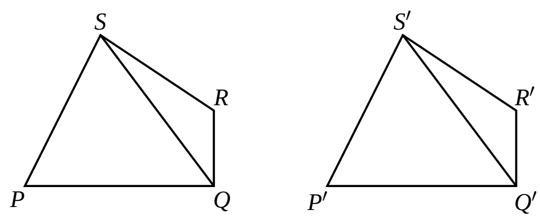
**(a)** las dos regiones triangulares que se forman al trazar una mediana de un triángulo tienen áreas iguales.

**(b)** las tres medianas de un triángulo lo triangulan en seis regiones triangulares de la misma área.

**7.27** Si $B$ es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$, pruebe que $\alpha\triangle ABE = \alpha\triangle BCD$.

**7.28** Si $\angle PSQ \cong \angle P'S'Q'$, $\angle QSR \cong \angle Q'S'R'$ y $d\frac{P'S'}{PS} = \dfrac{Q'S'}{QS} = \dfrac{S'R'}{SR} = k$, pruebe que

$$\frac{\alpha\square P'Q'R'S'}{\alpha\square PQRS} = k^2.$$




**7.29** Sea $\square ABCD$ un trapecio con $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$; $E$ el punto medio de $\overline{AB}$; $\overline{AC}$ corta a $\overline{DE}$ en su punto medio $F$ y $\overline{BD}$ corta a $\overline{CE}$ en su punto medio $G$. Pruebe que:

**(a)** $\alpha\triangle ADE = \alpha\triangle ECB$.
**(b)** $\alpha\triangle AFE = \alpha\triangle EGB$.
**(c)** $\alpha\triangle AFD = \alpha\triangle BGC$.

**7.30** En el paralelogramo $\square ABCD$, $M$ es el punto medio de $\overline{AD}$ y $K$ el de $\overline{AB}$. Pruebe que $\alpha\square AKCM = \frac{1}{2}\cdot\alpha\square ABCD$.

**7.31** En el trapecio $\square ABCD$, con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, tenemos: $\angle A$ y $\angle B$ son agudos; $K$ el punto medio de $\overline{BC}$, y $P$ es un punto en $\overline{AB}$ tal que $\overline{PK} \parallel \overline{AD}$. Pruebe que a $\alpha\triangle APD = \alpha\square PBCD = \frac{1}{2}\cdot\alpha\square ABCD$.

**7.32** Sea $\triangle MQR$ un triángulo y $P$ el punto de intersección de las medianas $\overline{RS}$ y $\overline{MT}$. Pruebe que que $\alpha\triangle PMS = \alpha\triangle PRT$.

**7.33** Si una diagonal de un cuadrilátero biseca a la otra diagonal, pruebe que las áreas de los triángulos que tienen por base la diagonal que biseca (no la que es bisecada) son iguales.

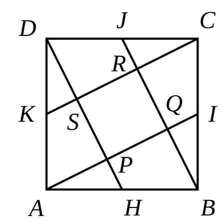
**7.34** Sea $\square ABCD$ un paralelogramo y $P$, $Q$, $R$ y $S$ los puntos medios de sus lados. Pruebe que $\alpha\square ABCD = 2\cdot\alpha\square PQRS$.

**7.35** Sea $\square PQRS$ un paralelogramo. Sea $J$ un punto tal que $S$-$J$-$R$. Sea $K$ un punto de tal que $R$-$K$-$Q$. Una recta que pasa por $S$ y es paralela a $\overline{PK}$ intersecta en $M$ a una recta que pasa por $K$ y es paralela a $\overline{PJ}$. La recta $\overleftrightarrow{PJ}$ intersecta a $\overline{SM}$ en $L$. Pruebe que $\alpha\square PQRS = \alpha\square PKML$.

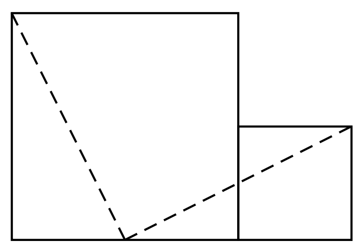
**7.36** **(a)** Pruebe que una recta $l$ separa a una región limitada por un paralelogramo en dos regiones de áreas iguales si, y sólo si, $l$ contiene el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

**(b)** Dados dos paralelogramos, ¿cómo se puede dibujar una sola recta que divide a las regiones limitadas por los dos paralelogramos en dos regiones de igual área?

**7.37** Sea $\square ABCD$ un cuadrado con $H$, $I$, $J$ y $K$ los puntos medios de sus lados. Pruebe que $\square PQRS$ es un cuadrado y pruebe que $\alpha\square PQRS = \frac{1}{5} \cdot \alpha\square ABCD$.




**7.38** **(Construcción de un Tangram de cinco piezas)**
Cualesquiera dos cuadrados se pueden cortar en cinco pedazos de tal manera que éstos se pueden reordenar para formar un nuevo cuadrado. Abajo indicamos cómo deben hacerse los cortes en el caso en que el lado de un cuadrado mida el doble del lado del otro cuadrado. Después de verificar cómo construir un nuevo cuadrado con estos cinco pedazos, determine cómo hacer los cortes en el caso en que los lados de los cuadrados estén en la misma razón que 3 y 2, y en el caso en que estén en la misma razón que $k$ y $l$ con $k > l$.



# Comentarios del Capítulo 7

⟨1⟩Quedando lejos, en el desarrollo de este tema, de poder asignar un número real a cualquier figura geométrica.

⟨2⟩Esta necesidad de *cuantificar* o *medir* todo aquello que tenga que ver con la realidad sensible del ser humano es un signo característico de nuestra cultura desde la antigüedad llamada clásica (antigüedad que es muy relativa, ya que no se remonta más allá del siglo VI a.C.), y está particularmente acentuada hoy en día. Tiene su origen en la conveniencia práctica de establecer un orden entre los entes que tienen alguna utilidad en la supervivencia del ser humano, y cuál mejor que el orden que tienen por sí mismos los números reales. Como ejemplo tenemos lo que tiene que ver con el sustento inmediato del hombre, principal medio de producción, como lo es la tierra; todos quisieran saber qué parcela de tierra es más grande que otra, y medir el contorno, o el perímetro, no es un camino confiable. De esta situación surge primitivamente el estudio de las áreas que luego se elevó hasta abstraer todo su contenido *material*, resolviéndose (como se hace en Geometría) sólo a partir de su contorno.

⟨3⟩Esta manera de calcular el área de un triángulo en función de los lados se debe a ***Herón de Alejandría***, del que parece que hay acuerdo en ubicar, cronológicamente, en el primer siglo de nuestra era.

## Orientación para la solución de los problemas del Capítulo 7

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 7.1 al 7.18; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 7.1 al 7.12, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 7.13 al 7.17, y de ***dificultad alta*** el ejercicio 7.18.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 7.19 al 7.33; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 7.19 al 7.27, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 7.28 al 7.30, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 7.31 al 7.33.

Creemos que los ejercicios del 7.34 al 7.38 son sólo para los estudiantes más aventajados.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**7.11:** para la parte (c), vea el ejercicio 5.12.
**7.13:** vea el ejercicio 6.13.
**7.16:** para la parte (c), vea el ejercicio 6.15.(a); para la parte (d), vea el ejercicio 7.13.
**7.22:** use el Teorema de la altura de Euclides.

**7.29:** para la parte (b), verifique que $\overline{FG} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
**7.34:** trace una diagonal de $\square PQRS$.
**7.35:** ¿intersecta $\overleftrightarrow{RQ}$ a $\overleftrightarrow{SM}$?

Muchos autores han decidido decir *dos figuras geométricas son iguales* donde nosotros hemos dicho *dos figuras geométricas son congruentes* (tanto entre segmentos, como entre ángulos y entre triángulos), con Euclides a la cabeza de esta lista. Quizás tengan muchas razones que apoyen esta decisión, como por ejemplo, que para el geómetra dos figuras geométricas congruentes son iguales, ya que a éste no le importa si están o no compuestas por los mismos puntos (en otras palabras, no le importa si están ocupando exactamente el mismo lugar en el plano); pero lo cierto es que esta decisión genera algunas dificultades.

El problema fundamental está en el uso de la palabra *igual*, y del símbolo que generalmente se ha utilizado para designarla:; "=". Pongamos por caso que nosotros escribimos $A = B$, y que leemos "$A$ es igual a $B$". Ciertamente no estamos diciendo que los símbolos $A$ y $B$ son el mismo símbolo, puesto que ambas letras son en verdad distintas en su trazo. Ciertamente lo que se quiere decir es que lo representado por la letra $A$ *es exactamente lo mismo que* lo representado por la letra $B$. Para hacernos comprender mejor, particularicemos aún más el ejemplo que nos sirve de base en esta parte de la reflexión. Los números representados por los símbolos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ son exactamente el mismo número, a pesar de que ambas expresiones sean distintas; y nosotros expresamos esta idea mediante $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (y pueden conseguirse fácilmente representaciones del mismo número que difieren todavía mucho más, como por ejemplo, cuando escribimos $\int_0^2 x\,dx = 2$, donde podríamos representar al número 2 con el símbolo que tenemos al lado izquierdo de la igualdad tal y como la hemos escrito, pero lo cierto es que usaríamos un símbolo con el que muy pocos tendrían la oportunidad de comprendernos, si acaso estuviéramos, por ejemplo, contando el dinero para pagar en una bodega).

Ahora bien, no resultaría muy coherente designar con el mismo símbolo dos cosas de distinta naturaleza, como por ejemplo un segmento y su longitud (ya que correríamos el riesgo de confundir el dominio propio de la Geometría con el de la Aritmética). De modo que, si hemos escogido el símbolo $\overline{PQ}$ para denotar al segmento $P\ Q$, debemos, en aras de la coherencia, designar su longitud de manera distinta, sea la que sea; digamos, como lo hemos hecho nosotros, mediante $PQ$. Pero entonces, si escribimos $\overline{PQ} = \overline{RS}$ estamos diciendo que tenemos dos representaciones del mismo conjunto de puntos (puesto que los hemos definido de esa manera); y si escribimos $PQ = RS$ estamos diciendo que tenemos dos representaciones del mismo número; y ciertamente estaremos diciendo dos cosas muy distintas, puesto que ambas se deciden de maneras muy diferentes. Para evadir este problema los autores dicen: *diremos que dos segmentos son iguales cuando tengan la misma longitud*; pero entonces, una de dos: o tergiversan el uso común y lógico de la identidad, al volverla ambigua, o se quedan sin la posibilidad de poder expresar que dos símbolos están representando exactamente al mismo segmento. Pero, como lo que están definiendo es la relación básica y fundamental de la Geometría, con respecto a esos objetos de ella que llamamos segmentos, y que generalmente llamamos *congruencia* (cuya idea, independientemente de los objetos que relacione, es siempre la misma: que uno de los objetos se puede mover rígidamente hasta hacerlo coincidir con el otro), es innecesario y hasta contraproducente tener dos palabras, y por tanto dos símbolos, para designarla: *identidad* y *congruencia*; muy particularmente porque la identidad se usa en todos los ámbitos del pensamiento humano.

Como vemos por lo dicho anteriormente, el problema no es lógico sino de exposición. Se puede seguir desarrollando toda la Geometría en la forma que nosotros estamos poniendo en tela de juicio. Pero creemos que su exposición se haría mejor si se usa una terminología coherente, es decir, conjugando símbolos y palabras con las ideas, de modo que podamos tener, en la medida de lo posible, una para cada una.

Esta diferencia en la manera de hablar de la congruencia se hace aún más patente cuando hemos introducido y definido la relación de congruencia entre triángulos, y que nosotros tomamos de Hilbert. Muchos autores no nombran en absoluto la correspondencia entre los vértices de los triángulos (es decir, lo que nosotros hemos llamado justamente *la congruencia* entre ellos) cuando hablan de triángulos congruentes. La dificultad enorme que ofrece esta omisión expresa (aunque implícitamente la usan) se presenta en el momento en que quieren concluir que dos elementos correspondientes son congruentes, pues ¿cómo saber, sin la correspondencia entre los vértices, cuáles son las partes correspondientes? En otras palabras, el saber que dos triángulos son congruentes sin más, es decir, en abstracto, es de una utilidad casi nula en Geometría, puesto que el geómetra está impulsado a sacar otras conclusiones a partir de ésta; por tanto necesita conocer *una* congruencia que le permita referirse a las partes que son correspondientes.

Debemos hacer notar que, todo lo dicho vale estrictamente dentro de los límites del pensamiento racional, y que podemos denominar *lógico* o *matemático*, en el sentido que se da a esta palabra en cualquier curso introductorio de Lógica. Tomemos por caso la expresión moderna que supuestamente está en la base de las reglas que rigen las relaciones sociales del mundo occidental contemporáneo: *todos los hombres son* **iguales**. Ciertamente no se quiere decir con esto que sólo hay un hombre, y que aquellos que nosotros concebimos como distintos no son más que diferentes representaciones de ese hombre único (aunque quizás sea así, pero ¿quién lo sabe?); así como tampoco se está diciendo, ciertamente, que todos son congruentes entre sí en el sentido geométrico que hemos dado a esta expresión, puesto que no todos tenemos el mismo tamaño y la misma forma. Aquí se pone en juego el punto de vista que se adopte respecto a aquello que se está llamando *igual*. Lo que se pretende expresar es que todos tenemos consagrados, ante las reglas, los mismos derechos y los mismos deberes, pero, esto no haría falta decirlo, de una manera muy ambigua, hasta el punto en que se vuelve casi paradójica, y por tanto irracional, esta expresión.

La precisión matemática de la *identidad* se hizo necesaria con el tiempo. Desde Euclides hasta entrado el siglo XVIII no lo parecía, pero en la medida en que se hizo frecuente el uso de símbolos taquigráficos para expresar las ideas matemáticas, se manifestó la necesidad de darles un significado único y preciso de acuerdo con las ideas *claras* y *distintas* que se concebían.

# Capítulo 8

# Polígonos

Procedemos ahora a estudiar un tipo de figuras geométricas que abarca, como casos particulares, a los triángulos y cuadriláteros; comenzaremos, como es natural, estableciendo su definición.

**Definición 8.1 (n-ágonos o polígonos[⟨1⟩])**
*Un **n-ágono** (n un número natural y $n \geqslant 3$) es una figura geométrica formada por la unión de n segmentos tales que:*

**(a)** *se pueden enumerar en la forma $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$ y $\overline{P_nP_1}$, con los puntos $P_1$, $P_2$, …, $P_{n-1}$ y $P_n$ distintos entre sí;*
**(b)** *ningún par de ellos se intersectan, salvo en sus extremos;* **y**
**(c)** *ningún par de ellos con un extremo común son colineales.*

*De un n-ágono llamaremos: a los n puntos $P_1$, $P_2$, …, $P_{n-1}$ y $P_n$,* ***los vértices****; a los n segmentos,* ***los lados****; y a los n ángulos $\angle P_nP_1P_2$, $\angle P_1P_2P_3$, …, y $\angle P_{n-1}P_nP_1$,* ***los ángulos*** *(y, en algunos contextos,* ***los ángulos interiores****, o* ***los ángulos internos****).*

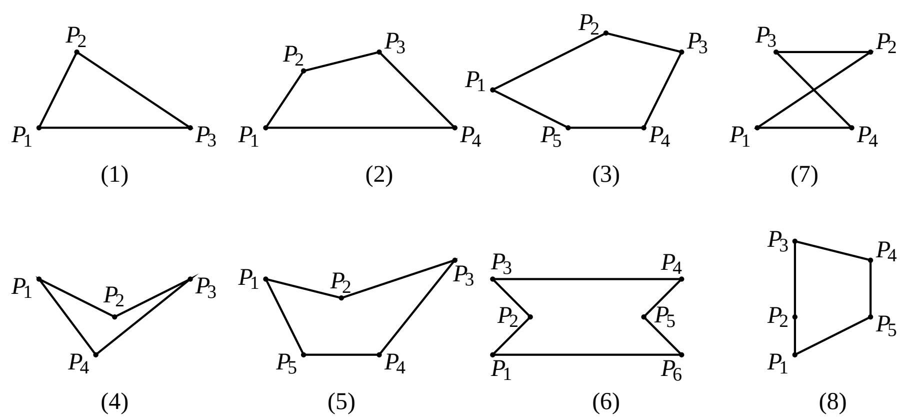
*A los n-ágonos los llamaremos también* ***polígonos de*** n ***vértices****, o* ***polígonos de*** n ***lados****, o simplemente* ***polígonos****, si no es relevante especificar el número de sus vértices o de sus lados.*

Ahora la pregunta de rutina: ***¿cuántos vértices tiene un n-ágono?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante. Su prueba depende sólo de las propiedades de la Interposición, pero, con la idea de no recargar la exposición con demasiados detalles, dejaremos su prueba para el Apéndice A.

**Proposición 8.1 (Igualdad de polígonos)**
*Dos polígonos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo número de vértices y sus vértices coinciden.*

Aunque no es lo usual, podemos referirnos a los triángulos y cuadriláteros como 3-ágonos y 4-ágonos, o como trígonos⟨2⟩ y tetrágonos, o como polígonos de 3 vértices y polígonos de 4 vértices, o como polígonos de 3 lados y polígonos de 4 lados, respectivamente. De acuerdo al número de lados, los polígonos reciben distintos nombres, en general derivados de su nombre genérico ***n-ágono***, en el que $n$ es sustituido por su correspondiente griego. Así por ejemplo: para $n = 5$, se llaman ***pentágonos***; para $n = 6$, se llaman ***hexágonos***; para $n = 7$, ***heptágonos***; para $n = 8$, ***octógonos***; para $n = 9$, ***eneágonos*** (o ***nonágonos***); para $n = 10$, ***decágonos***; y así sucesivamente.

En la figura siguiente, todos los dibujos representan polígonos, excepto los identificados con el número (7) (en el que los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_3P_4}$ se cortan en un punto distinto de sus extremos) y el número (8) (en el que los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, con extremo común $P_2$, son colineales).




Sólo por comodidad en la referencia a los diferentes elementos que componen un polígono, haremos de inmediato una clasificación de éstos.

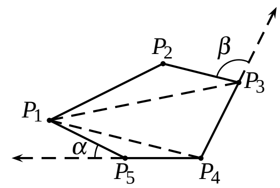
**Definición 8.2** *En un polígono tendremos que:*

**(a)** *dos vértices son **consecutivos**, o **contiguos**, si son extremos de un mismo lado.*
**(b)** *dos lados son **consecutivos**, **contiguos**, o **adyacentes**, si tienen un extremo común.*
**(c)** *dos ángulos son **consecutivos**, **contiguos**, o **adyacentes**, si sus vértices son extremos de un mismo lado.*
**(d)** *una **diagonal** es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos.*

**(e)** *un* ***ángulo externo*** *en uno de sus vértices es una pareja lineal del ángulo del polígono que tiene su vértice en dicho vértice del polígono.*

**(f)** *el* ***perímetro*** *es la suma de las longitudes de sus lados.*

Tomando el polígono identificado con el número (3) en la representación anterior como ejemplo, tendremos que: $P_1$ y $P_2$, $P_1$ y $P_5$ son vértices consecutivos; $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_1P_4}$ son diagonales; $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos externos en los vértices $P_5$ y $P_3$, respectivamente; y $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_5$ es el perímetro.




**(1)** *¿Podremos asegurar que existen n-ágonos, para cualquier $n \geqslant 5$?*

**(2)** *¿Cuántos vértices contiguos tendrá cada vértice de un polígono?*

Si denotamos los vértices de un n-ágono con los símbolos $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_{n-1}$ y $P_n$, donde cada uno de ellos, excepto el primero, es consecutivo del anterior, denotaremos al n-ágono por $P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$, y a sus ángulos por $\angle P_1$, $\angle P_2$, $\ldots$, $\angle P_{n-1}$ y $\angle P_n$ (sólo nombrando sus vértices); si $X$ es uno de los vértices del n-ágono $P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$, algunas veces diremos que $\angle X$ ***es el ángulo del n-ágono en el vértice*** $X$.

Cada vez que hablemos de un n-ágono, o de un polígono de $n$ vértices, o de un polígono $n$ lados, asumiremos que $n$ es un número natural y que $n \geqslant 3$; y, cuando hablemos del polígono $P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$, asumiremos que: cada vértice $P_k$ es consecutivo del vértice $P_{k-1}$, si $2 < k \leqslant n$; que el vértice $P_1$ es consecutivo del vértice $P_n$, y que tres vértices $P_i$, $P_j$ y $P_k$, para los que cada uno, excepto el primero, es consecutivo del anterior, no son colineales.

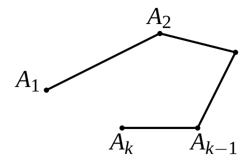
A continuación haremos una clasificación de los polígonos que permitirá diferenciar, en la representación anterior, los polígonos identificados con los números (1), (2) y (3), de los identificados con los números (4), (5) y (6).

**Definición 8.3 (Polígonos convexos)**
*Un polígono es* ***convexo****, si todos los vértices, que no son extremos de uno de sus lados, están en uno, y sólo uno, de los semiplanos determinados por la recta que contiene ese lado.*

Note que los triángulos y los cuadriláteros convexos son polígonos convexos.

Para facilitar las pruebas de algunos de los resultados posteriores, estableceremos el siguiente resultado, relativo al siguiente concepto.

**Definición 8.4 (Camino poligonal)**




*Dado un número natural $k \geqslant 2$, y $k$ puntos distintos $A_1$, $A_2$, …, $A_k$, al conjunto de los puntos que se encuentran sobre los $k-1$ segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, … y $\overline{A_{k-1}A_k}$ se denomina* ***el camino poligonal****, o simplemente* ***la poligonal****, $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$.*
*Llamaremos: a los puntos $A_1$ y $A_k$,* ***los extremos*** *de la poligonal; y a la suma de las longitudes de los $k-1$ segmentos,* ***la longitud*** *de la poligonal.*
*A veces diremos que $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$ es* ***una poligonal que une*** *$A_1$ y $A_k$.*

Por el Postulado de separación del plano sabemos que, si dos puntos están en lados opuestos de una recta, entonces el segmento que los une corta la recta; probaremos ahora que, en verdad, cualquier poligonal que los una corta la recta.

**Lema 8.1** *Si los extremos de una poligonal están en lados opuestos de una recta, entonces la poligonal corta la recta.*

**Prueba** Consideremos una poligonal $B_1B_2 \ldots B_{k-1}B_k$ y una recta $l$ tal que $B_1$ y $B_k$ están en lados opuestos de $l$. Si acaso ninguno de los segmentos que forman la poligonal cortara a $l$ tendríamos, por el Postulado de separación del plano, que todos sus extremos estarían del mismo lado de $l$; contrario a lo supuesto. Por tanto, alguno de esos segmentos debe cortar a $l$ y, así, la poligonal corta a $l$.

■

Presentamos ahora cinco caracterizaciones de los polígonos convexos y, de seguidas, algunas de sus propiedades.

**Proposición 8.2** *Un polígono es convexo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *todos los puntos, que no están en uno de sus lados, están en uno, y sólo uno, de los semiplanos determinados por la recta que contiene ese lado.*
**(b)** *ningún par de sus puntos están en lados opuestos de la recta determinada por uno de sus lados.*
**(c)** *los únicos puntos del polígono que están en la recta determinada por uno de sus lados son los puntos de dicho lado.*
**(d)** *cada vez que una recta corta al polígono en tres puntos distintos, esos tres puntos están en uno solo de los lados del polígono (y dicha recta es la determinada por ese lado).*
**(e)** *todos los vértices, que no están en dos lados consecutivos, están en el interior del ángulo del polígono determinado por esos dos lados.*

**Prueba** Sea $\mathscr{P}$ un polígono.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{P}$ es convexo. Consideremos el segmento $\overline{BC}$, lado de $\mathscr{P}$, y $E$ un punto de $\mathscr{P}$ que no está en $\overline{BC}$. Tomemos el vértice $A$ contiguo a $B$ tal que $A \neq C$, y el vértice $D$ contiguo a $C$ tal que $D \neq B$. Llamemos $\mathscr{H}$ al lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a $A$. Por la definición de polígono convexo, todos sus vértices (en particular $D$) están en $\mathscr{H}$. Así, si $E$ es un vértice de $\mathscr{P}$, $E$ está en $\mathscr{H}$. Si $A$-$E$-$B$, o $C$-$E$-$D$ tendremos, por el ejercicio 2.3, que $E$ está en $\mathscr{H}$. Si $E$ no es un vértice de $\mathscr{P}$ y no está en $\overline{AB}$ ni $\overline{CD}$, llamemos $F$ y $G$ los vértices de $\mathscr{P}$ tales que $F$-$E$-$G$. Como $F$ y $G$ están en $\mathscr{H}$ tendremos, por la convexidad de $\mathscr{H}$, que $E$ está en $\mathscr{H}$.
($\Leftarrow$) Es consecuencia de la definición de polígono convexo.
**(b)** ($\Rightarrow$) Es consecuencia de lo probado en la parte (a).
($\Leftarrow$) Supongamos que ningún par de los puntos de $\mathscr{P}$ están en lados opuestos de la recta determinada por uno de sus lados. Consideremos el segmento $\overline{BC}$, lado de $\mathscr{P}$. Tomemos el vértice $A$ contiguo a $B$ tal que $A \neq C$, y el vértice $D$ contiguo a $C$ tal que $D \neq B$. Llamemos $\mathscr{H}$ al lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a $A$. Como, por la definición de polígono, $D$ no puede estar en $\overleftrightarrow{BC}$ tendremos, por hipótesis, que $D$ tiene que estar en $\mathscr{H}$. Supongamos que $E$ es un vértice tal que $E \neq A$, $E \neq B$, $E \neq C$ y $E \neq D$. Si acaso $E$ estuviera en $\overleftrightarrow{BC}$ tendríamos, por la definición de polígono, que $B$-$C$-$E$ o $E$-$B$-$C$. Así, $C$ y $E$ estarían en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, o $B$ y $E$ estarían en lados opuestos de $\overleftrightarrow{CD}$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $E$ tiene que estar en $\mathscr{H}$ y así, por definición, $\mathscr{P}$ es convexo.
**(c)** ($\Rightarrow$) Es consecuencia de lo probado en la parte (a).
($\Leftarrow$) Supongamos que los únicos puntos de $\mathscr{P}$ que están en la recta determinada por uno de sus lados son los puntos de dicho lado. Consideremos el segmento $\overline{AB}$, lado de $\mathscr{P}$. Tomemos el vértice $C$ contiguo a $B$ tal que $C \neq A$. Llamemos $\mathscr{H}$ al lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $C$. En primer lugar, ningún vértice de $\mathscr{P}$, distinto de $A$ y $B$, está en $\overleftrightarrow{AB}$ (pues, si $V$ es un vértice tal que $V \neq A$, $V \neq B$ y $V$ está en $\overleftrightarrow{AB}$ tendríamos, por hipótesis, que $A$-$V$-$B$; contrario a la definición de polígono). Supongamos que $D$ es un vértice tal que $D \neq A$, $D \neq B$ y $D \neq C$. Si acaso $D$ estuviera en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ opuesto a $\mathscr{H}$ tendríamos, por el lema 8.1, que $\overleftrightarrow{AB}$ cortaría algún lado del polígono, distinto de $\overline{AB}$. Pero entonces, por hipótesis, $\overline{AB}$ cortaría un lado del polígono en un punto distinto de sus extremos; contrario a la definición de polígono. Por tanto, $D$ está en $\mathscr{H}$ y así, por definición, $\mathscr{P}$ es convexo.
**(d)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{P}$ es convexo, y que una recta $l$ corta a $\mathscr{P}$ en los puntos $A$, $B$ y $C$, distintos. Sin perder generalidad podemos suponer que $A$-$B$-$C$.

En primer lugar, $l$ debe contener al lado de $\mathscr{P}$ que contiene a $B$, digamos $L$ (pues, en caso contrario, $A$ y $C$ estarían en lados opuestos de la recta determinada por $L$; contrario a la parte (a)). Como $l$ es la recta determinada por $L$ tendremos, por la parte (c), que $A$ y $C$ están en $L$.
($\Leftarrow$) Es claro que, bajo las hipótesis de (d), se cumple (c).
**(e)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{P}$ es convexo, y consideremos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, lados consecutivos de $\mathscr{P}$. Si $D$ es un vértice tal que $D \neq A$, $D \neq B$ y $D \neq C$ tendremos, por la definición de polígono convexo, que $D$ y $A$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, así como $D$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$; de donde, por definición, $D$ está en el interior de $\angle ABC$.
($\Leftarrow$) Supongamos que todos los vértices de $\mathscr{P}$, que no están en dos de sus lados consecutivos, están en el interior del ángulo del polígono determinado por esos dos lados. Consideremos el segmento $\overline{AB}$, lado de $\mathscr{P}$. Tomemos el vértice $C$ contiguo a $B$ tal que $C \neq A$. Llamemos $\mathscr{H}$ al lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $C$. Si $D$ es un vértice tal que $D \neq A$, $D \neq B$ y $D \neq C$ tendremos, por hipótesis, que $D$ está en el interior de $\angle ABC$; de donde, $D$ está en $\mathscr{H}$ y, por definición, $\mathscr{P}$ es convexo.

∎

**(3)** *¿Cuándo un polígono no es convexo?*
**(4)** *¿Podremos asegurar que existen n-ágonos convexos, para cualquier $n \geqslant 5$?*
**(5)** *¿Podremos asegurar que existen n-ágonos no convexos, para cualquier $n \geqslant 5$?*

**Corolario 8.2.1** *Si un polígono es convexo, se tiene que:*

**(a)** *la recta determinada por cualquiera de sus diagonales corta al polígono sólo en sus extremos.*
**(b)** *ninguno de sus vértices está en el interior del triángulo determinado por un vértice del polígono y sus dos vértices consecutivos.*

**Prueba** Consideremos un polígono convexo $\mathscr{P}$.
**(a)** Sea $\overline{AB}$ una de las diagonales de $\mathscr{P}$. Si acaso $\overleftrightarrow{AB}$ cortara a $\mathscr{P}$ en un punto distinto de $A$ y $B$ tendríamos, por la proposición 8.2.(d), que $A$ y $B$ estarían en el mismo lado de $\mathscr{P}$; contrario a la definición de diagonal. Por tanto, $\overleftrightarrow{AB}$ no corta a $\mathscr{P}$ en ningún otro punto que $A$ y $B$.
**(b)** Sea $A$ uno de los vértices de $\mathscr{P}$, y $B$ y $C$ sus dos vértices consecutivos. Si acaso alguno de los vértices de $\mathscr{P}$, digamos $D$, estuviera en el interior de $\triangle ABC$ tendríamos, por el ejercicio 3.9, que la recta determinada por $\overline{BD}$ corta al lado $\overline{AC}$ $\mathscr{P}$ en un punto distinto de $A$ y $C$; contrario a la parte anterior, si $\overline{BD}$ es una

diagonal, o a la definición de polígono convexo, si $\overline{BD}$ es un lado. Por tanto, ningún vértice de $\mathscr{P}$ está en el interior de $\triangle ABC$.

■

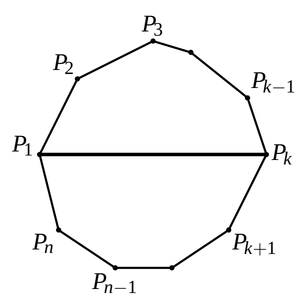
Otra de las propiedades fundamentales de los polígonos convexos es que podemos saber con precisión cuál es la suma de las medidas de sus ángulos internos (ver las proposiciones 4.9 y 5.2) y de sus ángulos externos (uno en cada vértice). Nos proponemos establecer ahora dicha propiedad, haciendo uso de un método que es muy útil en el estudio de los polígonos convexos en general⟨3⟩, y que depende del siguiente resultado.

**Lema 8.2** *Dado un polígono convexo $\mathscr{P} = P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ con $n \geqslant 4$, y un número natural $k$ tal que $3 \leqslant k \leqslant n-1$, se tiene que:*

**(a)** *la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\dots$, $\overline{P_{k-1}P_k}$ y $\overline{P_kP_1}$, así como la de los segmentos $\overline{P_1P_n}$, $\overline{P_nP_{n-1}}$, $\dots$, $\overline{P_{k+1}P_k}$ y $\overline{P_kP_1}$, forman dos polígonos convexos.*

**(b)** *los polígonos $P_1P_2 \dots P_k$ y $P_1P_n \dots P_k$ se encuentran, excepto la diagonal $\overline{P_1P_k}$ de $\mathscr{P}$, en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{P_1P_k}$.*

**Prueba** Consideremos un polígono convexo $\mathscr{P} = P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ y su diagonal $\overline{P_1P_k}$ $(3 \leqslant k \leqslant n-1)$. Por el corolario 8.2.1.(a) y el lema 8.1, la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\dots$, $\overline{P_{k-1}P_k}$ y $\overline{P_kP_1}$, así como la de los segmentos $\overline{P_1P_n}$, $\overline{P_nP_{n-1}}$, $\dots$, $\overline{P_{k+1}P_k}$ y $\overline{P_kP_1}$, forman dos polígonos convexos.




Por la proposición 8.2.(e), $P_k$ está en el interior de $\angle P_2P_1P_n$. Por el Teorema de la barra transversal, $P_2$ y $P_n$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{P_1P_k}$. Así, por la proposición 8.2.(a), los polígonos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, excepto el lado $\overline{P_1P_k}$, están en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{P_1P_k}$.

■

Por comodidad se suele expresar el resultado anterior de la siguiente manera: ***toda diagonal de un polígono convexo lo divide en dos polígonos convexos que están, salvo la diagonal, en lados opuestos de dicha diagonal***.

**Teorema 8.1** *Si un $n$-ágono es convexo, se tiene que:*

**(a)** *la suma de las medidas de sus ángulos interiores es $(n-2) \cdot 180$.*

**(b)** *la suma de las medidas de sus ángulos externos, uno en cada vértice, es* 360.

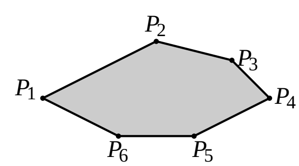
**Prueba** Consideremos un n-ágono convexo $\mathscr{P} = P_1P_2\dots P_{n-1}P_n$.
**(a)** Haremos esta prueba por inducción en el número de lados.
**(B)** Por la proposición 4.9, la afirmación es cierta para $n = 3$.
**(H)** Supongamos que la afirmación es cierta para $n = k \geqslant 4$.
Si $n = k+1$, consideramos la diagonal $\overline{P_1P_k}$. Por la proposición 8.2.(e), $P_k$ está en el interior del ángulo $\angle P_2P_1P_{k+1}$. Así, por el Postulado del transportador (adición de ángulos), $m\angle P_2P_1P_{k+1} = m\angle P_2P_1P_k + m\angle P_kP_1P_{k+1}$. Por las mismas razones, $m\angle P_{k-1}P_kP_{k+1} = m\angle P_{k-1}P_kP_1 + m\angle P_1P_kP_{k+1}$. Como, por el lema 8.2, el polígono $\mathscr{P}_1 = P_1P_2\dots P_k$ es convexo y tiene $k$ lados tendremos, por (B) y (H), que la suma de las medidas de los ángulos de $\mathscr{P}$ es $(k-2)\cdot 180 + 180 = [(k+1)-2]\cdot 180$.
Por el Principio de inducción, la proposición es cierta para todo n-ágono convexo.
**(b)** Como cada ángulo externo de un polígono es suplementario del correspondiente ángulo del polígono tendremos, por (a), que la suma de sus medidas es
$$\sum_{i=1}^{n}(180 - m\angle P_i) = n\cdot 180 - \sum_{i=1}^{n} m\angle P_i = n\cdot 180 - (n-2)\cdot 180 = 360.$$

■

Definiremos ahora el interior de un polígono convexo (concepto que no podremos, por ahora, generalizar a todos los polígonos en general).

**Definición 8.5 (Interior y exterior de un polígono convexo)**

*El **interior** de un polígono convexo es el conjunto de los puntos que se encuentran en el interior de todos sus ángulos a la vez.*
*El **exterior** de un polígono convexo es el conjunto de los puntos que no están en el interior del polígono, ni sobre el polígono.*




La siguiente caracterización del interior de un polígono convexo será de mucha utilidad en el capítulo siguiente.

**Proposición 8.3** *Dado un polígono convexo $\mathscr{P} = P_1P_2\dots P_n$, se tiene que un punto Q está en el interior de $\mathscr{P}$ si, y sólo si, para cualquier vértice $P_j$ de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{P_jQ}$ corta a $\mathscr{P}$ en un punto R tal que $P_j$-Q-R.*

**Prueba** Consideremos un polígono convexo $\mathscr{P} = P_1P_2\dots P_n$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $Q$ está en el interior de $\mathscr{P}$ y consideremos, sin perder generalidad, el vértice $P_2$ de $\mathscr{P}$. Como $Q$ está en el interior de $\angle P_2$ tendremos, por el Teorema de la barra transversal, que $P_1$ y $P_3$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{P_2Q}$. Por el lema 8.1, $\overleftrightarrow{P_2Q}$ corta la poligonal $P_3P_4\dots P_nP_1$ en un punto $R$. Como $Q$ no está en $\mathscr{P}$, tendremos que $Q \neq R$ y $Q \neq P_2$. Si acaso $P_2$-$R$-$Q$ o $R$-$P_2$-$Q$, tendríamos que $Q$ está en el exterior de uno de los ángulos de $\mathscr{P}$ (de los que tienen su vértice en uno de los extremos de un lado que contenga a $R$, o de $\angle P_2$, respectivamente); contrario a lo supuesto. Así, por (S3), $P_2$-$Q$-$R$
($\Leftarrow$) Supongamos que, para cualquier vértice $P_j$ de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{P_jQ}$ corta a $\mathscr{P}$ en un punto $R$ tal que $P_j$-$Q$-$R$. Por las proposiciones 2.3 y 8.2.(a), $Q$ está en el interior de $\angle P_j$; de donde, por definición, $Q$ está en el interior de $\mathscr{P}$.

■

Es claro que todo polígono convexo determina una región poligonal: la formada por él mismo y su interior⟨4⟩; además, la frontera de esa región es el polígono mismo. Cuando hablemos del área de un polígono convexo nos estaremos refiriendo al área de la región poligonal determinada por él.

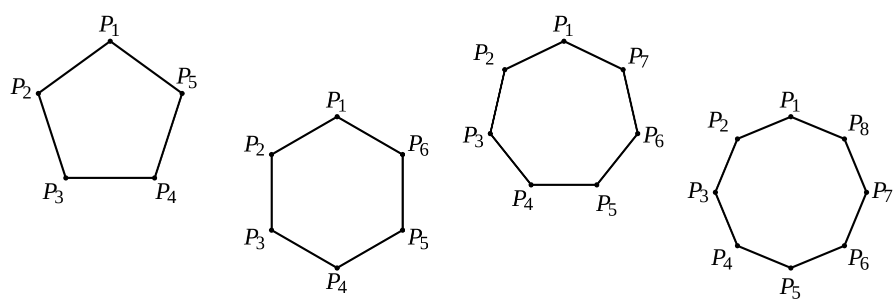
De inmediato presentamos las dos relaciones fundamentales entre figuras geométricas para el caso particular de los polígonos, las cuales son las generalizaciones naturales de los conceptos correspondientes entre triángulos: la que relaciona polígonos con la misma forma y tamaño (congruencia), y la que relaciona polígonos con la misma forma (semejanza).

**Definición 8.6 (Congruencia de polígonos)**
*Dos polígonos son* ***congruentes****, si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los lados y los ángulos correspondientes son congruentes.*
*Si los polígonos son $\mathscr{P} = P_1P_2\dots P_n$ y $\mathscr{Q} = Q_1Q_2\dots Q_n$, y la correspondencia fuera $P_1P_2\dots P_n \longleftrightarrow Q_1Q_2\dots Q_n$, escribiremos $P_1P_2\dots P_n \cong Q_1Q_2\dots Q_n$ (con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los polígonos son congruentes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos* ***una congruencia*** *entre esos dos polígonos; si la identificación de los vértices es irrelevante, el hecho de que ellos sean congruentes lo denotaremos por $\mathscr{P} \cong \mathscr{Q}$; y el hecho de que no sean congruentes por $\mathscr{P} \ncong \mathscr{Q}$.*

**Definición 8.7 (Semejanza de polígonos)**
*Dos polígonos son* ***semejantes****, si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices con la propiedad de que los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes.*
*Si los polígonos son* $\mathscr{P} = P_1P_2\ldots P_n$ *y* $\mathscr{Q} = Q_1Q_2\ldots Q_n$*, y la correspondencia fuera* $P_1P_2\ldots P_n \longleftrightarrow Q_1Q_2\ldots Q_n$*, escribiremos* $P_1P_2\ldots P_n \sim Q_1Q_2\ldots Q_n$ *(con los vértices en el mismo orden en que aparecen en la correspondencia) para indicar que los polígonos son semejantes de acuerdo a esa correspondencia, a la que llamaremos* ***una semejanza*** *entre esos dos polígonos; si la identificación de los vértices es irrelevante, el hecho de que ellos sean congruentes lo denotaremos por* $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$*; y el hecho de que no sean congruentes por* $\mathscr{P} \nsim \mathscr{Q}$*.*

A continuación establecemos una clasificación de los polígonos convexos.

**Definición 8.8 (Polígonos regulares)**
*Un* ***polígono regular*** *es un polígono convexo equilátero y equiángulo.*




Sólo los triángulos equiláteros y los cuadrados son, entre los que hemos estudiado, polígonos regulares.

**(6)** *¿Podremos asegurar que existen n-ágonos regulares, para cualquier* $n \geqslant 5$*?*
**(7)** *¿Podremos asegurar que existen n-ágonos no regulares, para cualquier* $n \geqslant 5$*?*

**Observación 8.1** *Para los n-ágonos regulares, es claro que:*

**(a)** *cada uno de sus ángulos interiores mide* $\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$.
**(b)** *cada uno de sus ángulos externos mide* $\frac{360}{n}$.
**(c)** *el perímetro es* $n \cdot a$*, donde* $a$ *es la longitud de cualquiera de sus lados.*
**(d)** *dos de ellos son congruentes si, y sólo si, un lado de uno de ellos es congruente con un lado del otro.*
**(e)** *todos son semejantes entre sí.*

Por su sencillez, dejaremos al lector la prueba de la siguiente proposición.

**Proposición 8.4 (Centro, radio y apotema de un polígono regular)**
*Dado un polígono regular, se tiene que:*

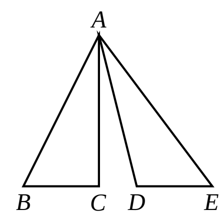
**(a)** *los bisectores de sus ángulos internos, y las mediatrices de sus lados, concurren en un punto.*
*Este punto es llamado el **centro** del polígono.*

**(b)** *su centro equidista de sus vértices.*
*Esta distancia común es llamada el **radio** del polígono.*

**(c)** *su centro equidista de sus lados.*
*Esta distancia común es llamada la **apotema** del polígono.*

## Problemas del Capítulo 8

**8.1** ¿Por qué la figura geométrica adjunta no es un polígono, a pesar de que ningún par de segmentos se cortan fuera de sus extremos, y ningún par de segmentos con extremo común son colineales?




**8.2** **(a)** ¿Cuántas diagonales parten de un vértice de un n-ágono?
**(b)** ¿Cuántas diagonales tiene un n-ágono?
**(c)** ¿Cuántos lados tiene un polígono con 65 diagonales?

**8.3** Si un polígono que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos rectos, ¿tendrá que ser un cuadrado?

**8.4** **(a)** En un n-ágono convexo, ¿cuántos triángulos se forman al tomar todas las diagonales desde un vértice fijo?
**(b)** Basándose en la respuesta anterior, ¿podría dar otra prueba del Teorema 8.1?

**8.5** **(a)** ¿Cuántos triángulos se forman al tomar todos los segmentos desde un punto interior de un n-ágono convexo hasta sus vértices?
**(b)** Basándose en la respuesta anterior, ¿podría dar otra prueba del Teorema 8.1?

**8.6** **(a)** ¿Habrá polígonos equiláteros no regulares?
**(b)** ¿Habrá polígonos equiángulos no regulares?
**(c)** ¿Habrá polígonos equiláteros y equiángulos no regulares?

**8.7** Pruebe la proposición 8.4.

**8.8** En un n-ágono regular, calcule en términos de la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos:
**(a)** su apotema. **(b)** su radio. **(c)** su área.

**8.9** Pruebe que la longitud de cualquier poligonal es mayor o igual que la distancia entre sus extremos.

**8.10** Determine el número de vértices de un polígono convexo, si la suma de las medidas de sus ángulos es:
**(a)** 900. **(b)** 1260. **(c)** 1980. **(d)** 4140.

**8.11** ¿Existirá algún polígono convexo cuyos ángulos sumen;

**(a)** 1720? **(b)** 2060?

**8.12** Determine la medida de cada uno de los ángulos de:

**(a)** un pentágono regular.
**(b)** de un hexágono regular.
**(c)** de un octógono regular.
**(d)** de un decágono regular.

**8.13** Determine el número de vértices de un polígono regular, si la medida de uno de sus ángulos es:

**(a)** 140. **(b)** 144. **(c)** 160.

**8.14** Determine el número de vértices de un polígono regular, si la medida de uno de sus ángulos externos es:

**(a)** 72. **(b)** 45. **(c)** 36. **(d)** 24.

**8.15** ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en el que cuatro de sus ángulos miden siete rectos?

**8.16** Pruebe que el área de un n-ágono regular es $\frac{1}{2} \cdot a \cdot p$, donde $a$ es la apotema y $p$ es el perímetro del polígono.

**8.17** Pruebe que el área de un hexágono regular de lado $s$ puede expresarse mediante la fórmula $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2$.

**8.18** Determine el área de un eneágono regular, sabiendo que la longitud de uno de sus lados es 8.

**8.19** ¿Cuál es la apotema de un polígono regular de área 225 y perímetro 60?

**8.20** Dados dos polígonos semejantes, pruebe que:

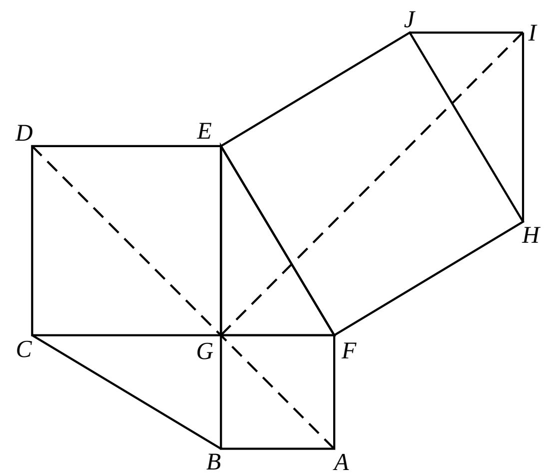
**(a)** si uno de ellos es convexo, entonces el otro también lo es.
**(b)** las diagonales correspondientes están en la misma razón que sus lados.
**(c)** si son convexos, la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre sus lados.

**8.21** Pruebe que, en un polígono convexo, todos los puntos de cualquier diagonal, excepto sus extremos, están en el interior del polígono.

**8.22 (Teorema de Pitágoras)**

(*Prueba realizada por Leonardo da Vinci*)

Al construir: sendos cuadrados $\square CDEG$, $\square ABGF$ y $\square JHFE$ sobre los lados del triángulo rectángulo $\triangle EGF$, con $\angle G$ recto; el triángulo $\triangle HIJ$, al tomar paralelas a $\overleftrightarrow{GF}$ por $J$, y a $\overleftrightarrow{GE}$ por $H$; y el segmento $\overline{BC}$; pruebe que $GE^2 + GF^2 = EF^2$, verificando que: los cuadriláteros $\square ABCD$, $\square AFED$, $\square GFHI$ y $\square IJEG$ son congruentes (usando, donde sea necesario, la proposición 5.10) y que, por tanto, los hexágonos $ABCDEF$ y $GEJIHF$ tienen la misma área.




**8.23 (Generalización del Teorema de Pitágoras)**

**(a)** Si se construyen sendos n-ágonos regulares sobre los lados de un triángulo rectángulo dado, pruebe que el área del construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos.

**(b)** Si se construyen sendos polígonos convexos semejantes sobre los lados de un triángulo rectángulo dado, pruebe que el área del construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos.

# Comentarios del Capítulo 8

⟨1⟩ En nuestro estudio, las palabras ***n-ágono*** y ***polígono*** son sinónimas, usando la primera de ellas cuando queremos hacer hincapié en el número de lados, o de vértices, que tiene la figura geométrica a la que nos referimos. Algunos autores prefieren usar la palabra ***n-gono*** en vez de ***n-ágono***: esto es cuestión de preferencias, pues la letra "a" añadida a esta última se usa sólo para evitar una posible cacofonía.
El sufijo *gono* que aparece en ambas palabras proviene del sustantivo femenino griego $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$, que significa literalmente *ángulo, rincón*; y que en el dialecto dórico es $\gamma\tilde{\omega}\nu o\varsigma$. Su etimología está ligada al sustantivo neutro griego $\gamma\acute{o}\nu\upsilon$, que significa *rodilla, nudo de un tallo*. El prefijo ***poli*** en la palabra ***polígono*** proviene del adverbio de cantidad griego $\pi o\lambda\acute{\upsilon}$, que significa *muchos*, haciendo abstracción de la cantidad exacta.
La palabra ***ángulo*** llega a nuestra lengua a través del sustantivo masculino latino ***angulus***, que a su vez proviene del sustantivo masculino griego $\alpha\gamma\kappa\acute{\omega}\nu$, que significa *curvatura*, *codo*, *articulación*, *coyontura*, *ángulo*, *rincón*. Es este término el que se prefirió conservar en las palabras ***triángulo*** y, en la Geometría llamada proyectiva, ***cuadrángulo***; en este último caso, el prefijo se conservo como en latín, ***cuadri***, del adjetivo numeral ***quattuor***, en vez del correspondiente adjetivo numeral griego $\tau\acute{\epsilon}\tau\tau\alpha\rho\alpha$, que significan *cuatro*. Por el otro lado, la palabra ***cuadrilátero*** conservo ambas raíces latinas, siendo la última el sustantivo masculino latino ***latus***, que significa *lado*; prefiriendo así la referencia a los lados, en vez de a los ángulos.

⟨2⟩ Esta manera de llamar a los triángulos sobrevive en la palabra **trigono***metría*.

⟨3⟩ En los ejercicios 8.4 y 8.5 encontraremos otras formas de probar este resultado.

⟨4⟩ Al tomar todas las diagonales desde uno de sus vértices obtenemos una triangulación de dicha región; al tomar todos los segmentos con un extremo en uno de los puntos interiores, y el otro en uno de los vértices, obtenemos otra triangulación de dicha región.

## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 8

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 8.1 al 8.8; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 8.1 al 8.6, y de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 8.7 al 8.8.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 8.9 al 8.23; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 8.9 al 8.19, y de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 8.20 al 8.23.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**8.4.(a):** pruebe, por inducción, que son $n-2$ triángulos.

**8.7.(a):** use la proposición 3.3, el ejercicio 3.27, el Teorema de la mediatriz y el Teorema del bisector.

**8.20:** triangule la región convenientemente, y use los ejercicios 6.1 y 7.13.
**8.22:** use el criterio LALAL de congruencia de cuadriláteros.
**8.23:** use el Teorema de Pitágoras y el ejercicio 8.20.

Aunque el estudio de los polígonos (y de los caminos poligonales) es un importante y fundamental tópico de estudio en la Geometría, porque permite generalizar los conceptos y las técnicas del estudio de los triángulos y cuadriláteros, su introducción se vuelve absolutamente indispensable cuando se intenta estudiar la longitud y el área de un círculo. Estas figuras geométricas dieron ocasión, a los griegos, de crear una técnica para el cálculo de longitudes de curvas en general, y del área limitada entre varias curvas; método que fue generalizado por las modernas técnicas del *Cálculo diferencial e integral*. Aunque el método fue utilizado con mayor eficacia por Arquímedes, su creador fue el matemático griego, y miembro de la Academia, Eudoxo.

***Eudoxo*** (408-355 a.C.), nacido en Cnido (actualmente Turquía), es catalogado como astrónomo y matemático. Fue discípulo del filósofo Arquitas y estudió con Platón durante un tiempo. Hijo de Esquines, aprendió matemáticas y medicina en una escuela que rivalizó durante un tiempo con la de Hipócrates de Cos. Impresionado por su habilidad, un bienhechor médico le pagó su viaje a Atenas para que pudiera estudiar en la Academia de Platón. Estuvo dieciséis meses en Egipto durante el reinado de Nectanebo I (380-363 a.C.). En Heliópolis, ahora un suburbio de El Cairo, aprendió la sabiduría sacerdotal, que incluía la astronomía; allí escribió el *Oktaeteris*, su primer gran trabajo, que trataba de un calendario basado en un ciclo de ocho años, producto quizás del estudio de los ciclos de Venus. Ganándose la vida como profesor, viajó por la región del Mar de Mármara antes de volver a Atenas, donde fue respetado a lo largo de toda Grecia como legislador. Los pocos hechos que involucran su vida se derivan de los escritos de Diógenes Laercio, en el siglo III d.C.

Su fama de astrónomo lo sitúa como el expositor de la primera explicación sistemática de los movimientos del Sol, la Luna y los planetas, mediante un modelo del Sistema Solar basado en una complicada combinación de veintisiete esferas que giraban, unas respecto a las otras. Su modelo tuvo un relativo éxito en la predicción de estos movimientos. También se le atribuye generalmente el descubrimiento de que el año solar tiene 6 horas más de los 365 días.

Como matemático tiene la fama de haber realizado importantes aportes en el campo de la Geometría, que fueron posteriormente incluidos en los *Elementos* de Euclides. Fue el creador, según Proclo, de la teoría de las proporciones, tal como aparecen en el Libro V de los *Elementos*; con la cual probó que los números irracionales se podían aproximar por números racionales tanto como se quisiera. Y, según Arquímedes, fue el creador de una técnica para demostrar proposiciones con respecto a las áreas y volúmenes de figuras geométricas: el ***método de exhaución***[1]. El término "método de exhaución" no fue usado por los griegos antiguos, sino más bien es del todo moderno: fue acuñado en Europa después del Renacimiento y se aplicó a los rigurosos procedimientos griegos para obtener fórmulas de área. Su exposición está desarrollada totalmente en el Libro XII de los *Elementos*.

Se basa este método en la propiedad de que una cantidad dada puede hacerse más pequeña que otra cantidad dada, partiéndola consecutivamente en dos (un número finito de veces); propiedad que luego tomó el nombre de "propiedad arquimediana del orden de los números reales". Eudoxo demostró, usando esta propiedad, que "agotando" el área de un círculo con aproximaciones poligonales sucesivas, el área del círculo era proporcional al cuadrado de su diámetro. La técnica consiste en inscribir polígonos regulares con un número de lados creciente (de los cuales es fácil calcular el área) dentro de un círculo, para encontrar el área de éste.

Porque puede usarse para computar las áreas y volúmenes limitados por curvas y superficies, el método puede ser considerado como un precursor de Cálculo Diferencial e Integral, aunque no usara la noción de límite ni argumentos sobre cantidades infinitesimales.

Según Arquímedes, Eudoxo usó este método para demostrar que los volúmenes de las pirámides y los conos son un tercio del volumen de los prismas y los cilindros, respectivamente, con las mismas bases y alturas; cosa que muy probablemente ya había descubierto Demócrito.

En el siguiente capítulo ilustraremos el uso del método de exhaución para el cálculo de la longitud y del área de un círculo y de un sector circular.

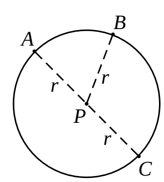
[1]La palabra proviene del verbo latino *exhaurio*, que significa *agotar*. Quizás la palabra "exhaución" no es correcta en español, siendo mejor la palabra "agotamiento", pero se ha vuelto usual en el ámbito de las Matemáticas.

# Capítulo 9

# Círculos

Nos proponemos ahora estudiar la figura geométrica que los griegos calificaron como *la más perfecta de las figuras geométricas planas*; comenzaremos, como es natural, estableciendo su definición.

**Definición 9.1 (Círculo o circunferencia)**
*Un **círculo** (o una **circunferencia**[1]) es el conjunto de puntos que están a una distancia positiva prefijada, de un punto prefijado.*
*De un círculo llamaremos: al punto, **el centro**; al número real positivo, **el radio**; y, al doble del radio, **el diámetro**.*




**Observación 9.1**

**(a)** *Con centro en cada punto del Plano existen, al menos, tantos círculos como números reales positivos.*
*(Por cada número real positivo se puede construir uno con centro en un punto, usando el Postulado del transportador (Construcción de ángulos) y el Teorema de la localización de puntos.)*

**(b)** *Los círculos son figuras geométricas; en verdad, tienen un número indefinido de puntos.*
*(Es consecuencia de la construcción anterior.)*

**(c)** *El centro de un círculo no está en el círculo.*
*(Por el hecho de que su radio es un número positivo.)*

Si bien el estudio de los círculos no rompe, en su esencia, con lo que hemos desarrollado hasta ahora de la Geometría, en algunos aspectos contrasta con el resto, ya que, como veremos a continuación, es la primera de las figuras geométricas planas que estudiaremos, no compuesta por trozos de rectas.

**Proposición 9.1** *Ningún círculo tiene tres puntos colineales y distintos.*

**Prueba** Supongamos que $A$, $B$ y $C$ son tres puntos colineales y distintos de un círculo. Por (S3) podemos suponer, sin perder generalidad, que $A$-$B$-$C$. Si $P$ es centro del círculo tendremos, por la observación 9.1.(c) y el ejercicio 3.10, que $PB < PA = PC$; mientras que, por la definición de círculo, $PB = PA = PC$. Por tanto, no puede haber tres puntos colineales y distintos en un círculo.

$\blacksquare$

Ahora la pregunta de rutina: ***¿cuántos centros y cuántos radios tiene un círculo?*** El siguiente resultado nos da garantía de lo que es la respuesta espontánea a esta interrogante.

**Proposición 9.2 (Igualdad de círculos)**
*Dos círculos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo centro y el mismo radio.*

**Prueba** Consideremos dos círculos $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Llamemos $A$ y $B$ a sus respectivos centros, y $r$ y $s$ a sus respectivos radios.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C} = \mathscr{D}$. Si acaso $A \neq B$, consideramos, por el Postulado de la recta, la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Tomemos, por el Teorema de la localización de puntos, un punto $P$ en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = r$, y un punto $Q$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ tal que $AQ = r$. Por la definición de rayos opuestos y el hecho de que $r > 0$, tendremos que $P$-$A$-$Q$. Además, por la definición de círculo, $P$ y $Q$ están en $\mathscr{C}$. Como, por hipótesis, $P$ está en $\mathscr{D}$ y, por la observación 9.1.(c), $P \neq A$, $P \neq B$, tendremos, por la definición de rayo, que: **(i)** $A$-$P$-$B$, en cuyo caso $Q$ no puede estar en $\mathscr{D}$, pues $QB = QP + PB = QA + AP + PB = 2 \cdot r + s > s$; o **(ii)** $A$-$B$-$P$, en cuyo caso $Q$ tampoco puede estar en $\mathscr{D}$, pues $QB = QA + AB = PA + AB = PB + 2AB = s + 2 \cdot AB > s$; contrario al hecho de que $\mathscr{C} = \mathscr{D}$. Por tanto, $A = B$; de donde, al tomar cualquier punto en uno de los círculos, tendremos que $r = s$.
($\Leftarrow$) Es claro, por definición, que, si $A = B$ y $r = s$, entonces $\mathscr{C} = \mathscr{D}$.

$\blacksquare$

Si denotamos con los símbolos $P$ y $r$ al centro y el radio de un círculo, respectivamente, denotaremos al círculo por $\mathscr{C}_{P,r}$: sin embargo, cuando el radio no sea relevante en la discusión, lo denotaremos por $\mathscr{C}_P$; y, si el centro tampoco lo es, lo denotaremos simplemente por $\mathscr{C}$.

**(1)** *¿Cuándo una figura geométrica deja de ser un círculo?*
**(2)** *¿Es convexo un círculo?*

Por el Postulado de la recta tenemos que, dos puntos distintos *determinan* una recta. A continuación establecemos el resultado análogo para los círculos.

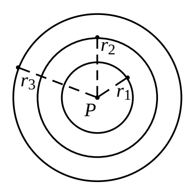
**Proposición 9.3** *Para cada tres puntos no colineales, existe exactamente un círculo que los contiene.*

**Prueba** Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos no colineales. Por el ejercicio 4.25, las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ concurren en un punto $P$ que equidista de $A$, $B$ y $C$. Llamando $r$ a dicha distancia común, tendremos que $\mathscr{C}_{P,r}$ es un círculo que pasa por $A$, $B$ y $C$.
Por otro lado, si $\mathscr{C}_{Q,s}$ es un círculo que contiene a $A$, $B$ y $C$ tendremos, por el Teorema de la mediatriz, que $Q$ está en las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; de donde $P = Q$. Como $r = PA = QA = s$ tendremos, por la proposición 9.2, que $\mathscr{C}_{Q,s} = \mathscr{C}_{P,r}$.

■

Otra manera de decir esto mismo es: *por cada terna de puntos no colineales pasa un único círculo, tres puntos no colineales* **determinan** *un círculo*, o, *un círculo queda determinado por tres de sus puntos*.

Ahora estableceremos un par de clasificaciones genéricas de los círculos, basadas en la igualdad de uno de sus dos elementos esenciales.




**Definición 9.2 (Círculos concéntricos)**
*Dos círculos son* ***concéntricos****, si tienen el mismo centro.*

**Definición 9.3 (Círculos congruentes)**[⟨2⟩]
*Dos círculos son* ***congruentes****, si tienen el mismo radio.*

**Observación 9.2**

**(a)** *Dos círculos distintos y concéntricos no se cortan; del que tiene el radio más pequeño diremos que es* ***el círculo menor****, y del otro que es* ***el círculo mayor****.*
*(Es consecuencia de la proposición 9.2.)*

**(b)** *Si dos círculos son iguales, entonces son congruentes.*
*(Es consecuencia de la proposición 9.2.)*

**(3)** *¿Será la relación "**es concéntrico con**" una relación de equivalencia en el conjunto de todos los círculos?*

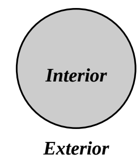
**(4)** *¿Será la relación "**es congruente con**" una relación de equivalencia en el conjunto de todos los círculos?*

De inmediato definimos dos conjuntos especiales asociados a un círculo.

**Definición 9.4 (Interior y exterior de un círculo)**

**(a)** *El **interior** de un círculo es el conjunto de puntos cuya distancia a su centro es menor que su radio.*

**(b)** *El **exterior** de un círculo es el conjunto de puntos cuya distancia a su centro es mayor que su radio.*




Si un punto está el interior de un círculo diremos, para abreviar, que el punto está ***dentro*** del círculo; y, si está en el exterior, que está ***fuera*** del círculo.

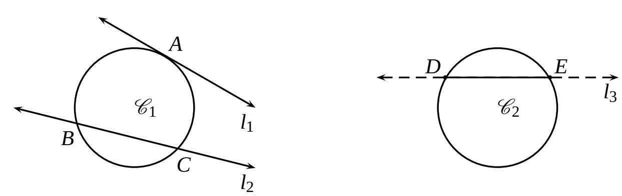
Estudiaremos ahora las **posiciones relativas de una recta** (o partes de ella) **y un círculo**.

Comenzamos observando que, por la proposición 9.1, si una recta y un círculo se cortan, entonces se cortan en exactamente un punto, o en exactamente dos puntos. Por comodidad clasificaremos las parejas formadas por una recta y un círculo que se encuentren en cada una de estas dos situaciones.

**Definición 9.5 (Tangente y secante)**

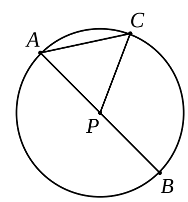
**(a)** *Una recta y un círculo son **tangentes**, si se cortan en exactamente un punto.*
*Llamaremos, al punto de corte entre un círculo y una recta que son tangentes, **el punto de tangencia**, o **el punto de contacto**, entre ellos; a veces diremos que la recta y el círculo **son tangentes en el punto de contacto**, o que dicha recta es **una tangente** al círculo.*
*De manera análoga, un **rayo**, o un **segmento**, es **tangente a** un círculo, si corta al círculo, y está sobre una tangente a éste.*

**(b)** *Una recta y un círculo son **secantes**, si se cortan en exactamente dos puntos.*
*A veces diremos que dicha recta y el círculo **son secantes en los dos puntos de corte**, o que dicha recta es **una secante** al círculo.*
*De manera análoga, un **rayo**, o un **segmento**, es **secante a** un círculo, si corta al círculo en exactamente dos puntos.*




En la figura, la recta $l_1$ es tangente al círculo $\mathscr{C}_1$ en el punto $A$, y la recta $l_2$ es secante al círculo $\mathscr{C}_1$ en los puntos $B$ y $C$.

**Definición 9.6 (Radio, cuerda y diámetro)**




**(a)** *Un **radio** de un círculo es un segmento con un extremo en su centro y el otro sobre el círculo.*
*Llamaremos, al extremo de un radio que está sobre el círculo, **el extremo exterior** de ese radio.*

**(b)** *Una **cuerda** de un círculo es un segmento cuyos extremos están sobre el círculo.*

**(c)** *Un **diámetro** de un círculo es una cuerda que contiene su centro.*

*Dada una cuerda de un círculo llamaremos, a la recta determinada por sus extremos, **la secante correspondiente a**, o **determinada por**, dicha cuerda; y, dada una secante a un círculo llamaremos, al segmento que tiene como extremos los dos puntos de corte de la secante y el círculo, **la cuerda correspondiente a**, o **determinada por**, dicha secante.*

En el círculo $\mathscr{C}_P$ de la figura: $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ son radios con extremos exteriores $A$, $B$ y $C$, respectivamente; $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas; $\overline{AB}$ es un diámetro.

En la figura que acompaña a la definición 9.5, la cuerda $\overline{DE}$ determina la secante $l_3$ al círculo $\mathscr{C}_2$ o, lo que es lo mismo, la secante $l_3$ determina la cuerda $\overline{DE}$ de $\mathscr{C}_2$.

**Observación 9.3**

**(a)** *Hemos usado las palabras radio y diámetro en dos sentidos: para designar un segmento y un número. Por lo general el contexto bastará para aclarar a cuál de los dos significados nos referimos: cuando hablemos de **el** radio, o de **el** diámetro, nos estaremos refiriendo a los números de la definición de círculo; y cuando hablemos de **un** radio, o de **un** diámetro, nos estaremos refiriendo a los segmentos de la definición 9.6.*

**(b)** *El centro de un círculo está dentro del círculo.*

**(c)** *Todos los puntos de un radio de un círculo, excepto el extremo exterior, están dentro del círculo.*

**(d)** *El centro de un círculo es el punto medio de todos sus diámetros.*
*(Es consecuencia de la definición de diámetro, la observación 9.1.(c), y la definición de círculo.)*

**(e)** *La longitud de cada diámetro de un círculo es igual al diámetro del círculo; así, todos sus diámetros son congruentes.*
*(Es consecuencia de la parte anterior.)*

**(f)** *Cada punto de un círculo es extremo de exactamente uno de sus diámetros.*
*(Si A es un punto de un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, tomamos el punto $A'$, en el rayo opuesto*

*a $\overrightarrow{PA}$, tal que $PA' = PA = r$; de donde $A'$ está en círculo. Como $A$-$P$-$A'$ tendremos que $\overline{AA'}$ es un diámetro con un extremo en $A$. Ahora, si $\overline{AB}$ es un diámetro tendremos, por la parte (d) de esta observación, que $A$-$P$-$B$; de donde tanto $B$ como $A'$ están en $\overrightarrow{AP}$. Como, por la parte anterior, $AB = AA'$, tendremos, por (CS4), que $B = A'$.)*

**(g)** *La mediatriz de cualquier cuerda de un círculo pasa por su centro.*
*(Gracias al Teorema de la mediatriz y a la definición de círculo.)*

**(h)** *Una cuerda de un círculo, que no es diámetro, y un segmento (un rayo o una recta) que pasa por su centro son perpendiculares si, y sólo si, el punto de corte es el punto medio de la cuerda; y esto sucede si, y sólo si, el segmento (el rayo o la recta) está contenido en la mediatriz de la cuerda.*
*(Es consecuencia de la parte anterior, la proposición 3.4 y el corolario 3.10.1.)*

**(i)** *La distancia desde el centro de un círculo hasta una de sus cuerdas es la distancia hasta su punto medio; así, todos sus diámetros equidistan de su centro.*
*(Es consecuencia de la parte anterior.)*

**(j)** *Los puntos interiores de una cuerda de un círculo están dentro del círculo.*
*(Si $\overline{AB}$ es una cuerda del círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, y $C$ es un punto tal que $A$-$C$-$B$ tendremos, por la observación 9.1.(c) y el ejercicio 3.10, en caso de que $\overline{AB}$ no es un diámetro, o por la parte (d) de esta observación, en caso de que $\overline{AB}$ es un diámetro, que $PC < PA = PB = r$; con lo que $C$ está dentro del círculo.)*

**(k)** *Los únicos puntos de una secante a un círculo, que están dentro del círculo, son los puntos interiores de la cuerda que determina.*
*(Consideremos una recta $l$ secante al círculo $\mathscr{C}_{P,r}$ en los puntos $A$ y $B$, y $C$ un punto de $l$ que está dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$, es decir, tal que $PC < r$. Por la definición de círculo, $C \neq A$ y $C \neq B$. Si acaso $A$-$B$-$C$ o $C$-$A$-$B$ tendremos, por la observación 9.1.(c) y el ejercicio 3.10, en caso de que $\overline{AB}$ no es un diámetro, o por la parte (d) de esta observación, en caso de que $\overline{AB}$ es un diámetro, que $r < PC$; contrario a lo supuesto. Así, por (S3), $A$-$C$-$B$; con lo que $C$ es un punto interior de $\overline{AB}$, la cuerda determinada por $l$.)*

**(l)** *El interior de un círculo es convexo.*
*(Consideremos dos puntos $A$ y $B$ distintos dentro del círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, y $C$ un punto tal que $A$-$C$-$B$. Así tendremos, por el ejercicio 3.10, en caso de que $P$ no está en $\overline{AB}$, o por la definición de Interposición, en caso de que $P$ está en $\overline{AB}$, que $PC < PA < r$ o $PC < PB < r$; con lo que $C$ está dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$. Por tanto, el interior de $\mathscr{C}_{P,r}$ es convexo.)*

**(m)** *Dados un rayo $\overrightarrow{AB}$ tal que $A$ está dentro del círculo $\mathscr{C}_{P,r}$ y $B$ está sobre $\mathscr{C}_{P,r}$, y un punto $C$ de $\overrightarrow{AB}$, se tiene que $C$ está dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$ si, y sólo si, $C = A$ o $A$-$C$-$B$.*
*(En cualquiera de las dos implicaciones, $C \neq B$. Si $A = P$, tendremos que*

*$PC < r = PB$ si, y sólo si, $C = P$ o $P$-$C$-$B$; y, si $A \neq P$, tendremos, por el ejercicio 3.10, que $A$-$B$-$C$ si, y sólo si, $PC > PB = r$, es decir, $C$ está fuera del círculo.)*

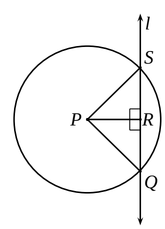
**(5)** *¿Cuál será la longitud de cada radio de un círculo?*
**(6)** *¿Será cada punto de un círculo extremo de exactamente uno de sus radios?*
**(7)** *¿Será cada punto de un círculo extremo de exactamente una de sus cuerdas?*
**(8)** *¿Será un radio de un círculo parte de dicho círculo?*
**(9)** *¿Será una cuerda de un círculo parte de dicho círculo?*
**(10)** *¿Serán los diámetros de un círculo sus cuerdas más largas?*
**(11)** *¿Podremos asegurar que el interior y el exterior de un círculo son no vacíos?*
**(12)** *¿Podremos asegurar que el interior y el exterior de un círculo son disjuntos?*
**(13)** *Dado un punto y un círculo cualquiera, ¿podremos asegurar que ese punto debe estar en el interior o en el exterior de un círculo?*
**(14)** *¿Será convexo el exterior de un círculo?*

De inmediato ofreceremos dos caracterizaciones de las tangentes, dos de las secantes, y algunas de sus consecuencias.

**Proposición 9.4 (Caracterización de las tangentes)**
*Una recta es una tangente a un círculo en uno de sus puntos si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *la recta es perpendicular al radio con extremo exterior en ese punto.*
**(b)** *la distancia del centro a la recta es igual al radio del círculo.*

**Prueba** Consideremos un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$ y una recta $l$.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $l$ es tangente a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $Q$, y tomemos $R$ el pie de la perpendicular desde $P$ a $l$. Si acaso $R \neq Q$, podemos tomar un punto $S$ en el rayo opuesto a $\overrightarrow{RQ}$ tal que $RQ = RS$. Por LAL, $\triangle PRS \cong \triangle PRQ$; de donde $PS = PQ$. Así, $S$ está en el círculo y en $l$; contrario al hecho de que $l$ es una tangente. Por tanto, $R = Q$ y, así, $l$ es perpendicular al radio $\overline{PQ}$.




($\Leftarrow$) Sea $Q$ en $\mathscr{C}_{P,r}$ y supongamos que $l$ es perpendicular al radio $\overline{PQ}$. Si $R$ es otro punto de $l$ tendremos, por el ejercicio 3.7, que $PR > PQ = r$; con lo que $R$ no está en $\mathscr{C}_{P,r}$. Por tanto, $l$ es tangente a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $Q$.
**(b)** Es claro, a partir de la definición de distancia entre un punto y una recta, y de lo probado en la parte anterior.

■

**Observación 9.4**

**(a)** *Por cada punto de un círculo pasa exactamente una de sus tangentes.*
*(Es consecuencia de las proposiciones 9.4 y 2.10.)*

**(b)** *Dos tangentes a un círculo son paralelas si, y sólo si, los puntos de contacto son extremos de un diámetro.*
*(Una recta por el centro es perpendicular a una si, y sólo si, lo es a la otra.)*

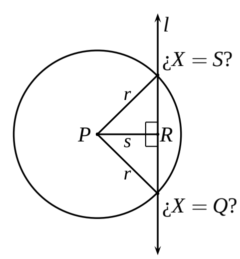
**(c)** *Todos los puntos de una tangente a un círculo, excepto el punto de contacto, están fuera del círculo.*
*(Es consecuencia de la proposición 9.4 y el ejercicio 3.7.)*

**(d)** *Si dos tangentes distintas de un círculo se cortan, entonces el punto de corte está fuera del círculo.*
*(Es consecuencia de la parte anterior.)*

**Proposición 9.5 (Caracterización de las secantes)**$^{\langle 3\rangle}$
*Una recta es secante a un círculo si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *tiene un punto de su interior.*
**(b)** *la distancia del centro a la recta es menor que el radio del círculo.*

**Prueba** Consideremos un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$ y una recta $l$.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $l$ es secante a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $Q$ y $S$. Por la observación 9.3.(j), cualquier punto entre $Q$ y $S$ está en el interior de $\mathscr{C}_{P,r}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $l$ tiene algún punto $Z$ del interior de $\mathscr{C}_{P,r}$. Así, por definición, $PZ < r$. Si $R$ es el pie de la perpendicular de $P$ a $l$, tendremos, por el ejercicio 3.7, que $PR \leqslant PZ < r$; es decir, $R$ está en el interior de $\mathscr{C}_{P,r}$. Por abreviar, llamemos $PR = s$; con lo que $s < r$.




**Afirmación** *$X$ es común a $l$ y $\mathscr{C}_{P,r}$ si, y sólo si, $RX = \sqrt{r^2 - s^2}$.*
Si $X$ es común a a $l$ y $\mathscr{C}_{P,r}$ tendremos, por el Teorema de Pitágoras en $\triangle PRX$, que $s^2 + RX^2 = r^2$; de donde $RX = \sqrt{r^2 - s^2}$. Recíprocamente, si $X$ está en $l$ y $RX = \sqrt{r^2 - s^2}$, entonces $PX^2 = s^2 + (\sqrt{r^2 - s^2})^2 = s^2 + r^2 - s^2 = r^2$; de donde, al ser ambos positivos, $PX = r$, es decir, $X$ es común a $l$ y $\mathscr{C}_{P,r}$.
Ahora, como $r^2 - s^2 > 0$, tenemos que existe su raíz cuadrada positiva $\sqrt{r^2 - s^2}$. Tomemos los dos puntos $Q$ y $S$ en $l$ tales que $Q$-$R$-$S$ y $RQ = RS = \sqrt{r^2 - s^2}$. Así, por el Teorema de Pitágoras, $PQ = PS = r$; de donde $l$ es secante a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $Q$ y $S$.
**(b)** Es claro, a partir de la definición de distancia entre un punto y una recta, y de lo probado en la parte anterior.

■

**Observación 9.5**

**(a)** *Todo rayo, con un punto dentro de un círculo, corta el círculo; además, lo corta en exactamente un punto, si el origen está en el interior, y lo corta en exactamente dos puntos, en caso contrario.*

*(Si $\overrightarrow{AB}$ tiene un punto, digamos $X$, dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$ tendremos, por la proposición 9.5, que $\overleftrightarrow{AB}$ corta a $\mathscr{C}_{P,r}$ en exactamente dos puntos, digamos $Q$ y $R$. Si acaso $X$-$Q$-$R$ o $X$-$R$-$Q$ tendremos, por el ejercicio 3.10 o la definición de Interposición, la contradicción de que $r = PQ \neq PR = r$. Así, por (S3), $Q$-$X$-$R$; con lo que, por el ejercicio 1.36, $Q$ o $R$ están en $\overrightarrow{AB}$. Si $A$ está dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$, $Q$ y $R$ no pueden estar a la vez en $\overrightarrow{AB}$, pues, de lo contrario tendremos, por el ejercicio 3.10 o la definición de Interposición, la contradicción de que, $r = PQ \neq PR = r$. Si $A$ no está dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$, ambos puntos deben estar en $\overrightarrow{AB}$, pues, de lo contrario tendremos, por el ejercicio 3.10 o la definición de Interposición, la contradicción de que, $r = PQ \neq PR = r$.)*

**(b)** *Dada una tangente a un círculo, se tiene que todos los puntos del círculo, excepto el punto de contacto, están del mismo lado de la tangente que su centro; además, los puntos interiores del círculo están en ese mismo lado.*

*(Consideremos una recta $l$ tangente a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $A$, un punto $B$ distinto de $A$ de $\mathscr{C}_{P,r}$ y un punto $C$ distinto de $P$ dentro de $\mathscr{C}_{P,r}$. Si acaso $P$ y $B$, o $P$ y $C$, estuvieran en lados opuestos de $l$ tendríamos, por el Postulado de separación del plano, que $l$ tendría un punto interior de $\overline{PB}$, o de $\overline{PC}$. Así, por la observación 9.3.(c), o (l), y la proposición 9.5, $l$ sería secante a $\mathscr{C}_{P,r}$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $P$, $B$ y $C$ están del mismo lado de $l$.)*

**(c)** *Todo círculo tiene puntos en ambos lados de cualquiera de sus secantes.*

*(Consideremos una recta $l$ secante a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $A$ y $B$, y llamemos $M$ y $m$, al punto medio y a la mediatriz de $\overline{AB}$, respectivamente. Como, por la observación 9.3.(j), $M$ está en el interior de $\mathscr{C}_{P,r}$, tendremos: por la proposición 9.5, que $m$ es secante a $\mathscr{C}_{P,r}$, digamos en los puntos $C$ y $D$; y, por la observación 9.3.(k), $C$-$M$-$D$. Así, $C$ y $D$ están en $\mathscr{C}_{P,r}$ y en lados opuestos de $l$.)*

**(d)** *Una recta no corta un círculo si, y sólo si, la distancia del centro a la recta es mayor que el radio del círculo.*

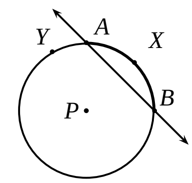
*(Es consecuencia de las proposiciones 9.4 y 9.5.)*

**(e)** *Un segmento, con un extremo dentro de un círculo y el otro fuera, corta al círculo en exactamente un punto interior del segmento.*

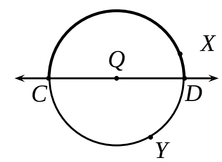
*(Es consecuencia de la parte (a) de esta observación y la observación 9.3.(m).)*

La observación 9.5.(c) nos permite introducir las partes de un círculo análogas a los segmentos en las rectas.

**Definición 9.7 (Arcos)**
*Un **arco** es un conjunto formado por:*




- ∗ *dos puntos distintos de un círculo, a los que llamaremos **extremos** del arco,* ***y***
- ∗ *todos los puntos de ese círculo que están en uno, y sólo uno, de los lados de la secante determinada por los dos puntos anteriores, a los que llamaremos **puntos interiores** del arco.*




*Por comodidad llamaremos: al arco que tiene los puntos interiores de uno de los lados de la secante, **el complemento** del que los tiene del otro lado; y a ambos, **arcos complementarios**.*

**Observación 9.6**

**(a)** *Los arcos son figuras geométricas.*
*(Es consecuencia de la observación 9.5.(c).)*
**(b)** *Dos puntos distintos de un círculo determinan dos arcos complementarios: uno a cada lado de la secante determinada por ellos.*
**(c)** *El segmento que une dos puntos distintos de un círculo, y el segmento cuyos extremos son puntos interiores de los arcos complementarios determinados por ellos, se cortan en un punto interior de ambos segmentos.*
*(Es consecuencia de la observación 9.3.(j) y (k).)*
**(d)** *La unión de dos arcos complementarios es el círculo que los contiene, y la intersección está compuesta por sus extremos.*

Como veremos a continuación, todo arco tiene exactamente dos extremos, y éstos no bastan para determinar al arco.

**Proposición 9.6 (Igualdad de arcos)**
*Dos arcos son iguales si, y sólo si:*
**(i)** *los puntos de ambos están sobre el mismo círculo;*
**(ii)** *tienen un punto interior en común;* ***y***
**(iii)** *tienen los mismos extremos.*

**Prueba** Consideremos dos arcos $\alpha$ y $\beta$; $A$ y $B$, y $C$ y $D$, puntos extremos de $\alpha$ y $\beta$, respectivamente; $X$ un punto interior de $\alpha$, y $Y$ un punto interior de $\beta$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha = \beta$. Como $A$, $B$ y $X$ son tres puntos distintos que están en el círculo que contiene los puntos de $\alpha$ y, en consecuencia, están en el círculo que contiene los puntos de $\beta$ tendremos, por las proposiciones 9.1 y 9.3, que los

puntos de ambos arcos están sobre un mismo círculo, digamos $\mathscr{C}_{P,r}$.
Llamemos $\mathscr{H}$ el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $X$, y $\mathscr{S}$ el lado de $\overleftrightarrow{CD}$ que contiene a $Y$. Por definición, todos los puntos interiores de $\alpha$ están en $\mathscr{H}$, y todos los puntos interiores de $\beta$ están en $\mathscr{S}$. Como $C$, $D$ y $Y$ están en $\beta$, tendremos que $C$, $D$ y $Y$ están en $\alpha$.
**Afirmación**: $Y$ está en $\mathscr{H}$.
Si acaso $Y$ no está en $\mathscr{H}$, tendríamos que $Y = A$ o $Y = B$. Supongamos, sin perder generalidad, que $Y = A$. Como $C$, $D$ y $Y$ son distintos entre sí, tendremos que $C$, o $D$, está en $\mathscr{H}$. Supongamos, sin perder generalidad, que $D$ está en $\mathscr{H}$. Tomemos, por (S4), un punto $Q$ tal que $C$-$Q$-$D$. Por el ejercicio 2.3, si $C = B$, o por la convexidad de $\mathscr{H}$, si $C$ está en $\mathscr{H}$, $Q$ está en $\mathscr{H}$; además, por la observación 9.3.(j), $Q$ está en el interior de $\mathscr{C}_{P,r}$. Por la observación 9.5.(a), $\overrightarrow{AQ}$ corta $\mathscr{C}_{P,r}$ en exactamente dos puntos. Como $A$ es uno de los puntos de corte de $\overrightarrow{AQ}$ y $\mathscr{C}_{P,r}$, llamemos $R$ al punto de corte de $\overrightarrow{AQ}$ y $\mathscr{C}_{P,r}$, tal que $R \neq A$. Por la proposición 2.3, $R$ es un punto interior de $\alpha$. Por la observación 9.3.(m), $Y$ y $R$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{CD}$. Así, $R$ no está en $\mathscr{S}$, y, como $R \neq C$ y $R \neq D$, tendremos que $R$ no está en $\beta$; contrario al hecho de que $\alpha = \beta$. Por tanto, $Y$ está en $\mathscr{H}$.
Así, $Y$ es un punto interior común de $\alpha$ y de $\beta$.
Intercambiando el papel de $Y$ por el de cualquier punto interior de $\beta$ se prueba, con los mismos argumentos, que todos ellos están en $\mathscr{H}$. Como $A$ y $B$ están en $\alpha$, tendremos que $A$ y $B$ están en $\beta$. Pero, como $A$ y $B$ no están en $\mathscr{H}$, y $A \neq B$, tendremos que $A = C$ y $B = D$, o $A = D$ y $B = C$; con lo que $\alpha$ y $\beta$ tienen los mismos extremos.
($\Leftarrow$) Es claro a partir de la definición de arco.

■

Si denotamos con los símbolos $A$ y $B$ los extremos de un arco, y con $X$ uno de sus puntos interiores, denotaremos al arco por $\widehat{AXB}$; sin embargo, cuando el punto interior del arco no sea relevante en la discusión, lo denotaremos por $\widehat{AB}$. Note que el punto $X$ en $\widehat{AXB}$ identifica el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que debemos considerar; pero, algunas veces identificaremos ese lado como el que excluye un punto que está en el complemento, *v. g.*: en la figura que acompaña a la definición de arcos, $\widehat{AXB}$ es el arco que no contiene a $Y$, y $\widehat{CXD}$ es el arco que no contiene a $Y$.

Cuando hablemos de un arco $\widehat{AXB}$, asumiremos que $A$, $B$ y $X$ son tres puntos distintos de un mismo círculo.

Clasificaremos ahora los arcos de un círculo.

**Definición 9.8 (Arcos semicirculares, menores y mayores)**

**(a)** *Un **arco semicircular**, o **semicírculo**, es un arco para el que la secante determinada por sus extremos, al círculo del que es parte, contiene su centro.*
**(b)** *Un **arco menor** es un arco para el que la secante determinada por sus extremos, al círculo del que es parte, no pasa por su centro, y sus puntos interiores se encuentran del lado de esa recta que no contiene el centro.*
**(c)** *Un **arco mayor** es un arco para el que la secante determinada por sus extremos, al círculo del que es parte, no pasa por su centro, y sus puntos interiores se encuentran del lado de esa recta que contiene el centro.*

**Observación 9.7** *A partir de sus definiciones se puede verificar que:*

**(a)** *el complemento de un semicírculo es un semicírculo.*
**(b)** *el complemento de un arco menor es un arco mayor.*
**(c)** *el complemento de un arco mayor es un arco menor.*

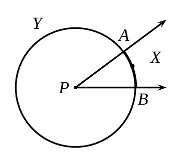
Ahora vamos a estudiar las **posiciones relativas de un ángulo y un círculo**.

Como primer caso, y quizás el más importante, tenemos aquél en el que el vértice del ángulo coincide con el centro del círculo. Este tipo de ángulos nos permitirá, a través de la *caracterización* de los arcos no semicirculares expuesta en la proposición 9.7, asignar un número real positivo a cada arco, tal como hicimos con los segmentos de una recta, y al que llamaremos su *medida angular*.

**Definición 9.9 (Ángulo central)**
*Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo.*

Note que, cualesquiera dos puntos distintos de un círculo, que no sean extremos de un diámetro, *determinan* un ángulo central de dicho círculo: el que tiene a dichos puntos sobre sus lados; y, gracias a la observación 9.5.(a), todo ángulo central de un círculo corta al círculo en dos puntos distintos, que no son extremos de un diámetro.

**Proposición 9.7** *Dado un arco no semicircular, se tiene que:*




**(a)** *es un arco menor si, y sólo si, cualquiera de sus puntos interiores está en el interior del ángulo central determinado por sus extremos.*
**(b)** *es un arco mayor si, y sólo si, cualquiera de sus puntos interiores está en el exterior del ángulo central determinado por sus extremos.*

**Prueba** Consideremos un arco no semicircular $\widehat{AXB}$, y llamemos $\mathscr{C}_P$ el círculo del que es parte. Por definición, $P$ no está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
**(a)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\widehat{AXB}$ es un arco menor. Por definición, $P$ y $X$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Por el Postulado de separación del plano, $\overleftrightarrow{AB}$ corta $\overline{PX}$ en un punto $R$ tal que $P$-$R$-$X$. Por las partes (c) y (k) de la observación 9.3, $A$-$R$-$B$. Así, por el Teorema de la barra transversal, $X$ está en el interior de $\angle APB$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $X$ está en el interior de $\angle APB$. Por el Teorema de la barra transversal, $\overrightarrow{PX}$ corta $\overline{AB}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$B$. Por las partes (k) y (m) de la observación 9.3, $P$-$R$-$X$; con lo que, por el Postulado de separación del plano, $P$ y $X$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Así, por definición, $\widehat{AXB}$ es un arco menor.
**(b)** Es claro a partir de lo probado en la parte anterior.

■

**Definición 9.10 (Medida angular de un arco)**⟨4⟩
***La medida angular*** *de un arco $\widehat{AB}$, que denotaremos por $\mu\widehat{AB}$, está definida por:*

$$\mu\widehat{AB} := \begin{cases} 180, & \text{si } \widehat{AB} \text{ es un semicírculo;} \\ m\angle APB, & \text{si } \widehat{AB} \text{ es un arco menor;} \\ 360 - m\angle APB, & \text{si } \widehat{AB} \text{ es un arco mayor.} \end{cases}$$

*Algunas veces diremos, por abreviar,* ***la medida*** *de un arco, sin mencionar el calificativo* ***angular****.*

**Observación 9.8**

**(a)** *$\widehat{AXB}$ es un arco menor si, y sólo si, $\overline{PX}$ corta $\overline{AB}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$B$ y $P$-$R$-$X$.*
*(Es parte de la prueba de la proposición 9.7.)*

**(b)** *Con las técnicas desarrolladas en la prueba de la proposición 9.7 se puede verificar que los arcos tienen un número indefinido de puntos: tantos como la cuerda determinada por sus extremos (ver el ejercicio 9.17).*

**(c)** *La suma de las medidas de dos arcos complementarios es 360.*

**(d)** *Arcos complementarios, de arcos que tienen la misma medida, miden lo mismo.*
*(Es consecuencia de la parte anterior.)*

**(e)** *Si $\widehat{AB}$ es un arco menor, entonces $0 < \mu\widehat{AB} < 180$; y si es un arco mayor, entonces $180 < \mu\widehat{AB} < 360$.*

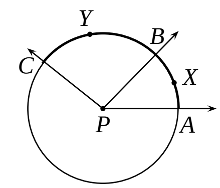
**(f)** *Si un arco mide 180, entonces es un semicírculo; si mide menos de 180, es un arco menor; y, si mide más de 180, es un arco mayor.*

De inmediato veremos que la medida angular de los arcos es aditiva, en el mismo sentido en que lo es la medida de los ángulos. Para expresar sintéticamente ese resultado, introducimos la siguiente definición (análoga a la definición de ángulos adyacentes).

**Definición 9.11 (Arcos adyacentes o consecutivos)**
*Un arco* ***es adyacente a*** *otro arco, si*

**(a)** *son parte del mismo círculo;*

**(b)** *tienen en común exactamente un punto, que es extremo de ambos.*




*De dos arcos, de los que uno es adyacente al otro, diremos que son* ***arcos adyacentes*** *o* ***consecutivos****; del arco que tiene como extremos los extremos no comunes, y al extremo común como punto interior, diremos que es* ***el arco abarcante****.*

En la figura, los arcos $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ de $\mathscr{C}_P$ son consecutivos; el arco $\widehat{ABC}$ es el arco abarcante.

**Observación 9.9**

**(a)** *Si $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ son arcos adyacentes tendremos, por definición, que:*

- **(i)** *$\widehat{ABC}$ es el arco abarcante;*
- **(ii)** *$X$ y $C$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$;* ***y***
- **(iii)** *$Y$ y $A$ en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$.*

**(b)** *Todo arco tiene un número indefinido de arcos adyacentes a él: dos por cada punto que no está en él.*

**(c)** *Si $B$ es un punto interior del arco $\widehat{AC}$, llamaremos a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$, cuyos puntos interiores están entre los de $\widehat{AC}$, los* ***arcos determinados por*** *$B$* ***en*** *$\widehat{AC}$; por definición, $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ son arcos adyacentes con arco abarcante $\widehat{AC}$.*

La prueba de la siguiente proposición estriba, fundamentalmente, en las técnicas de separación del plano desarrolladas en el Capítulo 2. Con el propósito de no recargar la exposición de este capítulo, por los muchos casos particulares que hay que analizar, desarrollaremos dicha prueba en el Apéndice B, al cual referimos al lector más exigente.

**Proposición 9.8 (Adición de arcos)**
*La suma de las medidas angulares de dos arcos adyacentes es la medida angular del arco abarcante.*

Note que, en los términos de la observación 9.9.(c), tendremos que: *si $B$ es un punto interior de $\widehat{AC}$, entonces $\mu\widehat{AC} = \mu\widehat{AB} + \mu\widehat{BC}$* (es decir, *la medida de un arco es igual a la suma de las medidas de los arcos determinados en dicho arco por cualquiera de sus puntos interiores*).

Después de medir los arcos resultan naturales las siguientes definiciones.

**Definición 9.12 (Congruencia de arcos)**⟨5⟩
*Dos **arcos son congruentes**, si:*

**(a)** *los círculos a los que pertenecen son congruentes;* ***y***
**(b)** *tienen la misma medida angular.*

*Si denotamos los arcos con los símbolos $\alpha$ y $\beta$, el hecho de que ellos sean congruentes lo denotaremos por $\alpha \cong \beta$; y el hecho de que no sean congruentes, por $\alpha \ncong \beta$.*

**Definición 9.13 (Punto medio de un arco)**
*Un punto es **punto medio** de un arco, si:*

**(a)** *es punto interior del arco, y*
**(b)** *los arcos determinados por el punto en dicho arco son congruentes.*

*Por punto medio diremos a veces **punto que biseca**; **bisecar un arco** significará contener su punto medio.*

**Definición 9.14 (Es más pequeño que)**
*El arco $\widehat{AB}$ **es más pequeño que** el arco $\widehat{CD}$, si:*

**(a)** *los círculos a los que pertenecen son congruentes;* ***y***
**(b)** $\mu\widehat{AB} < \mu\widehat{CD}$.

*En algunos casos diremos que el arco $\widehat{CD}$ **es más grande que** el arco $\widehat{AB}$.*

**Observación 9.10**

**(a)** *Todos los semicírculos de un círculo son congruentes.*
**(b)** *Si dos arcos son iguales, entonces son congruentes.*
**(c)** *Arcos complementarios, de arcos congruentes, son congruentes. (Es consecuencia de la observación 9.8.(d).)*
**(d)** *En círculos congruentes, los arcos menores son más pequeños que los semicírculos y estos, a su vez, son más pequeños que los arcos mayores.*

**(15)** *¿Será la relación "**es congruente a**" una relación de equivalencia en el conjunto de todos los arcos?*

Note que toda cuerda de un círculo, que no sea un diámetro, determina un ángulo central: el determinado por el centro y los extremos de la cuerda; y recíprocamente, gracias a la observación 9.5.(a), todo ángulo central de un círculo determina una cuerda que no es diámetro: aquella que tiene como extremos los puntos de corte de los lados del ángulo con el círculo. Por comodidad, llamaremos ***correspondientes*** a las cuerdas, que no son diámetros, y a los ángulos centrales que se determinan de esta manera.

Del mismo modo, toda cuerda de un círculo determina dos arcos: los que tienen como extremos los extremos de la cuerda; y recíprocamente, todo arco de un círculo determina una cuerda: la que tiene como extremos, los extremos del arco; además, esa cuerda es un diámetro si, y sólo si, esos dos arcos son semicírculos, y, en consecuencia, esa cuerda no es un diámetro si, y sólo si, uno de esos arcos es mayor y el otro menor. Por comodidad, llamaremos ***correspondientes*** a las cuerdas y a los arcos que se determinan de esta manera.

Hechas estas aclaratorias, presentamos los siguientes dos resultados que relacionan las cuerdas, los ángulos centrales y los arcos; como resulta de una aplicación sencilla de las técnicas desarrolladas en el Capítulo 3, dejaremos sus pruebas al lector (ver el ejercicio 9.1).

**Proposición 9.9** *En el mismo círculo, o en círculos congruentes, dos cuerdas (que no son diámetros) son congruentes si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *equidistan del centro.*
**(b)** *los ángulos centrales correspondientes son congruentes.*
**(c)** *los arcos menores correspondientes son congruentes.*
**(d)** *los arcos mayores correspondientes son congruentes.*

**Proposición 9.10** *Dadas dos cuerdas (que no son diámetros) no congruentes de un mismo círculo, o de círculos congruentes, se tiene que una de ellas es más corta que la otra si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *está más alejada del centro.*
**(b)** *el ángulo central correspondiente es más pequeño.*
**(c)** *el arco menor correspondiente es más pequeño.*
**(d)** *el arco mayor correspondiente es más grande.*

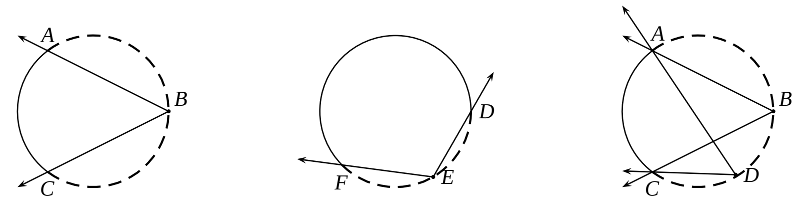
Como segundo caso en el estudio de las ***posiciones relativas de un ángulo y un círculo*** tenemos los ángulos cuyo vértice se encuentra sobre el círculo, y sus lados son secantes o tangentes a éste; para expresar sintéticamente el resultado que presentaremos respecto a éstos, introducimos el siguiente concepto.

**Definición 9.15 (Inscrito en)**

**(a)** *Un **ángulo** está **inscrito en** un **arco**, si:*

**(i)** *el vértice del ángulo es un punto interior del arco;* ***y***

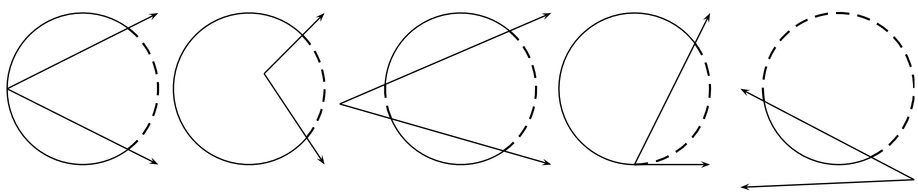
**(ii)** *los extremos del arco están en los lados del ángulo.*




**(b)** *Un **arco** está **inscrito en** un **ángulo**, si:*

**(i)** *cada lado del ángulo contiene al menos uno de los extremos del arco;* ***y***

**(ii)** *los puntos interiores del arco están en el interior del ángulo.*



**Observación 9.11**

**(a)** *Si un ángulo está inscrito en un arco, entonces el complemento de dicho arco está inscrito en el ángulo.*
*(Es consecuencia del Postulado de separación del plano y el Teorema de la barra transversal.)*

**(b)** *Si un ángulo inscribe un arco, su vértice puede estar sobre, dentro o fuera del círculo; puede incluso ser un extremo del arco. Además, como sucede en el tercero de los casos de la figura inmediata anterior, un ángulo puede inscribir dos arcos de un mismo círculo.*

**(c)** *Un ángulo que tiene su vértice en un círculo, y uno de sus lados es secante y el otro es tangente a éste, inscribe un arco que tiene uno de sus extremos en el vértice del ángulo y sus puntos interiores están en el interior de dicho ángulo.*

**(d)** *Un ángulo que tiene su vértice sobre un círculo, no puede tener sus dos lados tangentes al círculo.*
*(En caso contrario, los lados serían colineales; del todo contrario a la definición de ángulo.)*

En la primera figura de la definición 9.15, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ están inscritos en los arcos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEF}$, respectivamente, e inscriben a sus complementos $\widehat{AC}$ y $\widehat{DF}$ (los que no contienen a sus vértices). En la segunda figura, cada uno de los ángulos inscribe los arcos punteados de los círculos correspondientes, excepto el último que no inscribe ningún arco (puesto que falla la condición (i) de la definición). Note que, si $D$ es un punto interior del arco $\widehat{ABC}$, entonces el ángulo $\angle ADC$ está inscrito en el arco $\widehat{ABC}$ (ya que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$).

Por las mismas razones expuestas para la proposición 9.8, desarrollaremos la prueba de la siguiente proposición en el Apéndice B, al cual referimos al lector más exigente. Esta proposición tiene seis consecuencias inmediatas cuyas pruebas, por su sencillez, dejaremos al lector (ver el ejercicio 9.2).

**Proposición 9.11** *La medida de un ángulo que tiene su vértice en un círculo, y cuyos lados son secantes o tangentes a éste, es la mitad de la medida angular del arco que inscribe.*

**Corolario 9.11.1** *Dado un ángulo inscrito en un arco, se tiene que:*

**(a)** *el ángulo es recto si, y sólo si, el arco es un semicírculo.*⟨6⟩
**(b)** *el ángulo es agudo si, y sólo si, el arco es mayor.*
**(c)** *el ángulo es obtuso si, y sólo si, el arco es menor.*

**Corolario 9.11.2** *Los ángulos inscritos en arcos complementarios, o en arcos cuyas medidas suman 360, son suplementarios.*

**Corolario 9.11.3** *Todos los ángulos inscritos en el mismo arco, o en arcos con la misma medida, son congruentes.*

**Corolario 9.11.4** *Dos rectas paralelas, que intersectan un círculo, determinan un par de arcos congruentes sobre ese círculo.*

**Corolario 9.11.5** *Si dos tangentes a un círculo se cortan, entonces el punto de corte equidista de los puntos de tangencia.*

La última de las consecuencias inmediatas de la proposición 9.11 completa nuestro estudio de las ***posiciones relativas de un ángulo y un círculo***, al considerar los casos en los que el vértice del ángulo está dentro o fuera del círculo.

**Corolario 9.11.6**

**(a)** *La medida de un ángulo cuyo vértice está dentro de un círculo es igual a la semisuma de las medidas de los arcos inscritos en dicho ángulo, y en su opuesto por el vértice.*

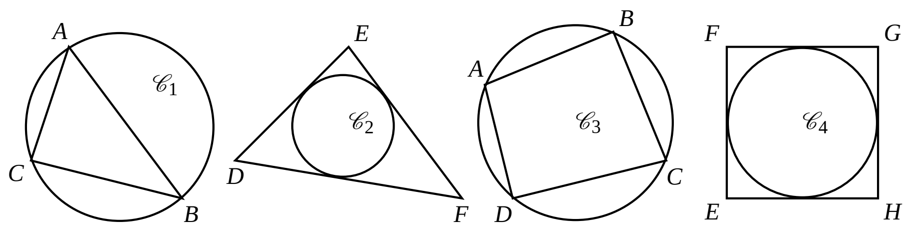
**(b)** *Si un ángulo tiene su vértice fuera de un círculo, y sus lados son secantes o tangentes a éste, entonces inscribe dos arcos no congruentes del círculo; además, la medida de ese ángulo es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos inscritos en dicho ángulo: el más grande menos el más pequeño.*

Ahora introducimos el estudio de las **posiciones relativas de un polígono y un círculo**.

**Definición 9.16 (Polígonos inscribibles, o cíclicos, y circunscribibles)**

**(a)** *Un polígono es **inscribible**, o **cíclico**, si existe algún círculo que contenga todos sus vértices.*
*Algunas veces diremos, de un polígono cíclico y de un círculo que contenga a sus vértices, que ese polígono **está inscrito en** ese círculo, o que ese círculo **circunscribe a** ese polígono.*

**(b)** *Un polígono es **circunscribible**, si existe algún círculo que sea tangente a todos sus lados.*
*Algunas veces diremos, de un polígono circunscribible y de un círculo que sea tangente a todos sus lados, que ese polígono **circunscribe a** ese círculo, o que ese círculo **está inscrito en** ese polígono.*




En la figura: el triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en el círculo $\mathscr{C}_1$; el círculo $\mathscr{C}_2$ está inscrito en el triángulo $\triangle DEF$; el cuadrilátero $\square ABCD$ está inscrito en el círculo $\mathscr{C}_3$; el círculo $\mathscr{C}_4$ está inscrito en el cuadrado $\square EFGH$.

**Observación 9.12**

**(a)** *Existe exactamente un círculo que contiene un vértice de un polígono, y sus dos vértices consecutivos.*
*(Es consecuencia de la proposición 9.3.)*

**(b)** *Existe exactamente un círculo que contiene los vértices de un polígono cíclico.*
*(Es consecuencia de la parte anterior.)*

*De un polígono cíclico llamaremos: al círculo que contiene los vértices,* ***el circuncírculo****; a su centro,* ***el circuncentro****; a su radio,* ***el circunradio****; y a su diámetro,* ***el circundiámetro****.*

**(c)** *Todo triángulo es un polígono cíclico.*
*(Es consecuencia de la proposición 9.3.)*

**(d)** *El circuncírculo de un polígono cíclico coincide con el del triángulo determinado por uno de sus vértices y sus dos vértices consecutivos.*

**(e)** *Los lados de un polígono cíclico son cuerdas de su circuncírculo; así, la recta que contiene uno de sus lados es secante de su circuncírculo.*

**(f)** *Todos los puntos de un polígono cíclico, excepto sus vértices, están dentro de su circuncírculo.*
*(Es consecuencia de la parte anterior y la observación 9.3.(j).)*

**(g)** *Todo polígono cíclico es un polígono convexo.*
*(Es virtud de la parte anterior, la observación 9.3.(k) y la proposición 8.2.(c).)*

**(h)** *El interior de un polígono cíclico está dentro de su circuncírculo.*
*(Tomemos un punto $Q$ en el interior de un polígono cíclico $\mathscr{P} = P_1P_2\dots P_n$, cuyos vértices están en el el círculo $\mathscr{C}_{\mathrm{P},r}$. Tomemos, por la proposición 8.3, el punto $R$ de $\mathscr{P}$ tal que $P_1$-$Q$-$R$. Si $P = Q$ o $P = R$, $Q$ estaría dentro de $\mathscr{C}_{\mathrm{P},r}$. Supongamos entonces que $P \neq Q$ y $P \neq R$. Si $P$ es colineal con $P_1$, $Q$ y $R$ tendremos, por (S5), que $Q$ es un punto interior de $\overline{PP_1}$ o de $\overline{PR}$; de donde, por la parte (e) de esta observación y el hecho de que los vértices de $\mathscr{P}$ están en $\mathscr{C}_{\mathrm{P},r}$, $Q$ está dentro de $\mathscr{C}_{\mathrm{P},r}$. Si $P$ no es colineal con $P_1$, $Q$ y $R$ tendremos, por el ejercicio 3.10, que $Q$ está dentro de $\mathscr{C}_{\mathrm{P},r}$.)*

**(i)** *Si un círculo está inscrito en un polígono, los puntos de tangencia son puntos interiores de los lados del polígono.*
*(Si fuera alguno de los vértices, tendríamos tres vértices del polígono colineales; del todo contrario a la definición de polígono.)*

**(j)** *Existe exactamente un círculo inscrito en un polígono circunscribible.*
*(Por el Teorema del bisector, el centro de ambos debe ser el punto de corte de los bisectores de dos ángulos consecutivos del polígono; y el radio de ambos debe ser la distancia común desde el centro a cualquiera de sus lados.)*
*De un polígono circunscribible llamaremos: al círculo que es tangente a sus lados,* ***el incírculo****; a su centro,* ***el incentro****; a su radio,* ***el inradio****; y a su diámetro,* ***el indiámetro****.*

**(k)** *Todo triángulo es un polígono circunscribible.*
*(Es virtud del ejercicio 3.14, la proposición 9.4, y el Teorema del bisector.)*

**(l)** *Todos los puntos de un polígono circunscribible, excepto los puntos de tangencia, están fuera de su incírculo.*
*(Es consecuencia de la parte anterior, la proposición 9.4 y el ejercicio 3.7.)*

**(m)** *Todo polígono circunscribible es un polígono convexo.*
*(Por la observación 9.5.(b), todos los puntos del círculo inscrito, excepto el punto de contacto, están en uno solo de los lados de la recta determinada por cualquiera de sus lados, digamos $\mathscr{H}$; con lo que, todos los puntos de contacto de ese círculo con cualquiera de los otros lados están en $\mathscr{H}$. Por la definición de conjunto convexo y/o el ejercicio 2.3, todos los vértices del polígono, excepto los que determinan dicha recta, están en $\mathscr{H}$.)*

**(n)** *El interior de un polígono circunscribible contiene al interior de su incírculo.*
*(Es consecuencia de la observación 9.5.(b).)*

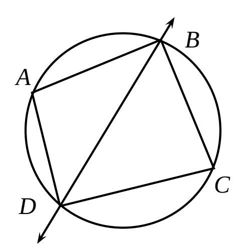
**(o)** *Todo polígono regular es un polígono cíclico.*
*(Gracias a la proposición 8.4, tomando el centro y el radio del polígono regular como centro y radio de un círculo, éste pasará por todos sus vértices).*

**(p)** *Todo polígono regular es un polígono circunscribible.*
*(Gracias a la proposición 8.4, tomando el centro y la apotema del polígono regular como centro y radio de un círculo, éste será tangente a todos sus lados).*

A diferencia de los triángulos, no todos los cuadriláteros son cíclicos, ni circunscribibles. A continuación ofrecemos una *caracterización* de los cuadriláteros cíclicos y algunas de sus propiedades; después del Teorema de los dos círculos (Teorema 9.1), daremos una caracterización de los cuadriláteros circunscribibles. El lector encontrará información adicional sobre las posiciones relativas de un polígono en general, y un círculo, entre los ejercicios de este capítulo.

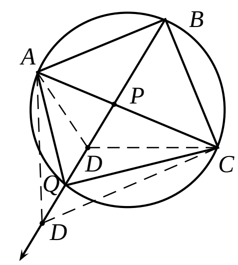
**Proposición 9.12** *(***Caracterización de los cuadriláteros cíclicos***)*
*Un cuadrilátero es cíclico si, y sólo si, los ángulos opuestos son suplementarios.*

**Prueba** Consideremos un cuadrilátero $\square ABCD$.




($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es cíclico, y llamemos $\mathscr{C}$ al círculo que contiene sus vértices. Por la observación 9.12.(g), $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo; con lo que, por la proposición 5.2, $A$ y $C$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BD}$. Así, $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$ son arcos complementarios; de donde, por el corolario 9.11.2, $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios. Del mismo modo se prueba, considerando la otra diagonal, que el otro par de ángulos opuestos también son suplementarios.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\angle A$ y $\angle C$, así como $\angle B$ y $\angle D$, son suplementarios. Por la proposición 5.2, $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo. Llamemos $P$ el punto de corte de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; de donde $B$-$P$-$D$ y $A$-$P$-$C$. Consideremos, por la observación 9.12.(k), el círculo $\mathscr{C}$ que pasa por $A$, $B$ y $C$. Llamemos, por la observación 9.5.(a), $Q$ el punto de corte de $\overrightarrow{BD}$ con $\mathscr{C}$, tal que $Q \neq B$. Por lo probado anteriormente, $\angle B$ y $\angle Q$ son suplementarios; de donde, por la proposición 2.7, $\angle D \cong \angle Q$.




Pero, si acaso $D$ no estuviera en $\mathscr{C}$ tendríamos, por los ejercicios 3.9 y 3.11, que $\angle D \ncong \angle Q$; contrario a lo obtenido. Por tanto, $D$ está en $\mathscr{C}$ y, así, $\square ABCD$ es cíclico.

∎

Note que los rectángulos y los trapecios isósceles son cuadriláteros cíclicos.

El resultado anterior caracteriza los cuadriláteros cíclicos por medio de una propiedad que involucra sólo sus ángulos. A continuación establecemos una propiedad de los cuadriláteros cíclicos que involucra sólo sus lados⟨7⟩.

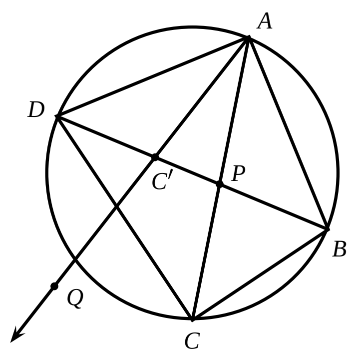
**Proposición 9.13 (Teorema de Ptolomeo)**
*Si un cuadrilátero es cíclico, entonces el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

**Prueba** Consideremos un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$. Llamemos $\mathscr{C}$ al círculo que contiene sus vértices. Por la observación 9.12.(g) y la proposición 5.2, llamemos $P$ al punto de corte de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Tomemos, por (CA2), $\overrightarrow{AQ}$ con $Q$ en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a $B$ y $C$, tal que $\angle DAQ \cong \angle CAB$. Como $C$ está en el interior de $\angle DAB$, tendremos que $\angle CAB$ es más pequeño que $\angle DAB$ y, en consecuencia, $\angle DAQ$ es más pequeño que $\angle DAB$. Así, $Q$ está en el interior de $\angle DAB$. Por el Teorema de la barra transversal, $\overrightarrow{AQ}$ corta a $\overline{BD}$ en un punto $C'$ tal que

(1) $$D\text{-}C'\text{-}B.$$

Como $\angle ADB$ y $\angle ACB$ inscriben el mismo arco, tendremos que $\angle ADB \cong \angle ACB$. Por AA tendremos que $\triangle ADC' \sim \triangle ACB$; de donde

(2) $$AD \cdot BC = AC \cdot DC'.$$




Como $\angle ABD$ y $\angle ACD$ inscriben el mismo arco, tendremos que $\angle ABD \cong \angle ACD$. Como, además, $\angle DAC \cong \angle C'AB$ tendremos, por AA, que $\triangle ABC' \sim \triangle ACD$; de donde

$$AB \cdot CD = AC \cdot BC'. \tag{3}$$

Sumando (2) y (3), y tomando en cuenta (1), tendremos que $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot DC' + AC \cdot BC' = AC \cdot (DC' + BC') = AC \cdot BD$.

■

Una propiedad notable de los cuadriláteros cíclicos es que podemos calcular sus áreas en función de los lados.

**Proposición 9.14 (Área de un cuadrilátero cíclico)**⟨8⟩
*El área de un cuadrilátero cíclico cuyos lados miden a, b, c y d es*

$$\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)},$$

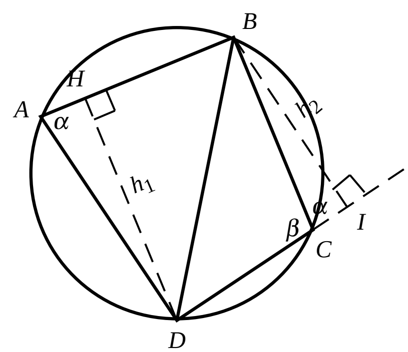
*donde* $s = \frac{a+b+c+d}{2}$*; número llamado el* ***semiperímetro*** *del cuadrilátero.*

**Prueba** Consideremos un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$. Por comodidad, llamemos $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ y $d = DA$. Sabemos, por la proposición 9.12, que $\angle A$ y $\angle C$, así como $\angle B$ y $\angle D$, son suplementarios.
Si los dos pares de ángulos son rectos, tendremos que $\square ABCD$ es un rectángulo; en cuyo caso $a = c$, $b = d$, $s = a + b$ y, en consecuencia,

$$\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)} = a \cdot b = \alpha \square ABCD.$$

Si ambos miembros de uno de esos pares de ángulos no son a la vez rectos tendremos, al ser suplementarios, que uno de ellos debe ser agudo y el otro obtuso.

Supongamos entonces, sin perder generalidad, que $\angle A$ es agudo y $\angle C$ obtuso. Por comodidad, llamemos $\alpha = m\angle A$ y $\beta = m\angle C$. Llamemos $H$ e $I$ los pies de las perpendiculares desde $D$ hasta $\overline{AB}$, y desde $B$ hasta $\overline{CD}$, respectivamente; de donde $m\angle BCI = \alpha$. Por comodidad, llamemos $h_1 = DH$, $h_2 = BI$ y $\mathscr{A} = \alpha\square ABCD$.




Por el ejercicio 6.52, $HA = d\cdot\cos\alpha$, $CI = b\cdot\cos\alpha$, $h_1 = d\cdot\operatorname{sen}\alpha$ y $h_2 = b\cdot\operatorname{sen}\alpha$. Por el corolario 6.4.1, $BD^2 = a^2 + d^2 - 2\cdot a\cdot d\cdot\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha$; de donde

$$(1) \qquad 2\cdot\cos\alpha\cdot(b\cdot c + a\cdot d) = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Por otro lado, $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\operatorname{sen}\alpha$; de donde

$$(2) \qquad 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot(b\cdot c + a\cdot d) = 4\cdot\mathscr{A}.$$

Así, elevando (1) y (2) al cuadrado y sumándolos, tenemos que $4\cdot(b\cdot c + a\cdot d)^2 = 16\cdot\mathscr{A}^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$; de donde

$$\begin{aligned}
&16\cdot\mathscr{A}^2 = \\
&= (2\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot d)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\
&= (2\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot d + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\cdot(2\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot d - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\
&= [(a+d)^2 - (b-c)^2]\cdot[(b+c)^2 - (a-d)^2] \\
&= (a+d+b-c)\cdot(a+d-b+c)\cdot(a-d+b+c)\cdot(-a+d+b+c) \\
&= 16\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d).
\end{aligned}$$

Así, $\mathscr{A} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$.

$\blacksquare$

Ahora vamos a estudiar las **posiciones relativas de dos círculos**, de lo cual dependerá gran parte de los resultados posteriores.

Comenzamos observando que, por la proposición 9.3, si dos círculos distintos se cortan, entonces se cortan en exactamente un punto, o en exactamente dos puntos. Por comodidad clasificaremos los pares de círculos que se encuentran en una de estas dos situaciones.

**Definición 9.17 (Círculos tangentes y secantes)**

**(a)** *Un círculo **es tangente a** otro círculo, si lo corta en exactamente un punto. De dos círculos, de los que uno es tangente al otro, diremos que son **círculos tangentes**.*

**(b)** *Un círculo es **secante a** otro círculo, si lo corta en exactamente dos puntos. De dos círculos, de los que uno es secante al otro, diremos que son **círculos secantes**.*

**Observación 9.13**

**(a)** *Si dos círculos son tangentes o secantes, entonces son distintos. (Es consecuencia de la observación 9.1.(a).)*

**(b)** *Si dos círculos son tangentes o secantes, entonces sus centros son distintos. (Es consecuencia de la parte anterior y la observación 9.2.(a).)*

**(c)** *Si dos círculos son tangentes, entonces los centros y el punto de corte son distintos entre sí. (Es consecuencia de la parte anterior y la observación 9.1.(c).)*

**(d)** *Si dos círculos distintos se cortan en un punto que no es colineal con los centros, entonces cada uno de los números que representan sus radios y la distancia entre sus centros es menor que la suma de los otros dos. (Es consecuencia de la parte (b) y la Desigualdad del triángulo.)*

Presentaremos, en primer lugar, tres *caracterizaciones* de los círculos tangentes, y tres de los secantes.

**Teorema 9.1 (Teorema de los dos círculos)**⟨9⟩

*Dados dos círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, se tiene que:*

**(a)** *los círculos son **tangentes** si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

  **(i)** *$P \neq Q$ y se cortan en un punto que está sobre $\overleftrightarrow{PQ}$.*

  **(ii)** *$P \neq Q$ y son tangentes a la misma recta en el mismo punto.*

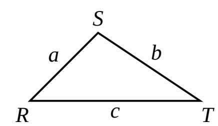
  **(iii)** *la suma de dos de los números $a$, $b$ y $c = PQ$ es igual al tercero.*

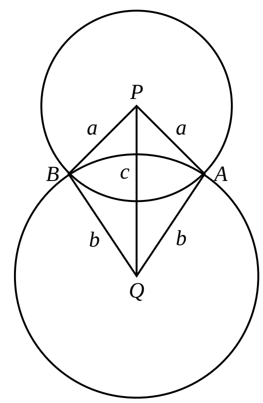
**(b)** *los círculos son* ***secantes*** *si, y sólo si, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(i)** *$P \neq Q$ y se cortan en dos puntos que están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{PQ}$.*

**(ii)** *$P \neq Q$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ es mediatriz del segmento determinado por dos puntos comunes.*

**(iii)** *cada uno de los números $a$, $b$ y $c = PQ$ es menor que la suma de los otros dos.*




**Prueba** Consideremos dos círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, y llamemos $PQ = c$.
**(a).(i)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes. Llamemos $A$ al punto de corte. Por la observación 9.13.(b), $P \neq Q$; de donde $c > 0$. Si $A$ no estuviera en $\overleftrightarrow{PQ}$ tendríamos, por la observación 9.13.(d), que cada uno de los números $a$, $b$ y $c$ es menor que la suma de los otros dos. Como, por la definición de círculo, $a > 0$ y $b > 0$, tendremos, por el ejercicio 6.18, que existe un triángulo $\triangle RST$ con $RS = a$, $ST = b$ y $RT = c$. Tomemos, por el Postulado del transportador (Construcción de ángulos) y (CS4), un punto $B$ en $\mathscr{C}_{P,a}$, en el lado opuesto de $A$ respecto a $\overleftrightarrow{PQ}$, tal que $\angle BPQ \cong \angle R$. Por LAL, $\triangle SRT \cong \triangle BPQ$; de donde $BQ = ST = b$. Así, $B$ está también en $\mathscr{C}_{Q,b}$ y $B \neq A$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $A$ está en $\overleftrightarrow{PQ}$.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $P \neq Q$ y que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ se cortan en un punto $A$ que está sobre $\overleftrightarrow{PQ}$. Por la observación 9.1.(c) y (S3) tendremos que $A$-$P$-$Q$, o $P$-$A$-$Q$, o $P$-$Q$-$A$. Si acaso $B$ es un punto de corte de $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, y $B \neq A$, tendremos que: si $B$ no está en $\overleftrightarrow{PQ}$, contradecimos la Desigualdad del triángulo, en caso de que $P$-$A$-$Q$, o el Postulado del transportador (Adición de ángulos adyacentes), en caso de que $A$-$P$-$Q$ (pues, por la proposición 3.3, $\angle QAB = \angle PAB \cong \angle QBA \cong \angle PBA$, y $P$ en el interior de $\angle QBA$) o $P$-$Q$-$A$; y si $B$ está en $\overleftrightarrow{PQ}$, contradecimos (CS4). Por tanto, $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ se cortan sólo en $A$ y, en consecuencia, son tangentes.
**(a).(ii)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes. Llamemos $A$ al punto de corte, y $l$ a la recta tangente a $\mathscr{C}_{P,a}$ en $A$. Por la observación 9.13.(b), $P \neq Q$. Por la parte anterior, $A$, $P$ y $Q$ son colineales. Así, por la proposición 9.4, $\overline{PA}$ es perpendicular a $l$ en $A$; de donde, $\overline{QA}$ también es perpendicular a $l$ en $A$. Así, por la proposición 9.4, $l$ también es tangente a $\mathscr{C}_{Q,b}$ en $A$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $l$ es una recta tangente a $\mathscr{C}_{P,a}$ y a $\mathscr{C}_{Q,b}$ en un punto $A$ común a ambos. Como, por la proposición 9.4, $\overline{PA}$ y $\overline{QA}$ son perpendiculares a $l$ en $A$

tendremos, por la proposición 2.9, que $A$, $P$ y $Q$ son colineales. Así, por la parte anterior, $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes.
**(a).(iii)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes. Llamemos $A$ al punto de corte. Así, por la observación 9.13.(c), la parte (a) de esta proposición y (S3), tendremos que $P \neq Q$ y $P$-$A$-$Q$, o $A$-$P$-$Q$, o $A$-$Q$-$P$. Así, por la definición de Interposición, siempre la suma de dos de los números $a$, $b$ y $c$ es igual al tercero.
($\Leftarrow$) Supongamos que la suma de dos de los números $a$, $b$ y $c$ es igual al tercero. Así, $c \neq 0$ y, en consecuencia, $P \neq Q$.
Si $a+b=c$ tomemos, por el Teorema de la localización de puntos, el punto $A$ en $\overrightarrow{PQ}$ tal que $PA = a$; de donde $A$ está en $\mathscr{C}_{P,a}$. Como $a < c$, tendremos que $P$-$A$-$Q$. Así: como, por la definición de Interposición, $QA = PQ - PA = c - a = b$, tendremos que $A$ está también en $\mathscr{C}_{Q,b}$.
Si $a+c=b$ tomemos, por el Teorema de la localización de puntos, el punto $A$ en $\overrightarrow{QP}$ tal que $QA = b$; de donde $A$ está en $\mathscr{C}_{Q,b}$. Como $c < b$, tendremos que $A$-$P$-$Q$. Así: como, por la definición de Interposición, $PA = QA - PQ = b - c = a$, tendremos que $A$ está también en $\mathscr{C}_{P,a}$.
Si $b+c=a$ tomemos, por el Teorema de la localización de puntos, el punto $A$ en $\overrightarrow{PQ}$ tal que $PA = a$; de donde $A$ está en $\mathscr{C}_{P,a}$. Como $c < a$, tendremos que $A$-$Q$-$P$. Así: como, por la definición de Interposición, $QA = PA - PQ = a - c = b$, tendremos que $A$ está también en $\mathscr{C}_{Q,b}$.
Así, en cualquiera de los casos tendremos, por la parte (a).(i) de esta proposición, que los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes.
**(b).(i)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes. Llamemos $A$ y $B$ los dos puntos comunes a ambos y tales que $A \neq B$. Por la observación 9.13.(b), $P \neq Q$. Por la parte (a).(i) de esta proposición, $A$ y $B$ no están en $\overleftrightarrow{PQ}$. Si $A$ y $B$ estuvieran del mismo lado de $\overleftrightarrow{PQ}$ tendríamos, por LLL, que $\triangle PQA \cong \triangle PQB$. Así, por el Postulado del transportador (Construcción de ángulos) y el Teorema de la localización de puntos, $A = B$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $A$ y $B$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{PQ}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $P \neq Q$ y que se cortan en dos puntos $A$ y $B$ que están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{PQ}$; de donde: por la proposición 9.2, los dos círculos son distintos; $A \neq B$; y, por la proposición 9.3, $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes.
**(b).(ii)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes. Llamemos $A$ y $B$ los dos puntos comunes a ambos y tales que $A \neq B$. Por la observación 9.13.(b), $P \neq Q$. Por el corolario 3.10.1, $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $P \neq Q$ y que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ se cortan en dos puntos, digamos $A$ y $B$, tales que $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$. Como necesariamente $A \neq B$ tendremos,

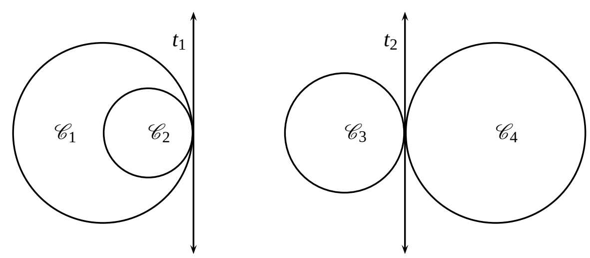
por proposición 9.3, $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes.
**(b).(iii)** ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes. Por la parte (b).(i) de esta proposición y la observación 9.13.(d), cada uno de los números $a$, $b$ y $c$ es menor que la suma de los otros dos.
($\Leftarrow$) Supongamos que cada uno de los números $a$, $b$ y $c$ es menor que la suma de los otros dos. Por el argumento desarrollado en la parte (a).(i) de esta proposición tendremos que los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son secantes.

■

En el ejercicio 9.5 el lector encontrará una *caracterización* de los círculos que no se cortan.

**Observación 9.14**

**(a)** *Si dos círculos son tangentes tendremos, por la observación 9.5.(b), que cada uno de los círculos está, excepto el punto de contacto, del mismo lado de la tangente común que sus centros.*
*Si sus centros están del mismo lado de su tangente común, diremos que los círculos son* ***tangentes interiormente****.*
*Si sus centros están en lados opuestos de su tangente común, diremos que los círculos son* ***tangentes exteriormente****.*




*En la figura, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes interiormente, con tangente común $t_1$; y $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ son tangentes exteriormente, con tangente común $t_2$.*

**(b)** *Note que, por la observación 9.13.(c) y el Teorema 9.1.(a), tendremos que:*
*Dos círculos son* ***tangentes interiormente*** *si, y sólo si, sus centros están del mismo lado del punto de corte (en la recta determinada por los centros).*
*Dos círculos son* ***tangentes exteriormente*** *si, y sólo si, sus centros están en lados opuestos del punto de corte (en la recta determinada por los centros).*

**(c)** *Dados dos círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, con $PQ = c$, tendremos, por la parte (b), que:*
*Dos círculos son* ***tangentes interiormente*** *si, y sólo si, $a + c = b$ o $b + c = a$.*
*Dos círculos son* ***tangentes exteriormente*** *si, y sólo si, $a + b = c$.*

**(d)** *Si dos círculos son tangentes interiormente, entonces sus radios son distintos. (Es consecuencia de la parte anterior y la observación 9.13.(b).)*
*Diremos, del que tiene radio menor, que* ***está dentro*** *del otro; y del que tiene radio mayor, que* ***esta fuera*** *del otro.*

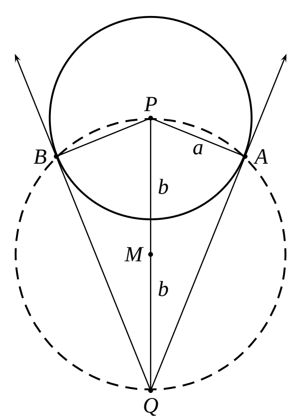
**(e)** *Si dos círculos son tangentes interiormente, entonces todos los puntos del que está dentro, excepto el punto de contacto, están dentro del otro; y, todos los puntos del que está fuera, excepto el punto de contacto, están fuera del otro.*

**(f)** *Si dos círculos son tangentes interiormente, entonces el interior del que está dentro está contenido en el interior del otro.*

**(g)** *Si dos círculos son secantes, la recta de los centros es la mediatriz del segmento que une los dos puntos de corte.*
*(Es consecuencia del corolario 3.10.1).*

Teniendo establecido el resultado anterior estamos en capacidad de probar que por un punto exterior de un círculo pasan exactamente dos tangentes a ese círculo.

**Proposición 9.15 (Tangentes círculo-punto externo)**
*Dado un círculo $\mathscr{C}_{P,a}$ y un punto $Q$ de su exterior, existen exactamente dos rectas que pasan por $Q$ y son tangentes a $\mathscr{C}_{P,a}$.*
*Llamaremos, a cada segmento desde $Q$ hasta el punto de tangencia,* ***segmento tangente al círculo desde el punto exterior****.*




**Prueba** Consideremos un círculo $\mathscr{C}_{P,a}$, y $Q$ un punto de su exterior. Consideremos el círculo $\mathscr{C}_{M,b}$, donde $M$ es el punto medio de $\overline{PQ}$ y $b = MP = MQ$. Así, $c = MP = b$ es la distancia entre los centros. Por definición, $a < PQ = 2 \cdot b$. De este modo: $a < b + c$, porque $b + c = 2 \cdot b$; $b < a + c$ y $c < a + b$, porque $c = b$. Por el Teorema de los dos círculos, $\mathscr{C}_{M,b}$ corta a $\mathscr{C}_{P,a}$ en dos puntos distintos $A$ y $B$, como sugiere la figura. Como los ángulos $\angle PAQ$ y $\angle PBQ$ están inscritos en un semicírculo tendremos, por el corolario 9.11.1, que ambos son rectos. Así, por la proposición 9.4, $\overleftrightarrow{QA}$ y $\overleftrightarrow{QB}$ son tangentes a $\mathscr{C}_{P,a}$ en $A$ y $B$, respectivamente.

Si acaso hubiera otra tangente $\overleftrightarrow{QC}$ al círculo $\mathscr{C}_{P,a}$ en $C$ tendríamos, por el corolario 9.11.5, que $A$, $B$ y $C$ serían puntos comunes a los círculos distintos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,QA}$; contrario a la proposición 9.3.

∎

Note que, por el corolario 9.11.5, *los dos segmentos tangentes a un círculo, desde un punto de su exterior, son congruentes*; además, por la observación 9.5.(b), dichos segmentos determinan un ángulo en cuyo interior se encuentran, excepto los dos puntos de contacto, todos los puntos del círculo y todos los puntos que están dentro del círculo (en particular, su centro). Por su sencillez, dejaremos la prueba de la siguiente proposición al lector (ver el ejercicio 9.6).

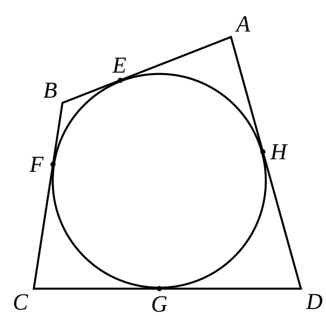
**Corolario 9.15.1** *Un rayo, con origen en un punto exterior de un círculo, pasa por su centro si, y sólo si, es el bisector del ángulo determinado por los dos segmentos tangentes al círculo desde dicho punto.*

Ahora estamos en capacidad de presentar la prometida caracterización de los cuadriláteros circunscribibles.

**Proposición 9.16** *(***Caracterización de los cuadriláteros circunscribibles***)* *Un cuadrilátero es circunscribible si, y sólo si, es un cuadrilátero convexo tal que la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados.*

**Prueba** Consideremos un cuadrilátero $\square ABCD$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es circunscribible. Llamemos $\mathscr{C}$ al círculo que es tangente a sus lados, y $E$, $F$, $G$, y $H$ a los puntos de tangencia de $\mathscr{C}$ con $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Por la observación 9.12.(m), $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo. Por el corolario 9.11.5, $AE = AH$, $BE = BF$, $CF = CG$ y $DG = DH$; de donde $AE+BE+CG+DG = AH+DH+BF+CF$. Así, por la observación 9.12.(i), $AB+CD = AD+BC$.




($\Leftarrow$) Supongamos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo tal que

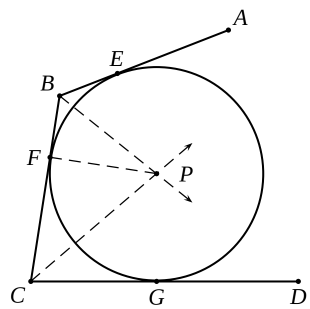
$$AB+CD = AD+BC. \tag{1}$$

Consideremos, gracias a la convexidad de $\square ABCD$ y al ejercicio 5.4, el punto $P$ de corte entre los bisectores de $\angle B$ y $\angle C$. Por el Teorema del bisector tenemos, al llamar $E$, $F$ y $G$ a los pies de las perpendiculares desde $P$ hasta $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, respectivamente, que

(2) $E$ está en $\overrightarrow{BA}$ y $E \neq B$;

(3) $B$-$F$-$C$;

(4) $G$ está en $\overrightarrow{CD}$ y $G \neq C$; y
$PF = PE = PG$.




Consideremos el círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, con $r = PF$.

**Afirmación 1** $B$-$E$-$A$ y $C$-$G$-$D$.
Por la definición de rayo, (2) y (4), se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

(I) $A = E$ y $D = G$; o $A = E$ y $C$-$D$-$G$; o $B$-$A$-$E$ y $D = G$; o $B$-$A$-$E$ y $C$-$D$-$G$;

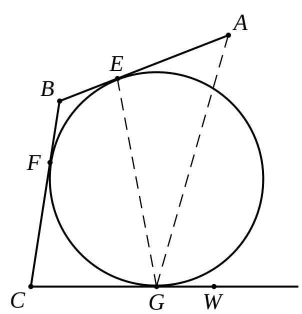
(II) $B$-$E$-$A$ y $D = G$; o $B$-$E$-$A$ y $C$-$D$-$G$;

(III) $A = E$ y $C$-$G$-$D$; o $B$-$A$-$E$ y $C$-$G$-$D$;

(IV) $B$-$E$-$A$ y $C$-$G$-$D$.

Verificaremos que no se pueden cumplir (I)-(III), haciendo uso de (1), (3) y el corolario 9.11.5. Es fácil verificar que (I) contradice la definición de cuadrilátero o la definición de Interposición.

Si se cumpliera (II), tendríamos que $AE + BE + CD = AB + CD = AD + BC = AD + BF + FC = AD + BE + CG$; de donde $AE = AG$ (en caso de que $B$-$E$-$A$ y $D = G$) o $AE > AG$ (en caso de que $B$-$E$-$A$ y $C$-$D$-$G$, pues $AE = AD + CG - CD = AD + DG$ y, por la Desigualdad del triángulo en $\triangle ADG$, $AD + DG > AG$). Ahora bien, por el Teorema de transversalidad, tomemos $W$ en $\overleftrightarrow{CD}$ del mismo lado de $\overleftrightarrow{EG}$ que $A$.




Por la proposición 9.11, $\angle AEG \cong \angle WGE$. Como, por la proposición 1.1, $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{GW}$ tendremos, por la convexidad de $\square ABCD$ y el Postulado de separación del plano, que $A$ y $E$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{GW}$. Así, por la construcción, $A$ está en el interior de $\angle WGE$; de donde, por el Postulado del transportador (adición de ángulos), $\angle AGE$ es más pequeño que $\angle AEG$. Por la proposición 3.8, $AE < AG$; contrario a lo ya obtenido. Por tanto, no se puede cumplir (II).
Como (III) presenta una situación simétrica a la de (II) tendremos, por argumentos similares, que tampoco se puede cumplir (III); y, con esto, queda probada nuestra afirmación.

Consideremos ahora, gracias a la observación 9.4.(c) y la proposición 9.15, la recta $\overleftrightarrow{AH}$ tangente a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $H \neq E$.

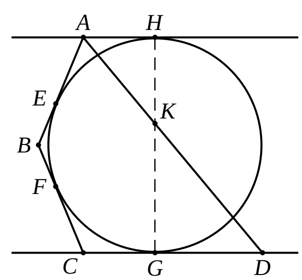
**Afirmación 2** $\overleftrightarrow{AH}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ se cortan en un punto $D'$ tal que $A$-$H$-$D'$ y $C$-$G$-$D'$.
Por la definición de cuadrilátero y la observación 9.4.(a),

(5) $\quad A, B, C, D, E, F, G$ y $H$ son distintos entre sí.

(6) $\quad A, B, C, E$ y $F$ están en un mismo lado de $\overleftrightarrow{GH}$, y $D$ en el lado opuesto.

(Si acaso $A$ y $B$ estuvieran en lados opuestos de $\overleftrightarrow{GH}$ tendríamos, por la observación 2.2.(a), que $\overline{AB}$ corta a $\overleftrightarrow{GH}$ en un punto $K$ tal que $A$-$K$-$B$. Por (5), $K \neq H$ y $K \neq G$; y, por la observación 9.3.(j) y la proposición 9.5, no puede cumplirse $G$-$K$-$H$ pues, en cualquiera de los casos, $\overleftrightarrow{AB}$ sería secante a $\mathscr{C}_{P,r}$. Tampoco puede cumplirse $G$-$H$-$K$ pues, en caso contrario, tendríamos que $K$ y $G$ estarían en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AH}$; de donde, por el ejercicio 2.3, $E$ y $G$ estarían en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AH}$. Pero, por la observación 9.5.(b), $E$ y $G$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AH}$. Por argumentos similares se prueba que tampoco se puede cumplir $K$-$G$-$H$. Por tanto, $A$ y $B$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{GH}$. Del mismo modo se prueba que $C$ y $B$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{GH}$. Así, por el Postulado de separación del plano y la observación 2.2.(b), tenemos lo afirmado en (6)).

Si acaso $\overleftrightarrow{AH}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ fueran paralelas tendríamos, por la observación 9.4.(b) y la proposición 9.4, que $\overline{GH}$ sería un diámetro, $\overline{GH} \perp \overleftrightarrow{AH}$ y $\overline{GH} \perp \overleftrightarrow{CG}$. Por (6) y la observación 2.2.(b), $\overline{AD}$ corta a $\overleftrightarrow{GH}$ en un punto $K$ tal que $A$-$K$-$D$. Por el ejercicio 2.3, $G$-$K$-$H$. Por el ejercicio 3.7, $AK > AH$ y $KD > GD$; de donde $AD > AH + GD$. Pero, por (1), (3) y el corolario 9.11.5, $AD + BE + CG = AD + BF + FC = AD + BC = AB + CD = AE + BE + CG + GD = AH + BE + CG + GD$; de donde, $AD = AH + GD$.




Por tanto, $\overleftrightarrow{AH}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ se cortan.
Llamemos $D'$ el punto de corte de $\overleftrightarrow{AH}$ y $\overleftrightarrow{CG}$. Por la definición de cuadrilátero y (5), tendremos que

(7) $\ A, B, C, D', E, F, G$ y $H$ son distintos entre sí.

Por (7) y (S3), se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

(V) $A$-$D'$-$H$ y $C$-$D'$-$G$; o $A$-$D'$-$H$ y $C$-$G$-$D'$; o $A$-$D'$-$H$ y $D'$-$C$-$G$;

(VI) $D'$-$A$-$H$ y $C$-$D'$-$G$; o $D'$-$A$-$H$ y $C$-$G$-$D'$; o $D'$-$A$-$H$ y $D'$-$C$-$G$;

(VII) $A$-$H$-$D'$ y $C$-$D'$-$G$; o $A$-$H$-$D'$ y $D'$-$C$-$G$;

(VIII) $A$-$H$-$D'$ y $C$-$G$-$D'$.

Verificaremos que no pueden cumplirse (V)-(VII); con lo que nuestra afirmación quedaría probada.

Si se cumpliera (V) tendríamos, por el hecho de que $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CD'}$, que $A$ y $H$ estarían en lados opuestos de $\overleftrightarrow{CD}$. Pero, por la convexidad de $\square ABCD$ y la observación 9.5.(b), $A$ y $H$ están en el interior de $\angle BCD$ y, por tanto, del mismo lado de $\overleftrightarrow{CD}$ que $B$.

Si se cumpliera (VI) tendríamos:

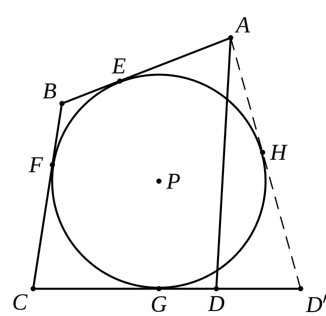
(a) que $D'$ y $H$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Pero, por la observación 9.5.(b) y (7), $G$ y $H$ están en el interior de $\angle ABC$. Así, por el ejercicio 2.3 y el Postulado de separación del plano, $\overline{CG}$ está del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que $H$; con lo que no podría cumplirse $C$-$D'$-$G$.

(b) por la proposición 2.3 y (6), que $D'$ y $C$ estarían del mismo lado de $\overleftrightarrow{GH}$; con lo que no puede cumplirse que $C$-$G$-$D'$.

(c) por el corolario 9.11.5, (1), (3) y la afirmación 1, que $AH + BE + CG + GD = AE + BE + CD = AB + CD = AD + BC = AD + BE + CG$, es decir, que $AD = AH + GD$. Pero, si se cumpliera $D'$-$C$-$G$ tendríamos, por el corolario 9.11.5 y la definición de Interposición, que $AH + GD = D'H - D'A + D'D - D'H$, es decir, $D'D = D'A + AD$; contrario a la Desigualdad del triángulo en $\triangle ADD'$.

Si se cumpliera (VII) tendríamos, por (6), que $D$ y $D'$ están del lado de $\overleftrightarrow{GH}$ opuesto al de $C$; con lo que no puede cumplirse $C$-$D'$-$G$ ni $D'$-$C$-$G$.

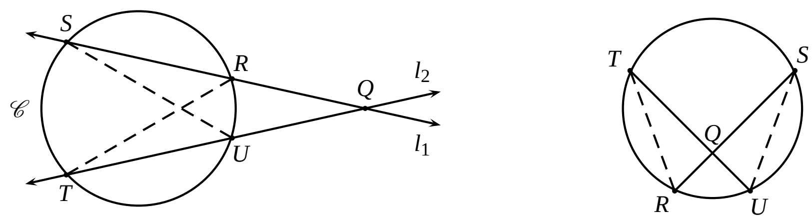
Por todo lo hecho anteriormente tendremos que $A$, $B$, $C$ y $D'$ son los vértices de un cuadrilátero circunscribible: $\square ABCD'$. Por lo probado en la implicación anterior, $AB + CD' = AD' + BC$. Si acaso $D \neq D'$ tendríamos, por (1), que $CD' - CD = AD' - AD$ o $CD - CD' = AD - AD'$, es decir, que $AD + DD' = AD'$ o $AD' + DD' = AD$; contrario a la Desigualdad del triángulo en $\triangle ADD'$. Por tanto, $D = D'$ y, así, $\square ABCD$ es circunscribible.




■

Note que todos los rombos son cuadriláteros circunscribibles. Los siguientes resultados nos permitirán establecer una medida que relaciona a un círculo con cualquier punto del plano.

**Proposición 9.17 (Potencia de un punto)**
*Dado un círculo $\mathscr{C}$, un punto $Q$, y una recta que pasa por $Q$ y que es secante a $\mathscr{C}$ en los puntos $R$ y $S$, se tiene que el producto $QR \cdot QS$ permanece constante, al tomar cualquier otra secante a $\mathscr{C}$ por $Q$.*
*Este número es frecuentemente llamado* ***la potencia del punto respecto al círculo****.*



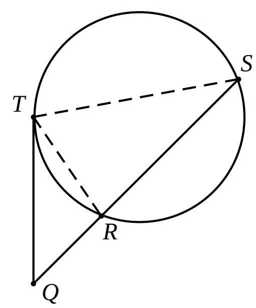

**Prueba** Sean $\mathscr{C}$ un círculo, $Q$ un punto, $l_1$ una secante que pasa por $Q$ e interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos $R$ y $S$, y $l_2$ otra secante que pasa por $Q$ e interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos $U$ y $T$.
**Caso I** $Q$ está fuera de $\mathscr{C}$.
Consideremos los triángulos $\triangle QSU$ y $\triangle QTR$. El ángulo $\angle Q$ es común, $\angle QSU \cong \angle QTR$, porque están inscritos en el mismo arco $\widehat{RSU} = \widehat{RTU}$. Por el criterio AA de semejanza de triángulos, $\triangle QSU \sim \triangle QTR$. Por tanto, $\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$, de donde $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.
**Caso II** $Q$ está dentro de $\mathscr{C}$.
En este caso, $R$-$Q$-$S$ y $T$-$Q$-$U$. Como el arco $\widehat{ST}$ que no contiene a $R$ está inscrito en los ángulos $\angle SUT$ y $\angle SRT$ tendremos, por la proposición 9.11, que $\angle SUT \cong \angle SRT$. Como $\angle SQU \cong \angle TQR$ (al ser opuestos por el vértice), tendremos, por el criterio AA de semejanza de triángulos, que $\triangle SQU \sim \triangle TQR$. Así $\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$ y, por tanto, $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.
**Caso III** $Q$ está en $\mathscr{C}$.
En este caso, $Q = R$ o $Q = S$, y $Q = U$ o $Q = T$; de donde $0 = QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

■

De acuerdo con la proposición 9.15 sólo hay dos segmentos tangentes a un círculo desde un punto de su exterior (con extremo en el punto de tangencia). Gracias al corolario 9.11.5, estos dos segmentos tangentes son congruentes. Y, finalmente, gracias al corolario 9.15.1, estos dos segmentos tangentes determinan ángulos congruentes con la recta que pasa por el punto exterior y el centro.

La siguiente proposición nos muestra que la fórmula anterior sigue valiendo aún si $U = T$; además de que nos provee de una relación entre los segmentos tangentes y secantes desde un mismo punto exterior.

**Proposición 9.18** *El cuadrado de la longitud de un segmento tangente a un círculo, desde un punto de su exterior, es la potencia con respecto al círculo de dicho punto exterior.*
*En otras palabras: dado un segmento $\overline{QT}$ tangente a un círculo $\mathscr{C}$ en $T$, y $\overline{QS}$ un segmento secante a $\mathscr{C}$ que interseca al círculo en los puntos $R$ y $S$, entonces $QR \cdot QS = QT^2$ (es decir, $QT$ es la media geométrica de $QR$ y $QS$).*




**Prueba** Consideremos un círculo $\mathscr{C}$, $Q$ un punto en su exterior, $\overline{QT}$ un segmento tangente a $\mathscr{C}$ en $T$, y $\overline{QS}$ un segmento secante a $\mathscr{C}$ que interseca al círculo en los puntos $R$ y $S$. Como el arco $\widehat{TR}$ que no contiene a $S$ está inscrito en los ángulos $\angle QST$ y $\angle QTR$ tendremos, por la proposición 9.11, que $\angle QST \cong \angle QTR$. Como $\angle Q$ es común tendremos, por el criterio AA de semejanza de triángulos, que $\triangle QST \sim \triangle QTR$. Así $\frac{QS}{QT} = \frac{QT}{QR}$ y, por tanto, $QR \cdot QS = QT^2$.

■

# Problemas del Capítulo 9

**9.1** Pruebe las proposiciones 9.9 y 9.10.

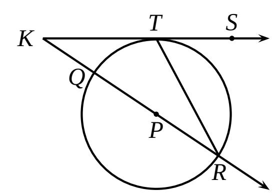
**9.2** Pruebe los corolarios 9.11.1-6.

**9.3** Si un ángulo tiene su vértice fuera de un círculo, y sus lados son tangentes a éste:

**(a)** pruebe que su medida es 180 menos la medida del arco más pequeño de los que inscribe.

**(b)** ¿cuál es la medida del ángulo, si la medida de uno de sus arcos inscritos es 4 veces la medida del otro?

**9.4** Si $\overleftrightarrow{KS}$ es tangente al círculo en $T$, y la secante $\overleftrightarrow{KR}$ contiene al punto $P$, centro del círculo, determine $\mu\widehat{QT}$ y $m\angle STR$, conociendo $m\angle K$.




**9.5** Pruebe que dos círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ no se cortan si, y sólo si, la suma de dos de los números $a$, $b$ y $c = PQ$ es menor que el tercero.
Además: cada uno de ellos está en el exterior del otro si, y sólo si, $a+b<c$; $\mathscr{C}_{P,a}$ está en el interior de $\mathscr{C}_{Q,b}$ si, y sólo si, $a+c<b$; y $\mathscr{C}_{Q,b}$ está en el interior de $\mathscr{C}_{P,a}$ si, y sólo si, $b+c<a$.

**9.6** Pruebe el corolario 9.15.1.

**9.7** Pruebe que la razón del Teorema del seno, en el ejercicio 6.52.(n), es el circundiámetro del triángulo del que se trata.

**9.8** Si los lados de un triángulo acutángulo miden $a$, $b$ y $c$, y el circunradio es $R$, pruebe que el área del triángulo es $\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}$.

**9.9** Si el inradio de un triángulo es $r$, pruebe que el área del triángulo es $s\cdot r$.

**9.10** Pruebe que:

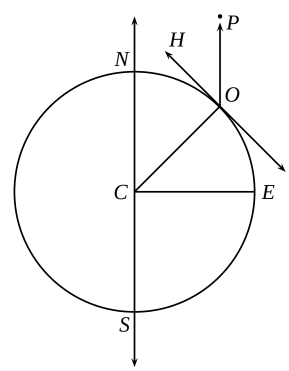
**(a)** la distancia desde un vértice de un triángulo hasta el punto de tangencia del incírculo, con uno de los lados del cual es extremo, es igual a la diferencia entre el semiperímetro del triángulo y la longitud del lado opuesto a ese vértice.

**(b)** la suma de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la medida de la longitud de la hipotenusa más el indiámetro.

**9.11** **(Latitud de un lugar y la estrella Polar)**

*La latitud de un lugar en la tierra (en el hemisferio norte) es igual a la medida del ángulo de elevación de la estrella Polar sobre el horizonte, cuando se observa desde dicho lugar*.

La situación real se describe geométricamente de la siguiente manera: el círculo es el meridiano en el que se encuentra el observador $O$, junto con su complemento; $C$ es el centro de dicho círculo; $\overleftrightarrow{NS}$ es el eje polar ($N$ el norte, y $S$ el sur); $E$ es el punto del meridiano del observador que está en el ecuador (el que tiene latitud 0); $\overleftrightarrow{OH}$ es el horizonte del observador, donde $H$ indica la dirección norte; $P$ es la estrella polar (que, dada su lejanía, puede considerarse que $\overrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{NS}$); $\mu\widehat{OE}$ es la latitud del lugar en el que está ubicado el observador; y $\angle POH$ es el ángulo de elevación de la estrella Polar sobre el horizonte del observador.




Verifique que lo afirmado al principio es cierto, probando que:

*Si, en el círculo con centro $C$, radio $\overline{CE} \perp \overleftrightarrow{NS}$; $\overleftrightarrow{OH}$ es la tangente al círculo en $O$ y $\overrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{NS}$, entonces $\mu\widehat{OE} = m\angle POH$.*

**9.12** **(a)** Si, en el semicírculo $\widehat{ACB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ en $D$, pruebe que $CD$ es la media geométrica de $AD$ y $DB$.

**(b)** Si el diámetro $\overline{AB}$ de un círculo es perpendicular a una cuerda $\overline{CD}$ en $E$, pruebe que $CD^2 = 4 \cdot AE \cdot BE$ (es decir, $AE \cdot BE = \left(\frac{CD}{2}\right)^2$); si, además, $\overline{AQ}$ es una cuerda que corta a $\overline{CD}$ en $P$, pruebe que $AP \cdot AQ$ es independiente de $P$.

**(c)** ¿Cómo construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea un segmento dado?

**(d)** ¿Cómo construir un segmento cuya longitud sea la media geométrica de otros dos segmentos dados?

**(e)** ¿Cómo construir un segmento cuya longitud sea la raíz cuadrada de un número positivo dado?

**9.13** Pruebe que, en un círculo cualquiera, los puntos medios de todas las cuerdas congruentes con una cuerda dada que no es diámetro forman un círculo concéntrico con el círculo dado y de radio igual a la distancia de una cualquiera de las cuerdas al centro.

**9.14** Pruebe que:

**(a)** Dados dos círculos tangentes interiormente en el punto $A$, tales que el segundo círculo pasa a través del centro del primero, toda cuerda del primer círculo que tenga un extremo en $A$ es bisecada por el segundo círculo.

**(b)** Dado un punto $A$ en un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, $A$ y los puntos medios de todas las cuerdas de $\mathscr{C}_{P,r}$ que tienen un extremo en $A$, forman un círculo tangente interiormente a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $A$ y que pasa por $P$.

**9.15** **(Distancia punto-círculo)**

Dado un círculo $\mathscr{C}_P$ y un punto $A \neq P$, sea $B$ el punto de intersección de $\overrightarrow{PA}$ y $\mathscr{C}_P$. Pruebe que $AB$ es la distancia más corta entre $A$ y cualquier punto de $\mathscr{C}_P$.
***La distancia entre un punto** $A$ **y un círculo*** $\mathscr{C}_{P,r}$ se define como: $r$, si $A = P$; $AB$, si $A \neq P$.

**9.16** Si tenemos dos triángulos semejantes, pruebe que:

**(a)** los circunradios están en la misma razón que sus lados.

**(b)** los inradios están en la misma razón que sus lados.

**9.17** Pruebe que los arcos tienen tantos puntos como la cuerda determinada por sus extremos.

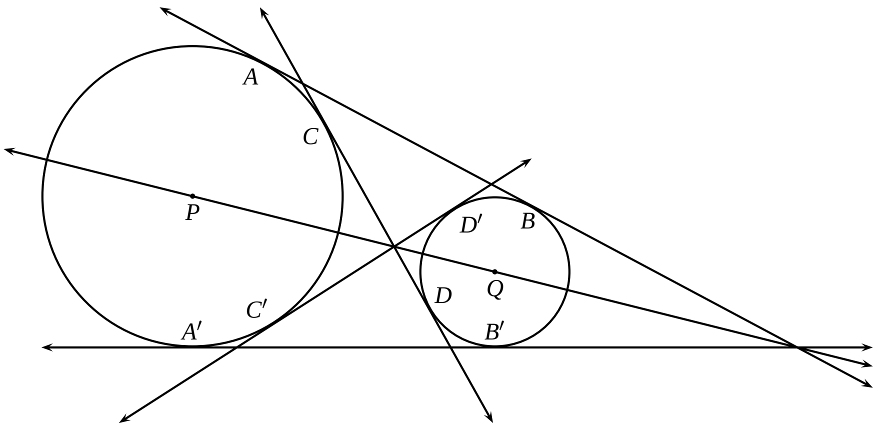
**9.18** **(Tangentes comunes, internas y externas)**

Consideremos dos círculos distintos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, la recta determinada por sus centros $\overleftrightarrow{PQ}$, y una recta $l$ tangente común a ambos círculos.

Si $l$ corta a $\overleftrightarrow{PQ}$ en un punto que está entre $P$ y $Q$, se dice que $l$ es ***una tangente común interna*** a ambos círculos; llamaremos, al segmento determinado por los puntos de contacto de una tangente común interna con los dos círculos, ***segmento tangente común interno***.

Si $l$ no corta a $\overleftrightarrow{PQ}$ en un punto que está entre $P$ y $Q$, se dice que $l$ es ***una tangente común externa*** a ambos círculos; llamaremos, al segmento determinado por los puntos de contacto de una tangente común externa con los dos círculos, ***segmento tangente común externo***.

En la figura: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ son tangentes comunes externas; $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{C'D'}$ son tangentes comunes internas; $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son segmentos tangentes comunes externos; y $\overline{CD}$ y $\overline{C'D'}$ son segmentos tangentes comunes internos.




Pruebe que:

**(a)** Si existe una tangente común interna a dos círculos distintos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, entonces corta a $\overleftrightarrow{PQ}$ en un punto que no está dentro de los círculos; y si existe una segunda, entonces pasa por ese mismo punto.

**(b)** Una tangente común externa a dos círculos distintos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ corta a $\overleftrightarrow{PQ}$ si, y sólo si, $a \neq b$.

**(c)** Si existe una tangente común externa a dos círculos distintos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$, que corta a $\overleftrightarrow{PQ}$, entonces el punto de corte no está dentro de los círculos; y si existe una segunda, entonces pasa por ese mismo punto.

**(d)** Si los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ no se cortan, y cada uno de ellos está en el exterior del otro, existen exactamente dos tangentes comunes internas, y dos externas, a ambos círculos.

**9.19** Mientras exploraba unas ruinas antiguas, un arqueólogo encontró un trozo del borde de una rueda. Para poder reconstruir la rueda, necesitaba conocer el diámetro. A tal fin, lo único que hizo fue marcar tres puntos $A$, $B$ y $C$ en el borde. ¿Cómo calculó el diámetro de la rueda?

**9.20** Pruebe que los segmentos que unen los extremos de dos diámetros distintos de un círculo son paralelos y congruentes.

**9.21** Pruebe que dos cuerdas de un círculo que tienen un extremo común son congruentes si, y sólo si, las cuerdas determinan ángulos congruentes con el diámetro que pasa por ese extremo.

**9.22** Pruebe que el punto de corte de un círculo y el segmento que une un punto de su exterior y su centro, equidista de los segmentos tangentes desde ese punto exterior.

**9.23** Dados dos círculos tangentes, $T$ su punto de contacto, y $l$ su tangente común en $T$, pruebe que:

**(a)** los segmentos tangentes, desde un punto de $l$ distinto de $T$ a cualquiera de los círculos, son congruentes.
**(b)** la potencia de cualquier punto de $l$, respecto a uno de los círculos, es igual a su potencia respecto al otro.

**9.24** Pruebe que la cuerda más corta que pasa por un punto interior de un círculo, distinto del centro, es la perpendicular al radio que pasa por el punto.

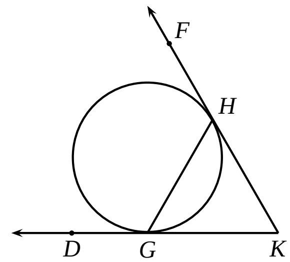
**9.25** Dado un cuadrilátero cíclico, pruebe que:

**(a)** las mediatrices de los cuatro lados y las mediatrices de las diagonales concurren en un punto.
**(b)** si es paralelogramo, entonces debe ser un rectángulo; el centro del círculo coincide con el punto de corte de las diagonales; y los lados opuestos equidistan del centro.
**(c)** si es trapecio, entonces es isósceles.
**(d)** si tiene dos lados congruentes, entonces debe ser un rectángulo o un trapecio isósceles.

**9.26** Dado un triángulo equilátero, verifique que:

**(a)** los puntos de tangencia de su incírculo con sus lados determinan otro triángulo equilátero cuyo lado mide la mitad del lado del original.
**(b)** las tangentes a su circuncírculo por sus vértices determinan otro triángulo equilátero cuyo lado mide el doble del lado del original.

**9.27** Sean $\overrightarrow{KH}$ y $\overrightarrow{KG}$ tangentes al círculo, en $H$ y $G$, respectivamente.




**(a)** Determine $m\angle DGH$ y $m\angle GHK$, conociendo la medida del arco mayor $\widehat{GH}$.

**(b)** ¿Por qué $\angle KHG \cong \angle KGH$?

**(c)** Si $KH + KG$ es igual al diámetro del círculo, determine $m\angle K$.

Si $m\angle K = 60$:

**(d)** pruebe que la medida del arco mayor $\widehat{GH}$ es dos veces la medida del arco menor $\widehat{GH}$.

**(e)** pruebe que los segmentos tangentes forman un triángulo equilátero con la cuerda que une los puntos de tangencia.

**(f)** determine las longitudes de los segmentos tangentes, conociendo el diámetro.

**9.28** Indique un método por medio del cual podemos inscribir un $n$-ágono regular ($n \geqslant 3$) en un círculo cualquiera.

**9.29** Dados dos círculos concéntricos:

**(a)** pruebe que toda cuerda del círculo mayor, que es tangente al círculo menor, es bisecada en su punto de tangencia.

**(b)** considerando las tangentes al círculo menor que pasan por los extremos de un diámetro del círculo mayor, determine la longitud de cada segmento tangente que tiene un extremo en cada círculo, conociendo sus diámetros.

**9.30** La recta $\overleftrightarrow{QA}$ es tangente a un círculo de radio $r$ en $A$, y la distancia de $Q$ al centro es $d$. Determine cada una de las longitudes $QA$, $d$ y $r$, conociendo las otras dos.

**9.31** En un círculo de radio $r$, una de sus cuerdas mide $d$ y está a una distancia $c$ del centro. Determine cada una de las longitudes $d$, $c$ y $r$, conociendo las otras dos.

**9.32** **(a)** Calcule:

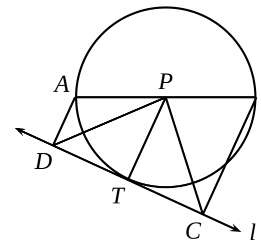
- **(i)** el circunradio de un triángulo equilátero, conociendo el lado del triángulo.
- **(ii)** el inradio de un triángulo equilátero, conociendo el lado del triángulo.
- **(iii)** el circunradio de un cuadrado, conociendo el lado del cuadrado.
- **(iv)** el inradio de un cuadrado, conociendo el lado del cuadrado.

**(b)** Si un cuadrado y un triángulo equilátero están inscritos en el mismo círculo, pruebe que:

- **(i)** la distancia, desde el centro del círculo, a cualquiera de los lados del cuadrado es mayor que a cualquiera de los lados del triángulo.

**(ii)** los lados del triángulo son más largos que los del cuadrado.
**(iii)** el perímetro del cuadrado es mayor que el del triángulo.

**9.33** Si $\overline{AB}$ es un diámetro del círculo con centro $P$; $l$ es tangente en $T$ al círculo y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares a $l$, pruebe que $PD = PC$.




**9.34** En un círculo con centro $P$, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{AC}$ es otra cuerda cualquiera. Una recta que pasa por $P$, y es paralela a $\overline{AC}$, interseca en un punto $D$ a la tangente al círculo en $C$. Pruebe que $\overleftrightarrow{DB}$ es tangente al círculo en el punto $B$.

**9.35** Si una cuerda de un círculo mide lo mismo que su radio:

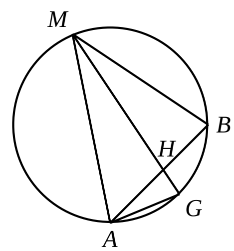
**(a)** calcule las medidas de los arcos que determina.
**(b)** verifique que, si se trazan cuerdas sucesivas de esta longitud, la sexta termina donde comienza la primera.⟨10⟩
**(c)** pruebe que la distancia desde uno de los extremos de la cuerda hasta el punto de corte del rayo que parte del centro en la dirección de dicho extremo, con la tangente al círculo que pasa por el otro de los extremos, también es el radio del círculo.

**9.36** Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos diámetros distintos de un círculo, determine la medida de cada uno de los arcos que determinan, conociendo $m\angle ABC$.

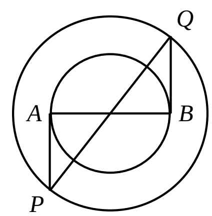
**9.37** Pruebe que:

**(a)** un rayo es el bisector de un ángulo central de un círculo si, y sólo si, biseca a la cuerda correspondiente.
**(b)** un rayo es el bisector de un ángulo central de un círculo si, y sólo si, biseca al arco menor correspondiente.
**(c)** un rayo es el bisector de un ángulo central de un círculo si, y sólo si, su rayo opuesto biseca al arco mayor correspondiente.
**(d)** un rayo es el bisector de un ángulo que tiene su vértice en un círculo, y cuyos lados son secantes o tangentes a éste, si, y sólo si, biseca a su arco inscrito.
**(e)** si un diámetro de un círculo es perpendicular a una cuerda, entonces el diámetro biseca a cada uno de los arcos determinados por los extremos de la cuerda.

**9.38** Si $\mu\widehat{AG} = \mu\widehat{BG}$, pruebe que $\triangle MHB \sim \triangle MAG$.



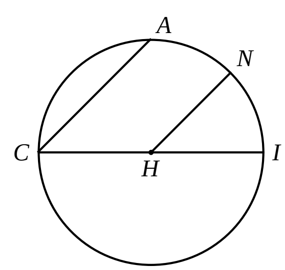

**9.39** Si $\overline{AB}$ es un diámetro del más pequeño de los dos círculos concéntricos, y $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ son tangentes al círculo más pequeño en $A$ y $B$, respectivamente, pruebe que $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en el centro de los círculos.



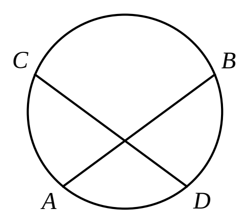

**9.40** Pruebe que la medida del arco del circuncírculo inscrito en el ángulo del vértice de un triángulo isósceles es dos veces la diferencia entre la medida del ángulo externo en la base del triángulo, y la de un ángulo de la base.

**9.41** Si, en el circuncírculo de $\triangle ABC$, la cuerda $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ y la cuerda $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, pruebe que $\widehat{BD} \cong \widehat{BE}$.

**9.42** Si $H$ es el centro del círculo, y $\overline{CI}$ es un diámetro, pruebe que $\overline{CA} \parallel \overline{HN}$ si, y sólo si, $\widehat{AN} \cong \widehat{IN}$.

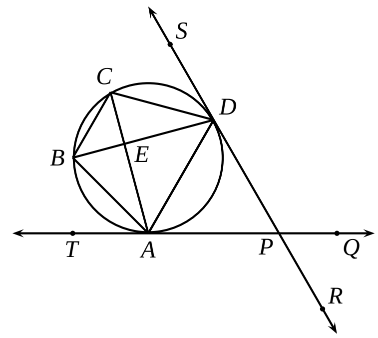



**9.43** Pruebe que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si, y sólo si, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

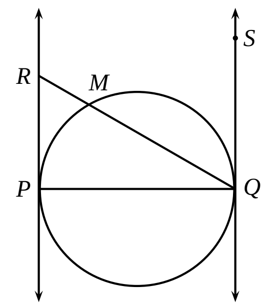



**9.44** Si $\square ABCD$ es un cuadrado, y $P$ es un punto interior de $\widehat{AB}$ en su circuncírculo, pruebe que $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ trisecan a $\angle APB$.

**9.45** Si $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PD}$ son tangentes al círculo en $A$ y $D$, respectivamente, determine la medida de cada ángulo y de cada arco, conociendo $\mu\widehat{AD}$, $\mu\widehat{BC}$ y $m\angle TAB$.



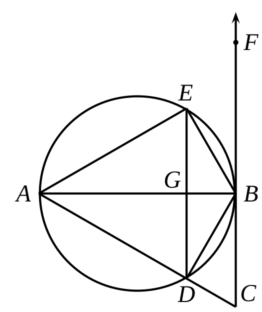

**9.46** Si $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{QS}$ son tangentes al círculo y $\overline{PQ}$ es un diámetro, determine el radio del círculo conociendo $\mu\widehat{MQ}$ y $RQ$.




**9.47** Sea $\overline{AB}$ un diámetro de un círculo en el cual la cuerda $\overline{DE}$ es paralela a la tangente $\overleftrightarrow{CB}$.

**(a)** Determine la medida de cada ángulo y cada arco, conociendo $\mu\widehat{BD}$.

**(b)** Determine la longitud de cada segmento, conociendo $AE$ y el radio del círculo.




**9.48** **(a)** Pruebe que todo polígono equilátero y cíclico es regular.

**(b)** Diseñe un polígono equiángulo y cíclico no regular.

**(c)** Pruebe que todo polígono equiángulo y circunscribible es regular.

**(d)** Diseñe un polígono equilátero y circunscribible no regular.

**9.49** Considere un círculo, un punto $P$ en su exterior, una recta que pasa por $P$ tangente al círculo en $T$ y una secante que pasa por $P$ y corta al círculo en $Q$ y $R$ de tal manera que $R$-$Q$-$P$. Si el bisector de $\angle QTR$ interseca a $\overline{RQ}$ en $S$, pruebe que $PT = PS$.

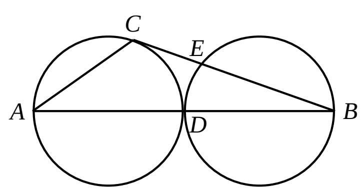
**9.50** Si los círculos $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, con centros $P$ y $S$ respectivamente, son tangentes interiormente a la recta $l$ en $Q$, donde $\mathscr{C}_2$ está en el interior de $\mathscr{C}_1$; una secante al círculo mayor pasa por $P$, es tangente al círculo menor en $T$ y corta a $l$ en $R$; determine $QR$ conociendo los radios de los círculos.

**9.51** Si dos círculos congruentes son tangentes exteriormente, pruebe que un punto cualquiera equidistante de sus centros está en su tangente común.

**9.52** Si cada uno de tres círculos es tangente exteriormente a los otros dos, calcule el radio de cada círculo conociendo la distancia entre sus centros.

**9.53** Dos círculos no congruentes son tangentes en un punto $T$. Una secante, $l$, que pasa por $T$, interseca al círculo mayor en $A$ y al menor en $B$. Pruebe que las tangentes en $A$ y en $B$ son paralelas.

**9.54** Si $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son diámetros de círculos congruentes y tangentes exteriormente en $D$, y $\overleftrightarrow{BC}$ es una tangente en $C$, pruebe que $\mu\widehat{AC} = \mu\widehat{DC} + \mu\widehat{DE}$.



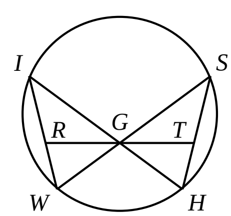

**9.55** Si se inscribe un pentágono regular en un círculo:

**(a)** Determine el ángulo que forman las diagonales desde dos vértices consecutivos.

**(b)** Determine el ángulo que forman las secantes que contienen dos lados del pentágono y que pasan por los extremos de uno de sus lados.

**9.56** Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas de un círculo que se cortan en punto interior $E$, determine $EB$, $ED$ y $EC$, conociendo $AB$, $CD$ y $EA$.

**9.57** Si $\overline{WS}$ y $\overline{HI}$ son cuerdas que se intersectan en $G$, y $\overline{RT}$ biseca el ángulo $\angle WGI$, pruebe que $WR \cdot TS = HT \cdot RI$.



**9.58** Si $\overline{AD}$ es bisectriz de $\triangle ABC$, pruebe que $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$ (es decir, el producto de los lados adyacentes menos la potencia de $D$ respecto al circuncírculo de $\triangle ABC$).

**9.59** Si el hexágono $ABCDEF$ es circunscribible, pruebe que $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.

**9.60** Pruebe que:

- **(a)** Si los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ no se cortan, y uno de ellos está en el interior del otro, no existe ninguna tangente común interna, ni externa, a ambos círculos.
- **(b)** Si los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes exteriormente, entonces existe exactamente una tangente común interna, y dos externas, a ambos círculos.
- **(c)** Si los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ son tangentes interiormente, entonces no existe ninguna tangente común interna, y exactamente una externa, a ambos círculos.
- **(d)** Si los círculos $\mathscr{C}_{P,a}$ y $\mathscr{C}_{Q,b}$ se cortan en dos puntos, entonces no existe ninguna tangente común interna, y exactamente dos externas, a ambos círculos.

**9.61** Pruebe que:

- **(a)** si existen dos tangentes comunes externas a dos círculos, entonces los segmentos tangentes comunes externos son congruentes.
- **(b)** si existen dos tangentes comunes internas a dos círculos, entonces los segmentos tangentes comunes internos son congruentes.

**9.62** Determine, conociendo sus radios y una de las distancias dadas, la otra:

- **(a)** la distancia entre los centros de dos círculos y la longitud de un segmento tangente común interno (en caso de que exista).
- **(b)** la distancia entre los centros de dos círculos y la longitud de un segmento tangente común externo (en caso de que exista).

**9.63** Pruebe que:

- **(a)** Si dos círculos son tangentes exteriormente, entonces la tangente común biseca a cada segmento tangente común externo a los círculos.
- **(b)** Si dos círculos son secantes, entonces la recta determinada por los dos puntos de corte biseca a cada segmento tangente común externo a los círculos.

**9.64** Si dos círculos se cortan en los puntos $A$ y $B$, pruebe que:

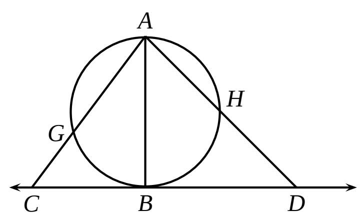
- **(a)** si $C$ y $D$ son los extremos de sendos diámetros que comienzan en $A$ de los dos círculos, entonces $B$ está en $\overline{CD}$.

**(b)** si trazamos una recta que pasa por $B$ y corta al primer círculo en $X$ y al segundo círculo en $Y$, entonces el ángulo $\angle XAY$ no depende de la recta trazada.

**(c)** si sendas secantes por $A$ y por $B$ cortan a uno de los círculos en $X$ y $Z$, y al otro en $Y$ y $W$, respectivamente, con $Z$ y $W$ del mismo lado de $\overleftrightarrow{XY}$, entonces $\overline{XZ} \parallel \overline{YW}$.

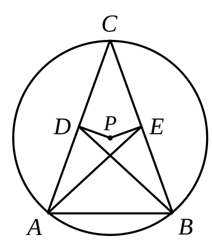
**9.65** Pruebe que es imposible que las longitudes de los segmentos determinados en dos cuerdas de un círculo, que se intersecan, sean cuatro números enteros consecutivos.

**9.66** Si $\overline{AB}$ es un diámetro, $\overleftrightarrow{CD}$ es tangente en $B$, y $B$ es el punto medio de $\overline{CD}$, pruebe que $AC \cdot AG = AD \cdot AH$.




**9.67** Si $\overline{AB}$ es un diámetro de un círculo con centro $P$, y $X$ e $Y$ son puntos del círculo tales que $\overrightarrow{XY}$ biseca a $\angle AXB$, pruebe que $\overline{PY} \perp \overline{AB}$.

**9.68** Si $P$ es el centro del círculo; $\overline{PD} \perp \overline{AC}$; $\overline{PE} \perp \overline{BC}$; y $PD = PE$, pruebe que $\angle DBA \cong \angle EAB$.



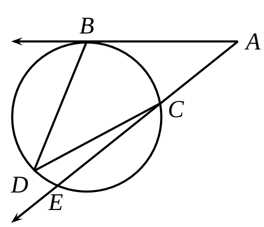

**9.69** Si dos círculos congruentes son tangentes exteriormente en $T$, y el diámetro $\overline{PQ}$ de uno de ellos es paralelo al diámetro $\overline{SR}$ del otro, con $S$ y $Q$ en lados opuestos de $\overleftrightarrow{PR}$, pruebe que $\square PQRS$ es un rombo.

**9.70** Si $\overleftrightarrow{AB}$ tangente al círculo:

**(a)** determine las medidas de los seis ángulos, conociendo $\mu\widehat{BD}$, $\mu\widehat{DE}$ y $\mu\widehat{CE}$.

**(b)** determine $AB$, conociendo $AC$ y $CE$.

**(c)** determine el radio del círculo, conociendo $BD = CD$ y $\mu\widehat{BC}$.



**9.71** Si $A$, $B$ y $C$ son puntos de un círculo tales que $\mu\widehat{AB} = \mu\widehat{AC} = \mu\widehat{BC} = 120$, y $P$ es un punto cualquiera de $\widehat{AB}$, pruebe que $PA + PB = PC$.

**9.72** **(Teorema de la Mariposa)**
Sea $\overline{PQ}$ una cuerda de un círculo $\mathscr{C}$, y $M$ su punto medio. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ otras dos cuerdas de $\mathscr{C}$ que pasan por $M$, con $A$ y $C$ del mismo lado de $\overleftrightarrow{PQ}$. Si $X$ e $Y$ son los puntos de corte de $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ con $\overline{PQ}$, pruebe que $M$ es el punto medio de $\overline{XY}$.

**9.73** Si tenemos dos polígonos semejantes, pruebe que:

**(a)** si son cíclicos, entonces sus circunradios están en la misma razón que sus lados.
**(b)** si uno de ellos es cíclico, entonces el otro también.
**(c)** si son circunscribibles, entonces sus inradios están en la misma razón que sus lados.
**(d)** si uno de ellos es circunscribible, entonces el otro también.

**9.74** **(a)** El perímetro de un polígono inscrito en un círculo es menor que el perímetro de cualquiera de los polígonos circunscritos a ese mismo círculo.
**(b)** El área de un polígono inscrito en un círculo es menor que el área de cualquiera de los polígonos circunscritos a ese mismo círculo.

**9.75** Si $r$ es el circunradio de un n-ágono regular, pruebe que:

**(a)** su área es $\frac{1}{2} \cdot n \cdot r^2 \cdot sen(\frac{360}{n})$.
**(b)** su perímetro es $2 \cdot n \cdot r \cdot sen(\frac{180}{n})$.
**(c)** su área se puede expresar como $n \cdot r^2 \cdot sen(\frac{180}{n}) \cdot cos(\frac{180}{n})$.

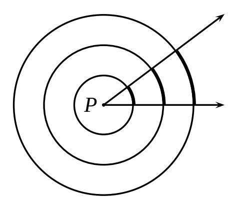
# Comentarios del Capítulo 9

⟨1⟩Algunos autores utilizan las palabras ***círculo*** y ***circunferencia*** de manera distinta a como nosotros las empleamos en este texto: para algunos, lo que nosotros definimos aquí es la *circunferencia*, siendo el círculo lo que nosotros definimos como el *interior del círculo*; para otros la circunferencia es lo que nosotros definimos como la *longitud del círculo*.

⟨2⟩Note que esta definición de *círculos congruentes* está de acuerdo con el empleo de la palabra *congruente* para segmentos, ángulos y triángulos. La idea que ha estado en el fondo siempre es que dos figuras geométricas son congruentes, si tienen el mismo tamaño y la misma forma.
Por otro lado, no tiene sentido establecer la noción de *semejanza* de círculos pues, desde el punto de vista puramente intuitivo, cualesquiera dos círculos son semejantes: ***tienen la misma forma***.

⟨3⟩Como veremos, en esta proposición usaremos, por primera vez, el *Postulado de completación* de Euclides (***todo número real positivo tiene una raíz cuadrada***). De hecho, la proposición en sí describe una propiedad de completitud, no sólo de la recta, sino del plano: si el plano *tuviera agujeros*, y *algunos puntos, que debieran estar ahí, faltasen*, esta proposición no sería cierta. Desde el punto de vista métrico (que es el que estamos desarrollando), no tenemos este problema, pues contamos con la ***completación*** de Euclides del sistema de números reales.

⟨4⟩Note que la medida angular de un arco no depende del círculo: si es un semicírculo, su medida es fija e igual a 180; si no es un semicírculo, su medida depende sólo del ángulo central correspondiente. Por esta razón no debe confundirse *la medida angular* de un arco de un círculo con lo que normalmente se llama *la longitud* del arco. En los círculos concéntricos, los arcos correspondientes al mismo ángulo central tienen la misma medida angular, y obviamente no tienen la misma longitud.




⟨5⟩Note que aquí también el significado intuitivo de la palabra congruente es que las dos figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma, o que una coincide con la otra al moverla rígidamente.
Por otro lado, no tiene sentido establecer la noción de *semejanza* de arcos pues, desde el punto de vista puramente intuitivo, cualesquiera dos arcos son semejantes: ***tienen la misma forma***.

⟨6⟩Tradicionalmente se atribuye a Thales de Mileto el descubrimiento de este resultado.

⟨7⟩Dicha propiedad también caracteriza los cuadriláteros cíclicos, pero para poder probar el recíproco de esta proposición, debemos extender los límites de la teoría más allá de los de este curso de Geometría elemental.

⟨8⟩La deducción de esta fórmula de área se debe a un matemático hindú llamado ***Brahmagupta*** (598-670 d. C.). Esta fórmula generaliza la de Herón para el cálculo del área de un triángulo en función de sus lados.

⟨9⟩Esta proposición debió haberse enunciado como un postulado en los Elementos de Euclides, pero no se percibió su necesidad; decimos esto porque la primera proposición de los ***Elementos*** la usa como ya establecida.

⟨10⟩Este hecho se usa para dibujar un hexágono regular con sólo un canto recto y un compás.

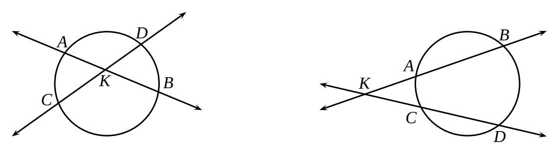
## Orientación para resolver los problemas del Capítulo 9

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios del 9.1 al 9.18; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 9.1 al 9.11, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 9.12 al 9.16, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 9.17 al 9.18.

Del mismo modo, creemos que el estudiante debería enfrentar solo los ejercicios del 9.19 al 9.75; de los cuales consideramos, sin pretender ser objetivos al respecto, que son de ***dificultad baja*** los ejercicios del 9.19 al 9.67, de ***dificultad intermedia*** los ejercicios del 9.68 al 9.71, y de ***dificultad alta*** los ejercicios del 9.72 al 9.75.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

**9.2:** para la prueba del 9.11.4, tome un segmento conveniente entre un punto de corte de una de las rectas con el círculo, y uno de la otra; para la prueba del 9.11.6, trace $\overline{BC}$ en




**9.7:** trace un diámetro desde uno de los vértices del triángulo.

**9.8:** use el ejercicio 7.8 y el ejercicio anterior.

**9.9:** triangule la región determinada por el triángulo desde el incentro y sume las áreas parciales.

**9.10:** para la parte **(a)**, vía el corolario 9.11.5, exprese los lados y el semiperímetro en términos de las longitudes de los segmentos tangentes desde los vértices.

**9.11:** considere el punto $Z$, cenit (o acimut) del observador, y el punto $Q$ de corte entre $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overline{CE}$.

**9.12:** **(a)** use el Teorema de la altura de Euclides; **(d)** use un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro de un círculo, y cuya medida es la suma de las longitudes de los dos segmentos dados.

**9.16:** para la parte **(a)** puede usar los ejercicios 7.13 y 9.8 (solución algebraica), o considerar dos lados correspondientes que no son diámetros de sus respectivos circuncírculos (¿cómo sabemos que existen?), y los triángulos determinados por sus respectivos circuncentros y los extremos de dichos lados (solución geométrica); para la parte **(b**) puede usar los ejercicios 6.22, 7.13 y 9.9 (solución algebraica), o considerar dos lados correspondientes y los triángulos determinados por sus respectivos incentros y los extremos de dichos lados, y usar los ejercicios 3.14 y 6.13 (solución geométrica).

**9.18:** para la segunda parte de la parte **(a)**, suponga que pasa por un segundo punto y pruebe que deben ser iguales, trazando los radios hasta los puntos de tangencia y usando semejanzas; para la existencia de las tangentes comunes internas en la parte **(d)**, procedemos así: si $H$ fuera el punto de corte de ambas con $\overleftrightarrow{PQ}$, determine cuánto debe valer $PH$ y $QH$, en términos de $a$, $b$ y $c = PQ$; tome $H$ sujeto a esas condiciones y verifique que $H$ está fuera de ambos círculos; tome las tangentes desde $H$ a uno de ellos, y verifique que también son tangentes al otro. Para la existencia de las tangentes comunes externas, considere por separado los casos en que $a = b$ y $a \neq b$; en este último caso, proceda de manera semejante al de la existencia de las tangentes comunes internas.

**9.26:** para la parte **(a)**, use el ejercicio 3.24 y la proposición 5.7; para la parte **(b)**, use el ejercicio 9.10.

**9.29:** para la parte **(a)**, trace el segmento desde el centro hasta el punto de tangencia.

**9.34:** trace $\overline{PC}$.

**9.39:** extienda $\overline{AB}$ hasta $\overline{CD}$, diámetro del círculo mayor, y use el ejercicio 9.12.(b).

**9.43:** trace $\overline{AD}$.

**9.53:** considere por separado los casos en que los círculos son tangentes interiormente y exteriormente.

**9.58:** considere el circuncírculo de $\triangle ABC$, prolongue $\overline{AD}$ hasta el punto $E$ de ese círculo y verifique que $\triangle ABE \sim \triangle ADC \sim \triangle BDE$.

**9.63:** para la parte **(b)**, use la proposición 9.18.

**9.64:** para la parte **(a)**, en el caso que hay que razonar, verifique que $\overline{CB} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{DB} \parallel \overline{PQ}$); para la parte **(c)**, considere $\overline{AB}$ y use la proposición 9.12.

**9.68:** use la proposición 9.9 y trace $\overline{CP}$.

**9.69:** verifique que $T$ está en $\overline{QS}$ y en $\overline{PR}$.

**9.70:** para la parte **(c)**, use el ejercicio 9.7.

**9.71:** use el Teorema de Ptolomeo.

**9.72:** tome $X_1$ y $X_2$ los pies de las alturas de los triángulos $\triangle AXM$ y $\triangle DXM$ desde el vértice $X$, respectivamente. Tome $Y_1$ y $Y_2$ los pies de las alturas de los triángulos $\triangle BYM$ y $\triangle CYM$ desde el vértice $Y$, respectivamente. Verifique que $\triangle MX_1X \sim \triangle MY_1Y$, $\triangle MX_2X \sim \triangle MY_2Y$, $\triangle AX_1X \sim \triangle CY_2Y$ y $\triangle DX_2X \sim \triangle BY_1Y$. Establezca las proporciones correspondientes y, utilizando la potencia de $X$, mediante $\overline{AD}$ y $\overline{PQ}$, y la de $Y$, mediante $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$, verifique que $\frac{MX^2}{MY^2} = \frac{PM^2-MX^2}{PM^2-MY^2}$.

**9.73:** para la parte **(a)**, use el ejercicio 9.16; para la parte **(b)**, use el ejercicio 6.13.

**9.74:** tome rayos desde el centro del círculo, en la dirección de los vértices del polígono inscrito; considere los cortes de estos rayos con el polígono circunscrito y aplique el ejercicio 6.50.

**9.75:** para la parte **(a)**, considere el triángulo formado por el centro del círculo y dos vértices consecutivos del polígono, y trace la altura desde uno de esos vértices; para la parte **(b)**, en la construcción anterior, tome ahora la altura desde el centro; para la parte **(c)**, aplique la fórmula del seno del ángulo doble al resultado de la parte (a).

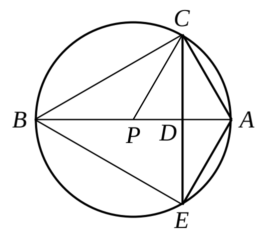
**(Longitud de un círculo y de un arco)**

Hallar la longitud de un círculo ha sido, junto con el de encontrar su área, uno de los grandes problemas históricos de las matemáticas. La noción implícita en su solución es la del *límite* de una sucesión de números reales, y más particularmente la noción de *supremo* de un conjunto de números reales (ya que la sucesión en cuestión resulta creciente y acotada superiormente). Por no ser ésta una noción de las que consideramos elementales en el estudio del sistema de los números reales, hemos preferido desarrollar esta parte de la Geometría en estos comentarios.

En nuestro desarrollo de la Geometría hemos postulado la manera de medir la longitud de los segmentos, a partir de la cual medimos la longitud de cualquier poligonal, simplemente sumando las longitudes de los segmentos que la componen. La pregunta que intentamos responder es *¿cómo medir la longitud de lugares geométricos no compuestos por segmentos*? Nos dedicaremos sólo al caso del círculo, cuya solución constituirá un método general para el resto de los casos; ilustraremos otra aplicación del método para el caso de un arco circular.

Intuitivamente, la longitud de un círculo sería la longitud del segmento que se obtiene si cortáramos el círculo y lo extendiéramos, tal como lo haríamos con un trozo de alambre de forma circular. Pero las nociones intuitivas de **cortar** y **extender** no tienen asidero en nuestra teoría. Partiremos más bien de otra idea simple que es la de **aproximar** el círculo por poligonales (que es en lo que consiste propiamente el método de exhaución de Eudoxo, y del cual hemos hablado anteriormente).

Fijemos un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, inscribamos en él un n-ágono regular $\mathscr{P}_n$ (ver el ejercicio 9.28), y llamemos $l_n$ a la longitud de cada uno de sus lados. Si el número de lados es suficientemente grande, intuitivamente podemos decir que el perímetro del polígono, $p_n = n \cdot l_n$, estará muy próximo a la longitud del círculo. Veamos qué pasa con la longitud del lado del polígono (y por tanto, con su perímetro), si construimos a partir de él un 2n-ágono regular $\mathscr{P}_{2n}$ (es decir, si el número de sus lados fuera el doble).




Consideremos uno de los lados de $\mathscr{P}_n$, digamos $\overline{CE}$ (con lo que $l_n = CE$), su punto medio $D$, y $\overleftrightarrow{AB}$ su mediatriz (con lo que $\overline{AB}$ es un diámetro de $\mathscr{C}_{P,r}$ perpendicular a $\overline{CE}$). Como, por LAL, $\triangle ADC \cong \triangle ADE$, tendremos que $\overline{CA} \cong \overline{AE}$. Repitiendo este proceso con cada uno de los lados de $\mathscr{P}_n$, y tomando como lados a los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AE}$, construimos un 2n-ágono regular $\mathscr{P}_{2n}$ (con lo que $l_{2n} = AC$).

Como $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tendremos, por el Teorema del cateto de Euclides, que

$$AC^2 = (l_{2n})^2 = 2 \cdot r \cdot AD.$$

Como también $\triangle PCD$ es un triángulo rectángulo tendremos, por el Teorema de Pitágoras, que

$$DP^2 = (r - AD)^2 = r^2 - (\frac{l_n}{2})^2.$$

Eliminando $AD$ en estas ecuaciones tenemos

$$l_{2n} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - l_n^2}}.$$

Si comenzáramos, por ejemplo, con un cuadrado inscrito en el círculo tendríamos $l_4 = r \cdot \sqrt{2}$. Construyendo, a partir de este cuadrado, polígonos de 8, 16 y 32, por el procedimiento antes expuesto, tendríamos la sucesión de las longitudes de sus lados así:

$$l_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad l_{16} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \quad l_{32} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

Cuando hacemos los cálculos para el polígono regular de 512 lados tenemos que $p_{512} \approxeq 6.2831 \cdot r$; con lo que razonablemente pensamos que la longitud del círculo de radio $r$ debe ser aproximadamente $6.2831 \cdot r$. El problema es que no disponemos de una definición matemática de lo que significa la longitud del círculo, para verificar la validez de esta afirmación (no podemos obtener la longitud del círculo simplemente añadiendo las longitudes de ciertos segmentos, como hicimos para obtener el perímetro de un polígono, porque un círculo no contiene segmento alguno, por muy pequeño que sea).

Definamos pues lo que entenderemos por *la longitud de un círculo*. Partimos de un polígono cualquiera $\mathscr{P}$ inscrito en $\mathscr{C}_{P,r}$, tomamos uno de sus lados $\overline{AB}$, y tomamos un punto $C$ en el interior del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a ninguno de los vértices de $\mathscr{P}$. Construimos un nuevo polígono $\mathscr{P}_1$, sustituyendo el lado $\overline{AB}$ de $\mathscr{P}$ por los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$. Así, el perímetro de $\mathscr{P}_1$ es mayor que el perímetro de $\mathscr{P}$ (ya que, gracias a la Desigualdad del triángulo, $AB < AC + CB$). De tal manera que, añadiendo nuevos vértices por este mismo procedimiento, construiremos polígonos inscritos de perímetro cada vez mayor.

Ahora, como el perímetro de cualquier polígono circunscrito al círculo es mayor que el de cualquiera de los polígonos inscritos (ver el ejercicio 9.74), tendremos que este crecimiento en el perímetro de los polígonos inscritos no es ilimitado. Muy especialmente, si circunscribimos un cuadrado a $\mathscr{C}_{P,r}$, su perímetro es $8 \cdot r$; de manera que el perímetro de cualquier polígono inscrito en $\mathscr{C}_{P,r}$ es menor que $8 \cdot r$. De este modo, podemos definir la longitud de un círculo mediante:

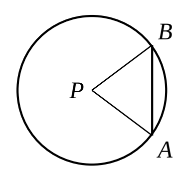
***La longitud de un círculo*** *es el menor de los números que son mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito*

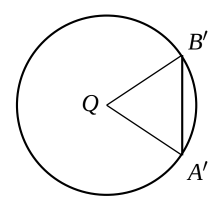
Como consecuencia de esta definición tendremos que, fijado cualquier número $\varepsilon > 0$ (representante del margen de error que nos permitimos cometer en la medición de la longitud del círculo), podemos inscribir un polígono en el círculo de tal manera que la diferencia entre la longitud del círculo y el perímetro del polígono sea menor que $\varepsilon$.

Antes que nada trataremos de expresar dicha longitud en términos del radio del círculo, que es la manera usual de expresar la longitud de un círculo.

Para tal fin, veamos que la razón entre la longitud de un círculo y su diámetro es independiente del tamaño del círculo; hecho que nos dará pie para definir el número $\pi$, tan notable en las matemáticas y de características muy peculiares.

Comenzamos con dos círculos $\mathscr{C}_{P,r}$ y $\mathscr{C}_{Q,s}$, y llamemos $l$ y $m$ a sus respectivas longitudes. Inscribimos en éstos sendos $n$-ágonos regulares $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$, respectivamente, y llamemos $p_n$ y $q_n$ a sus respectivos perímetros. Consideramos el lado $\overline{AB}$ de $\mathscr{P}$, y el lado $\overline{A'B'}$ de $\mathscr{Q}$. Como, por la proposición 9.9 y la observación 8.1.(b), $m\angle APB = m\angle A'QB' = \frac{360}{n}$, y los lados $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son proporcionales a los lados $\overline{QA'}$ y $\overline{QB'}$ tendremos, por LAL, que $\triangle APB \sim \triangle A'QB'$. Así, $\frac{A'B'}{s} = \frac{AB}{r}$; de donde $\frac{n \cdot A'B'}{2 \cdot s} = \frac{n \cdot AB}{2 \cdot r}$, es decir, $\frac{q_n}{2 \cdot s} = \frac{p_n}{2 \cdot r}$. Por la propiedad de linealidad del supremo, tendremos que $\frac{m}{2 \cdot s} = \frac{l}{2 \cdot r}$.



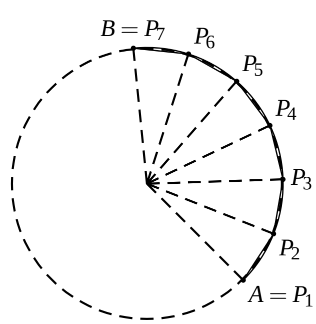



El número real $\frac{l}{2\cdot r}$ se denota por $\pi$. Una de las cosas que se prueban en un curso de Cálculo avanzado es que el número $\pi$ no es racional, y que se pueden calcular aproximaciones de éste con la exactitud que se desee mediante, por ejemplo, el método de aproximación desarrollado anteriormente para la longitud de un círculo, duplicando el número de lados de un polígono respecto al anterior, comenzando con el cuadrado. Algunas de sus aproximaciones útiles son: $3$, $3.14$, $3\frac{1}{7}$, $3.1416$, $\frac{355}{113}$, $3.14159265358979$. Ahora, como este número es el mismo para todos los círculos, tendremos la manera usual de expresar la longitud de un círculo de radio $r$

***La longitud de un círculo de radio*** $r$ es $l = 2\cdot\pi\cdot r$.

Estos hechos se conocían en la antigüedad llamada clásica, y se calcularon con bastante exactitud aproximaciones de $\pi$. Tal vez la primera noticia acerca de un intento de evaluarlo data del año 1600 a. C., acreditado a un egipcio llamado ***Ahmes***, y cuyo resultado fue: 3,1605. ***Arquímedes*** (282-212 a. C.) estimó el valor de $\pi$, inscribiendo y circunscribiendo en un círculo polígonos de 96 lados, calculando sus perímetros y razonando que la longitud del círculo estaría entre esos dos valores; su aproximación resultó en que $\pi$ estaba entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{11}$, es decir, entre 3.1429 y 3.1408. ***Ptolomeo*** (100-168 d. C.) evaluó $\pi$ como 3.14166, y ***Vieta*** (1540-1603 d. C.) en 3.141592653. En el cálculo avanzado se prueba que $\pi = 4\cdot(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots)$. Con el uso de las modernas computadoras se han hecho aproximaciones de hasta 100000 dígitos: grado de exactitud que, en realidad, no tiene valor práctico.

Procedamos ahora a averiguar la longitud de un arco circular. Para definirla utilizamos el mismo procedimiento que para definir la longitud del círculo completo. Primero, dividimos el arco dado $\widehat{AB}$ en $n$ arcos congruentes que no se crucen y que sólo se toquen en los extremos (tal como se hace para construir un $n$-ágono regular inscrito en un círculo), y trazamos las cuerdas correspondientes. Así tendremos lo que se llama una *poligonal regular de n lados inscrita en el arco*, y definimos la longitud del arco circular mediante:




***La longitud de un arco circular*** *es el menor de los números que son mayores que la longitud de cualquier poligonal inscrita*.

Como consecuencia de esta definición tendremos que, fijado cualquier número $\varepsilon > 0$ (representante del margen de error que nos permitimos cometer en la medición de la longitud del arco circular), podemos inscribir una poligonal en el arco circular de tal manera que la diferencia entre la longitud del arco circular y la longitud de la poligonal sea menor que $\varepsilon$.

Antes que nada trataremos de expresar dicha longitud en términos del radio del círculo que contiene al arco, que es la manera usual de expresar la longitud de un arco.

Para tal fin convendrá considerar un círculo como un arco circular cuya medida es 360; de modo que podremos considerar su longitud como la de un arco de medida 360. Así podemos enunciar el siguiente resultado general sin mayores complicaciones:

*Las longitudes de dos arcos de círculos congruentes son proporcionales a sus medidas angulares*.

En otras palabras:

$$\frac{longitud\ de\ \widehat{AB}}{\mu\widehat{AB}} = \frac{longitud\ de\ \widehat{A'B'}}{\mu\widehat{A'B'}}.$$

Esto es fácil de verificar en casos sencillos: si duplicamos la medida de un arco, se duplicará la longitud; si se divide la medida por 7, se dividirá la longitud por 7; y así sucesivamente. Sin embargo, una demostración de este teorema es demasiado difícil para este curso.

Ahora bien, si $m$ es la longitud de un círculo de radio $r$ tendremos, a partir del resultado inmediato anterior, que $\frac{l}{\mu\widehat{AB}} = \frac{m}{360}$. Pero, como $m = 2 \cdot \pi \cdot r$, tendremos la manera usual de expresar la longitud de un arco de un círculo de radio $r$ en función de su medida angular:

***La longitud de un arco circular*** *es* $l = \frac{\mu\widehat{AB}}{180} \cdot \pi \cdot r$, *donde* $\mu\widehat{AB}$ *es su medida angular y* $r$ *es el radio del círculo al que pertenece*.

Note que, si $\widehat{AB}$ fuera un círculo completo, recuperamos, a partir de esta última expresión, la fórmula para calcular la longitud de un círculo.

Aprovecharemos esta ocasión para dejar sentada la unidad de medida de ángulos más común en el Cálculo: *el radián*. Se llama *medida radial* de un ángulo a la razón entre la longitud del arco que determina y el radio del círculo. Así, de la fórmula anterior tenemos que

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180} \cdot \mu\widehat{AB},$$

es decir, la medida radial de un ángulo se obtiene multiplicando su medida angular por $\frac{\pi}{180}$. En particular, la medida radial de un ángulo recto es $\frac{\pi}{2}$.

La unidad de medida radial de un ángulo es precisamente el *radian*. El ángulo de un radián es aquel cuyo arco mide lo mismo que el radio del círculo del cual lo consideramos como ángulo central. La medida de un radián será $\frac{180}{\pi} \approxeq 57.3$.

**(El área de un círculo y de un sector circular)**
En primer lugar aclaramos que, una ***región circular*** es la unión de un círculo y su interior. Cuando hablemos del *área de un círculo*, queremos decir el *área de la región circular correspondiente*.

Fijamos un círculo de radio $r$, inscribimos en él un n-ágono regular, y denotamos al área del n-ágono por $A_n$ y su perímetro por $p_n$. Si aumentáramos un vértice a uno de estos polígonos, aumentaríamos su área. Por otro lado, el área de cualquier polígono inscrito será menor que el área de cualquier polígono circunscrito en ese círculo, de manera que el crecimiento en el valor del área de los polígonos inscritos no será indefinido, sino que estará "acotado". Por tanto, es natural definir el área del círculo mediante:

***El área de un círculo*** *es el menor de los números que son mayores que el área de cualquiera de los polígonos inscritos*.

Gracias al ejercicio 9.75,

$$A_n = n \cdot r^2 \cdot sen(\tfrac{180}{n}) \cdot cos(\tfrac{180}{n}) \text{ y } p_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot sen(\tfrac{180}{n}).$$

Así tendremos que

$$\tfrac{2 \cdot A_n}{r \cdot p_n} = cos(\tfrac{180}{n}).$$

De la relación anterior observamos que, cuando $n$ "se hace muy grande", el valor de $cos(\frac{180}{n})$ será "próximo" a $cos(0)$, al mismo tiempo que $A_n$ será próximo al área del círculo, y $p_n$ estará próximo a la longitud del círculo, es decir, a $2 \cdot \pi \cdot r$. Razonando así tendríamos, si denotamos por $A$ el área del círculo, que

***El área de un círculo*** *de radio r es* $A = \pi \cdot r^2$..

Dado un arco $\widehat{AB}$ de un círculo $\mathscr{C}_{P,r}$, llamaremos ***sector circular*** determinado por el arco $\widehat{AB}$ a la unión de todos los segmentos $\overline{PQ}$, donde $Q$ es un punto de $\widehat{AB}$. Por un razonamiento análogo al que hemos desarrollado para el círculo (muy incompletamente, por lo demás), podemos probar que

***El área de un sector circular*** *es* $A = \frac{\mu\widehat{AB}}{360} \cdot \pi \cdot r^2$*, donde* $\mu\widehat{AB}$ *es la medida angular del arco que lo determina y r es el radio del círculo al que pertenece el arco*.

Note que, si $\widehat{AB}$ fuera un círculo completo, recuperamos, a partir de esta última expresión, la fórmula para calcular el área de un círculo.

Concluimos estos comentarios dejando planteados algunos problemas relativos a los resultados establecidos en ellos; en algunos serán necesarios los siguientes conceptos:

Un ***anillo*** es la región determinada por dos círculos concéntricos quitándole, a la región circular determinada por el círculo mayor, el interior del círculo menor.

Un ***segmento circular*** es la región determinada por una cuerda de un círculo y uno de sus arcos correspondientes.

**9.76** Si colocamos una cinta alrededor de la Tierra, ¿cuánto debemos agregar a la cinta para que una persona de 1,85 metros pueda pasar caminando parada por debajo de ella?

**9.77** Calcule las longitudes del incírculo y del circuncírculo, sus áreas, y la del anillo determinado por ellos, en:

**(a)** un cuadrado de lado $l$.
**(b)** un triángulo equilátero de lado $l$.

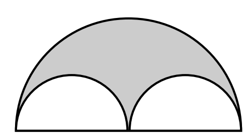
**9.78** Pruebe que:

**(a)** la razón de las longitudes de dos círculos es igual a la razón de sus radios.
**(b)** la razón de las áreas de dos círculos es igual al cuadrado de la razón de sus radios.
**(c)** el área de un círculo es la mitad del producto del radio por su longitud.
**(d)** el área de un sector circular es la mitad del producto del radio por su longitud.

**9.79** Si la longitud de un círculo y el perímetro de un cuadrado son iguales, ¿cuál tendrá área mayor?; ¿cuánto mayor?

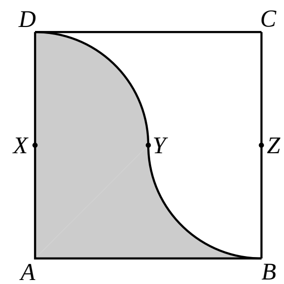
**9.80** **(Generalización del Teorema de Pitágoras)**
Si se construyen tres círculos, cada uno de ellos con diámetros del tamaño de los lados de un triángulo rectángulo dado, pruebe que el área del construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos.

**9.81** Si el diámetro de cada semicírculo pequeño es igual al radio del semicírculo grande, y el radio del semicírculo grande es $r$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

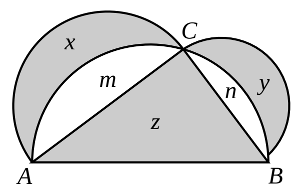


**9.82** Dados dos círculos concéntricos y una cuerda del círculo mayor, tangente al círculo menor, pruebe que el área del anillo determinado por los círculos es igual a un cuarto del producto de $\pi$ y el cuadrado de la longitud de la cuerda.

**9.83** El cuadrilátero $\square ABCD$ es un cuadrado de lado $s$; $X$ y $Z$ son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente; los centros de los arcos $\widehat{DY}$ y $\widehat{BY}$ son $X$ y $Z$, respectivamente. Determine el área de la región sombreada.




**9.84** Los tres semicírculos de la figura tienen como diámetros los lados del triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en $C$. Las áreas de las regiones son $x$, $y$, $z$, $m$ y $n$, como se indica. Pruebe que $x+y=z$.

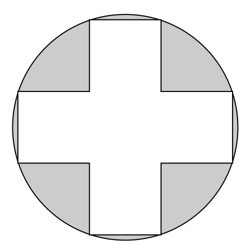



**9.85** Determine el área de:

**(a)** un segmento circular.

**(b)** la región limitada por dos cuerdas de un círculo que no se cortan, salvo en sus extremos.

**9.86** El 12-ágono que se muestra en la figura, tiene ocho de sus vértices en un círculo, todos sus lados son congruentes y, además, todos sus ángulos son rectos. Si se sabe que la longitud de cada lado es $l$, determine el área de la parte de la región circular exterior al polígono.

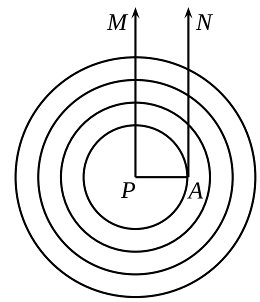


**9.87** Un círculo de longitud $l$ se inscribió en un rombo cuyo perímetro es $p$. Calcule el área de la región limitada por el círculo y el rombo.

**9.88** Un trapecio isósceles, cuyas bases miden $l$ y $m$, se circunscribe a un círculo. Determine el área de la región limitada por el círculo y el trapecio.

**9.89 (Construcción de un blanco de tiro)**

Un blanco de tiro, en el cual se supone que un aficionado dé en su región central con tanta frecuencia como en cualquier región anular, se construye de la siguiente manera:
Se toma como radio de la región central la distancia $PA = r$ entre dos rayos paralelos $\overrightarrow{PM}$ y $\overrightarrow{AN}$.
El círculo de radio $r$ y centro $P$ interseca a $\overrightarrow{PM}$ en $Q$.
La perpendicular a $\overrightarrow{PM}$ en $Q$ corta a $\overrightarrow{AN}$ en $B$.
Se traza un círculo con radio $PB = r_1$ y centro $P$.



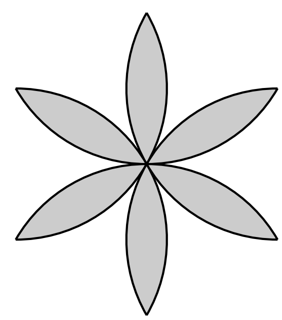

Este proceso se repite, trazando perpendiculares en $R$ y $S$, y círculos concéntricos con radios $PC = r_2$ y $PD = r_3$. Desde luego, pueden construirse más anillos.

**(a)** Exprese $r_1$, $r_2$ y $r_3$ en función de $r$.
**(b)** Muestre que el área de la región central, y la de los anillos, son iguales.

**9.90** El minutero de un reloj en la torre de un edificio público tiene 2 metros de largo. Determine la distancia que recorre la punta del minutero en 5 minutos. ¿Cuántos centímetros recorrerá la punta del minutero en 1 minuto?

**9.91** Un octógono regular se inscribió en un círculo de radio $r$. Determine el área de la parte de la región circular que está en el exterior del octógono.

**9.92** El radio de cada uno de los arcos circulares que forman la figura de seis pétalos es el mismo que el radio del círculo que contiene las puntas exteriores de todos los pétalos. Si el radio es $r$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



**9.93 (El área de un óvalo)**

Constrúyase un óvalo de la manera siguiente: partimos de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, diámetros perpendiculares de un círculo de radio $r$. Con $A$ como centro y $AB$ como radio, trace un arco desde $B$ que interseque a $\overleftrightarrow{AC}$ en $G$. Análogamente, con $B$ como centro y $AB$ como radio, trace un arco desde $A$ de manera que interseque a $\overleftrightarrow{BC}$ en $H$. Finalmente, con $C$ como centro y $CG$ como radio, trace $\widehat{GH}$. Determine el área del óvalo $ADBGH$.

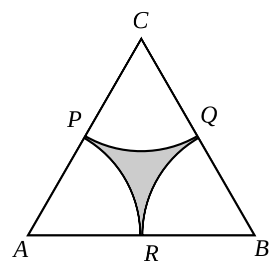
**9.94** **(a)** ¿Cuál es la razón entre la apotema de un polígono regular y su inradio?
**(b)** ¿Cuál es la razón entre la apotema de un polígono regular y su circunradio?

**9.95** ¿Cuál será el radio de un círculo, si su longitud es igual al área de la región circular correspondiente?

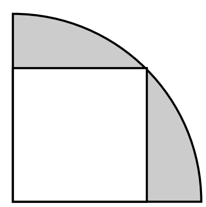
**9.96** ¿Cuál es la razón de las áreas de un triángulo equilátero circunscrito a un círculo y de un triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo?

**9.97** ¿Pasará más agua por tres tubos de 2 centímetros de diámetro interior, o por un tubo de 6 centímetros de diámetro interior?

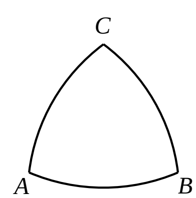
**9.98** La longitud de un lado de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ es $l$, y $P$, $Q$ y $R$ son los puntos medios de sus lados. Los arcos $\widehat{PQ}$, $\widehat{PR}$ y $\widehat{QR}$ tienen como centros los vértices del triángulo. Determine el área y la longitud de la frontera de la región sombreada.




**9.99** En la figura, se muestra un cuadrado inscrito en un sector de 90 cuyo radio es $r$. Calcule el área de la región sombreada.



**9.100** Cada uno de los vértices de la figura $ABC$ es el centro del arco opuesto. La figura tiene la propiedad interesante de que, cuando se hace rodar entre dos rectas paralelas, siempre tocará las dos rectas, tal como lo haría una circunferencia. Si el radio de cada arco es $r$, calcule el área y el perímetro de la figura $ABC$.



# Apéndice A

# Separación de la recta

Para realizar las pruebas que quedaron pendientes de las propiedades de la Interposición ((S3), (S4), (S5) de la proposición 1.2) y de la congruencia de segmentos ((CS4) y (CS5) de la proposición 1.5) estableceremos, en primer lugar, un resultado que servirá de enlace entre la Regla y la Interposición, y que traducirá este concepto en términos del orden de los números reales. Para simplificar su enunciado convendremos en que, para tres números reales $x$, $y$ y $z$,

$$x\text{-}y\text{-}z \quad \text{significará que} \quad x<y<z \quad \text{o} \quad z<y<x.$$

**Lema A.1 (Coordinación)**
*Dados tres puntos distintos y colineales $A$, $B$ y $C$, a los que corresponden respectivamente los números reales $x$, $y$ y $z$ (en un sistema de coordenadas de la recta en que se encuentran), se tiene que $A$-$B$-$C$ si, y sólo si, $x$-$y$-$z$.*

**Prueba** Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos distintos y colineales, y $x$, $y$ y $z$ sus respectivas coordenadas (en un sistema de coordenadas de la recta en que se encuentran).
( $\Rightarrow$ ) Supongamos que $A$-$B$-$C$; con lo que $AB+BC=AC$, es decir,

(1) $$|y-x|+|z-y|=|z-x|.$$

Al ser los tres puntos en cuestión distintos dos a dos tenemos, por el Postulado de la Regla, que los tres números reales son distintos dos a dos; con lo que, por la tricotomía del orden de los números reales, tenemos que debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:
$x<y$, $x<z$, $y<z$; de donde $x<y<z$, y así $x$-$y$-$z$.
$x<y$, $x<z$, $z<y$; de donde, por (1), $y=z$; contrario a lo supuesto.

$x < y$, $z < x$, $z < y$; de donde, por (1), $y = x$; contrario a lo supuesto.
$y < x$, $x < z$, $y < z$; de donde, por (1), $y = x$; contrario a lo supuesto.
$y < x$, $z < x$, $y < z$; de donde, por (1), $y = z$; contrario a lo supuesto.
$y < x$, $z < x$, $z < y$; de donde, $z < y < x$, y así $x$-$y$-$z$.
De este modo tenemos necesariamente que $x$-$y$-$z$, tal como se esperaba.
$(\Leftarrow)$ Supongamos que $x$-$y$-$z$; con lo que

$$x < y < z \quad \text{o} \quad z < y < x.$$

Si $x < y < z$, tendremos que $AB = |y - x| = y - x$, $BC = |z - y| = z - y$ y $AC = |z - x| = z - x$ (ya que $y - x > 0$, $z - y > 0$ y $z - x > 0$). Además tenemos que $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$; con lo que, por el hecho de que $A$, $B$ y $C$ son distintos y colineales, tendremos que $A$-$B$-$C$.
Si $z < y < x$, tendremos, del mismo modo, que $C$-$B$-$A$. Pero, por (S2), esto es lo mismo que $A$-$B$-$C$.

■

Probaremos ahora, por separado, las partes que quedaron pendientes de la proposición 1.2 (página 5).

**Proposición A.1 (S3)**
*Dados tres puntos distintos y colineales, se tiene que exactamente uno de ellos se encuentra entre los otros dos.*

**Prueba** Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos distintos y colineales, y $x$, $y$ y $z$ sus respectivas coordenadas (en un sistema de coordenadas de la recta en que se encuentran). Al ser los tres puntos en cuestión distintos dos a dos, tenemos, por el Postulado de la Regla, que los tres números reales son distintos dos a dos; con lo que, por la tricotomía del orden de los números reales, tenemos que debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes tres posibilidades:
$x < y < z$ o $z < y < x$; de donde, por el lema A.1, $A$-$B$-$C$.
$x < z < y$ o $y < z < x$; de donde, por el lema A.1, $A$-$C$-$B$.
$y < x < z$ o $z < x < y$; de donde, por el lema A.1, $B$-$A$-$C$.
De este modo, siempre uno, y sólo uno, de los puntos está entre los otros dos.

■

**Proposición A.2 (S4)**
*Dados dos puntos distintos $A$ y $B$, se tiene que:*

**(a)** *existe un punto $C$ tal que $A$-$C$-$B$; y*
**(b)** *existe un punto $D$ tal que $A$-$B$-$D$.*

**Prueba** Sean $A$ y $B$ dos puntos distintos, y $x$ y $y$ sus respectivas coordenadas (en un sistema de coordenadas de la recta que ellos determinan). Al ser los dos puntos en cuestión distintos tenemos, por el Postulado de la Regla, que los dos números reales son distintos; con lo que, por la tricotomía del orden de los números reales, tenemos que debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes dos posibilidades:

$$x < y \quad \text{o} \quad y < x.$$

Supongamos que $x < y$.
**(a)** Como $x+x < x+y$ (al sumar $x$ a ambos miembros de la desigualdad) y $x+y < y+y$ (al hacer lo mismo con $y$), tenemos que $2x < x+y < 2y$. De este modo, considerando el número real $z = \frac{x+y}{2}$, tenemos que $x < z < y$. Llamando $C$ al punto de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que corresponde al número real $z$, tenemos, por el lema A.1, que $A$-$C$-$B$.
**(b)** Consideremos el número real $z = y+1$; con lo que $x < y < z$. Llamando $D$ al punto de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que corresponde al número real $z$, tenemos, por el lema A.1, que $A$-$B$-$D$.
De manera semejante se hace la prueba de ambas partes, si $y < x$.

■

**Proposición A.3 (S5)**
*Dados cuatro puntos distintos y colineales, se tiene que siempre podremos nombrarlos en un cierto orden A, B, C y D, de tal manera que A-B-C-D.*

**Prueba** Sean $P$, $Q$, $R$ y $S$ cuatro puntos distintos y colineales, y tomemos $x$, $y$, $z$ y $w$ cuatro números reales que correspondan, aunque no respectivamente, a sus coordenadas (en un sistema de coordenadas de la recta en que se encuentran). Por la tricotomía del orden de los números reales, estos cuatro números reales, al ser distintos, siempre aparecen ordenados entre sí, digamos, en la forma $x < y < z < w$. Nombremos $A$, $B$, $C$ y $D$ a los puntos de la recta que correspondan, respectivamente, a los números reales $x$, $y$, $z$ y $w$. De las relaciones $x < y < z$, $x < y < w$, $x < z < w$ y $y < z < w$ tenemos, por el lema A.1, que $A$-$B$-$C$, $A$-$B$-$D$, $A$-$C$-$D$ y $B$-$C$-$D$. Como, por (S3), no puede haber ninguna otra relación de Interposición entre estas ternas, tenemos que esta designación conlleva la relación $A$-$B$-$C$-$D$. Además, como por el Postulado de la Regla, $\{A, B, C, D\}$ y $\{P, Q, R, S\}$ deben ser el mismo conjunto, tenemos nombrados a los puntos $P$, $Q$, $R$ y $S$ con las designaciones $A$, $B$, $C$ y $D$ de tal manera que $A$-$B$-$C$-$D$, como queríamos.

■

Como lo necesitaremos expresamente en lo que sigue, exponemos aparte la siguiente propiedad de la Interposición, que nos simplifica el trabajo para determinar cuándo se cumple que $A$-$B$-$C$-$D$.

**Lema A.2** *Dados cuatro puntos distintos y colineales $A$, $B$, $C$ y $D$ con $A$-$B$-$C$, se tiene que $A$-$B$-$C$-$D$, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

**(a)** *$A$-$C$-$D$; o*
**(b)** *$B$-$C$-$D$.*

**Prueba** Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ cuatro puntos distintos y colineales con $A$-$B$-$C$. Supongamos que se cumple (a), es decir, que $A$-$C$-$D$.
Llamemos, por (S5), a los cuatro puntos en cuestión: $P$, $Q$, $R$ y $S$, de tal manera que $P$-$Q$-$R$-$S$. $P \neq B$, ya que $P$ no se encuentra entre ningún par de puntos de entre las ternas que determinan la posición $P$-$Q$-$R$-$S$, pero, sin embargo, $B$ si se encuentra entre dos de ellos, a saber, $A$ y $C$. Por razones del todo análogas tenemos que $P \neq C$, $S \neq B$, $S \neq C$. Así tenemos que $A$-$B$-$C$-$D$ o $A$-$C$-$B$-$D$ o $D$-$B$-$C$-$A$ o $D$-$C$-$B$- $A$. Como $A$-$C$-$B$-$D$ ($D$-$B$-$C$-$A$) nos dice que $A$-$C$-$B$, y esto junto con $A$-$B$-$C$ contradice (S3), tenemos, por (S2) y (S3), que debe cumplirse $A$-$B$-$C$-$D$ ($D$-$C$-$B$-$A$), como queríamos.
De manera semejante se hace la prueba en caso de que se cumpla (b).

■

Probaremos ahora un resultado que establece cómo un punto interior de un segmento divide a éste en otros dos segmentos que lo cubren completamente; usaremos este resultado en la prueba de las dos proposiciones que le siguen.

**Lema A.3** *Si $A$, $B$ y $C$ son tres puntos tales que $A$-$C$-$B$, entonces $\overline{AB}$ es la unión de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.*

**Prueba** Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos tales que $A$-$C$-$B$.
Probemos primero que $\overline{AC}$ está contenido en $\overline{AB}$; tomemos un punto $P$ en $\overline{AC}$. Si $P = A$ o $P = C$, es claro, por la definición de segmento, que $P$ está en $\overline{AB}$. Si $A$-$P$-$C$, tendremos, por el lema A.2, que $A$-$P$-$C$-$B$, y así $A$-$P$-$B$; con lo que $P$ está en $\overline{AB}$. Por lo tanto, $\overline{AC}$ está contenido en $\overline{AB}$.
Análogamente se prueba que $\overline{CB}$ está contenido en $\overline{AB}$ y así, la unión de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ está contenida en $\overline{AB}$.
Consideremos, ahora, un punto $P$ en $\overline{AB}$.
Si $P = A$ o $P = B$, es claro, por la definición de segmento, que $P$ está en $\overline{AC}$ o $P$ está en $\overline{CB}$ (respectivamente); y así, en cualquier caso, $P$ está en la unión de $\overline{AC}$

y $\overline{CB}$. Supongamos que $A$-$P$-$B$. Considerando los puntos $A$, $P$ y $C$ tenemos, por (S3), que sólo puede cumplirse una de las siguientes tres afirmaciones:

$$(1)\ A\text{-}P\text{-}C \quad (2)\ A\text{-}C\text{-}P \quad (3)\ P\text{-}A\text{-}C.$$

Si se cumple (1), es claro, por la definición de segmento, que $P$ está en $\overline{AC}$.
Si se cumple (2) tendremos, por el lema A.2 (al considerar $A$-$C$-$P$ y $A$-$P$-$B$), que $A$-$C$-$P$-$B$; de donde $C$-$P$-$B$ y de aquí, por la definición de segmento, $P$ está en $\overline{CB}$.
No puede cumplirse (3), ya que en este caso tendríamos, por el lema A.2 (al considerar $P$-$A$-$C$ y $A$-$C$-$B$), que $P$-$A$-$C$-$B$; de donde tenemos que $P$-$A$-$B$, lo cual, junto con $A$-$P$-$B$, contradice (S3). De este modo, en cualquiera de los casos, $P$ está en la unión de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.
Por lo tanto, $\overline{AB}$ es la unión de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.

■

Probaremos ahora la proposición 1.3 (página 7).

**Proposición A.4 (Igualdad de segmentos)**
*Dos segmentos son iguales si, y sólo si, sus extremos coinciden.*

**Prueba** Sean $s$ y $t$ dos segmentos con extremos $A$ y $B$, y $C$ y $D$, respectivamente.
($\Rightarrow$) (Por reducción al absurdo)
Supongamos que

$$s = t. \tag{1}$$

Supongamos, además, que $A \neq C$ y $A \neq D$.
Por (1), $A$ está en $t$; con lo que, por la definición de segmento,

$$C\text{-}A\text{-}D.$$

Por (1), $B$ está en $t$; con lo que, por el lema A.3,

$$B \text{ está en } \overline{AC} \quad \text{o} \quad B \text{ está en } \overline{AD}.$$

Supongamos que $B$ está en $\overline{AC}$.
Como $B \neq A$ tendremos, por la definición de segmento, que

$$B = C \quad \text{o} \quad A\text{-}B\text{-}C.$$

Si acaso $B = C$, tendríamos que $B$-$A$-$D$; de donde, por (S3), $D$ no estaría en $\overline{AB}$, a pesar de que, por (1), $D$ está en $\overline{AB}$.
Si acaso $A$-$B$-$C$ tendríamos, por el lema A.2 (tomando $C$-$B$-$A$ y $C$-$A$-$D$), que $C$-$B$-$A$-$D$; de donde $B$-$A$-$D$ y, de aquí, la misma contradicción anterior.
A una contradicción semejante llegamos, si suponemos que $B$ está en $\overline{AD}$.

Por tanto, $A = C$ o $A = D$.
Del mismo modo se prueba que $B = C$ o $B = D$.
Así, como $A \neq B$, tendremos que $A = C$ y $B = D$, o $A = D$ y $B = C$.
($\Leftarrow$) Es claro que, si $A = C$ y $B = D$, o $A = D$ y $B = C$, entonces $s = t$.

■

Probaremos ahora la proposición 1.4 (página 8).

**Proposición A.5 (Igualdad de rayos)**
*Dos rayos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo origen y los puntos que establecen la dirección son iguales o están del mismo lado del origen común.*

**Prueba** Sean $u$ y $v$ dos rayos con orígenes $A$ y $D$, y puntos que establecen sus direcciones $B$ y $C$, respectivamente.
($\Rightarrow$) Supongamos que

$$u = v. \tag{1}$$

Por (1), $A$ y $B$ están en $v$; con lo que, por la definición de rayo

$$A = D;\ \text{o}\ A = C;\ \text{o}\ D\text{-}A\text{-}C;\ \text{o}\ D\text{-}C\text{-}A;$$

y

$$B = D;\ \text{o}\ B = C;\ \text{o}\ D\text{-}B\text{-}C;\ \text{o}\ D\text{-}C\text{-}B.$$

Probaremos que, de las dieciséis combinaciones que resultan, las únicas que se pueden cumplir son $A = D$ y una cualquiera de las siguientes: $B = C$, o $D$-$B$-$C$, o $D$-$C$-$B$; en cuyo caso estaría probada esta implicación.
**(1)** Como $A \neq B$ tendremos que no se pueden cumplir simultáneamente $A = D$ y $B = D$.
**(2)** Si $A = C$ y $B = D$ tendremos, tomando, por (S4), un punto $P$ tal que $A$-$D$-$P$, que $P$ está en $u$ (al estar del mismo lado de $A$ que $B$) y $P$ no está en $v$ (al estar del lado opuesto de $D$ que $C$); contrario a (1).
**(3)** Como $A \neq B$ tendremos que no se pueden cumplir simultáneamente $A = C$ y $B = C$.
**(4)** Si $A = C$ y $D$-$B$-$C$ tendremos, tomando, por (S4), un punto $P$ tal que $P$-$D$-$B$, que $P$ está en $u$ (pues, por el lema A.2, $P$-$D$-$B$-$C$ y, de aquí, $P$-$B$-$C$; con lo que $P$ está del mismo lado de $A$ que $B$) y $P$ no está en $v$ (pues, por lo dicho en el paréntesis anterior, se cumple $P$-$D$-$C$; con lo que $P$ está del lado opuesto de $D$ que $C$); contrario a (1).

**(5)** Si $A = C$ y $D$-$C$-$B$ tendremos que $D$ no está en $u$ (al estar del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(6)** Si $D$-$A$-$C$ y $B = D$ tendremos que $C$ no está en $u$ (al estar del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(7)** Si $D$-$A$-$C$ y $B = C$ tendremos que $D$ no está en $u$ (al estar del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(8)** Si $D$-$A$-$C$ y $D$-$B$-$C$ tendremos, por el lema A.3, que $D$-$B$-$A$ o $A$-$B$-$C$. Si se cumple $D$-$B$-$A$ tendremos que $C$ no está en $u$ (pues, por el lema A.2, $D$-$B$-$A$-$C$ y, de aquí, $B$-$A$-$C$; con lo que $C$ está del lado opuesto de $A$ que $B$). Si se cumple $A$-$D$-$C$ tendremos que $D$ no está en $u$ (pues, por el lema A.2, $D$-$A$-$B$-$C$ y, de aquí, $D$-$A$-$B$; con lo que $D$ está del lado opuesto de $A$ que $B$). Así, cualquiera de las posibilidades contradicen (1).
**(9)** Si $D$-$A$-$C$ y $D$-$C$-$B$ tendremos que $D$ no está en $u$ (pues, por el lema A.2, $D$-$A$-$C$-$B$ y, de aquí, $D$-$A$-$B$; con lo que $D$ está del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(10)** Si $D$-$C$-$A$ y $B = D$ tendremos, tomando, por (S4), un punto $P$ tal que $C$-$A$-$P$, que $P$ está en $v$ (pues, por el lema A.2, $D$-$C$-$A$-$P$ y, de aquí, $D$-$C$-$P$; con lo que $P$ está del mismo lado de $D$ que $C$) y $P$ no está en $u$ (pues, por lo dicho en el paréntesis anterior, se cumple $D$-$A$-$P$; con lo que $P$ está del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(11)** Si $D$-$C$-$A$ y $B = C$, contradecimos (1), por el mismo argumento que en (10), .
**(12)** Si $D$-$C$-$A$ y $D$-$B$-$C$ tendremos, tomando, por (S4), un punto $P$ tal que $C$-$A$-$P$, que $P$ está en $v$ (pues, por el lema A.2, $D$-$B$-$C$-$A$ y, de aquí, $D$-$C$-$A$; de nuevo, por el lema A.2, $D$-$C$-$A$-$P$ y, de aquí, $D$-$C$-$P$; con lo que $P$ está del mismo lado de $D$ que $C$) y $P$ no está en $u$ (pues, por lo dicho en los paréntesis anteriores, se cumple $B$-$A$-$P$; con lo que $P$ está del lado opuesto de $A$ que $B$); contrario a (1).
**(13)** Si $D$-$C$-$A$ y $D$-$C$-$B$ tendremos: por (S3) debe cumplirse una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones: $D$-$A$-$B$, o $D$-$B$-$A$, o $A$-$D$-$B$. La última de ellas no puede cumplirse (pues, si se cumpliera tendríamos que $A$ o $B$ no estarían en $v$, al estar en lados opuestos de $D$; pero, por hipótesis, ambos están en $v$, al estar del mismo lado de $D$ que $C$). Si se cumple $D$-$A$-$B$ tendremos que $D$ no está en $u$ (pues $D$ está del lado opuesto de $A$ que $B$). Si se cumple $D$-$B$-$A$ tendremos, tomando, por (S4), un punto $P$ tal que $B$-$A$-$P$, que $P$ no está en $u$ (al estar del lado opuesto de $A$ que $B$) y $P$ está en $v$ (pues, de $D$-$B$-$A$ y $B$-$A$-$P$ tenemos, por el lema A.2, $D$-$B$-$A$-$P$ y, de aquí, $D$-$A$-$P$. Ahora, de $D$-$A$-$P$ y $D$-$C$-$A$ tenemos, por el lema A.2, $D$-$C$-$A$-$P$ y, de aquí, $D$-$C$-$P$; con lo que $P$ está del mismo lado de $D$ que $C$); contrario a (1).
($\Leftarrow$) Supongamos que $A = D$.
Si $B = C$ es claro, por la definición de rayo, que $u = v$.

Consideremos entonces los casos

$$A\text{-}C\text{-}B \quad \text{o} \quad A\text{-}B\text{-}C.$$

Supongamos que $A$-$C$-$B$.
Probemos primero que $v$ está contenido en $u$; tomemos un punto $P$ en $v$.
Si $P = A$ o $P = C$, es claro que $P$ está en $u$.
Si $P \neq A$ y $P \neq C$, tendremos, por la definición de rayo, que

$$A\text{-}P\text{-}C \quad \text{o} \quad A\text{-}C\text{-}P.$$

Si $A$-$P$-$C$, tendremos, por el lema A.2 (tomando $A$-$P$-$C$ y $A$-$C$-$B$), que $A$-$P$-$C$- $B$; de donde $P$ está en $\overline{AB}$, y así en $u$.
Si $A$-$C$-$P$, tendremos, por (S3), al considerar los puntos $C$, $P$ y $B$, que

$$C\text{-}P\text{-}B \quad \text{o} \quad C\text{-}B\text{-}P$$

(ya que la posibilidad de que $P$-$C$-$B$ daría como consecuencia que $P$ no está en $\overline{CB}$, con lo que, por el lema A.3, $P$ debería estar en $\overline{AC}$; y, por otro lado, $A$-$C$-$P$ nos dice que $P$ no está en $\overline{AC}$, llevándonos a una contradicción).
Si tuviéramos $C$-$P$-$B$, tendríamos, por el lema A.2 (tomando $A$-$C$-$P$ y $C$-$P$-$B$), que $A$-$C$-$P$- $B$; de donde $P$ está en $\overline{AB}$, y así en $u$.
Si tuviéramos $C$-$B$-$P$, tendríamos, por el lema A.2 (tomando $A$-$C$-$B$ y $C$-$B$-$P$), que $A$-$C$-$B$-$P$; de donde $A$-$B$-$P$, y así $P$ está en $u$.
Luego, $v$ está contenido en $u$.
De manera semejante se prueba que $u$ está contenido en $v$ y, por tanto, en este caso, $v = u$.
Por un razonamiento análogo se prueban ambas contenciones, en el caso en que $A$-$B$-$C$.

$\blacksquare$

Probaremos ahora, por separado, las partes que quedaron pendientes de la proposición 1.5 (página 9).

**Proposición A.6 (CS4)**
*Dado un segmento $\overline{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{CD}$, se tiene que existe un único punto $P$ en $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CP} \cong \overline{AB}$.*

**Prueba** Sean $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{CD}$ un rayo.
(Existencia) Elijamos, por el Postulado de la Regla, un sistema de coordenadas en $\overleftrightarrow{CD}$, de manera que la coordenada de $C$ es 0, y la coordenada de $D$ sea positiva, digamos $x > 0$. Llamemos $P$ al punto de $\overleftrightarrow{CD}$ que corresponde a $y = AB$. Es claro

que $P \neq C$ (pues $y \neq 0$) y que $\overline{CP} \cong \overline{AB}$ (pues $CP = |y-0| = |AB-0| = |AB| = AB$, al ser $AB > 0$). Como $D$ y $P$ están del mismo lado de $C$ (pues, al ser $x > 0$ y $y > 0$, el lema A.1 no permite que se cumpla $D$-$C$-$P$), tendremos que $P$ está en $\overrightarrow{CD}$.
(Unicidad) Sea $P'$ otro punto de $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CP'} \cong \overline{AB}$. Si acaso $P \neq P'$, tendríamos que $C$-$P$-$P'$ o $C$-$P'$-$P$. En cualquiera de los casos $PP' = |CP - CP'| = |AB - AB| = 0$, es decir, $P = P'$; contrario a lo supuesto. Por tanto, $P = P'$.

■

**Proposición A.7 (CS5)**
*Todo segmento tiene exactamente un punto medio.*

**Prueba** Sea $\overline{AB}$ un segmento.
(Existencia) Sean $x$ y $y$ las respectivas coordenadas de los puntos $A$ y $B$ (en un sistema de coordenadas de la recta que ellos determinan). Llamemos $P$ al punto de $\overleftrightarrow{AB}$ que corresponde a $z = \frac{x+y}{2}$. Como $x < z < y$, tenemos, por el lema A.1, que $A$-$P$-$B$. Como $AP = PB$, tenemos que $P$ es punto medio de $\overline{AB}$.
(Unicidad) Sea $P'$ otro punto medio de $\overline{AB}$, es decir, tal que $A$-$P'$-$B$ y $AP' = P'B$. Como $P$ y $P'$ están en $\overrightarrow{AB}$ (al estar del mismo lado de $A$ que $B$) y $P'$ es tal que $\overline{AP'} \cong \overline{AP}$ (pues $AP = \frac{AB}{2} = AP'$), tendremos, por (CS4), que $P = P'$.

■

Probemos ahora la parte (b) de la proposición 1.7 (página 11).

**Proposición A.8** *Cualesquiera dos rayos opuestos tienen en común sólo su origen, y su unión es igual a la recta que los contiene.*

**Prueba** Consideremos los rayos opuestos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$, y $l$ la recta que los contiene. Como $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$ están contenidos en $l$, tenemos que la unión de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$ está contenida en $l$.
Tomemos, ahora, un punto $P$ en $l$.
Si $P$ es $A$, $G$ o $D$, es claro que $P$ está la unión de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$.
Si no, tenemos que $A$, $D$, $G$ y $P$ son cuatro puntos distintos y colineales. Como, por la definición de rayos opuestos, $G$-$A$-$D$, tenemos, por (S5), (S3) y el lema A.2, que $P$ sólo puede aparecer en una de las siguientes posiciones:
$G$-$A$-$D$-$P$, en cuyo caso tenemos $A$-$D$-$P$, y así $P$ está en $\overrightarrow{AD}$.
$G$-$A$-$P$-$D$, en cuyo caso tenemos $A$-$P$-$D$, y así $P$ está en $\overrightarrow{AD}$.
$G$-$P$-$A$-$D$, en cuyo caso tenemos $G$-$P$-$A$, y así $P$ está en $\overrightarrow{AG}$.

$P$-$G$-$A$-$D$, en cuyo caso tenemos $P$-$G$-$A$, y así $P$ está en $\overrightarrow{AG}$.
Por tanto, en cualquiera de las posibilidades tenemos que $P$ está en la unión de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$; con lo que $l$ es igual a la unión de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$.
Ahora, como en las condiciones dadas, $G$-$A$-$D$, tendremos que, si $P$ fuera un punto común a $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AG}$, distinto de $A$, $P$ debería estar del mismo lado de $A$ que $D$ y del mismo lado de $A$ que $G$; lo cual, por (S3), es del todo imposible.

■

Probaremos ahora la proposición 2.1 (página 29).

**Proposición A.9 (Igualdad de ángulos)**
*Dos ángulos son iguales si, y sólo si, cada lado del uno es igual a un lado del otro.*

**Prueba** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos ángulos con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DF}$, respectivamente.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha = \beta$. Como $A$ está en $\alpha$, tendremos que $A$ está en $\beta$. Así, $A$ está en $\overrightarrow{DE}$ o $A$ está en $\overrightarrow{DF}$.
Supongamos que $A$ está en $\overrightarrow{DE}$.
Como $B$ está en $\alpha$, tendremos que $B$ está en $\beta$. Así, $B$ está en $\overrightarrow{DE}$ o $B$ está en $\overrightarrow{DF}$.
Supongamos que $B$ está en $\overrightarrow{DE}$. Las únicas posibilidades que no llevan a una contradicción concluyen que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.
En esta situación tendremos, por la proposición A.5, que $D = A$.
Ahora, como $C$ está en $\alpha$, tendremos que $C$ está en $\beta$. Así, $C$ está en $\overrightarrow{DE}$ o $C$ está en $\overrightarrow{DF}$. Pero $C$ no está en $\overrightarrow{DE}$ (pues $C$ no está en $\overrightarrow{AB}$). Así, $C$ está en $\overrightarrow{DF}$. Ahora, como $C \neq A$, tendremos, por la proposición A.5, que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.
Si suponemos que $B$ está en $\overrightarrow{DF}$ tendremos, por un razonamiento análogo, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$ y $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$.
Del mismo modo, y por razonamientos análogos, se prueba que, si $A$ está en $\overrightarrow{DF}$ y $B$ está en $\overrightarrow{DE}$, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$; y, si $A$ está en $\overrightarrow{DE}$ y $B$ está en $\overrightarrow{DF}$, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$ y $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$.
($\Leftarrow$) Es claro que, si cada lado de $\alpha$ es igual a un lado de $\beta$, entonces $\alpha = \beta$.

■

Probaremos finalmente la proposición 3.1 (página 57). Para ello estableceremos previamente el siguiente resultado, bastante intuitivo.

**Lema A.4** *La intersección de un triángulo, y la recta que contiene uno de sus lados, es igual a ese lado.*

**Prueba** Sea $S$ el triángulo con vértices $A$, $B$ y $C$, y consideremos la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Como $C$ no está en $\overleftrightarrow{AB}$ tendremos, por el Postulado de separación del plano, que $C$ está en uno de los lados de $\overleftrightarrow{AB}$, digamos $\mathscr{H}$. Ahora, por el ejercicio 2.3, todos los puntos de $S$, excepto los del lado $\overline{AB}$ está en $\mathscr{H}$; con lo que la intersección de $S$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es $\overline{AB}$.

■

**Proposición A.10 (Igualdad de triángulos)**
*Dos triángulos son iguales si, y sólo si, sus vértices coinciden.*

**Prueba** Sean $S$ y $T$ dos triángulos con vértices $A$, $B$ y $C$, y $D$, $E$ y $F$, respectivamente.
($\Rightarrow$) Supongamos que

(1) $$S = T.$$

Por la definición de triángulo y (1), tendremos que:

(a) $D$ está en $\overline{AB}$, (b) $D$ está en $\overline{AC}$ o (c) $D$ está en $\overline{BC}$.

Supongamos que se cumple $(a)$, es decir, que

(2) $$D \text{ está en } \overline{AB}.$$

Por el lema A.4, tenemos que

(3) $$\text{la intersección de } \overleftrightarrow{DE} \text{ y } T \text{ es } \overline{DE}.$$

Como, por el lema A.4, la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $S$ es $\overline{AB}$, tendremos, por (1), que

(4) $$\text{la intersección de } \overleftrightarrow{AB} \text{ y } T \text{ es } \overline{AB}.$$

**Afirmación I** *Uno, y sólo uno, de los puntos $E$ o $F$ debe estar en $\overleftrightarrow{AB}$.*
(Por reducción al absurdo)
Supongamos que ni $E$ ni $F$ están en $\overleftrightarrow{AB}$. Así, la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ con $\overline{DE}$ y con $\overline{DF}$ consiste sólo del punto $D$ (pues si no, por el Postulado de la recta, $E$ o $F$ estarían en $\overleftrightarrow{AB}$, contrario a lo supuesto). Si acaso $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta a $\overline{EF}$ tendremos que lo hace en a lo más un punto $P$ (pues si no, por el Postulado de la recta, $E$ y $F$ estarían en $\overleftrightarrow{AB}$, contrario a lo supuesto). De este modo, la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$

y $T$ consiste a lo sumo de los puntos $D$ y $P$; con lo que, por (4), $\overline{AB} = \{D,P\}$, contrario a (S4). Por tanto, $E$ o $F$ están en $\overleftrightarrow{AB}$.
Es claro que ambos no pueden estar a la vez en $\overleftrightarrow{AB}$, porque entonces $D$, $E$ y $F$ serían colineales, contrario a la definición de triángulo.

Así tenemos, por (3), (4) y la definición de triángulo, que se cumple una de las siguientes afirmaciones:

(d) $E$ está en $\overline{AB}$ y $F$ está en $\overline{AC}$. (e) $E$ está en $\overline{AB}$ y $F$ está en $\overline{BC}$.
(f) $F$ está en $\overline{AB}$ y $E$ está en $\overline{AC}$. (g) $F$ está en $\overline{AB}$ y $E$ está en $\overline{BC}$.

Supongamos que se cumple (d), es decir, que

$$E \text{ está en } \overline{AB} \quad \text{y} \quad F \text{ está en } \overline{AC}.$$

Por (2) y el lema A.3, tendremos que $\overline{DE}$ está contenido en $\overline{AB}$. Como, por (1), $A$ y $B$ están en $T$ y, por el Postulado de la recta, también $A$ y $B$ están en $\overleftrightarrow{DE}$ (ya que, bajo lo supuesto, $A$, $B$, $D$ y $E$ son colineales), tendremos, por (3), que $A$ y $B$ están en $\overline{DE}$. Por el lema A.3, tendremos que $\overline{AB}$ está contenido en $\overline{DE}$, y así, $\overline{AB} = \overline{DE}$. Por la proposición A.4, tendremos que

$$A = D \text{ y } B = E \quad \text{o} \quad A = E \text{ y } B = D.$$

Por un razonamiento análogo tendremos que $\overline{AC} = \overline{DF}$ o $\overline{AC} = \overline{EF}$ y así, por la proposición A.4, tendremos que

$$A = D,\, B = E \text{ y } C = F \quad \text{o} \quad A = E,\, B = D \text{ y } C = F.$$

De haber supuesto (e), (f) o (g) concluiríamos, por un razonamiento del todo semejante, que

$$A = D,\, B = F \text{ y } C = E \quad \text{o} \quad A = F,\, B = D \text{ y } C = E.$$

El resto de las posibilidades se obtienen, de manera semejante, suponiendo (b) o suponiendo (c). Por tales razones, cada uno de los puntos $A$, $B$ o $C$ es igual a uno, y sólo uno, de los puntos $D$, $E$ o $F$.
($\Leftarrow$) Es claro, por la proposición A.4, que, si los vértices coinciden, entonces $S = T$.

■

Dejaremos planteados los siguientes ejercicios, que se resuelven con las técnicas desarrolladas en este apéndice; los dos últimos corresponden a las proposiciones 5.1 y 8.1.

**A.1** Pruebe que $A$-$B$-$D$ si, y sólo si, $\overline{AB}$ está contenido en $\overline{AD}$ y $B$ es distinto de $D$.

**A.2** Dados dos puntos distintos $D$ y $E$ en $\overline{AB}$, pruebe que $\overline{DE}$ está contenido en $\overline{AB}$.

**A.3** Dados dos puntos distintos $D$ y $E$ en $\overrightarrow{AB}$, pruebe que $\overline{DE}$ está contenido en $\overrightarrow{AB}$.

**A.4** Dados dos puntos distintos $D$ y $E$ en $\overrightarrow{AB}$, pruebe que uno, y sólo uno, entre $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{ED}$ está contenido en $\overrightarrow{AB}$.

**A.5** Si $C$ es un punto en $\overrightarrow{AB}$ distinto de $A$ y de $B$, pruebe que $\overrightarrow{BC}$ está contenido en $\overrightarrow{AB}$.

**A.6** **(Igualdad de cuadriláteros)**
Dos cuadriláteros son iguales si, y sólo si, sus vértices coinciden.

**A.7** **(Igualdad de polígonos)**
Dos polígonos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo número de vértices y sus vértices coinciden.

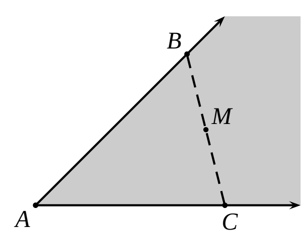
# Apéndice B

# Separación del plano

Para probar el *Teorema de la barra transversal* (Teorema 2.1), probaremos previamente un par de resultados que nos ayudarán a alcanzar ese fin.

**Lema B.1** *Dado un ángulo $\angle BAC$, y un punto $M$ tal que $B$-$M$-$C$, se tiene que $M$ está en el interior de $\angle BAC$.*

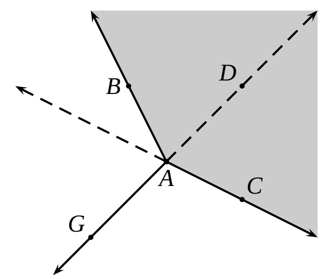
**Prueba** Sea $\angle BAC$ un ángulo, y $M$ un punto tal que $B$-$M$-$C$. Como $\overline{CB}$ no está contenido en $\overleftrightarrow{AC}$ ni en $\overleftrightarrow{AB}$ tendremos, por el ejercicio 2.3, que $M$ y $B$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, y $M$ y $C$ están del mismo lado $\overleftrightarrow{AB}$. Así, por la definición del interior de un ángulo, $M$ está en el interior de $\angle BAC$.




■

**Lema B.2** *Si $D$ es un punto en el interior de un ángulo $\angle BAC$, entonces el rayo opuesto a $\overrightarrow{AD}$, excepto $A$, está contenido en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que no contiene a $B$ (y, por tanto, en el exterior de $\angle BAC$).*

**Prueba** Sea $\angle BAC$ un ángulo, y $D$ un punto de su interior. Consideremos el rayo $\overrightarrow{AG}$, opuesto al rayo $\overrightarrow{AD}$; con lo que $G$-$A$-$D$. Como $\overline{GD}$ corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en $A$, tenemos, por el Postulado de separación del plano, que $G$ y $D$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$. Como $D$ está en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a $B$ (por definición del interior de un ángulo), $G$ debe estar en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que no contiene a $B$.

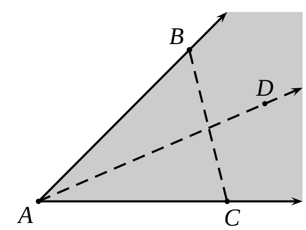



Por la proposición 2.3, todos los puntos de $\overrightarrow{AG}$, excepto $A$, están en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que no contiene a $B$.

$\blacksquare$

**Teorema B.1 (Teorema de la barra transversal)**
*Un punto $D$ está en el interior de un ángulo $\angle BAC$ si, y sólo si, $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$ en uno de sus puntos interiores.*

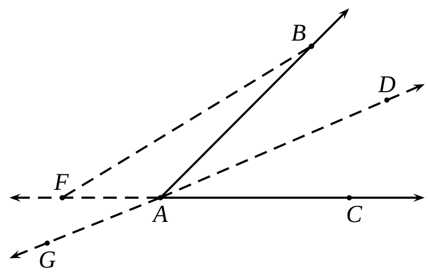
**Prueba** Sea $\angle BAC$ un ángulo, y $D$ un punto cualquiera.
($\Rightarrow$) (Por reducción al absurdo)
Supongamos que $D$ está en el interior de $\angle BAC$ y que $\overrightarrow{AD}$ no corta $\overline{BC}$ en uno de sus puntos interiores. Por la definición del interior de un ángulo y la proposición 1.4, $B$ y $C$ no están en $\overrightarrow{AD}$. Así, $\overrightarrow{AD}$ y $\overline{BC}$ no se cortan.




**Afirmación I** $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overline{BC}$ no se cortan ($B$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$).
Si no fuera así tendríamos, por la proposición 1.7, que $\overline{BC}$ debería cortar al rayo opuesto a $\overrightarrow{AD}$; en cuyo caso tendríamos, por los lemas B.1 y B.2, un punto a la vez en el interior y en el exterior de $\angle BAC$, o que $A$, $B$ y $C$ serían colineales; lo cual es imposible.
Tomemos, por (S4), un punto $F$ tal que $F$-$A$-$C$.
**Afirmación II** $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overline{FB}$ no se cortan ($B$ y $F$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$).
Como $\overline{FC}$ corta $\overleftrightarrow{AB}$ en $A$, tenemos, por el Postulado de separación del plano, que $F$ está en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene a $C$. Por el ejercicio 2.3, todos los puntos de $\overline{BF}$, excepto $B$, están en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene a $C$, y, por tanto, ninguno de los puntos de $\overline{BF}$ están en el interior de $\angle BAC$.

De este modo, $\overline{BF}$ no puede cortar $\overrightarrow{AD}$, ya que, en caso contrario tendremos, por el corolario 2.3.1, un punto simultáneamente en el exterior y en el interior de $\angle BAC$, o que $A$, $B$ y $C$ son colineales; lo cual es imposible.

Tampoco $\overline{BF}$ corta a $\overrightarrow{AG}$, el rayo opuesto a $\overrightarrow{AD}$, ya que, en caso contrario tendríamos: por el lema B.2, todos los puntos de $\overrightarrow{AG}$ están en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que no contiene a $B$; por el ejercicio 2.3, todos los puntos de $\overline{BF}$ están en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a $B$, con lo que entonces tendremos un punto a su vez a ambos lados de $\overleftrightarrow{AC}$, o que $A$, $B$ y $C$ son colineales; lo cual es imposible. De este modo, por la proposición 1.7, tenemos que $\overline{BF}$ no puede cortar $\overleftrightarrow{AD}$, como queríamos.




Concluimos, entonces, que $F$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$; contrario, por el Postulado de separación del plano, al hecho de que $\overline{FC}$ corta $\overleftrightarrow{AD}$ en $A$.

Por tanto, $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$ en uno de sus puntos interiores.

($\Leftarrow$) Supongamos que $D$ es un punto tal que $\overrightarrow{AD}$ corta $\overline{BC}$ en uno de sus puntos interiores. Llamemos, por el corolario 1.1.1, $P$ el punto de corte de $\overrightarrow{AD}$ y $\overline{BC}$. Por el lema B.1, $P$ está en el interior de $\angle BAC$. Así, por el corolario 2.3.1, $D$ está en el interior de $\angle BAC$.

■

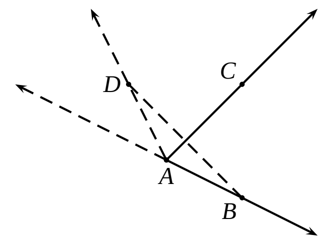
Ahora probaremos la proposición 2.5 (página 39).

**Proposición B.1 (Existencia y unicidad del bisector)**
*Todo ángulo tiene un único bisector.*

**Prueba** Consideremos un ángulo $\angle BAC$.
(Existencia) Tomemos, por el Postulado del transportador (Construcción de ángulos) para $\overrightarrow{AB}$, $\mathscr{H}$ el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a $C$, y $r = \frac{m\angle BAC}{2}$, el único rayo

$\overrightarrow{AD}$, con $D$ en $\mathscr{H}$, tal que $m\angle BAD = r$. Sólo nos faltaría verificar que $D$ está en el interior de $\angle BAC$; para lo cual razonaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $D$ no está en el interior de $\angle BAC$. Como $D$ no está en $\overrightarrow{AB}$ (porque está en $\mathscr{H}$), ni $D$ está en $\overrightarrow{AC}$ (porque, en caso contrario, por la proposición 2.1, $\angle DAC = \angle BAC$; de donde obtendríamos la contradicción al Postulado del transportador, Medida del ángulo, de que $m\angle BAC = 0$), tendremos que $D$ y $B$ deben estar en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$.




Así, por la proposición 2.3 y el ejercicio 2.3, $\overrightarrow{AC}$ corta a $\overline{BD}$ en uno de sus puntos interiores; con lo que, por el Teorema de la barra transversal, $C$ está en el interior de $\angle BAD$. Pero entonces, por el Postulado del transportador (Adición de ángulos), tendremos que $m\angle BAC < 0$; contrario al Postulado del transportador (Medida del ángulo). Por tanto, $D$ está en el interior de $\angle BAC$.

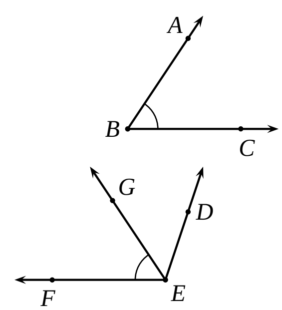
(Unicidad) Como, por definición, para que un rayo $\overrightarrow{AE}$ sea bisector de $\angle BAC$, $E$ debe estar en $\mathscr{H}$ y $m\angle BAE = r$, tendremos, por el Postulado del transportador (Construcción de ángulos), que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$.

■

Ahora probaremos la proposición 2.10 (página 42).

**Proposición B.2** *El ángulo $\angle ABC$ **es más pequeño que** el ángulo $\angle DEF$ si, y sólo si, existe un punto $G$ tal que $G$ está en el interior de $\angle DEF$ y $\angle GEF \cong \angle ABC$.*

**Prueba** Sean $\angle ABC$ y $\angle DEF$ dos ángulos.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\angle ABC$ es más pequeño que $\angle DEF$. Tomemos, por el Postulado del transportador (Construcción de ángulos) para $\overrightarrow{EF}$, $\mathscr{H}$ el lado de $\overleftrightarrow{EF}$ que contiene a $D$, y $r = m\angle ABC$, el único rayo $\overrightarrow{EG}$, con $G$ en $\mathscr{H}$, tal que $m\angle FEG = r$. Por los mismos argumentos desarrollados en la prueba de la proposición anterior, para verificar que $D$ estaba en el interior de $\angle BAC$, tendremos que $G$ está en el interior de $\angle DEF$.



($\Leftarrow$) Supongamos que $G$ es un punto que está en el interior de $\angle DEF$ y $\angle GEF \cong \angle ABC$. Así, por el Postulado del transportador (Adición de ángulos), $m\angle DEF = m\angle DEG + m\angle GEF > m\angle GEF = m\angle ABC$, es decir, $\angle ABC$ es más pequeño que $\angle DEF$.

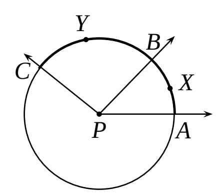
■

Ahora probaremos la proposición 9.8 (página 220).

**Proposición B.3 (Adición de arcos)**
*La suma de las medidas angulares de dos arcos adyacentes es la medida angular del arco abarcante.*

**Prueba** Consideremos dos arcos adyacentes $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$, y llamemos $\mathscr{C}_P$ al círculo del que son parte.

**Caso I** $\widehat{ABC}$ es un arco menor.
Por definición,




(1) $$\mu\widehat{ABC} = m\angle APC.$$

Por la observación 9.8.(a), $\overline{PB}$ y $\overline{AC}$ se cortan en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$C$ y $P$-$R$-$B$. Así tendremos:

**(i)** por el ejercicio 2.24, que $C$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y $A$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por la observación 9.9.(a), $X$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y $Y$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por definición, $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ son arcos menores y, en consecuencia,

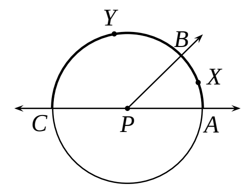
(2) $$\mu\widehat{AXB} = m\angle APB \quad \text{y} \quad \mu\widehat{BYC} = m\angle BPC.$$

**(ii)** por el Teorema de la barra transversal, que $B$ está en el interior de $\angle APC$; de donde, por el Postulado del transportador,

(3) $$m\angle APC = m\angle APB + m\angle BPC.$$

Así, por (1), (2) y (3), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.

**Caso II** $\widehat{ABC}$ es un semicírculo.
Por definición,




(4) $$\mu\widehat{ABC} = 180.$$

Por el ejercicio 2.3, $C$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y $A$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por la observación 9.9.(a), $X$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y $Y$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$.

Así, por definición, $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ son arcos menores y, en consecuencia,

(5) $$\mu\widehat{AXB} = m\angle APB \quad \text{y} \quad \mu\widehat{BYC} = m\angle BPC.$$

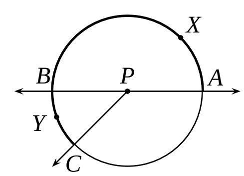
Como los ángulos $\angle APB$ y $\angle BPC$ forman un par lineal, tendremos, por el Postulado del transportador, que

(6) $$m\angle APB + m\angle BPC = 180.$$

Así, por (4), (5) y (6), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.
**Caso III** $\widehat{ABC}$ es un arco mayor.
Por definición,

(7) $$\mu\widehat{ABC} = 360 - m\angle APC.$$

**Caso III.a** $\widehat{AXB}$ o $\widehat{BYC}$ es un semicírculo.
Supongamos, sin perder generalidad, que $\widehat{AXB}$ es un semicírculo. Así, por definición,




(8) $$\mu\widehat{AXB} = 180.$$

Por el ejercicio 2.3, $A$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por la observación 9.9.(a).(iii), $Y$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por definición, $\widehat{BYC}$ es un arco menor y, en consecuencia,

(9) $$\mu\widehat{BYC} = m\angle BPC.$$

Como $\angle APC$ y $\angle BPC$ forman un par lineal, tendremos, por el Postulado del transportador, que

(10) $$m\angle APC = 180 - m\angle BPC.$$

Así, por (7), (8), (9) y (10), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.
**Caso III.b** $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ no son semicírculos.
Por definición,

(11) $$P \text{ no está en } \overleftrightarrow{AB} \quad \textbf{\textit{y}} \quad P \text{ no está en } \overleftrightarrow{BC}.$$

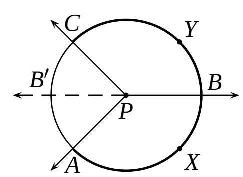
Consideremos, por la observación 9.3.(f), el diámetro $\overline{BB'}$ con extremo en $B$. Por la observación 9.3.(d),

(12) $$B\text{-}P\text{-}B'.$$

Por el ejercicio 2.3, (11) y (12),

(13) $$P \text{ y } B' \text{ están del mismo lado de } \overleftrightarrow{AB} \quad \textbf{\textit{y}} \quad P \text{ y } B' \text{ del mismo lado de } \overleftrightarrow{BC}.$$

**Caso III.b.1** $A$ y $C$ en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BB'}$.




Por el Postulado de separación del plano, $\overleftrightarrow{BB'}$ corta $\overline{AC}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$C$. Como $B$ es un punto interior del arco mayor $\widehat{ABC}$ tendremos, por la proposición 9.7, que $\overline{AC}$ no corta $\overrightarrow{PB}$. Así, por la proposición 1.7, $\overline{AC}$ corta $\overrightarrow{PB'}$; de donde, por las partes (j) y (m) de la observación 9.3, tenemos que $P$-$R$-$B'$. Así tendremos:
**(i)** por el Teorema de la barra transversal, que $B'$ está en el interior de $\angle APC$; de donde, por el Postulado del transportador,

(14) $$m\angle APC = m\angle APB' + m\angle CPB'.$$

**(ii)** por el ejercicio 2.24, que $B'$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y $B'$ y $A$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por la observación 9.9.(a), y por (13), $P$ y $X$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y $P$ y $Y$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por definición, $\widehat{AXB}$ y $\widehat{BYC}$ son arcos menores y, en consecuencia,

(15) $$\mu\widehat{AXB} = m\angle APB \quad \text{y} \quad \mu\widehat{BYC} = m\angle CPB.$$

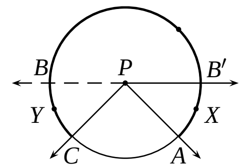
Como $\angle APB$ y $\angle APB'$, así como $\angle CPB$ y $\angle CPB'$, forman un par lineal tendremos, por el Postulado del transportador, que

(16) $$m\angle APB' = 180 - m\angle APB \quad \text{y} \quad m\angle CPB' = 180 - m\angle CPB.$$

Así, por (7), (14), (15) y (16), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.
**Caso III.b.2** $A$ y $C$ en el mismo lado $\overleftrightarrow{BB'}$.
Por (11) y el Postulado de separación del plano tendremos que $P$ y $X$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, o $P$ y $X$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$.

**Caso III.b.2.i** $P$ y $X$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.

Bajo este supuesto tendremos:




**(i)** por definición, que $\widehat{AXB}$ es un arco mayor y, en consecuencia,

$$\mu\widehat{AXB} = 360 - m\angle APB. \tag{17}$$

**(ii)** por la observación 9.9.(a).(ii), que $P$ y $C$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Así, por el Postulado de separación del plano, $\overleftrightarrow{AB}$ corta $\overline{PC}$ en un punto $R$ tal que $P$-$R$-$C$; de donde, por las partes (j) y (k) de la observación 9.3, $A$-$R$-$B$. Así tendremos:

**(a)** por el Teorema de la barra transversal, $C$ está en el interior de $\angle APB$; de donde, por el Postulado del transportador,

$$m\angle APC = m\angle APB - m\angle CPB. \tag{18}$$

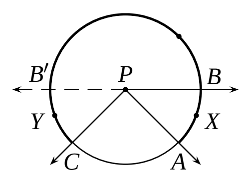
**(b)** por el ejercicio 2.24, $P$ y $A$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por la observación 9.9.(a).(iii), $P$ y $Y$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por definición, $\widehat{BYC}$ es un arco menor y, en consecuencia,

$$\mu\widehat{BYC} = m\angle CPB. \tag{19}$$

Por (7), (17), (18) y (19), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.

**Caso III.b.2.ii** $P$ y $X$ en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$.

Bajo este supuesto tendremos:




**(i)** por definición, que $\widehat{AXB}$ es un arco menor y, en consecuencia,

$$\mu\widehat{AXB} = m\angle APB. \tag{20}$$

**(ii)** por la observación 9.9.(a).(ii), que $P$ y $C$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$; de donde, por (13), $C$ y $B'$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo supuesto en todo este caso III.b.2, $C$ está en el interior de $\angle ABB' = \angle ABP$. Así, por el Teorema de la barra transversal y las partes (c) y (k) de la observación 9.3, $\overrightarrow{BC}$ corta $\overline{AP}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$P$ y $B$-$R$-$C$. De este modo:

**(a)** por el Postulado de separación del plano, $P$ y $A$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por la observación 9.9.(a).(iii), $P$ y $Y$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, por definición, $\widehat{BYC}$ es un arco mayor y, en consecuencia,

$$\mu\widehat{BYC} = 360 - m\angle CPB. \tag{21}$$

**(b)** por el Teorema de la barra transversal, $A$ está en el interior de $\angle CPB$; de donde, por el Postulado del transportador,

$$m\angle APC = m\angle CPB - m\angle APB. \tag{22}$$

Por (7), (20), (21) y (22), $\mu\widehat{ABC} = \mu\widehat{AXB} + \mu\widehat{BYC}$.

■

Finalmente probaremos la proposición 9.11 (página 224).

**Proposición B.4** *La medida de un ángulo que tiene su vértice en un círculo, y cuyos lados son secantes o tangentes a éste, es la mitad de la medida angular del arco que inscribe.*

**Prueba** Consideremos un ángulo $\angle ABC$ tal que su vértice $B$ está en el círculo $\mathscr{C}_{P,r}$. Por la observación 9.11.(d), sólo tendremos dos casos: o ambos lados son secantes, o uno de ellos es secante y el otro tangente.

**Caso I** Los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son secantes a $\mathscr{C}_{P,r}$.

Por la observación 9.5.(a), $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ cortan $\mathscr{C}_{P,r}$ en exactamente dos puntos cada uno. Como $B$ es uno de esos dos puntos de corte de cada uno de ellos con $\mathscr{C}_{P,r}$, podemos tomar $A'$ y $C'$ en $\mathscr{C}_{P,r}$ tales que $A'$ está en $\overrightarrow{BA}$ y $A' \neq B$, $C'$ está en $\overrightarrow{BC}$ y $C' \neq B$. Como, por la proposición 1.4, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA'}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC'}$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son secantes a $\mathscr{C}_{P,r}$ en $B$ y $A$, y $B$ y $C$, respectivamente. Por definición, $\angle ABC$ está inscrito en el arco $\widehat{ABC}$ y, por la observación 9.11.(a), su complemento, digamos $\widehat{AXC}$, está inscrito en $\angle ABC$. Por definición de arcos complementarios,

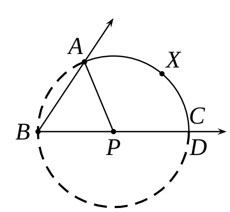
$$X \text{ y } B \text{ están en lados opuestos de } \overleftrightarrow{AC}. \tag{1}$$

Consideremos, por la observación 9.3.(f), el diámetro $\overline{BD}$ con extremo en $B$. Por la observación 9.3.(d),

$$B\text{-}P\text{-}D. \tag{2}$$

**Caso I.a** $P$ está sobre $\angle ABC$.

Supongamos, sin perder generalidad, que $P$ está sobre $\overrightarrow{BC}$. Por las partes (d) y (k) de la observación 9.3, $B$-$P$-$C$; de donde:




**(i)** $\overline{BC}$ es también un diámetro y, por la observación 9.3.(f), $C = D$; **y**,

**(ii)** por la proposición 1.4, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC}$.

Por (i) y el ejercicio 2.3, $B$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$; con lo que, por (1), $X$ y $P$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$. Así, por definición, $\widehat{AXC}$ es un arco menor y, en consecuencia,

(3) $$\mu\widehat{AXC} = m\angle APC.$$

Como $\angle APC$ es un ángulo externo de $\triangle ABP$ en $P$ tendremos, por la proposición 4.10, que

(4) $$m\angle APC = m\angle ABP + m\angle BAP.$$

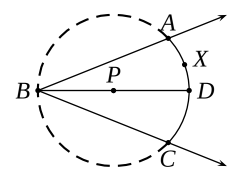
Como, por definición de círculo, $PA = PB = r$, tendremos, por la proposición 3.3, que $m\angle ABP = m\angle BAP$. Así, por (4),

(5) $$m\angle ABP = \frac{1}{2}\cdot m\angle APC.$$

Por (ii) y la proposición 2.1, $\angle ABP = \angle ABC$. Así, por (3) y (5), tendremos que $m\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot\mu\widehat{AXC}$.

**Caso I.b** $P$ está en el interior de $\angle ABC$.

Por el corolario 2.3.1, $D$ está en el interior de $\angle ABC$; de donde, por el Postulado del transportador,




(6) $$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC; \boldsymbol{y},$$

por el Teorema de la barra transversal, y las partes (j) y (k) de la observación 9.3, $\overline{BD}$ corta $\overline{AC}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$C$ y $B$-$R$-$D$.

Así, por el Postulado de separación del plano, $D$ y $B$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$; de donde, por (1), $X$ y $D$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Así, por la proposición 9.6, $\widehat{AXC} = \widehat{ADC}$ y, en consecuencia,

(7) $$\mu\widehat{AXC} = \mu\widehat{ADC}.$$

Considerando los arcos adyacentes $\widehat{AD}$ que no contiene a $C$, y $\widehat{DC}$ que no contiene a $A$, tendremos, por la proposición 9.8, que

(8) $$\mu\widehat{ADC} = \mu\widehat{AD} + \mu\widehat{DC}.$$

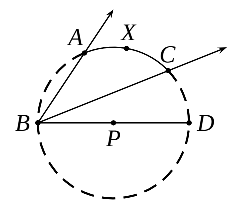
Como, por definición de diámetro, $P$ está en $\overrightarrow{BD}$, tendremos, por lo probado en el caso anterior, que

(9) $$m\angle ABD = \frac{1}{2}\cdot\mu\widehat{AD} \quad \text{y} \quad m\angle DBC = \frac{1}{2}\cdot\mu\widehat{DC}.$$

Así, por (6), (7), (8) y (9), tendremos que $m\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot \mu\widehat{AXC}$.

**Caso I.c** $P$ está en el exterior de $\angle ABC$.

Supongamos, sin perder generalidad, que $P$ y $A$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Por (2) y el ejercicio 2.3, $P$ y $D$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; de donde, $D$ y $A$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por el Postulado de separación del plano, y las partes (j) y (k) de la observación 9.3, $\overline{AD}$ corta $\overline{BC}$ en un punto $R$ tal que $A$-$R$-$D$ y $B$-$R$-$C$; de donde:




por el Teorema de la barra transversal y el Postulado del transportador,

$$(10) \qquad m\angle ABC = m\angle ABD - m\angle DBC; \text{ y},$$

por el ejercicio 2.24, $B$ y $D$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Así, $\widehat{AXC}$ no contiene a $D$. Considerando el arco $\widehat{CD}$ que no contiene a $A$, tendremos que $\widehat{AXC}$ y $\widehat{CD}$ son arcos adyacentes; de donde, por la proposición 9.8,

$$(11) \qquad \mu\widehat{AXC} = \mu\widehat{ACD} - \mu\widehat{CD}.$$

Como, por definición de diámetro, $P$ está en $\overrightarrow{BD}$, tendremos, por lo probado en el caso I.a, que

$$(12) \qquad m\angle ABD = \frac{1}{2}\cdot \mu\widehat{ACD} \quad \text{y} \quad m\angle DBC = \frac{1}{2}\cdot \mu\widehat{CD}.$$

Así, por (10), (11) y (12), tendremos que $m\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot \mu\widehat{AXC}$.

**Caso II** El rayo $\overrightarrow{BA}$ es secante a $\mathscr{C}_{P,r}$, y el rayo $\overrightarrow{BC}$ es tangente a $\mathscr{C}_{P,r}$.

Por los mismos argumentos ofrecidos al comienzo del caso I, podemos suponer que $A$ está en $\mathscr{C}_{P,r}$. Por la definición de rayo tangente, $B$ es el punto de contacto de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\mathscr{C}_{P,r}$; de donde, por la proposición 9.4,

$$(13) \qquad \angle PBC \text{ es recto.}$$

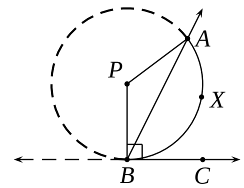
En este caso, el arco inscrito en $\angle ABC$ es el arco $\widehat{AXB}$, con $X$ en el interior de $\angle ABC$; de donde, por definición de interior de un ángulo,

$$(14) \quad X \text{ y } A \text{ están del mismo lado de } \overleftrightarrow{BC} \quad \text{y} \quad X \text{ y } C \text{ del mismo lado de } \overleftrightarrow{AB}.$$

**Caso II.a** $P$ está sobre $\angle ABC$.

Por la observación 9.3.(b) y la proposición 9.5, $P$ está en $\overrightarrow{BA}$; de donde: por las proposiciones 1.4 y 2.1, $\angle ABC = \angle PBC$ y, así, por (13), $m\angle ABC = 90$; y, por la observación 9.3.(k), $B$-$P$-$A$. Así, por definición, $\widehat{AXB}$ es un semicírculo y, en consecuencia, $\mu\widehat{AXB} = 180$. Por tanto, $m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \mu\widehat{AXB}$.

**Caso II.b** $P$ está en el exterior de $\angle ABC$.
Por la observación 9.5.(b),




(15) $\qquad P$, $X$ y $A$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$.

Así, para tener lo supuesto, $P$ y $C$ deben estar en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$; de donde:

**(i)** por (14), $P$ y $X$ están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Así, por definición, $\widehat{AXB}$ es un arco menor y, en consecuencia:

(16) $$\mu\widehat{AXB} = m\angle APB.$$

**(ii)** por el Postulado de separación del plano, $\overleftrightarrow{AB}$ corta a $\overline{PC}$ en un punto $R$ tal que $P$-$R$-$C$. Por el ejercicio 2.3, $R$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Así, por (15), $R$ y $A$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$; con lo que $R$ está en $\overrightarrow{AB}$. Así, por el Teorema de la barra transversal, $A$ está en el interior del ángulo recto $\angle PBC$; de donde, por el Postulado del transportador,

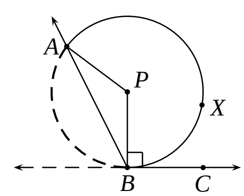
(17) $$m\angle ABC = 90 - m\angle ABP.$$

Como, por la definición de círculo, $PA = PB$, tendremos, por la proposición 3.3, que $m\angle ABP = m\angle BAP$. Así, por la proposición 4.9,

(18) $$m\angle APB = 180 - 2 \cdot m\angle ABP.$$

Así, por (16), (17) y (18), tendremos que $m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \mu\widehat{AXB}$.

**Caso II.c** $P$ está en el interior de $\angle ABC$.
Como, por (14), $X$ y $P$ están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, tendremos, por definición, que $\widehat{AXB}$ es un arco mayor y, en consecuencia,




(19) $\qquad \mu\widehat{AXB} = 360 - m\angle APB.$

Además, por el Postulado del transportador,

(20) $$m\angle ABC = 90 + m\angle ABP.$$

Como, por la definición de círculo, $PA = PB$, tendremos, por la proposición 3.3, que $m\angle ABP = m\angle BAP$. Así, por la proposición 4.9,

$$m\angle ABP = 90 - \frac{1}{2} \cdot m\angle APB. \tag{21}$$

Así, por (19), (20) y (21), tendremos que $m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \mu\widehat{AXB}$.

■

El siguiente ejercicio se puede resolver con las técnicas desarrolladas en este apéndice.

**B.1** Si $D$ es un punto en el interior de un ángulo $\angle BAC$, pruebe que el rayo opuesto a $\overrightarrow{AD}$, excepto $A$, está contenido en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene a $C$ (y, por tanto, en el exterior de $\angle BAC$).

# Apéndice C

# Postulados

**Postulado 1**

**(a)** *Toda recta contiene al menos dos puntos distintos.*
**(b)** *El plano contiene al menos tres puntos no colineales.*

**Postulado 2 (De la recta)**
*Para cada par de puntos distintos, existe exactamente una recta que los contiene.*

**Postulado 3**

**(a) (De la distancia)**
*Cada par de puntos tiene asociado un único número real no negativo, al que llamaremos la* ***distancia desde el uno hasta el otro****.*

**(b) (De la Regla)**

**(i)** *Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de cualquier recta y los números reales, y ésta es tal que la distancia entre dos puntos de la recta se obtiene mediante el valor absoluto de la diferencia de los números reales que les corresponden.*
*A una tal correspondencia la llamaremos un* ***sistema de coordenadas*** *de la recta, y al número real que le corresponde a un punto de la recta lo llamaremos la* ***coordenada del punto*** *(en dicho sistema de coordenadas).*

**(ii) (Colocación de la Regla)**
*Dados dos puntos A y B de una recta, siempre podremos escoger la correspondencia anterior de tal manera que al punto A le corresponda el número real cero (0) y al punto B le corresponda cualquier número real positivo prefijado.*

**Postulado 4 (Separación del plano)**
*Dada una recta m, el conjunto de los puntos que no están en m es la unión de dos conjuntos $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ que tienen las siguientes propiedades:*

**(a)** *$\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ son convexos,* ***y***
**(b)** *si A está en $\mathscr{H}_1$ y B está en $\mathscr{H}_2$, entonces $\overline{AB}$ intersecta a m.*

*A $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ los llamaremos* ***lados*** *de (o* ***semiplanos*** *determinados por) m, y diremos que* ***uno es el opuesto del otro****, o simplemente que* ***son opuestos****; a m la llamaremos* ***borde*** *(****frontera*** *o* ***arista****) de cada uno de sus lados.*

**Postulado 5 (Del Transportador)**

**(a) (Medida del ángulo)**
*Cada ángulo tiene asociado un único número real comprendido estrictamente entre 0 y 180, al que llamaremos* ***la medida del ángulo****.*
*Si denotamos a un ángulo con el símbolo $\angle\alpha$, denotaremos su medida por $m\angle\alpha$.*

**(b) (Construcción de ángulos)**
*Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ en el borde de un semiplano $\mathscr{H}$, y un número real r estrictamente comprendido entre 0 y 180, se tiene que existe exactamente un rayo $\overrightarrow{AC}$, con C en $\mathscr{H}$, tal que $m\angle CAB = r$.*

**(c) (Adición de ángulos)**
*La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es la medida del ángulo abarcante.*

**(d) (Del par lineal)**
*La suma de las medidas de los ángulos de un par lineal es 180.*

**Postulado 6 (Criterio LAL de congruencia de triángulos)**
*Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos lados y el ángulo comprendido por ellos del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*

**Postulado 7 (De las paralelas)**
*Dada una recta y un punto fuera de ella, se tiene que existe a lo sumo una recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado.*

# Bibliografía


[1] Rich, Barnett, *Geometría*, segunda ed., McGraw-Hill, México, 1991 (Español).

[2] Pogorélov, A. V., *Geometría elemental*, Editorial MIR, Moscú-URSS, 1974 (Español).

[3] Hilbert, David, *Foundations of Geometry*, Open Court, Chicago, 1902 (Inglés).

[4] Hemmerling, Edwin M., *Geometría elemental*, primera ed., Editorial Limusa, México, 1975 (Español).

[5] Coxeter, H. S. M., *Fundamentos de Geometría*, primera ed., Editorial Limusa - Wiley, S. A., Mexico, 1971 (Español).

[6] Rey Pastor, J. and Puig Adam, P., *Geometría Racional*, Nuevas Gráficas, Madrid-España, 1956 (Español).

[7] Newman R., James, *Sigma, el mundo de las Matemáticas*, vol. I al VI, Grijalbo S. A., Barcelona, 1969 (Español).

[8] Ohmer, Merlin M., *Geometría elemental para maestros*, Editorial Trillas, México, 1992 (Español).

[9] Moise, Edwin E. and Downs, Jr., Floyd L., *Geometría Métrica*, Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1986 (Español).

[10] Marques Barbosa, Joâo Lucas, *Geometría Euclideana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985 (Portugués).

[11] Heath, Sir Thomas L., *The thirteen books of Euclid's Elements*, segunda ed., vol. I, II y III, Dover Publications, Inc., New York, 1980 (Inglés), (Traducción, introdución y comentarios).

[12] Baldor, J. A., *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*, cuarta ed., Cultural Venezolana, S. A., Caracas - Venezuela, 1986 (Español).

[13] Bourbaki, Nicholas, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid, 1969 (Español).

[14] Alsina, Claudi and Trillas, Enric, *Lecciones de álgebra y Geometría*, segunda ed., Editorial Gustavo Gili, S. A., Barcelona, 1984 (Español).

[15] Moise, Edwin E., *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado*, Compañía Editorial Continental, S. A., Colombia-México, Junio 1976 (Español).

[16] Cardona V., Oscar, Cardozo A., Claudia, López F., Guillermo, Posada J., Ricardo, and Ramírez M., Elmer, *Geometría básica*, primera ed., Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín-Colombia, 1996 (Español).

# Índice alfabético

**D**



**E**



**F**

**H**



**I**



**L**



**M**



**N**



**O**



**P**

**V**