REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

Variantes del Teorema de Weyl para Operadores sobre Espacios de Banach

Tesis Doctoral como requisito para optar al
Grado de Doctor en Matemáticas

Autor: Pedro L. Peña Duarte

Tutor: Dr. Pietro Aiena
Co-Tutor: Dr. José Giménez

Mérida, Mayo de 2009

A mis Padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento:

A mi tutor, el Profesor Pietro Aiena, por su apoyo y confianza durante la realización de este trabajo; y además, por la hospitalidad y el calor humano recibido en mis dos visitas a la Universidad de Palermo-Italia, donde tuve la oportunidad de compartir con matemáticos de gran prestigio internacional.

A mi cotutor el Profesor José Giménez, por su apoyo brindado y colaboración durante mis estudios de doctorado.

A los Profesores Ennis Rosas, Edward Trousselot, Carlos Carpintero, Jorge Vielma y Diómedes Barcenas por sus valiosos consejos en el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos y compañeros: Hanzel Larez, Jesus Guillén, René Arguello, Luis García, Mariela Sarmiento, Luis González, Teodoro Lara, Arturo Barros, Gladys Gutiérrez, Wadie Aziz, Edgar Rosales, Roy Quintero, Fernando Mejías, Luz María, Ruben Delgadillo, Carlos Uzcátegui, Emiro Coronado, Osmin Monsalve, Cosme Duque, Newman Zambrano, Walter, Chang, Ramón Pino, Olga Porras, Luisa Sánchez y José Luis, por brindarme estímulo y apoyo constante durante mis estudios doctorales.

Al Doctorado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias y al Núcleo Universitario Rafael Rangel de nuestra Ilustre Universidad de Los Andes, por darme la oportunidad de realizar el doctorado.

A mi esposa Laura y mi hijo Pedro Luis, por estar conmigo y brindarme su apoyo incondicional.

A la Universidad de Oriente, FONACIT y a los Postgrados Integrados, por su aporte económico.

Al Consejo de Estudio de Postgrado y al CDCHT proyecto código $C-1655-09-05-ED$ por su apoyo financiero.

A todas las personas que no menciono y que estuvieron involucradas en toda esta historia. A todos Gracias.

Índice general

Resumen

Rakočević en [36], introduce dos variantes del teorema de Weyl. La primera de estas variantes, se conoce como el teorema de a-Weyl y la segunda como la propiedad (w). El teorema de a-Weyl, se ha estudiado en varios artículos de reciente publicación (ver [2], [18], [35]). En este trabajo, hemos desarrollado una gran cantidad de resultados relacionados con la propiedad (w). Además, se dan relaciones entre las dos variantes del teorema de Weyl. El estudio de estas variantes, lo hemos hecho por medio de una propiedad que proviene de la teoría espectral local llamada SVEP. Presentaremos también, algunas mejoras en gran parte de los teoremas de Aiena-Peña [9] y Aiena-Guillén-Peña [8]. Además, demostraremos que estas variantes del teorema de Weyl, permanecen estables bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador. Al final de este trabajo desarrollamos algunos resultados de estabilidad de la propiedad (w) para operadores polaroides bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador.

Introducción

En años recientes, la Teoría Espectral ha tenido un gran desarrollo y han surgido muchos tipos de espectros asociados a un operador T. Estos espectros son subconjuntos del espectro clásico $\sigma(T)$ y su estudio, ha permitido expandir el campo de la Teoría Espectral, enriqueciendola y proporcionando nuevos enfoques en la investigación de propiedades espectrales. En este trabajo, estudiaremos espectros que se derivan de la Teoría de Operadores de Fredholm. Presentamos un amplio estudio de las variantes del teorema de Weyl, haciendo mayor énfasis en una de estas variantes, llamada la propiedad (w), ya que se conocía muy poco de esta propiedad espectral planteada por Rakočević en [36]. A lo largo de esta tesis, trabajaremos con endomorfismos continuos definidos sobre espacios de Banach y nos proponemos demostrar una gran cantidad de resultados relacionados con la propiedad (w), en donde veremos caracterizaciones de las dos variantes del teorema de Weyl. Estudiaremos además, clases de operadores que satisfacen la propiedad (w) y la estabilidad de la propiedad (w) para operadores polaroides bajo perturbaciones nilpotentes.

El primer capítulo consta de cinco secciones, en dichas secciones, se desarrollan los resultados básicos para una comprensión más clara y satisfactoria de nuestro trabajo. Hemos querido presentar una gran cantidad de resultados relacionados al teorema de a-Browder, el teorema de Weyl y el teorema de a-weyl que aparecen en artículos de años recientes (ver [3], [4], [5], [11], [12], [16] y [23]), con la intención de contrastar estos resultados con los conseguidos en [8] y [9]. En la última sección de éste capítulo, desarrollamos con detalle cinco ejemplos que juegan un papel importante en nuestro trabajo de investigación. Varios de los detalles de estos ejemplos, no se encuentran en las fuentes originales.

En el segundo capítulo, estudiaremos la propiedad (w) y sus relaciones con el teorema de Weyl y el teorema de a-Weyl. El capítulo 2 lo dividimos en dos secciones, en la primera sección daremos caracterizaciones de la propiedad (w), por medio de la SVEP. Nos ocuparemos también de estudiar la propiedad (w) para el dual de un operador, y trataremos clases de operadores que satisfacen las variantes antes mencionadas.

Rakočević en [36] demostró que la propiedad (w) no es una propiedad intermedia entre el teorema de Weyl y el teorema de a-Weyl. En esta sección, demostraremos que en presencia de SVEP las dos variantes del teorema de Weyl son equivalentes. En la segunda sección, nos dedicamos al estudio de los operadores polaroides y su relación con la propiedad (w). En este capítulo, presentaremos mejoras en la mayoria de los teoremas que aparecen en Aiena-Peña [9].

Por último, en el capítulo 3 estudiaremos la estabilidad de la propiedad (w) para operadores polaroides bajo perturbaciones nilpotentes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo describiremos con precisión los resultados necesarios que permitan un fácil acceso al material de investigación que nos ocupará en los capítulos siguientes. Hemos querido presentar estos preliminares en cinco secciones, con el propósito de esclarecer las ideas que dieron origen al presente trabajo. Se expone una gran cantidad de ejemplos sin omitir detalles, con el fin de lograr una mejor compresión de los resultados que aparecen en este capítulo.

1.1. Operadores lineales y continuos sobre espacios de Banach

Si X, Y son espacios de Banach, denotaremos por $L(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Asumiremos en este trabajo que todos los espacios de Banach son complejos de dimensión infinita. Recordemos que si $T \in L(X, Y)$, la norma de T se define por

$$\|T\| := sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

El operador identidad sobre X será denotado por I. Dado un operador $T \in L(X, Y)$, definimos el núcleo de T como el conjunto:

$$N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$$

y el rango de T es denotado por $T(X)$ y se define por:

$$T(X) := \{Tx : x \in X\}.$$

Es fácil ver que el núcleo y el rango del operador T son subespacios T-invariantes. Si $X = Y$, denotaremos por $L(X) := L(X, X)$ al espacio de todos los endomorfismos continuos sobre X. El espacio dual de X, lo denotaremos por $X^* := L(X, \mathbb{C})$. Si $T \in L(X, Y)$ denotaremos por $T^* \in L(Y^*, X^*)$ el operador dual de T, el cuál se define por:

$(T^*f)(x) := f(Tx)$ para cada $x \in X, f \in Y^*$. Para más detalle sobre el dual de un operador, ver Heuser [25].

Sea M un subconjunto de un espacio de Banach X. El **anulador** de M es el subespacio cerrado de X^* definido por:

$$M^\perp := \{f \in X^* : f(x) = 0 \; para \; cada \; x \in M\}.$$

El **preanulador** de un subconjunto W de X^* es el subespacio cerrado de X definido por:

$$^\perp W := \{x \in X : f(X) = 0 \; para \; cada \; f \in W\}.$$

Las siguientes relaciones duales entre los núcleos y los rangos asociados de un operador $T \in L(X)$ y su dual $T^* \in L(X^*)$ son bien conocidas (ver Heuser pg.135 [25]):

$$N(T) =^\perp T^*(X^*) \quad , \quad ^\perp N(T^*) = \overline{T(X)}$$

$$T(X)^\perp = N(T^*) \quad y \quad \overline{T^*(X^*)} \subseteq N(T)^\perp.$$

Si T tiene rango cerrado, la última contención se convierte en la igualdad $T^*(X^*) = N(T)^\perp$.

Observación 1. Si $X = M \oplus N$ donde M y N son subespacios cerrados, entonces $X^* = M^\perp \oplus N^\perp$. En efecto:
Si denotamos por P_M el proyector de X sobre M a lo largo de N, entonces $P_M \in L(X)$ es un operador de rango cerrado y además $X = P_M(X) \oplus N(P_M)$. Por otro lado, $P_M^*(X^*) = N(P_M)^\perp$ y $N(P_M^*) = P_M(X)^\perp$. Luego, como P_M es idempotente se tiene que P_M^* es idempotente y así, P_M^* proyecta a X^* sobre $P_M^*(X^*)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} X^* &= P_M^*(X^*) \oplus N(P_M^*) \\ &= N(P_M^*) \oplus P_M(X)^\perp \\ &= N^\perp \oplus M^\perp = M^\perp \oplus N^\perp. \end{aligned}$$

Definición 1.1. Sea X un espacio de Banach complejo. El espectro de un operador $T \in L(X)$ se define como el conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \; no \; es \; biyectivo\}$$

Recordemos que si $T \in L(X)$ es biyectivo, por el principio de la aplicación abierta se tiene que el inverso $T^{-1} \in L(X)$.

Si $T \in L(X)$, definimos el radio espectral de T por:

$$r(T) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 1.1. *Sea X un espacio de Banach complejo. Entonces para cada $T \in L(X)$ se tiene que $\sigma(T)$ es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{C}$ y además,*
$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración.
Ver Teorema 45.1 de [25]. ■

Por las propiedades de operador dual se obtiene que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$. El conjunto $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ es llamado el conjunto resolvente de T y la aplicación:

$$R(\lambda, T) : \rho(T) \mapsto L(X),$$

definida por $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$, es llamada el resolvente de T.

Teorema 1.2. *Sean $T, S \in L(X)$ tal que $TS = ST$, entonces:*

$$r(S+T) \leq r(T) + r(S) \qquad y \qquad r(TS) \leq r(T)r(S).$$

Demostración.
Ver Proposición 45.1 de [25]. ■

Teorema 1.3. *Si $T \in L(X)$ y $Q \in L(X)$ es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T, entonces:*
T es invertible $\Leftrightarrow$ $T + Q$ es invertible. En consecuencia, $\sigma(T+Q) = \sigma(T)$.

Demostración.
$\Rightarrow$) $T + Q = T(I + T^{-1}Q)$ y como T^{-1} y Q conmutan, se tiene del Teorema 1.2 que $r(T^{-1}Q) \leq r(T^{-1})r(Q) = 0$. Así, $T^{-1}Q$ es un operador cuasi-nilpotente y $I + T^{-1}Q$ es un operador invertible. De esta manera, $T + Q$ es el producto de dos operadores invertibles y en consecuencia $T + Q$ es invertible.
$\Leftarrow$) Si $T + Q$ es invertible entonces $T = (T + Q) - Q$ es invertible. ■

Para el caso en que X, Y representan espacios de Hilbert complejos, para un operador $T \in L(X, Y)$ es más conveniente considerar el operador adjunto de Hilbert que el operador dual asociado a T. Este operador **adjunto de Hilbert**, o cortamente **adjunto**, se define como el operador $T' : Y \mapsto X$ que satisface:
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle$ para cada $x \in X,\ y \in Y$.

Teorema 1.4. *(Teorema de representación de Fréchet-Riesz). Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert complejo. Entonces existe una isometria lineal $U \in L(H, H^*)$ tal que:*
$UT' = T^*U$, donde T' representa el adjunto y T^* el operador dual de T.

Del resultado anterior tenemos la siguiente fórmula para el adjunto de un operador $T \in L(X)$:

$$T' = U^{-1}T^*U.$$

Esta fórmula pone de manifiesto que para el caso de endomorfismos sobre espacios de Hilbert, puede ser más conveniente usar el adjunto, que el dual de un operador.

Si un operador $T \in L(X)$ es inyectivo con rango cerrado, diremos que T es un operador **inferiormente acotado**.

Es conocido el resultado (Proposición 36.1 Heuser [25]) que dice que un operador $T \in L(X)$ tiene rango cerrado, si y sólo si, el módulo minimal reducido $\gamma(T)$ del operador T, es positivo ($\gamma(T) > 0$), donde el **módulo minimal reducido de** T se define por:

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))}$$

Además, por el Teorema 3 (Müller [31]), se tiene que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.
Como una consecuencia del teorema de representación de Frechet-Riesz, tenemos el resultado siguiente:

Teorema 1.5. *Sea H un espacio de Hilbert complejo, entonces:*
T^* es inferiormente acotado (resp. sobre) $\Leftrightarrow T'$ es inferiormente acotado (resp. sobre).

Teorema 1.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$*

i) T es sobre (resp. inferiormente acotado) $\Leftrightarrow T^*$ es inferiormente acotado (resp. sobre).

ii) T es inferiormente acotado (resp. sobre) $\Leftrightarrow \lambda I - T$ es inferiormente acotado (resp. sobre) si $|\lambda| < \gamma(T)$ donde $\gamma(T)$ es el módulo minimal reducido de T.

Demostración.
Ver Lema 1.30 de [1]. ■

De los Teoremas 1.5 y 1.6 obtenemos:

Teorema 1.7. *Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$:*
T es sobre(resp. inferiormente acotado) $\Leftrightarrow T'$ es inferiormente acotado(resp. sobre).

Definición 1.2. Sea $T \in L(X)$:

1) $\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ } no \text{ } es \text{ } inferiormente \text{ } acotado\}$. Este conjunto recibe el nombre de **espectro aproximado puntual de** T.

2) $\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ } no \text{ } es \text{ } sobreyectivo\}$. Este conjunto recibe el nombre de **espectro sobreyectivo de T.**

Observemos que $\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_s(T)$.

Del Teorema 1.6(i) se tiene que $\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*)$ y $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$. Ahora, por la parte (ii) del Teorema 1.6 se tiene que $\sigma_a(T)$ y $\sigma_s(T)$ son subconjuntos compactos de $\sigma(T)$.

En el Teorema 2.42 de [1] se demuestra que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$, es decir, el espectro aproximado puntual contiene a la frontera del espectro de T. Por otro lado, $\partial\sigma(T) = \partial\sigma(T^*) \subseteq \sigma_a(T^*) = \sigma_s(T)$. Así, $\sigma_a(T)$ y $\sigma_s(T)$ son subconjuntos no vacíos y compactos de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.8. *Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$.*

i) $\sigma_a(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_s(T)\}$

ii) $\sigma_s(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T)\}$

iii) $\sigma_a(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^*)\}$ *y* $\sigma_s(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_s(T^*)\}$.

iv) $\sigma(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Demostración.

i)
$$\begin{aligned}\sigma_a(T^{'}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \; no\ es\ inferiormente\ acotado\}\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{'} \; no\ es\ inferiormente\ acotado\}\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda I - T \; no\ es\ sobre\}(\text{Teorema } 1.7)\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma_s(T)\}.\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}\sigma_s(T^{'}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \; no\ es\ sobre\}\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{'} \; no\ es\ sobre\}\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda I - T \; no\ es\ inferiormente\ acotado\}(\text{Teorema } 1.7)\\ &= \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma_a(T)\}.\end{aligned}$$

iii) Es consecuencia de (i) y (ii) y el hecho que
$\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*)$ y $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$.

iv) se sigue de (iii) y del hecho que $\sigma(T^{'}) = \sigma_a(T^{'}) \cup \sigma_s(T^{'})$. ■

Ejemplo 1.3. Consideremos los operadores de traslación a izquierda y traslación a derecha sobre $\ell_2 := \ell_2(\mathbb{N})$ denotados por L y R, respectivamente, definidos por:

$$L : \ell_2 \mapsto \ell_2 \qquad\qquad R : \ell_2 \mapsto \ell_2$$
$$L(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots) \qquad\qquad R(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Veamos que R y L son operadores de rango cerrado:

Es claro que $R, L \in L(\ell_2)$. Además, L es el adjunto de R y viceversa.

Observemos que $\gamma(R) = \text{ínf}\{\|Rx\| : \|x\| = 1\} = 1 > 0$. De este modo, R tiene rango cerrado. R es un operador inferiormente acotado y por el Teorema 1.6, se tiene que $\sigma_a(T) \subseteq \Gamma$, donde Γ es la frontera del disco unitario. Es conocido que $\sigma(R) = \sigma(L) = \overline{\mathbb{D}} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Ahora, como $\partial\sigma(T) = \Gamma \subseteq \sigma_a(R)$, entonces $\sigma_a(R) = \sigma_s(L) = \Gamma$. Por otro lado, $\gamma(R) = \gamma(L) = 1 > 0$, así L también tiene rango cerrado.

1.2. Operadores semi-Fredholm, semi-Browder, semi-Weyl y SVEP

Sea X un espacio de Banach complejo, definimos los defectos de un operador T por:
$\alpha(T) := dimN(T)$ y $\beta(T) := codimT(X)$. El conjunto de los **operadores superior semi-Fredholm** se define por:

$$\Phi_+(X) := \{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \ y \ T(X) \ es \ cerrado\},$$

mientras que el conjunto de los **operadores inferior semi-Fredholm** se define por:

$$\Phi_-(X) := \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\}.$$

El conjunto de los **operadores semi-Fredholm** se define por:

$$\Phi_\pm(X) := \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X).$$

La clase $\Phi(X)$ de los **operadores de Fredholm** se define por:

$$\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X).$$

Si $T \in \Phi_\pm(X)$; definimos el índice de T por:

$$ind(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

La condición $\beta(T) < \infty$, implica que $T(X)$ es cerrado (ver Heuser [25]).

Definición 1.4. Sea $T \in L(X)$. Diremos que el operador T tiene ascendente finito si existe un entero positivo k tal que $N(T^k) = N(T^{k+1})$. El mínimo entero positivo $p := p(T)$ que satisface la condición antes mencionada, es llamado el ascendente de T. Si tal entero no existe, definimos $p(T) := \infty$. Análogamente, diremos que T tiene descendente finito si existe un entero positivo l tal que $T^l(X) = T^{l+1}(X)$. El mínimo entero positivo $q := q(T)$ que satisface la condición antes mencionada, es llamado el descendente de T. si tal entero no existe, definimos $q(T) := \infty$.

Claramente $p(T) = 0$ si y sólo si T es inyectivo, y $q(T) = 0$ si y sólo si T es sobreyectivo. Observemos que el ascendente y el descendente de un operador T se puede definir en general para operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales. A las cantidades $p(T)$ y $q(T)$, se les llama también longitudes de las cadenas del operador T.

Teorema 1.9. *Sea* $T \in L(X)$

i) *Si* T *tiene rango cerrado* $\Rightarrow \alpha(T) = \beta(T^*)$ *y* $\beta(T) = \alpha(T^*)$,

ii) $T \in \Phi_+(X) \Leftrightarrow T^* \in \Phi_-(X^*)$,

iii) $T \in \Phi_-(X) \Leftrightarrow T^* \in \Phi_+(X^*)$,

iv) $T \in \Phi_\pm(X) \Rightarrow ind(T^*) = -ind(T)$.

Demostración.
Ver Teorema 1.41 de [2]. ■

Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ el ideal de los operadores compactos definidos sobre un espacio de Banach complejo X.

Teorema 1.10. *Sea* X *un espacio de Banach complejo.*

i) *Si* $T, S \in \Phi_-(X) \Rightarrow ST \in \Phi_-(X)$,

ii) *Si* $T, S \in \Phi_+(X) \Rightarrow ST \in \Phi_+(X)$,

iii) *Si* $T, S \in \Phi(X) \Rightarrow ST \in \Phi(X)$,

iv) $\Phi_+(X) + \mathcal{K}(X) \subseteq \Phi_+(X)$,

v) $\Phi_-(X) + \mathcal{K}(X) \subseteq \Phi_-(X)$,

vi) *Si* $T \in \Phi_\pm(X)$ *y* $K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow ind(T + K) = ind(T)$.

Demostración.
Ver Teorema 9 de [31]. ■

Corolario 1.1. *Si* $T \in \Phi_\pm(X) \Rightarrow p(T) = q(T^*)$ *y* $q(T) = p(T^*)$.

Demostración.
Ver Corolario 1.43 de [2]. ■

Definamos ahora la clase de los operadores **semi-Weyl superior** y **semi-Weyl inferior**:

Definición 1.5.

$$W_+(X) := \{T \in \Phi_+(X) : ind(T) \leq 0\},$$
$$W_-(X) := \{T \in \Phi_-(X) : ind(T) \geq 0\}.$$

El conjunto de los **operadores de Weyl** se define por:
$W(X) := W_+(X) \cap W_-(X) = \{T \in \Phi(X) : ind(T) = 0\}$.

La clase de operadores definida anteriormente generan los espectros siguientes:

1) El espectro de Weyl:
   $\sigma_w(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\}$.
2) El espectro aproximado puntual esencial de Weyl:
   $\sigma_{uw}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\}$.
3) El espectro sobreyectivo esencial de Weyl:
   $\sigma_{lw}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\}$.

Notemos que $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_a(T)$ y $\sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_s(T)$

Observación 2. Por la definición de operador semi-Weyl y el Teorema 1.9, tenemos las igualdades siguientes:

i) $\sigma_w(T) = \sigma_{uw}(T) \cup \sigma_{lw}(T)$.

ii) $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{lw}(T^*)$.

iii) $\sigma_{lw}(T) = \sigma_{uw}(T^*)$.

Teorema 1.11. *Sea $T \in L(X)$. Entonces:*

i) $T \in W_+(X) \Leftrightarrow T = S + K$, donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y S es un operador inferiormente acotado.

ii) $T \in W_-(X) \Leftrightarrow T = S + K$, donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y S es un operador sobreyectivo.

iii) $T \in W(X) \Leftrightarrow T = S + K$, donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y S es un operador biyectivo.

Demostración.
Ver Teorema 3.39 de [1]. ■

En virtud del Teorema anterior y los Teoremas 1.9 y 1.10, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.2. *Sea $T \in L(X)$.*

i) $\sigma_{uw}(T) = \cap\{\sigma_a(T + K) : K \in \mathcal{K}(X)\}$.

ii) $\sigma_{lw}(T) = \cap\{\sigma_s(T + K) : K \in \mathcal{K}(X)\}$.

Del Corolario anterior se sigue que $\sigma_{uw}(T)$ y $\sigma_{lw}(T)$ son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.12. *Sea $T \in L(X)$. Si $p(T)$ y $q(T)$ son finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

Demostración.
Ver Proposición 38.3 de [25]. ■

Teorema 1.13. *Sea $T \in L(X)$, entonces:*

i) *Si $p(T) < \infty \Rightarrow \alpha(T) \leq \beta(T)$,*

ii) *Si $q(T) < \infty \Rightarrow \beta(T) \leq \alpha(T)$,*

iii) *Si $p(T) = q(T) \Rightarrow \alpha(T) = \beta(T)$,*

iv) *Si $\alpha(T) = \beta(T)$ y $p(T) < \infty$(ó $q(T) < \infty$) $\Rightarrow p(T) = q(T)$.*

Demostración.
Ver Teorema 3.4 de [1]. ■

Los dos Teoremas anteriores (1.12 y 1.13) también son ciertos para el caso de operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales.

La clase de los **operadores semi-Browder superior** se define por:

$$B_+(X) := \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\}$$

y la clase de los **operadores semi-Browder inferior** se define por:

$$B_-(X) := \{T \in \Phi_+(X) : q(T) < \infty\}$$

La clase de los **operadores de Browder** se define por:
$B(T) := B_+(X) \cap B_-(X) = \{T \in \Phi(X) : p(T) = q(T) < \infty\}$.
En virud del Teorema 1.13 tenemos las siguientes contenciones:

Observación 3. Sea X un espacio de Banach complejo.

i) $B_+(X) \subseteq W_+(X)$,

ii) $B_-(X) \subseteq W_-(X)$,

iii) $B(X) \subseteq W(X)$.

Observación 4. Por el Teorema 1.9 y el Corolario 1.1 tenemos:

i) $T \in B_+(X) \Leftrightarrow T^* \in B_-(X^*)$.

ii) $T \in B_-(X) \Leftrightarrow T^* \in B_+(X^*)$.

El **espectro de Browder** de $T \in L(X)$ se define por:

$$\sigma_b(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\}$$

El **espectro superior semi-Browder** se define por:

$$\sigma_{ub}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_+(X)\}$$

El **espectro inferior semi-Browder** se define por:

$$\sigma_{lb}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_-(X)\}.$$

Observación 5. Sea $T \in L(X)$:

i) $\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T)$,

ii) $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$.

Es sabido que el espectro de Fredholm $\sigma_f(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ (ver Proposición 51.1 Heuser [24]).

Observemos que $\sigma_f(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$. De esta manera, el espectro de Browder y el espectro de Weyl son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{C}$.

Un operador $T \in L(X)$ se dice **semi-regular**, si T tiene rango cerrado y $N(T) \subseteq T^n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.6. Un operador $T \in L(X)$, se dice esencialmente semi-regular, si existe un par de subespacios cerrados T-invariantes (M, N) tal que:
$X = M \oplus N$, $dim(N) < \infty$, la restricción $T|_M$ es semi-regular y $T|_N$ es quasi-nilpotente.

Notemos que si T es esencialmente semi-regular, entonces $T|_N$ es nilpotente, ya que cada operador quasi-nilpotente sobre un espacio de dimensión finita es nilpotente.

Definición 1.7. Sea $T \in L(X)$.

1. $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ } no \text{ } es \text{ } esencialmente \text{ } semi-regular\}$.
2. $\sigma_{uf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\} \subseteq \sigma_{uw}(T)$.
3. $\sigma_{lf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\} \subseteq \sigma_{lw}(T)$.
4. $\sigma_{sf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_\pm(X)\}$.

Por la definición anterior y las propiedades duales de los operadores semi-Fredholm tenemos:

Observación 6. Sea $T \in L(X)$.

i) $\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T)$.

ii) $\sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T)$.

iii) $\sigma_{uf}(T) = \sigma_{lf}(T^*)$ y $\sigma_{lf}(T) = \sigma_{uf}(T^*)$.

Teorema 1.14. *Si $T \in \Phi_{\pm}(X) \Rightarrow T$ es esencialmente semi-regular.*

Demostración.
Ver Teorema 1.62 de [1]. ∎

Por el Teorema anterior tenemos las siguientes contenciones:

$$\sigma_{es}(T) \subseteq \sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_f(T).$$

Teorema 1.15. *Sea $T \in L(X)$. El espectro esencialmente semi-regular $\sigma_{es}(T)$ es compacto y además $\partial\sigma_f(T) \subseteq \sigma_{es}(T)$*

Demostración.
Ver Teorema 1.65 de [1]. ∎

Del Teorema anterior se deduce que $\sigma_{es}(T)$ y $\sigma_{sf}(T)$ son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{C}$.

Observación *7.* $\sigma_{uf}(T) \neq \emptyset$ y $\sigma_{lf}(T) \neq \emptyset$. En efecto:
En caso contrario, tendriamos que $\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T) = \emptyset$, lo cual es absurdo.

Observemos que $\sigma_{uw}(T)$ y $\sigma_{lw}(T)$ son subconjuntos no vacíos y compactos de $\mathbb{C}$, ya que en caso contrario, $\sigma_{uf}(T) = \emptyset$ ó $\sigma_{lf}(T) = \emptyset$, lo que seria un absurdo.

Teorema 1.16. *Sea $T \in L(X)$:*

i) $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$ *y* $\sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T)$.

ii) $\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*)$, $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^*)$ *y* $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$.

iii) $\sigma_{ub}(T) = \cap\{\sigma_a(T+K) : K \in \mathcal{K}(X)\ ,\ KT = TK\}$.

iv) $\sigma_{lb}(T) = \cap\{\sigma_s(T+K) : K \in \mathcal{K}(X)\ ,\ KT = TK\}$.

v) $\sigma_b(T) = \cap\{\sigma(T+K) : K \in \mathcal{K}(X)\ ,\ KT = TK\}$.

Demostración.
Ver Corolarios 3.45 y 3.47 de [1]. ∎

Del teorema anterior se deduce que los espectros $\sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{lb}(T)$ son subconjuntos compactos y no vacíos de $\mathbb{C}$.

Hablaremos ahora de una propiedad de tipo espectral llamada **SVEP** (del ingles **s**ingle-**v**alued **e**xtension **p**roperty). La SVEP es una propiedad que es satisfecha por una amplia clase de operadores acotados sobre espacios de Banach complejos. Esta propiedad la introduce Dunford por vez primera en 1952. Dicha propiedad recibió un tratamiento más sistemático en el texto clásico "Linear Operators "de Dunford y Schwartz de 1971 y más recientemente por Laursen y Neumann ([26]2000) y Aiena [1].

Dado un operador $T \in L(X)$ y un elemento $y \in X$, estamos interesados en conseguir una solución analítica $f : U \mapsto X$ de la ecuación:

$$(\lambda I - T)(f(\lambda)) = y$$

sobre un subconjunto abierto adecuado U de $\mathbb{C}$.

Sobre el conjunto resolvente $\rho(T)$ del operador T, la solución se obtiene fácilmente, aplicando $(\lambda I - T)^{-1}$ en ambos lados de la ecuación anterior y esto nos conduce a la única solución:

$$f(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} y$$

la cuál es válida para cada $\lambda \in \rho(T)$. Sin embargo, es posible obtener con frecuencia para un cierto $y \in X$, una solución analítica de la ecuación $(\lambda I - T)(f(\lambda)) = y$, sobre conjuntos abiertos que contienen puntos del espectro $\sigma(T)$. En este caso la unicidad de la solución analítica no es trivial, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.8. Un operador $T \in L(X)$ tiene la SVEP, si, para cada disco abierto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$, la única solución analítica $f : \mathbb{D} \mapsto X$ de la ecuación:

$$(\lambda I - T)(f(\lambda)) = 0$$

para cada $\lambda \in \mathbb{D}$, es $f \equiv 0$.

En el presente trabajo hacemos uso de una definición local de la SVEP que fué formulada por Finch [18] en 1975. Esta definición local de la SVEP juega un papel importante en la teoría espectral local y ha sido estudiada en artículos recientes, ver por ejemplo ([4],[7],[8],[9] y [11]).

Definición 1.9. Sea $T \in L(X)$. El operador T se dice que tiene la propiedad de extensión univaluada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (SVEP en λ_0) si para cada disco abierto $\mathbb{D}$ centrado en λ_0, la única función analítica $f : \mathbb{D} \mapsto X$ que satisface la ecuación:
$(\lambda I - T)(f(\lambda)) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}$;
es la función $f \equiv 0$.

Observemos que $T \in L(X)$ tiene la SVEP, si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \mathbb{C}$.
En lo que sigue, denotaremos por $accA$ los puntos de acumulación del conjunto A y por $isoB$ los puntos aislados del conjunto B.

Teorema 1.17. *Sea $T \in L(X)$.*

i) T tiene la SVEP en cada punto $\lambda \in \rho(T)$, *ii)* *T tiene la SVEP en cada punto $\lambda \in \overline{\rho(T)}$. En particular, T tiene la SVEP en cada punto aislado del espectro y en cada punto de $\partial\sigma(T)$;*

iii) *Si $\lambda_0 \notin acc\sigma_p(T) \Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0;*

iv) *Si $\lambda_0 \notin acc\sigma_a(T) \Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0;*

v *Si $\lambda_0 \notin acc\sigma_s(T) \Rightarrow T^*$ tiene la SVEP en λ_0;*

Demostración.
Ver Observación 2.4 y Corolario 2.50 de [1]. ■

Ejemplo 1.10. Sea $T \in L(X)$.

i) Cada operador de espectro finito tiene la SVEP. En particular, los operadores quasi-nilpotentes tienen la SVEP.

ii) Si $int(\sigma_p(T)) = \emptyset \Rightarrow T$ tiene la SVEP.

iii) Por (ii), cualquier operador con espectro real tiene la SVEP.

Teorema 1.18. *Sea $T \in L(X)$.*

i) *T tiene la SVEP en $\lambda_0 \Leftrightarrow \lambda_0 I - T$ tiene la SVEP en 0.*

ii) *Si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo $\Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0.*

iii) *Si T tiene la SVEP en λ_0 y M es un subespacio cerrado T-invariante $\Rightarrow T|_M$ tiene la SVEP en λ_0.*

Demostración.
Ver Teorema 2.22 y Corolario 2.24 de [1]. ■

Por lo anterior, si $\lambda I - T$ es inyectivo, entonces T tiene la SVEP en λ. El siguiente resultado, muestra que si $\lambda I - T$ es sobreyectivo y T tiene la SVEP en λ entonces $\lambda \in \rho(T)$.

Teorema 1.19. *Sea $T \in L(X)$ tal que $\lambda I - T$ es sobreyectivo. Entonces:*
T tiene la SVEP en $\lambda \Leftrightarrow \lambda I - T$ es inyectivo.

Demostración.
Ver Corolario 2.24 de [1]. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que el operador de traslación a izquierda L sobre $\ell_2(\mathbb{N})$ no tiene la SVEP en 0. Recordemos que T' representa el adjunto de Hilbert y T^* el operador dual de un operador $T \in L(X)$.

Teorema 1.20. *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Entonces:*
T' tiene la SVEP en $\lambda \Leftrightarrow T^*$ tiene la SVEP en λ.

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que T' tiene la SVEP en λ y veamos que T^* tiene la SVEP en λ.
Sea $\mathbb{D}$ un disco centrado en λ y $f : \mathbb{D} \mapsto H^*$ una función análitica tal que:

$$(\mu I^* - T^*)(f(\mu)) = 0 \quad \textit{para} \;\; \textit{cada} \;\; \mu \in \mathbb{D}.$$

Luego, por el Teorema 1.4 existe una isometría $U \in L(H, H^*)$ tal que:

$$(\mu(UIU^{-1}) - (UT'U^{-1}))(f(\mu)) = 0 \quad \textit{para cada } \mu \in \mathbb{D}.$$

De esta manera, $U[\mu I - T']U^{-1}(f(\mu)) = 0$ *para cada* $\mu \in \mathbb{D}$. Luego,
$[\mu I - T'](U^{-1}f(\mu)) = 0$ *para cada* $\mu \in \mathbb{D}$ (ya que U es inyectivo). De este modo:
$U^{-1}(f(\mu)) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}$, ya que T' tiene la SVEP en λ. Ahora, como U^{-1} es inyectivo tenemos que $f(\mu) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}$. Así, T^* tiene la SVEP en λ.
$\Leftarrow$) Se prueba de forma análoga a la implicación anterior. ■

Este último resultado, también nos muestra la conveniencia de usar el adjunto de un operador cuando el espacio es de Hilbert.

Teorema 1.21. *Sea $T \in L(X)$.*

i) Si T tiene la SVEP $\Rightarrow \sigma_s(T) = \sigma(T)$.

ii) Si T^* tiene la SVEP $\Rightarrow \sigma_a(T) = \sigma(T)$.

iii) Si T y T^* tienen la SVEP $\Rightarrow \sigma_a(T) = \sigma_s(T) = \sigma(T)$.

Demostración.
Ver Corolario 2.28 de [2]. ■

Definición 1.11. Sea $T \in L(X)$. La parte cuasi-nilpotente de T se define por:

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$$

$H_0(T)$ es un subespacio vectorial de X.

Teorema 1.22. *Sea $T \in L(X)$:*
T es cuasi-nilpotente $\Leftrightarrow H_0(T) = X$

Demostración.
Ver Teorema 1.68 de [1]. ■

Teorema 1.23. *Sea $T \in L(X)$.*

i) $p(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T$ *tiene la SVEP en* λ.

ii) $q(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T^*$ *tiene la SVEP en* λ.

Demostración.
Ver Teorema 3.8 de [1]. ■

Definición 1.12. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$.

1. Diremos que T es **normal** si: $\|Tx\| = \|T^{'}x\|$ para cada $x \in H$.
2. Diremos que T es **hiponormal** si: $\|T^{'}x\| \leq \|Tx\|$ para cada $x \in H$.
3. Sea $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach. Diremos que T es **paranormal** si:

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\| \text{ para cada } x \in X.$$

4. Un operador $T \in L(X)$, donde X es espacio de Banach, se dice **totalmente paranormal** si:
   $\lambda I - T$ es **paranormal** para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observación *8.* Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert.

i) Es claro que cada operador normal es hiponormal.

ii) Si T es hiponormal $\Rightarrow \lambda I - T$ es hiponormal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto se sigue de la definición de operador adjunto.

iii) Si T es hiponormal $\Rightarrow T$ es totalmente paranormal. Esto se sigue de (ii) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

iv) Si T es totalmente paranormal $\Rightarrow H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Ver Ejemplo 3.9 de [1].

v) Si T es paranormal $\Rightarrow p(T) < \infty$. Esto se sigue del hecho que si T es paranormal, entonces $N(T^2) = N(T)$. En particular, cada operador totalmente paranormal satisface que $p(\lambda I - T) < \infty$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por la observación anterior se tiene que los operadores totalmente paranormales tienen la SVEP, ya que estos satisfacen que $p(\lambda I - T) < \infty$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular, los operadores normales e hiponormales tienen la SVEP.

Definición 1.13. Si un operador $T \in L(X)$ satisface la condición:

$$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T), \ \textit{para cada } \lambda \in \mathbb{C},$$

diremos que T satisface la condición $H(1)$. De esta manera, los operadores totalmente paranormales satisfacen la propiedad $H(1)$.

Teorema 1.24. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador normal. Entonces:*

i) *Si $\lambda \in iso\sigma(T) \Rightarrow \lambda$ es un autovalor de T.*

ii) $\sigma_w(T) = acc\sigma(T) \cup \{\lambda \in iso\sigma(T) : \alpha(\lambda I - T) = \infty\}$.

iii) $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.

Demostración.
Ver Proposición 70.6 y Proposición 70.7 [25]. ■

Observemos que si $T \in L(H)$ es un operador normal, entonces:

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Esta última igualdad fué descubierta por H. Weyl [41] para operadores autoadjuntos en 1909. Siguiendo a Coburn [15], los operadores que satisafacen la condición espectral anterior, se dice que satisfacen el teorema de Weyl. La clase de operadores que satisfacen el teorema de Weyl la estudiaremos en la siguiente sección.

Denotaremos por $\mathcal{H}(\sigma(T))$ al conjunto de todas las funciones a valores complejos localmente analíticas sobre un conjunto abierto que contiene a $\sigma(T)$.

Sea $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, $\Delta(f)$ el dominio de f, y sea Γ un contorno en $\Delta(f)$ que rodea a $\sigma(T)$. Por contorno Γ entendemos un sistema finito orientado positivamente $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ de curvas cerradas y rectificables en $\Delta(f) \setminus \sigma(T)$ tal que $\sigma(T)$ esta contenido en el interior de Γ y $\mathbb{C} \setminus \Delta(f)$ esta en el exterior de Γ. Entonces, del cálculo funcional se define:

$$f(T) := \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

Esta integral esta bien definida y no depende de la elección particular de Γ. Queremos observar que si $T, S \in L(X)$ son dos operadores que conmutan, es fácil ver por medio del cálculo funcional que $f(T)S = Sf(T)$ para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Para más detalles ver Heuser [25].

Teorema 1.25. *Sea $T \in L(X)$ y $f : U \mapsto \mathbb{C}$ una función analítica sobre un conjunto abierto U que contiene $\sigma(T)$.*

i) *Si T tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)$ tiene la SVEP.*

ii) Si f es no constante sobre cada componente conexa de U, entonces:
T tiene la SVEP $\Leftrightarrow$ $f(T)$ tiene la SVEP.

Demostración.
Ver Teorema 2.40 de [1]. ■

El Teorema de la aplicación espectral no es cierto para el espectro de Weyl; sólo tenemos las inclusiones:
$\sigma_{uw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{uw}(T))$; $\sigma_{lw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{lw}(T))$; $\sigma_w(f(T)) \subseteq f(\sigma_w(T))$, para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Ver Teoremas 3.63 y 3.67 de [1]. Estas inclusiones pueden ser estrictas, ver Ejemplo 3.64 de [1].

Teorema 1.26. *Sea $T \in L(X)$. Si T ó T^* tiene la SVEP, entonces el teorema de la aplicación espectral se cumple para*
$\sigma_{uw}(T)$, $\sigma_{lw}(T)$ y $\sigma_w(T)$ para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
Ver Corolario 3.72 de [1]. ■

Una clase importante de operadores la constituyen los operadores espectrales, esta clase la introdujo Dunford en 1958. Para definirlos, se hace por medio de una medida espectral. Para más detalles consultar el texto Laursen y Newman [27]. Los operadores normales son casos particulares de operadores espectrales.

Otra clase importante de operadores la constituyen los operadores escalares generalizados. Siguiendo a Foiaş (ver [20]), un operador $T \in L(X)$ se dice **escalar generalizado**, si existe un homomorfismo continuo de álgebras:
$\Theta : C^\infty(\mathbb{C}) \mapsto L(X)$ tal que:
$\Theta(1) = I$ y $\Theta(Z) = T$, donde Z denota la función identidad sobre $\mathbb{C}$.

Los operadores espectrales y escalar generalizado, estan contenidos en una clase más general de operadores llamados, operadores descomponibles.

Definición 1.14. Sea $T \in L(X)$. Diremos que T es **descomponible**, si para cada cubrimiento $\mathbb{C} = U \cup V$ del plano complejo por dos conjuntos abiertos U y V, existen subespacios cerrados T-invariantes Y y Z de X tal que:

$$\sigma(T|_Y) \subseteq U; \quad \sigma(T|_Z) \subseteq V \quad y \quad X = Y + Z.$$

En la definición anterior, la descomposición en suma de X puede ser no directa y los espectros de las restricciones no son necesariamente disjuntos. Los operadores normales, espectrales, escalar generalizado y los operadores con espectros totalmente disconexos son ejemplos de operadores descomponibles. En particular, los operadores con espectro numerable son descomponibles (ver Laursen y Newman [27]).

Teorema 1.27. *Sea $T \in L(X)$.*

i) Si T es descomponible $\Rightarrow$ T y T^* tienen la SVEP.

ii) T es descomponible $\Leftrightarrow T^*$ es descomponible.

Demostración.
Ver Teorema 6.22 de [1]. ■

Los operadores escalar generalizado tienen la SVEP, ya que son descomponibles. Ejemplos de operadores que satisfacen la SVEP pero no son descomponibles pueden encontrarse en multiplicadores de álgebras de Banach semi-simples conmutativas, ver capítulo 6 de [1] y Capítulo 4 de Laursen y Newman [27]. Hay una amplia clase de operadores que satisface la propiedad $H(1)$, es decir;
$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Un operador $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert, se dice **$*$-paranormal** si satisface:

$$\|T^{'}x\|^2 \leq \|T^2 x\| \; para \; cada \; \|x\| = 1.$$

$T \in L(H)$ se dice **totalmente $*$-paranormal** si $\lambda I - T$ es $*$-paranormal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Cada operador totalmente $*$-paranormal satisface la propiedad $H(1)$, ver [22].

b) Un operador $T \in L(H)$ se dice **p-hiponormal**, con $0 < p < 1$, si:

$$(T^{'}T)^p \geq (TT^{'})^p.$$

Cada operador p-hiponormal inyectivo satisface la condición $H(1)$. Ver [12].

c) Un operador $T \in L(H)$ se dice **log-hiponormal**, si T es invertible y satisface:

$$\log(T^{'}T) \geq \log(TT^{'}).$$

Cada operador log-hiponormal satisface la condición $H(1)$.

d) Sea A un álgebra de Banach, una aplicación $T : A \mapsto A$ se dice un **multiplicador** si:

$$(Tx)y = x(Ty) \; para \; cada \; x, y \in A.$$

Para un álgebra de Banach semi-simple conmutativa A, denotemos por $M(A)$ el álgebra de Banach conmutativa de todos los multiplicadores (ver [27]). Si $T \in M(A)$, donde A es un álgebra de Banach semi-simple conmutativa, entonces $T \in L(A)$ y T satisface $H(1)$. Ver [1] y [6].
Según Oudghiri [33], un operador $T \in L(X)$ se dice que tiene **la propiedad** $H(p)$ si: para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p.$$

Los operadores escalar generalizado satisfacen la propiedad $H(p)$.

e) Un operador $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert, se dice M-**hiponormal**, si existe un $M > 0$ tal que:

$$TT' \leq MT'T.$$

Los operadores M-hiponormales, p-hiponormales, log-hiponormales y algebraicamente hiponormales son casos particulares de operadores escalar generalizado; así, dichos operadores satisfacen la condición $H(p)$. Ver [33].

Teorema 1.28. *Sea $T \in L(X)$. Si $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

i) T *tiene la SVEP en* λ_0,

ii) $p(\lambda_0 I - T) < \infty$,

iii) λ_0 *no es punto de acumulación de* $\sigma_a(T)$,

iv) $H_0(\lambda_0 I - T)$ *es cerrado,*

v) $H_0(\lambda_0 I - T)$ *tiene dimensión finita.*

Demostración.
Ver Teorema 3.16 de [1]. ■

De forma dual tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.29. *Sea $T \in L(X)$. Si $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

i) T^* *tiene la SVEP en* λ_0,

ii) $q(\lambda_0 I - T) < \infty$,

iii) λ_0 *no es punto de acumulación de* $\sigma_s(T)$,

Demostración.
Ver Teorema 3.17 de [1]. ■

Notemos que del Teorema 1.23 (i) se deduce que $T \in L(X)$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$. Del Teorema 1.23(ii) se tiene que T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{lb}(T)$.

Recordemos que $\sigma_{uw}(T)$, $\sigma_{lw}(T)$, $\sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{lb}(T)$ son subconjuntos no vacíos y compactos de $\mathbb{C}$. Además, tenemos las siguientes inclusiones:

$$\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \text{ y } \sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T).$$

La relación precisa entre el espectro de Weyl y el espectro de Browder se establece en el siguiente resultado:

Teorema 1.30. *Sea $T \in L(X)$:*

i) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$.

ii) $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lw}(T) \cup acc\sigma_s(T)$.

iii) $\sigma_b(T) = \sigma_w(T) \cup acc\sigma(T)$.

Demostración.
Ver Teorema 3.65 de [1]. ∎

En el caso que T ó T^* tengan la SVEP, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.31. *Sea $T \in L(X)$.*

i) Si T tiene la SVEP $\Rightarrow \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{lb}(T)$.

ii) Si T^* tiene la SVEP $\Rightarrow \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T)$.

iii) Si T ó T^* tienen la SVEP. Entonces:

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T) \text{ y } \sigma_{lw}(T) = \sigma_{lb}(T).$$

Demostración.
Ver Teorema 3.66 de [1]. ∎

En el siguiente teorema, mostraremos algunas igualdades espectrales para el caso en que X sea una espacio de Hilbert complejo.

Teorema 1.32. *Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert complejo.*

i) $\alpha(\bar{\lambda} I - T^{'}) = \alpha(\lambda I^* - T^*)$, *para cada* $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) $\sigma_{uw}(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^*)\}$.

iii) $\sigma_{lw}(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{lw}(T^*)\}$.

iv) $\sigma_w(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_w(T^*)\}$.

Demostración.
i) Por el Teorema 1.4 tenemos que
$\bar{\lambda} I - T^{'} = (\lambda I - T)^{'} = U^{-1}(\lambda I - T)^* U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $U \in L(H, H^*)$ es la isometria definida por $U(y)(x) := \langle x, y \rangle$.

Denotemos por $\overline{U}$ la restricción de U sobre $N(\bar{\lambda} I - T^{'})$. Veamos que
$U(N(\bar{\lambda} I - T^{'})) = N(\lambda I^* - T^*)$:
Sea $y \in N(\bar{\lambda} I - T^{'})$, entonces;
$(\bar{\lambda} I^* - T^*)U(y) = U(\bar{\lambda} I - T^{'})(y) = U(0) \equiv 0$. Así,
$U(N(\bar{\lambda} I - T^{'})) \subseteq N(\lambda I^* - T^*)$.

Ahora, sea $f \in N(\lambda I^* - T^*)$, nuevamente por el Teorema 1.4, existe $y \in H$ tal que $f = U(y)$. Luego, $U(\bar{\lambda} I - T^{'})(y) = (\lambda I^* - T^*)(U(y)) = 0$. Así, $(\bar{\lambda} I - T^{'})(y) = 0$ y por tanto $y \in N(\bar{\lambda} I - T^{'})$.

En consecuencia, $\overline{U} : N(\bar{\lambda} I - T^{'}) \mapsto N(\bar{\lambda} I^* - T^*)$ es un isomorfismo. De esta manera, $\alpha(\bar{\lambda} I - T^{'}) = \alpha(\lambda I^* - T^*)$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Demostremos que $\sigma_{uw}(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^*)\}$. Sea $\lambda \in \sigma_{uw}(T^{'})$ y veamos que $\bar{\lambda} \in \sigma_{uw}(T^*)$. Supongamos que $\bar{\lambda} \notin \sigma_{uw}(T^*)$, entonces:
$\bar{\lambda} I^* - T^* \in W_+(H^*)$, por lo que $ind(\bar{\lambda} I^* - T^*) \leq 0$ y $\bar{\lambda} I^* - T^* \in \Phi_+(H^*)$.

Ahora, por el Teorema 1.4, $\lambda I - T^{'}$ tiene rango cerrado y por el apartado (i), $\alpha(\lambda I - T^{'}) = \alpha(\bar{\lambda} I^* - T^*) < \infty$. Por otro lado, en virtud del Teorema 1.4
$ind(\lambda I - T^{'}) = ind(U^{-1}(\bar{\lambda} I^* - T^*)U) = ind(\bar{\lambda} I^* - T^*) \leq 0$, ya que U es una isometria. Así, $\lambda I - T^{'} \in W_+(H^*)$, lo cual es absurdo. Así, $\sigma_{uw}(T^{'}) \subseteq \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^*)\}$. La otra contención se demuestra de manera similar.

iii) Veamos que $\sigma_{lw}(T^{'}) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{lw}(T^*)\}$. Sea $\lambda \in \sigma_{lw}(T^{'})$ y veamos que $\bar{\lambda} \in \sigma_{lw}(T^*)$. Supongamos que $\bar{\lambda} \notin \sigma_{lw}(T^*)$, entonces
$\bar{\lambda} I^* - T^* \in \Phi_-(H^*)$ y $ind(\bar{\lambda} I^* - T^*) \geq 0$. Así, $\bar{\lambda} I - T^{'}$ tiene rango cerrado y
$\alpha(\bar{\lambda} I - T^{'}) = \beta(\bar{\lambda} I^* - T^*) < \infty$. Además, $ind(\bar{\lambda} I - T^{'}) = -ind(\bar{\lambda} I^* - T^*) \leq 0$. Luego, $\bar{\lambda} \notin \sigma_{uw}(T) = \sigma_{lw}(T^*)$, lo cual es absurdo.

En consecuencia, $\sigma_{lw}(T^{'}) \subseteq \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{lw}(T^*)\}$. La otra contención se demestra de manera análoga.

iv) Se sigue de (ii) y (iii) y el hecho que $\sigma_w(T^{'}) = \sigma_{uw}(T^{'}) \cup \sigma_{lw}(T^{'})$. ■

Terminaremos esta sección mencionando algunos resultados relacionados con los polos del resolvente de T. Recordemos que el resolvente de un operador $T \in L(X)$ es la función analítica $R(.,T) : \rho(T) \mapsto L(X)$ definida por: $R(.,T)(\lambda) := R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$; donde $T \in L(X)$ y $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Sea Γ un camino de integración, es decir, una curva cerrada rectificable y orientada en $\mathbb{C}$. Para cada función continua $f : \Gamma \mapsto X$, donde X es un espacio de Banach, se define la integral de camino, como en el caso clásico, es decir, como el límite de sumas de Riemann:

$$\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda := \text{lím} \sum f(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

Sea $\lambda_0 \in iso\sigma(T)$ y consideremos la serie de Laurent de $R(\lambda, T)$ en una vecindad $\mathbb{D}(\lambda_0, \delta)$. La expresión de Laurent de $R(\lambda, T)$ tiene la forma:

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_k (\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k}{(\lambda - \lambda_0)^k},$$

donde $P_k, Q_k \in L(X)$, para cada $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$. Es sabido que cada punto aislado del espectro de T, o es un polo o es una singularidad esencial (ver Heuser, [25]§49).

Sea $\lambda_0 \in iso\sigma(T)$ y sea P_0 el proyector espectral asociado al conjunto espectral $\{\lambda_0\}$ definido por:

$$P_0 := \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

ver Heuser [25](§49). Este proyector espectral origina naturalmente la descomposición $X = P_0(X) \oplus N(P_0)$.

Las longitudes de las cadenas de $\lambda I - T$ estan relacionadas con los polos del resolvente del operador T, veamos el siguiente resultado:

Teorema 1.33. *Sea $T \in L(X)$.*
λ_0 es un polo de $R(\lambda, T) \Leftrightarrow 0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Más aún, si $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces p es el orden del polo. Además, cada polo $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un autovalor de T.

Demostración.
Ver Proposición 50.2 de Heuser [25]. ■

Teorema 1.34. *Sea $T \in L(X)$ y supongamos que $\lambda_0 \in iso\sigma(T)$. Si P_0 es el proyector espectral asociado con $\{\lambda_0\}$, entonces:*

i) $P_0(X) = H_0(\lambda I - T)$,

ii) $N(P_0) = K(\lambda I - T)$.

En particular, si λ_0 es un polo del resolvente de T, o equivalentemente $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces:

a) $P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T) = N(\lambda_0 I - T)^p$,

b) $N(P_0) = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X)$. *En este caso,* $X = N(\lambda_0 I - T)^p \oplus (\lambda_0 I - T)^p(X)$.

Demostración.
Ver Proposición 50.3 de [25]. ■

1.3. Teoremas de Browder y de Weyl

Teorema 1.35. *Sea $T \in L(X)$. Entonces:*
$\lambda_0 I - T \in \Phi(X)$ y $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty \Leftrightarrow \lambda_0 \in iso\sigma(T)$ y el proyector especral asociado a $\{\lambda_0\}$ es de rango finito.

Demostración.
Ver Teorema 50.3 de [25]. ■

Definición 1.15. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.
Definimos el conjunto de puntos de Riesz por

$$p_{00}(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_b(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in B(X)\}.$$

Sea $T \in L(X)$. Definamos el conjunto:

$$\pi_{00}(T) := \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

De esta manera, el conjunto $\pi_{00}(T)$ esta constituido por los puntos aislados del espectro de T que son autovalores de multiplicidad finita. Definamos también los siguientes conjuntos:

$$\Delta(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_w(T),$$

y

$$\Delta^a(T) := \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T).$$

Lema 1.1. *Sea $T \in L(X)$.*

i) $p_{00}(T) = p_{00}(T^*)$,

ii) $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \cap \Delta(T)$.

Demostración.
Ver Lema 4.20 de [2].

Observación 9. Sea $T \in L(X)$.

i) $p_{00}(T) = \{\lambda \in \pi_{00}(T) : p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\}$,

ii) $\Delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in W(X)\ ,\ 0 < \alpha(\lambda I - T)\}$.

Sea $T \in L(X)$ y definamos los siguientes conjuntos espectrales:

$$\pi^a_{00}(T) := \{\lambda \in iso\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},$$

y

$$p^a_{00}(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \sigma_a(T) : \lambda I - T \in B_+(X)\}.$$

Lema 1.2. *Sea* $T \in L(X)$.

i) $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$,

ii) $p_{00}(T) \subseteq p_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T) \cap \Delta^a(T)$.

Demostración.
Ver Lema 4.31 de [2]. ■

En 1997 Harte y W. Lee [24], introducen la siguiente definición:

Definición 1.16. Sea $T \in L(X)$. Diremos que T satisface el **teorema de Browder** si:

$$\sigma_w(T) = \sigma_b(T).$$

Teorema 1.36. *Sea* $T \in L(X)$. *Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

i) T *satisface el teorema de Browder,*

ii) $p_{00}(T) = \Delta(T)$,

iii) $\Delta(T) \subseteq iso\sigma(T)$,

iv) $\sigma(T) = \sigma_w(T) \cup iso\sigma(T)$,

v) T^* *satisface el teorema de Browder,*

vi) T *tiene la SVEP en cada* $\lambda \in \Delta(T)$,

vii) T^* *tiene la SVEP en cada* $\lambda \in \Delta(T)$.

Demostración.
Ver Teorema 4.23 de [2]. ■

Definición 1.17. Sea $T \in L(X)$. Diremos que T satisface el **teorema de a-Browder** si:

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

El siguiente teorema, muestra que para el teorema de a-Browder, se tiene una versión aproximada puntual del Teorema 1.36.

Teorema 1.37. *Sea* $T \in L(X)$. *Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

i) T *satisface el teorema de a-Browder,*

ii) $p_{00}^a(T) = \Delta^a(T)$,

iii) $\Delta^a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$, *iv)* $\sigma_a(T) = \sigma_{uw}(T) \cup iso\sigma_a(T)$.

Demostración.
Ver Teoremas 4.32 y 4.35 de [2]. ■

En el siguiente teorema se estableceran relaciones entre la SVEP y el teorema de a-Browder.

Teorema 1.38. *Sea $T \in L(X)$*

i) T satisface el teorema de a-Browder $\Leftrightarrow$ T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$.

ii) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T) \Rightarrow T^*$ satisface el teorema de a-Browder.

iii) Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \Rightarrow T$ satisface el teorema de a-Browder.

Demostración.
Ver Teorema 4.34 de [2]. ■

Observación 10. Del Teorema anterior tenemos:
Si T o T^* tienen la SVEP $\Rightarrow$ T y T^* satisfacen el teorema de a-Browder.

Vamos a introducir ahora, una importante propiedad que ha sido estudiada por varios autores. Esta propiedad fue observada por Weyl en 1909 para operadores autoadjuntos sobre espacios de Hilbert. En 1966, Coburn [15] estudió dicha propiedad espectral para operadores hiponormales y de Toeplitz. Coburn llamó a esta propiedad, el teorema de Weyl y propuso la siguiente definición.

Definición 1.18. Un operador $T \in L(X)$ satisface el **teorema de Weyl** si:

$$\Delta(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

Para ver resultados relacionados con el teorema de Weyl ver [1],[2],[12] y [13].

Teorema 1.39. *Sea $T \in L(X)$.*
Si T satisface el teorema de Weyl $\Rightarrow p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \Delta(T)$

Demostración.
Ver Teorema 4.42 de [2]. ■

Observemos que la condición $p_{00}(T) = \Delta(T)$ es equivalente a que T verifique el teorema de Browder. De este modo, el teorema de Weyl implica el teorema de Browder.

Ejemplo 1.19. Si $T \in L(H)$ es un operador normal, donde H es un espacio de Hilbert, entonces por el Teorema 1.24, se tiene que T satisface el teorema de Weyl.

Teorema 1.40. *Sea $T \in L(X)$. Son equivalentes:*

i) T satisface el teorema de Weyl,

ii) T satisface el teorema de Browder y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Demostración.
(i)$\Rightarrow$ (ii): Es inmediato del Teorema 1.39.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Por el Teorema 1.36 tenemos que $\Delta(T) = p_{00}(T)$ y por hipótesis $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Así, $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$. ■

Observación 11. El hecho que un operador satisfaga el teorema de Weyl no significa que el operador sea un operador de Weyl y viceversa. De hecho, estos conceptos no estan relacionados, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos cualquier operador cuasi-nilpotente con núcleo de dimensión infinita (por ejemplo $T \equiv 0$). Entonces, $\sigma(T) = \sigma_w(T) = \{0\}$ y $\alpha(T) = \infty$. Así, $\pi_{00}(T) = \emptyset$ y en consecuencia T satisface el teorema de Weyl. Por otro lado, T no es un operador de Weyl ya que $\alpha(T) = \infty$.

Consideremos ahora un ejemplo de un operador de Weyl que no satisface el teorema de Weyl. Sea $Q \in L(X)$ un operador compacto no inyectivo con núcleo de dimensión finita (ver ejemplo 4 de la sección 1.5). Consideremos $T := I+Q$, donde I es el operador identidad. Entonces:
$\sigma(T) = \sigma(I + Q) = \sigma(I) = \sigma_w(T) = \{1\}$. es claro que T es inyectivo ya que $-1 \notin \sigma_p(Q) \subseteq \{0\}$. Así, $\alpha(T) > 0$. Por otro lado,
$\pi_{00}(T) = \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\} = \{1\}$. De esta manera, T no satisface el teorema de Weyl. Observemos que T es un operador de Weyl por ser la suma de un operador biyectivo y un operador compacto.

Teorema 1.41. *Si $T \in L(X)$ satisface que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$:
$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$, es decir, T satisface la propiedad $H(1)$ y
$f \in \mathcal{H}(\sigma(T)) \Rightarrow f(T)$ satisface el teorema de Weyl. En particular, T satisface el teorema de Weyl.*

Demostración.
Ver Corolario 3.97 de [1]. ■

Definamos la clase de operadores $\mathcal{P}_0(X)$ como la clase de los operadores $T \in L(X)$ que satisfacen que para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$, existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$. La siguiente caracterización se debe a P. Aiena - Villafañe (2005)[12].

Teorema 1.42. *$T \in \mathcal{P}_0(X) \Leftrightarrow p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. En particular, si T tiene la SVEP, entonces:
T verifica el teorema de Weyl $\Leftrightarrow T \in \mathcal{P}_0(X)$.*

Demostración.
Ver [12]. ∎

Recordemos que un operador $T \in L(X)$ tiene la propiedad $H(p)$; si para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$.
Observemos que la condición $H(1)$ corresponde al caso $p = p(\lambda) = 1$.

Observación 12. i) Los operadores que satisfacen la propiedad $H(p)$, verifican la SVEP, ya que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$ es cerrado para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Los operadores escalar generalizado satisfacen la propiedad $H(p)$ (por [Oudguri 2004 [33]]). En consecuencia, $T \in \mathcal{P}_0(X)$ y T tiene la SVEP. Luego del Teorema 1.42 se concluye que los operadores escalar generalizado satisfacen el teorema de Weyl.

iii) Los operadores totalmente paranormales, hiponormales, cuasi-hiponormales, p-hiponormales inyectivos, log-hiponormales y operadores de convolución son ejemplos de operadores que satisfacen la condición $H(1)$. De esta manera, estos operadores tienen la SVEP y pertenecen a la clase $\mathcal{P}_0(X)$. En consecuencia, los operadores mencionados anteriormente satisfacen el teorema de Weyl (ver Ejemplos 3.93 y 3.95 de [1]).

Teorema 1.43. *Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $H(p) \Rightarrow f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el teorema de Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Ver Corolario 3.6 de [33]. ∎

Diremos que un operador $T \in L(X)$ es **relativamente regular**, si existe un operador $S \in L(X)$ tal que:

$$T = TST.$$

Un operador $T \in L(X)$ se dice **reguloide**, si para cada $\lambda \in iso\sigma(T)$ se tiene que $\lambda I - T$ es relativamente regular.

Teorema 1.44. *Sea $T \in L(X)$ un operador reguloide tal que T o T^* tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)$ satisfacen el teorema de Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Ver Teorema 3.90 de [1]. ∎

1.4. El Teorema de a-Weyl

El teorema de a-Weyl es una variante del teorema de Weyl, y representa una versión aproximada puntual de dicha condición espectral. En esta sección se presentan algunos resultados ya conocidos sobre el teorema de a-Weyl (ver [3],[5],[18] y [37]). De acuerdo con Rakočević:

Definición 1.20. Sea $T \in L(X)$. Diremos que T satisface el **teorema de a-Weyl** si:

$$\Delta^a(T) := \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi^a_{00}(T).$$

Observación 13. Sea $T \in L(X)$. Entonces:

i) $\Delta^a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in W_+(X)\ ,\ 0 < \alpha(\lambda I - T)\}$.

ii) Por la Observación 9, se tiene que:

$$\Delta(T) \subseteq \Delta^a(T)$$

Teorema 1.45. *Sea $T \in L(X)$*

i) Si T satisface el teorema de a-Weyl $\Rightarrow$ T satisface el teorema de Weyl.

ii) Si T satisface el teorema de a-Weyl $\Rightarrow p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T) = \Delta^a(T)$

Demostración.
Ver Teoremas 4.50 y 4.51 de [2]. ■

La condición $p^a_{00}(T) = \Delta^a(T)$ es equivalente al teorema de a-Browder (Teorema 1.37). Así, la condición del teorema de a-Weyl implica que T satisface el teorema de a-Browder. En general el teorema de Weyl no implica el teorema de a-Weyl, un ejemplo de esta situación lo dió Rakočević en [36] (ver el Ejemplo 2.6 del capítulo 2).

Teorema 1.46. *Sea $T \in L(X)$*
T satisface el teorema de a-Weyl $\Leftrightarrow$ T satisface el teorema de a-Browder y $p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T)$

Demostración.
$\Rightarrow$) Es consecuencia inmediata de los Teoremas 1.37 y 1.45.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que T satisface el teorema de a-Browder y $p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T)$. Del Teorema 1.37, obtenemos que: $p^a_{00}(T) = \Delta^a(T) = \pi^a_{00}(T)$. En consecuencia, T verifica el teorema de a-Weyl. ■

Ejemplo 1.21. i) Los operadores compactos con espectro infinito satisfacen el teorema de a-Weyl.

ii) Cada multiplicador $T \in M(A)$ de un álgebra de Banach semi-simple y conmutativa verifica el teorema de a-Weyl (ver Teorema 3.7 de [3]).

Teorema 1.47. *Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert.*
Si T' tiene la propiedad $H(p)$ y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T)) \Rightarrow f(T)$ satisface el teorema de a-Weyl.

Demostración.
Ver [3]. ■

Teorema 1.48. *Si $T \in L(X)$ tiene la propiedad $H(p)$, entonces $f(T^*)$ satisface el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Análogamente, si T^* tiene la propiedad $H(p)$, entonces $f(T)$ satisface el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Ver Teorema 3.7 de [3]. ■

Teorema 1.49. *Sea $T \in L(X)$ un operador escalar generalizado. Entonces, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Cada operador escalar generalizado tiene la propiedad $H(p)$ y en consecuencia, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el teorema de Weyl y también el teorema de a-Browder. Además, como T y T^* tienen la SVEP, por el Teorema 1.25 se tiene que $f(T)$ y $f(T^*)$ tienen la SVEP. Ahora, como $\sigma(f(T)) = \sigma_a(f(T))$ y $\sigma_w(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T))$, entonces $\pi_{00}^a(f(T)) = \pi_{00}(f(T)) = p_{00}^a(f(T))$. De esta manera, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ (por Teorema 1.46). ■

1.5. Algunos Ejemplos

En esta sección, se muestran algunos ejemplos de operadores lineales y acotados sobre espacios de Hilbert que usaremos a lo largo de este trabajo, para ilustrar de la mejor manera posible la teoría que estamos desarrollando. La mayor parte de estos ejemplos son usados en realidad para dar contraejemplos. Cabe destacar, que gran parte de los detalles que se encuentran en esta sección, no aparecen en las fuentes originales de donde se tomaron dichos ejemplos.

Ejemplo 1.22. Consideremos los operadores de traslación a izquierda y traslación a derecha definidos sobre $\ell_2(\mathbb{N})$, L y R, respectivamente. Recordemos que R tiene la SVEP, mientras que L no tiene la SVEP (L no tiene la SVEP en 0).

Es conocido que $\sigma(R) = \sigma(L) = \overline{\mathbb{D}} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.
Por los Teoremas 1.21, 1.30 y 1.31 se tiene:

$\sigma_s(R) = \sigma(R) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma_a(L) = \sigma_b(R) = \sigma_w(R) = \sigma_{lb}(R) = \sigma_{lw}(R) = \sigma_{ub}(L) = \sigma_{uw}(L) = \sigma(L) = \sigma_b(L)$.

Sabemos que $\sigma_a(R) = \sigma_s(L) = \Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Ahora, como R tiene la SVEP, del teorema 1.31 se sigue que $\sigma_{uw}(R) = \sigma_{ub}(R)$ y por el Teorema 1.30 se tiene que $acc\sigma_a(R) \subseteq \sigma_{uw}(R)$. De esta manera, $\sigma_{uw}(R) = \sigma_{ub}(R) = \sigma_{lw}(L) = \sigma_{lb}(L) = \Gamma$.
Por otro lado:
$\pi_{00}(R) = \pi_{00}(L) = \pi^a_{00}(R) = \pi^a_{00}(L) = \emptyset = p_{00}(R) = p^a_{00}(R) = p_{00}(L) = p^a_{00}(L)$.
En consecuencia, tenemos que los operadores R y L satisfacen el teorema de a-Weyl, a-Browder, Weyl y Browder.

Ejemplo 1.23. Consideremos el operador $Q : \ell_2 \mapsto \ell_2$ definido por
$Qx := (\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$. Demostremos que Q es un operador compacto que satisface el teorema de a-Weyl. En efecto:
Definamos la sucesión de operadores $Q_n : \ell_2 \mapsto \ell_2$ denida por:

$$Q_n x := (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, \ldots).$$

Tomando el supremo sobre todos los x de norma 1, se obtiene que
$\|Q - Q_n\| \leq \frac{1}{n+1}$. De este modo, Q es el límite uniforme de operadores de rango finito y en consecuencia, Q es un operador compacto. Luego, $0 \in \sigma(Q)$ y $\sigma(Q) \setminus \{0\} = \sigma_p(Q) \setminus \{0\}$. Ahora, no es dificil ver que $\sigma_p(Q) = \{1\}$ y así, $\sigma(Q) = \{0, 1\} = \sigma(Q^*)$.
En consecuencia, Q y Q^* tienen la SVEP y del Teorema 1.21 se obtiene que:

$$\sigma(Q) = \sigma_s(Q) = \sigma_a(Q) = \{0, 1\}.$$

Al ser Q un operador compacto, de la teoría de Riesz-Shauder se obtiene que $0 < \alpha(I - Q) = \beta(I - Q) < \infty$. Esto implica que $1 \notin \sigma_w(Q)$. Así, $\sigma_w(Q) = \{0\}$. Por el Teorema 1.31 tenemos:

$$\sigma_b(Q) = \sigma_w(Q) = \sigma_{lb}(Q) = \sigma_{ub}(Q) = \sigma_{uw}(Q) = \sigma_{lw}(Q) = \{0\}.$$

Por tanto, $\Delta^a(Q) = \{1\} = \pi^a_{00}(Q)$. De esta manera, Q verifica el teorema de a-Weyl.

Ejemplo 1.24. Consideremos los operadores $T, N \in L(\ell_2)$ definidos por:

$$T(x_1, x_2, \ldots) := (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \ldots) \quad ; \quad (x_n) \in \ell_2;$$
$$N(x_1, x_2, \ldots) := (0, \frac{-x_1}{2}, 0, 0, \ldots) \quad ; \quad (x_n) \in \ell_2.$$

Veamos que T es un operador cuasi-nilpotente inyectivo que satisface el
teorema de Weyl y que N es un operador nilpotente de rango finito que no conmuta

con T. Además, $T+N$ no verifica el teorema de Weyl. Oberai demostró en 1977 [32] que el teorema de Weyl se transmitia de $T \in L(X)$ a la perturbación $T+N$ cuando N es un operador nilpotente que conmuta con T. De este modo, este ejemplo muestra la importancia de la conmutatividad en el estudio de la estabilidad bajo operadores nilpotentes del teorema de Weyl.
Observemos que $N^2 = 0$, por lo que N es un operador nilpotente, además N es de rango finito. Es fácil ver que N no conmuta con T.
Observemos también que T es un operador inyectivo, por lo que $p(T) = \alpha(T) = 0$.

i) T es un operador cuasi-nilpotente: notemos que $T = QR$, donde $Q(x) := (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$ es un operador compacto y R es el operador de traslación a derecha. Ahora, como los operadores compactos constituyen un ideal bilatero de $L(\ell_2)$, se tiene que T es un operador compacto.
Recordemos que si T es compacto entonces, $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.
Calculemos ahora $\sigma_p(T)$.
Afirmamos que $\sigma_p(T) = \emptyset$. Si suponemos que $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces $\lambda \neq 0$ ya que T es inyectivo. Luego, existe $x \neq 0$ en ℓ_2 tal que $Tx = \lambda x$, esto implica que $\lambda x_1 = 0$ y $\lambda x_n = \frac{x_{n-1}}{n}$. Ahora, como $\lambda \neq 0$ se concluye que $x = 0$, lo cual es una contradicción. Así, $\sigma_p(T) = \emptyset$. En consecuencia, $\sigma(T) = \{0\}$ y así, T es un operador cuasi-nilpotente. Por tanto se tiene:

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) = \sigma_w(T) = \{0\}.$$

ii) $T+N$ es cuasi-nilpotente:

$$(T+N)(x_1, x_2, \ldots) := (0, 0, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots)$$

Del teorema 1.3, se tiene que $\sigma(T+N) = \sigma(T) = \{0\}$. Así, $T+N$ es cuasi-nilpotente.

Por otro lado, es claro que $\pi_{00}(T+N) = \{0\}$ y

$$\sigma(T+N) = \sigma_w(T+N) = \sigma_{uw}(T+N) = \sigma_{ub}(T+N) = \sigma_a(T+N) = \{0\}.$$

Así, $\Delta(T+N) = \sigma(T+N) \setminus \sigma_{uw}(T+N) = \emptyset \neq \pi_{00}(T+N) = \{0\}$. En consecuencia, $T+N$ no satisface el teorema de Weyl.

Antes de continuar con los ejemplos vamos a definir el espacio suma de un espacio de Hilbert. Consideremos un espacio de Hilbert H y definamos el espacio $H \oplus H := \{(x, y) : x, y \in H\}$ con las operaciones usuales:
$(x, y) + (z, w) := (x + z, y + w)$; $\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$ y definamos el producto interno $\langle (x, y); (z, w) \rangle := \langle x, z \rangle + \langle y, w \rangle$, donde $\langle , \rangle$ representa el producto interno de H. Este espacio $H \oplus H$ será también un espacio de Hilbert complejo.

Ejemplo 1.25. Sea $Q \in L(\ell_2)$ un operador inyectivo y cuasi-nilpotente cualquiera y consideremos el operador $U \in L(\ell_2)$ definido por

$$U(x_1, x_2, \ldots) := (-x_1, 0, 0, \ldots).$$

Definamos ahora sobre $H = \ell_2 \oplus \ell_2$ los operadores T y K por:

$$T := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad ; \qquad K := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, Qy)$$

y

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (Ux, 0).$$

Estos operadores dados en forma de matriz diagonal también se pueden escribir como $T = I \oplus Q \quad$ y $\quad K = U \oplus 0$.
Es claro que K es un operador de rango finito ya que U lo es, y que K conmuta con T.

i) $\alpha(T) = 0 \quad$ y $\quad \alpha(I - T) = \infty$:
Veamos primero que T es inyectivo. Si $T(x,y) = (0,0)$, entonces $(x, Qy) = (0,0)$. Así, $(x,y) = (0,0)$ ya que Q es inyectivo. Por tanto, $\alpha(T) = 0$. Ahora, veamos que $N(I-T) = \ell_2 \oplus \{0\}$.
Si $(I-T)(x,y) = (0,0)$, entonces $(x,y) - (x,Qy) = (0,(I-Q)y) = (0,0)$. Así, $y = 0$ ya que $I - Q$ es biyectivo y $x \in \ell_2$. De esta manera,
$N(I-T) = \ell_2 \oplus \{0\}$ y así, $\alpha(I-T) = \infty$.

ii) $\sigma(T) = \{0,1\}$: observemos que si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, se tiene que $\lambda I - T$ es biyectivo con inverso

$$(\lambda I - T)^{-1}(x,y) := (\frac{x}{\lambda - 1}, (\lambda I - Q)^{-1}y).$$

De este modo, $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$. Demostremos ahora la otra contención. Veamos primero que $0 \in \sigma(T)$.
Como T es inyectivo, es suficiente ver que T no es sobreyectivo. Observemos que Q no puede ser sobreyectivo, ya que Q es inyectivo y $\sigma(Q) = \{0\}$. Así, por ejemplo, si $x \in \ell_2 \setminus Q(\ell_2)$, entonces $(x,x) \notin T(\ell_2 \oplus \ell_2)$. De esta manera, T no es sobreyectivo. Ahora, como $\alpha(I-T) = \infty$, se tiene que $1 \in \sigma_p(T)$. Así, $\sigma(T) = \{0,1\}$.

Por otro lado, T y T^* tienen la SVEP ya que $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{0,1\}$. De esta manera tenemos las siguientes igualdades:
$\sigma(T) = \sigma_a(T) = \sigma_s(T) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T) = \sigma_{uw}(T) = \sigma_{lw}(T) = \{0,1\}$. Observemos también que $\sigma_p(T) = \{0,1\}$ ya que $\alpha(T) = 0$.

iii) $\pi_{00}(T) = \pi_{00}^a(T) = \emptyset$: Esto es consecuencia de que $\quad \alpha(T) = 0 \quad$ y $\quad \alpha(I-T) = \infty$.

iv) $\sigma(T+K)=\{0,1\}$: observemos que si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, se tiene que $\lambda I-(T+K)$ es biyectivo con inverso

$$(\lambda I-(T+K))^{-1}(x,y):=(((\lambda-1)I-U)^{-1}x,(\lambda I-Q)^{-1}y).$$

En consecuencia, $\sigma(T+K)\subseteq\{0,1\}$. Veamos ahora que
$\sigma(T+K)=\sigma_p(T+K)=\{0,1\}$. Es fácil ver que $\sigma(U)=\{0,1\}$. Así, existe $x_0\neq 0$ en ℓ_2 tal que $(-I-U)(x_0)=0$, de donde $(I+U)x_0=0$ con $x_0\neq 0$. Consideremos $(x_0,0)\in\ell_2\oplus\ell_2$, entonces:

$$(T+K)(x_0,0)=((I+U)x_0,Q(0))=(0,0).$$

Así, $T+K$ no es inyectiva, lo que implica que $0\in\sigma_p(T+K)$. Por otro lado, al considerar $e_2=(0,1,\ldots)$, entonces:
$[I-(T+K)](e_2,0)=(e_2,0)-((I+U)e_2,0)=(-U(e_2),0)=(0,0)$. Así, $I-(T+K)$ no es inyectiva, lo que implica que $1\in\sigma_p(T+K)$. De este modo, $\sigma(T+K)=\sigma_p(T+K)=\{0,1\}$. De esta última igualdad se deduce que $T+K$ y $(T+K)^*=T^*+K^*$ tienen la SVEP. En consecuancia:
$\sigma(T+K)=\sigma_w(T+K)=\sigma_a(T+K)=\sigma_s(T+K)=\sigma_{ub}(T+K)=\sigma_{uw}(T+K)=\{0,1\}$.

iv) $\pi_{00}(T+K)=\pi_{00}^a(T+K)=\{0\}$: por una simple inspección, es fácil ver que $\alpha(T+K)=1$ y que $\alpha(I-(T+K))=\infty$ y por tanto, $\pi_{00}(T+K)=\{0\}$. Ahora, como $\sigma(T+K)=\sigma_a(T+K)$ se deduce que $\pi_{00}(T+K)=\pi_{00}^a(T+K)=\{0\}$.
Observemos, que aunque K sea un operador de rango finito que conmuta con T, no se verifica que $\pi_{00}(T+K)=\pi_{00}(T)$.

Ejemplo 1.26. Consideremos el operador $T:=U\oplus R$, donde U es el operador cero-unidimensional sobre ℓ_2, definido por
$U(x_1,x_2,\ldots):=(0,x_2,x_3,\ldots)$ y R es el operador de traslación a derecha sobre ℓ_2. Recordemos que T se define por $T(x,y):=(Ux,Ry)$, donde $(x,y)\in\ell_2\oplus\ell_2$. Mostremos que este operador satisface el teorema de a-Weyl. En el desarrollo de este ejemplo haremos algunos cálculos sobre la estructura espectral de este operador.

i) U es un operador autoadjunto: Sean $x,y\in\ell_2$, entonces:

$$\langle Ux,y\rangle=\sum_{n=2}^{\infty}x_n\overline{y_n}=\langle x,Uy\rangle.$$

De esta manera, $U^{'}=U$, es decir, U es un operador autoadjunto.

ii) Si $T=U\oplus R\Rightarrow T^{'}=U\oplus L$, donde L es el operador de traslación a izquierda. En efecto; sean $(x,y);(z,w)\in\ell_2\oplus\ell_2$, entonces:

$$\langle T(x,y);(z,w)\rangle=\sum_{n=2}^{\infty}x_n\overline{z_n}+\sum_{n=2}^{\infty}y_n\overline{w_{n+1}}=\langle(x,y);(U\oplus L)(z,w)\rangle.$$

En consecuencia, $T^{'} = U \oplus L$.

iii) Es fácil ver que el radio espectral $r(T) = 1$, por lo que
$\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}(0,1) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$: Esto se sigue del hecho que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}(0, r(T))$.
En realidad, es fácil ver que $\sigma(T) = \sigma(U) \cup \sigma(R) = \mathbb{D}(0,1)$.

iv)T es un operador hiponormal:
debemos demostrar que $\|T^{'}(x,y)\| \leq \|T(x,y)\|$ para cada $x, y \in \ell_2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|T^{'}(x,y)\|^2 &= \|[(0,x_2,x_3,\ldots);(y_2,y_3,\ldots)]\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\|x_n\|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\|y_n\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - |x_1|^2 - |y_1|^2 = \|(x,y)\|^2 - |x_1|^2 - |y_1|^2 \\
&= \|T(x,y)\|^2 - |y_1|^2 \leq \|T(x,y)\|^2 \quad \text{para cada} \quad x, y \in \ell_2.
\end{aligned}$$

Así, T es hiponormal. Observemos también que T satisface la propiedad $H(1)$ ya que es hiponormal, en consecuencia T verifica el teorema de Weyl y tiene la SVEP. Observemos que del teorema 1.21, se obtiene que $\sigma(T) = \sigma_s(T) = \mathbb{D}(0,1)$.

v) $\alpha(T) = 1$, $p(T) = 1$ y $q(T) = \infty$:
$(x,y) \in N(T) \Leftrightarrow x_n = 0$ para cada $n \geq 2$ y $y_n = 0$ para $n \geq 1$. Así,

$$N(T) = \{(x,0) : x_n = 0 \text{ si } n \geq 2, \text{ donde } x = (x_n)\} = \langle\{(e_1, 0)\}\rangle.$$

En consecuencia, $\alpha(T) = 1$. Es claro que $N(T^n) = N(T)$ si $n \geq 1$. De este modo, $p(T) = 1$. Observemos que $ind(T) = -1$ y T tiene rango cerrado, es decir, $T \in W_+(H)$.
También, como $\alpha(T) = 1$ se tiene 0 es un autovalor de T.
Veamos ahora que $q(T) = \infty$. Por el Teorema 1.13, se tiene que como $\alpha(T) = 1 < 2 = \beta(T)$, entonces $q(T) = \infty$.

vi) $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$; donde $\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.
Observemos primero que $\sigma_p(T) = \{0,1\} \subseteq \sigma_a(T)$ y de esto se sigue que $\lambda I - T$ es inyectivo si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Recordemos que un operador $T \in L(X)$ tiene rango cerrado, si y sólo si, $\gamma(T) > 0$, donde $\gamma(T)$ representa el módulo minimal reducido de T. Observemos que si un operador $S \in L(X)$ es inyectivo, entonces $\gamma(S) = inf\{\|Sx\| : \|x\| = 1\}$.

Demostremos primero que $\Gamma \cup \{0\} \subseteq \sigma_a(T)$. En efecto:
Sea $|\lambda| = 1$ y veamos que $\gamma(\lambda I - T) = inf\{\|(\lambda I - T)x\| : \|x\| = 1\} = 0$. Recordemos que $\sigma_a(R) = \Gamma$ y como $\lambda I - R$ es inyectivo para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $(x_n) \in \ell_2$ tal que $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\|(\lambda I - R)x_n\| \to 0$ si $n \to \infty$.

Definamos $z_n = (0, x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces (z_n) es una sucesión en $H := \ell_2 \oplus \ell_2$ tal que $\|z_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además:
$\|(\lambda I - T)z_n\| = \|(0, \lambda x_n - R(x_n))\| = \|(\lambda I - R)x_n\| \to 0$ si $n \to \infty$.
De esta manera, $\gamma(\lambda I - T) = 0$ si $|\lambda| = 1$.

Demostremos ahora que $\sigma_a(T) \subseteq \Gamma \cup \{0\}$. Para tal fin, veamos que $\lambda I - T$ es inferiormente acotado si $0 < |\lambda| < 1$. Por el Teorema 1.7 esto equivale a demostrar que $(\lambda I - T)' = \overline{\lambda} I - T'$ es sobreyectivo para $0 < |\lambda| < 1$.
Sea $(z, w) = [(z_1, z_2, \ldots); (w_1, w_2, \ldots)] \in H$. Definamos $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\overline{\lambda}} \\ x_n = \frac{1}{\overline{\lambda}-1}, \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\overline{\lambda}} \\ \overline{\lambda} y_n - y_{n+1} = w_n, \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Veamos que $x, y \in \ell_2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{|\overline{\lambda}|^2}|z_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|\overline{\lambda}-1|^2}|z_n|^2 < \infty \quad (\text{ya que} \quad z = (z_n) \in \ell_2).$$

Así, $x = (x_n) \in \ell_2$. Ahora, veamos que $y = (y_n) \in \ell_2$. En efecto:
observemos que $y_2 = -w_1$, $y_3 = -\overline{\lambda} w_1 - w_2, \ldots$
$y_n = -(\overline{\lambda})^{n-2} w_1 - (\overline{\lambda})^{n-3} w_2 - \ldots \overline{\lambda} w_{n-2} - w_{n-1}$ para $n \geq 2$.
Si hacemos $a_i = -w_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $b_i = (\overline{\lambda})^{i-1}$ para $2 \leq i \leq n-1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1| = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) < \infty \text{ (multiplicación de Cauchy)}.$$

De esta manera, $y = (y_n) \in \ell_1 \subseteq \ell_2$.
Luego, dado $(z, w) \in H$ existe $(x, y) \in H$, tal que $(\overline{\lambda} I - T')(x, y) = (z, w)$ si $0 < |\lambda| < 1$. En consecuencia, $\sigma_a(T) \subseteq \Gamma \cup \{0\}$. Por tanto, $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$.

vii) $\sigma_{lw}(T) = \sigma_{lb}(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$ y
$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T) = \Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$: En efecto;
Como T tiene la SVEP, del Teorema 1.31 se tiene que $\sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{lb}(T) = \sigma_{lw}(T)$ y por el Teorema 1.30, $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lw}(T) \cup acc\sigma_s(T) = \overline{\mathbb{D}}$. En consecuencia:

$$\sigma_{lw}(T) = \sigma_{lb}(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Por otro lado, como $T \in \Phi_+(H)$ e $ind(T) \leq 0$, entonces $T \in W_+(H)$ y así, $0 \notin \sigma_{uw}(T)$. Nuevamente por el Teorema 1.31, $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$ (ya que T tiene la SVEP). Ahora, del Teorema 1.30 tenemos que:

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) \cup acc\sigma_a(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \Gamma \quad \text{y en consecuencia,}$$

$\sigma_{ub}(T) \supseteq \Gamma$ y como $0 \notin \sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T)$ se tiene que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) = \Gamma$.
Observemos que T verifica el teorema de a-Browder y por el Teorema 1.37 se obtiene que $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = p_{00}^a(T)$. Así, $p_{00}^a(T) = \{0\}$. Por otro lado, al ser T un operador hiponormal verifica el teorema de Weyl y en consecuencia:
$p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \emptyset$, la última igualdad es debido a que $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.
Observemos también que:

$$\{0\} = p_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T) \subseteq iso\sigma_a(T) = \{0\}. \text{ De esta manera,}$$

$p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T) = \{0\}$.
Obsrvemos que T verifica el teorema de a-Weyl, ya que $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \{0\} = \pi^a_{00}(T)$.

En resumen, el operador $T := U \oplus R$ verifica el teorema de a-Weyl, $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$, $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$ y $\sigma_{uw}(T) = \Gamma$.

Capítulo 2

La Propiedad (w)

En este capítulo se estudia la propiedad (w), una variante del teorema de Weyl que fue introducida por Rakočević en 1985 [36]. En la primera sección de este capítulo estudiaremos caracterizaciones de la propiedad (w), algunas clases de operadores que satisfacen la propiedad (w) y relaciones entre el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl. En la segunda sección, el autor plantea condiciones para que los operadores polaroides satisfagan la propiedad (w). Los resultados que aparecen en este capítulo son originales de Aiena-Peña [9].

2.1. Caracterizaciones de la Propiedad (w).

En el capítulo 1 estudiamos algunos resultados conocidos del teorema de a-Weyl. El teorema de a-Weyl es una variante del teorema de Weyl y fue introducida por Rakočević en [36]. En ese mismo artículo Rakočević define otra variante del teorema de Weyl la cual llamó **la propiedad** (w)**.**

Definición 2.1. Sea $T \in L(X)$, diremos que T satisface **la propiedad** (w) si:

$$\Delta^a(T) := \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T).$$

Observemos que la propiedad (w) se ve a simple vista, como una propiedad intermedia entre el teorema de Weyl y el teorema de a-Weyl. Pero en realidad, Rakočević muestra en [36], dos ejemplos que muestran que la propiedad (w) no es una propiedad intermedia entre las propiedades espectrales mencionadas anteriormente.

Teorema 2.1. *Sea $T \in L(X)$, si T satisface la propiedad (w). Entonces:*
T satisface el teorema de a-Browder y $\sigma_a(T) = \sigma_{uw}(T) \cup iso\sigma_a(T)$.

Demostración.
Veamos primero que T satisface el teorema de a-Browder. Para tal fin, demostremos que T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$ (ver Teorema 1.38). Sea $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T) \subseteq iso\sigma(T)$, ya que T verifica la propiedad (w). Así, T tiene

la SVEP en λ.

La inclusión $\sigma_{uw}(T) \cup iso\sigma_a(T) \subseteq \sigma_a(T)$ es siempre cierta para cada $T \in L(X)$. Veamos la otra inclusión. Sea $\lambda \in \sigma_a(T)$; si $\lambda \in \sigma_{uw}(T)$ la inclusión es trivial. Ahora, si $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T) \subseteq iso\sigma(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$. ■

El siguiente ejemplo, muestra que el recíproco del teorema anterior es falso.

Ejemplo 2.2. El operador $T := U \oplus R$ considerado en el Ejemplo 1.26, satisface el teorema de a-Browder. Por otro lado;
$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \{0\} \neq \pi_{00}(T) = \emptyset$. De esta manera, T no verifica la propiedad (w).

Teorema 2.2. *Sea $T \in L(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) T satisface la propiedad (w),

ii) T satisface el teorema de a-Browder y $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si T satisface la propiedad (w), por el Teorema 2.1, se tiene que T satisface el teorema de a-Browder. Ahora, del Teorema 1.37, el teorema de a-Browder equivale a la condición $\Delta^a(T) = p_{00}^a(T)$ y como $\Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$, obtenemos que $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$.

$\Leftarrow$) Si T satisface el teorema de a-Browder y $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$, tendremos que $\Delta^a(T) = p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$. De este modo, T satisface la propiedad (w). ■

Corolario 2.1. *Sea $T \in L(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) T satisface la propiedad (w),

ii) T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$ y $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$.

Demostración.
Es consecuencia inmediata del Teorema anterior y el Teorema 1.38. ■

En la Observación 13, vimos que $\Delta(T) \subseteq \Delta^a(T)$. En consecuencia tiene sentido la siguiente definición:

Definición 2.3. Sea $T \in L(X)$. Definamos el conjunto:

$$\Lambda(T) := \Delta^a(T) \setminus \Delta(T) = \{\lambda \in \Delta^a(T) : ind(\lambda I - T) < 0\}$$

Observemos que:
$\Lambda(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in \Phi_+(X),\ ind(\lambda I - T) < 0,\ 0 < \alpha(\lambda I - T)\}$. Además, se tiene que $\Delta^a(T) = \Delta(T) \cup \Lambda(T)$ y $\Delta(T) \cap \Lambda(T) = \emptyset$.

Teorema 2.3. *Sea $T \in L(X)$ un operador que satisface la propiedad (w): Entonces:*

i) $\Delta^a(T) = \Delta(T)$,

ii) *T satisface el teorema de Weyl.*

Demostración.
i) La contención $\Delta(T) \subseteq \Delta^a(T)$ siempre es cierta. Veamos ahora la otra contención: Sea $\lambda \in \Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$. Luego, T y T^* tienen la SVEP en λ. Ahora, por los Teoremas 1.28 y 1.29, se tiene que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. De esta manera, $\lambda \in \sigma(T)$, $ind(\lambda I - T) = 0$ y $\lambda I - T$ tiene rango cerrado. En consecuencia, $\lambda \in \Delta(T)$.

ii) Si T satisface la propiedad (w), entonces $\pi_{00}(T) = \Delta^a(T) = \Delta(T)$. De este modo, $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$; es decir, T satisface el teorema de Weyl. ■

Observemos que si un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad (w), entonces $\Lambda(T) = \emptyset$.

Teorema 2.4. *Sea $T \in L(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *T satisface la propiedad (w),*

ii) *T satisface el teorema de Weyl y* $\Lambda(T) = \emptyset$,

iii) *T satisface el teorema de Weyl y* $\Delta^a(T) \subseteq iso\sigma(T)$,

iv) *T satisface el teorema de Weyl y* $\Delta^a(T) \subseteq \partial\sigma(T)$.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata del Teorema 2.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si T satisface el teorema de Weyl y $\Lambda(T) = \emptyset$, entonces $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$ y $\Delta^a(T) = \Delta(T)$. Así, $\Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $\Delta^a(T) \subseteq iso\sigma(T)$, entonces T y T^* tienen la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. De este modo, por los Teoremas 1.28, 1.29 y 1.13 se tiene que $ind(\lambda I - T) = 0$ para cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. Así;

$$\Lambda(T) = \{\lambda \in \Delta^a(T) : ind(\lambda I - T) < 0\} = \emptyset.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii): Si T satisface la propiedad (w), entonces T satisface el teorema de Weyl y $\Delta^a(T) = \Delta(T) = \pi_{00}(T) \subseteq iso\sigma(T)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Esta implicación es clara, ya que $\Delta^a(T) \subseteq iso\sigma(T) \subseteq \partial\sigma(T)$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $\Delta^a(T) \subseteq \partial\sigma(T) = \partial\sigma(T^*)$, entonces T y T^* tienen la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. Así, $ind(\lambda I - T) = 0$ para cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. Luego, $\Lambda(T) = \emptyset$. ■

Teorema 2.5. *Si* $T \in L(X)$ *es descomponible* $\Rightarrow \Lambda(T) = \emptyset$.

Demostración.
Si T es descomponible, entonces T y T^* tienen la SVEP (Teorema 1.27). Así, $ind(\lambda I - T) = 0$ para cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. Luego, $\Lambda(T) = \emptyset$. ■

Corolario 2.2. *Sea* $T \in L(X)$ *descomponible. Entonces:*
T *satisface la propiedad* $(w) \Leftrightarrow T$ *satisface el teorema de Weyl.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Esta implicación es inmediata del Teorema 2.3.
$\Leftarrow$) Si T es descomponible, entonces del Teorema 2.5 tenemos que
$\Lambda(T) = \emptyset$. ■

Ejemplo 2.4. i) Si $T \in L(X)$ es un operador de Riesz, entonces $\Lambda(T) = \emptyset$; ya que los operadores de Riesz son descomponibles. En particular, los operadores de Riesz que satisfacen el teorema de Weyl, también satisfacen la propiedad (w).

ii) Del Ejemplo 1.24 del Capítulo 1, los operadores compactos con espectro infinito satisfacen el teorema de a-Weyl, y por consiguiente satisfacen el teorema de Weyl. Así, los operadores compactos con espectro infinito satisfacen la propiedad (w).

iii) En el Ejemplo 1.24 del Capítulo 1, vimos que el operador $S(x_1, x_2, \ldots) := (0, 0, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots)$ sobre ℓ_2, es un operador compacto cuasi-nilpotente que no verifica el teorema de Weyl. De esta manera, S es un operador compacto que no satisface la propiedad (w). Observemos que S tampoco verifica el teorema de a-Weyl.

Corolario 2.3. *Si* $T \in L(X)$ *es un operador escalar generalizado, entonces* T *y* T^* *satisfacen la propiedad* (w). *En particular, cada operador escalar satisface la propiedad* (w).

Demostración.
Si T es un operador escalar generalizado, entonces T y T^* son descomponibles (ver Teorema 1.27). Así, $\Lambda(T) = \Lambda(T^*) = \emptyset$. Por el Teorema 1.43, se tiene además, que T y T^* satisfacen el teorema de Weyl. De esta manera, T y T^* satisfacen la propiedad (w). ■

Teorema 2.6. *Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert complejo. Entonces:*

i) $T^{'}$ satisface el teorema de Weyl $\Leftrightarrow$ T^* satisface el teorema de Weyl

ii) $T^{'}$ satisface la propiedad (w) $\Leftrightarrow$ T^* satisface la propiedad (w).

iii) $T^{'}$ satisface el teorema de a-Weyl $\Leftrightarrow$ T^* satisface el teorema de a-Weyl.

Demostración.
Recordemos que $T^{'} \in L(H)$ representa el adjunto de Hilbert del operador T. Veamos primero que: $\pi_{00}(T^{'}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \pi_{00}(T^*)\}$. En efecto:

$$\begin{aligned}\pi_{00}(T^{'}) &= \{\lambda \in iso\sigma(T^{'}) : 0 < \alpha(\lambda I - T^{'}) < \infty\} \\ &= \{\lambda \in iso[\{\overline{\beta} : \beta \in \sigma(T^*)\}] : 0 < \alpha(\lambda I - T^{'}) < \infty\} \\ &= \{\overline{\lambda} \in iso\sigma(T^*) : 0 < \alpha(\overline{\lambda} I - T^{'}) < \infty\} \\ &= \{\overline{\lambda} \in iso\sigma(T^*) : 0 < \alpha(\lambda I^* - T^*) < \infty\} \text{ (por el Teorema 1.32(i))} \\ &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \pi_{00}(T^*)\}.\end{aligned}$$

De igual manera, se obtiene que $\pi^a_{00}(T^{'}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \pi^a_{00}(T^*)\}$ (ver Teorema 1.8).

En virtud de los Teoremas 1.8 y 1.32(ii) se tiene que:
$\sigma_a(T^{'}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^*)\}$ y $\sigma_{uw}(T^{'}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^*)\}$.

Demostremos sólo el apartado (ii), los otros apartados se obtienen de forma similar.

$\Rightarrow$) Supongamos que $T^{'}$ satisface la propiedad (w) y veamos que T^* satisface la propiedad (w).

$$\begin{aligned}\sigma_a(T^*) \setminus \sigma_{uw}(T^*) &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^{'})\} \setminus \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^{'})\} \\ &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^{'}) \setminus \sigma_{uw}(T^{'})\} \\ &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \pi_{00}(T^{'})\} = \{\lambda : \lambda \in \pi_{00}(T^*)\} = \pi_{00}(T^*).\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que T^* satisface la propiedad (w).

$$\begin{aligned}\sigma_a(T^{'}) \setminus \sigma_{uw}(T^{'}) &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^*)\} \setminus \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_{uw}(T^*)\} \\ &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_a(T^*) \setminus \sigma_{uw}(T^*)\} \\ &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \pi_{00}(T^*)\} = \pi_{00}(T^{'}).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2.5. La propiedad (w) no se trasmite de un operador $T \in L(X)$ a su dual $T^* \in L(X^*)$. En efecto:
Consideremos el operador $T \in L(\ell_2)$, definido por:

$$T(x_1, x_2, \ldots) := (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \ldots).$$

En el Ejemplo 1.24 vimos que este operador es inyectivo y cuasi-nilpotente. Así;

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) = \sigma_{uw}(T) = \{0\} \text{ y } \pi_{00}(T) = \emptyset.$$

De esta manera, $\Delta^a(T) = \pi_{00}(T) = \emptyset$. En consecuencia, T satisface la propiedad (w).
El operador adjunto $T^{'}$ del operador T es :

$$T^{'}(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Este operador $T^{'}$ es cuasi-nilpotente y $\pi_{00}(T^{'}) = \{0\}$. Por tanto;

$$\Delta(T^{'}) = \sigma(T^{'}) \setminus \sigma_w(T^{'}) = \emptyset \neq \{0\} = \pi_{00}(T^{'}).$$

Esto implica que $T^{'}$ no verifica el teorema de Weyl y por consiguiente, $T^{'}$ no satisfece la propiedad (w). Luego, del teorema anterior T^* no satisface la propiedad (w).

El ejemplo siguiente, muestra que la propiedad (w) no es una propiedad intermedia entre el teorema de Weyl y el teorema de a-Weyl. Este ejemplo fué dado por Rakočević en [36].

Ejemplo 2.6. i) Existen operadores que satisfacen la propiedad (w), pero no el teorema de a-Weyl.
ii) Existen operadores que satisfacen el teorema de a-Weyl, pero no la propiedad (w).
Solución:
i) Consideremos el operador $S := R \oplus Q$, definido en $H := \ell_2 \oplus \ell_2$ por $S(x, y) := (Rx, Qy)$, donde R es el operador de traslación a derecha y Q es el operador cuasi-nilpotente definido por $Q(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$.
Este operador verifica que $\sigma(S) = \sigma_w(S) = \overline{\mathbb{D}}$ y así,
$\sigma_a(S) = \sigma_{uw}(S) = \Gamma \cup \{0\}$; $\pi^a_{00}(S) = \{0\}$. Luego:

$$\Delta^a(S) = \pi_{00}(S) = \emptyset \text{ y } \Delta^a(S) = \emptyset \neq \{0\} = \pi^a_{00}(S).$$

De esta manera, S satisface la propiedad (w) y no cumple el teorema de a-Weyl.

ii) Consideremos el olperador $T := U \oplus R$, estudiado en el Ejemplo 1.26. Entonces:

$$\Delta^a(T) = \{0\}, \quad \pi_{00}(T) = \emptyset \text{ y } \pi^a_{00} = \{0\}.$$

De este modo, T satisface el teorema de a-Weyl y no satisface la propiedad (w).

El siguiente teorema no aparece en Aiena-Peña [9], y nos permite demostrar un resultado más general que el Teorema 2.15 de [9].

Teorema 2.7. *Sea $T \in L(X)$.*
i) Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$. Entonces, $\Lambda(T) = \emptyset$. Ahora, si T^* tiene la SVEP, entonces $\Lambda(f(T)) = \emptyset$, para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

ii) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T^*)$. Entonces, $\Lambda(T^*) = \emptyset$.
Ahora, si T tiene la SVEP, entonces $\Lambda(f(T^*)) = \emptyset$, para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
i) Es suficiente demostrar que $\Delta^a(T) \subseteq \Delta(T)$.
Sea $\lambda \in \Delta^a(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Así, $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda I - T \in W_+(X)$. Por hipótesis, T^* tiene la SVEP en λ, y así, $q(\lambda I - T) < \infty$. Ahora, del Teorema 1.13 tenemos que $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Así, $ind(\lambda I - T) \geq 0$.

Por otro lado, $ind(\lambda I - T) \leq 0$. De esta manera, $ind(\lambda I - T) = 0$ y $\lambda I - T \in \Phi(X)$. Esto implica que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T)$. Luego, $\Lambda(T) = \Delta^a(T) \setminus \Delta(T) = \emptyset$. Ahora, si T^* tiene la SVEP, por el Teorema 1.25, se tiene que $f(T^*)$ tiene la SVEP y el resultado se sigue trivialmente.

ii) Es suficiente demostrar que $\Delta^a(T^*) \subseteq \Delta(T^*)$. Observemos que:

$$\Delta^a(T^*) = \sigma_a(T^*) \setminus \sigma_{uw}(T^*) = \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$$

y que $\Delta(T^*) = \Delta(T)$. Luego, es suficiente demostrar que $\sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T) \subseteq \Delta(T)$. En efecto; si $\lambda \in \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$, entonces $\lambda I - T \in W_-(X)$, y así, $ind(\lambda I - T) \geq 0$. Ahora, como T tiene la SVEP en λ, se sigue que $ind(\lambda I - T) \leq 0$. De esta manera, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T)$. ■

Daremos ahora dos condiciones suficientes para que el teorema de Weyl para un operador T (resp. para T^*) implique la propiedad (w) para T (resp. para T^*). El siguiente teorema es un poco más general que el Teorema 2.15 que aparece en Aiena-peña [9].

Teorema 2.8. *Sea $T \in L(X)$.*
i) Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$ y T satisface el teorema de Weyl $\Rightarrow$ T satisface la propiedad (w).

ii) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$ y T^* satisface el teorema de Weyl $\Rightarrow$ T^* satisface la propiedad (w).

Demostración.
i) Si T^* tiene la SVEP en cada $\Delta^a(T)$, entonces por el Teorema 2.7(i), $\Lambda(T) = \emptyset$. Ahora, como T verifica el teorema de Weyl, por Teorema 2.4 se sigue que T satisface la propiedad (w).

ii) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$, entonces por el Teorema 2.7(ii), se sigue que $\Lambda(T^*) = \emptyset$. Ahora, si T^* satisface el teorema de Weyl, por el Teorema 2.4 se tiene que T^* satisface la propiedad (w). ■

Corolario 2.4. *Sea $T \in L(X)$.*
i) Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$ y T satisface el teorema de a-Weyl $\Rightarrow$ T satisface la propiedad (w).

ii) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{lw}(T)$ y T^* satisface el teorema de a-Weyl $\Rightarrow$ T^* satisface la propiedad (w).

Demostración.
Los resultados (i) y (ii) se siguen del teorema anterior y del hecho que el teorema de a-Weyl implica el teorema de Weyl. ■

El resultado siguiente prueba que el teorema de Weyl, el teorema de a-Weyl y la propiedad (w) son equivalentes en presencia de SVEP.

Teorema 2.9. *Sea $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*
i) Si T^* tiene la SVEP. Entonces son equivalentes para $f(T)$; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

ii) Si T tiene la SVEP . Entonces son equivalentes para $f(T^*)$; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

Demostración.
i)Si T^* tiene la SVEP, entonces $f(T^*)$ tiene la SVEP y del Corolario 2.4 tenemos que:

el teorema de a-Weyl $\Rightarrow$ la propiedad (w) $\Rightarrow$ el teorema de Weyl.

Veamos ahora, que si $f(T^*)$ tiene la SVEP y $f(T)$ satisface el teorema de Weyl, entonces $f(T)$ verifica el teorema de a-Weyl. En efecto:
Si $f(T^*)$ tiene la SVEP, por el Teorema 1.21 tenemos que $\sigma_a(f(T)) = \sigma(f(T))$. En consecuencia, $\pi^a_{00}(f(T)) = \pi_{00}(f(T))$. Ahora, del Teorema 2.8 se tiene que $f(T)$ verifica la propiedad (w) y así, $\pi_{00}(f(T)) = \Delta^a(f(T))$. De esta manera, $\Delta^a(f(T)) = \pi^a_{00}(f(T))$. Es decir, $f(T)$ satisface el teorema de a-Weyl.

ii) La prueba es similar a (i). ■

Corolario 2.5. *Sea $T \in L(X)$.*
i) Si T^* tiene la SVEP. Entonces son equivalentes para T; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

ii) Si T tiene la SVEP . Entonces son equivalentes para T^*; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

Observación 14. En el Ejemplo 2.6(i), consideramos el operador $T := R \oplus Q$, donde R es el operador de traslación a derecha y Q es el operador cuasi-nilpotente de ℓ_2 en ℓ_2 definido por: $Q(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$.

El operador T tiene la SVEP, ya que R y Q tienen la SVEP (ver teorema 2.9 de [1]). Además, vimos que este operador satisface la propiedad (w) y no satisface el teorema de a-Weyl. En consecuencia, en el apartado (i) del Teorema 2.9, la SVEP para T^* no puede ser reemplazada por la condición de que T tenga la SVEP.

Veamos ahora un ejemplo que muestra que en el apartado (ii) del Teorema 2.9, no podemos reemplazar la condición de que T tenga la SVEP, por la que T^* tiene la SVEP.

Ejemplo 2.7. Consideremos el operador $T := L \oplus Q^{'}$, donde L es el operador de traslación a izquierda y $Q^{'}$ es el adjunto del operador:
$Q(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$. Es fácil ver que $Q^{'}(x_1, x_2, \ldots) := (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \ldots)$ y que $T^{'} = R \oplus Q$.

Entonces $T^{'}$ tiene la SVEP y por consiguiente T^* tiene la SVEP. Por otro lado, T^* satisface la propiedad (w) y no verifica el teorema de a-Weyl.

Teorema 2.10. *Sea $T \in L(X)$. Si T es un operador escalar generalizado $\Rightarrow f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen la propiedad (w) para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Si T es un operador escalar generalizado, por los Teoremas 1.48 y 1.25 se tiene que $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el teorema de a-Weyl y satisfacen la SVEP para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Luego, del Teorema 2.9 se sigue que $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen la propiedad (w) para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. ■

Teorema 2.11. *Sea $T \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert. Si $T^{'}$ tiene la propiedad $H(p) \Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. En particular, si $T^{'}$ es un operador escalar generalizado, entonces $f(T)$ satisface la propiedad (w) para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Demostración.
Si $T^{'}$ satisface la propiedad $H(p)$, entonces por el Teorema 1.46 se tiene que $f(T)$ satisface el teorema de a-Weyl. Ahora, de la Observación 12, $T^{'}$ tiene la SVEP, se sigue del Teorema 1.20 que T^* tiene la SVEP y por el Teorema 1.25, $f(T)^* = f(T^*)$ tiene

la SVEP. Ahora, del Corolario 2.4(i) se concluye que $f(T)$ satisface la propiedad (w). Por otro lado, de los Teoremas 1.47 y 2.6 se obtiene que $f(T)$ satisface el teorema de a-Weyl. ■

Recordemos que los operadores p-hiponormales, log-hiponormales, M-hiponormales y totalmente paranormales satisfacen la propiedad $H(p)$. Luego, si T' pertenece a alguna de las clases mencionadas anteriormente, entonces $f(T)$ satisface la propiedad (w). Por ejemplo, si T es un operador normal, se sigue fácilmente de la definición que T' es normal y así, satisface $H(1)$. En consecuencia, si T es un operador normal, entonces $f(T)$ satisface la propiedad (w) para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. En particular, los operadores normales satisfacen la propiedad (w).

Teorema 2.12. *Sea $T \in L(X)$ tal que T^* tiene la SVEP y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*
i) Si T satisface la propiedad $H(p) \Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

ii) Si T es reguloide $\Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
Este teorema se deduce de los Teoremas 1.25, 1.43, 1.44 y el Teorema 2.9. ■

Por los Teoremas 3.69 y 3.70 de [1], el Teorema de la aplicación espectral es válido para los espectros semi-Browder y de Browder. Esto conduce al siguiente teorema:

Teorema 2.13. *Sea $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ una aplicación inyectiva. Entonces:*

i) $p_{00}(f(T)) = f(p_{00}(T))$,

ii) $p_{00}^a(f(T)) = f(p_{00}^a(T))$.

Demostración.
i) Por la inyectividad de f y el teorema de la aplicación espectral se tiene:

$$\begin{aligned} p_{00}(f(T)) &= \sigma(f(T)) \setminus \sigma_b(f(T)) \\ &= f(\sigma(T)) \setminus f(\sigma_b(T)) \\ &= f(\sigma(T) \setminus \sigma_b(T)) = f(p_{00}(T)). \end{aligned}$$

ii) Por la inyectividad de f y el teorema de la aplicación espectral para $\sigma_a(T)$, se tiene:

$$\begin{aligned} p_{00}^a(f(T)) &= \sigma_a(f(T)) \setminus \sigma_{ub}(f(T)) \\ &= f(\sigma_a(T)) \setminus f(\sigma_{ub}(T)) \\ &= f(\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T)) = f(p_{00}^a(T)). \end{aligned}$$

■

Para finalizar esta sección daremos algunos resultados relacionados a $\Lambda(T)$.

Definamos $\Lambda^*(T) := \sigma_w(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Es claro que $\Lambda(T) \subseteq \Lambda^*(T)$, donde sabemos $\Lambda(T) := \Delta^a(T) \setminus \Delta(T)$. Esta última contención puede ser estricta, ya que si consideramos el operador $T := U \oplus R$ definido en el Ejemplo 2.2, se tiene que:

$$\Lambda(T) = \{0\} \subsetneq int(\overline{\mathbb{D}}) = \Lambda^*(T).$$

En Aiena-Biondi [4], se demostró el resultado siguiente (Corolario 2.5 [4]):

Resultado 1: Sea $T \in L(X)$ un operador que satisface el teorema de Browder. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) T satisface el teorema de a-Browder,

ii) T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Lambda^*(T)$,

iii) $\sigma_a(T) \cap \Lambda^*(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$.

En realidad, se puede tener un resultado un poco más general en terminos de $\Lambda(T)$. Es decir:

Teorema 2.14. *Sea $T \in L(X)$ un operador que satisface el teorema de Browder. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) T satisface el teorema de a-Browder,

ii) T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Lambda(T)$,

iii) $\sigma_a(T) \cap \Lambda(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia del resultado 1.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Lambda(T)$. Luego, como T satisface el teorema de Browder, se tiene que $\Delta(T) \subseteq iso\sigma(T)$. Así, T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Lambda(T) \cup \Delta(T) = \Delta^a(T)$. Luego, del Teorema 1.38 se concluye que T satisface el teorema de a-Browder.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\sigma_a(T) \cap \Lambda(T) \subseteq \sigma_a(T) \cap \Lambda^*(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$. La última contención se obtiene del resultado 1.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Esta implicación es clara, ya que T tiene la SVEP en cada $\lambda \in iso\sigma_a(T)$. ■

Observación 15. Si un operador $T \in L(X)$ satisface el teorema de a-Browder, no necesariamente satisface que $\Lambda(T) = \emptyset$. En efecto: consideremos el operador $T := U \oplus R$ definido en el Ejemplo 2.2. Entonces T satisface el teorema de a-Browder y $\Lambda(T) = \{0\} \neq \emptyset$.

Si denotamos por $\mathfrak{C}_\Lambda := \{T \in L(X) : \Lambda(T) = \emptyset\}$. Entonces, esta clase contiene a los operadores descomponibles, los operadores que satisfacen la propiedad (w) y los operadores $T \in L(X)$ tal que T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$.

2.2. Operadores Polaroides y la Propiedad (w).

En esta sección estudiaremos los operadores polaroides y a-polaroides y su relación con la propiedad (w). Veremos por ejemplo que la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl son equivalentes para operadores a-polaroides.

Definición 2.8. Un operador $T \in L(X)$ se dice **polaroide**, si $iso\sigma(T) = \emptyset$ o si cada punto aislado del espectro $\sigma(T)$ es un polo del resolvente de T, o equivalentemente (en virtud del Teorema 1.33), T es polaroide si:

$$iso\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Un operador $T \in L(X)$ se dice **isoloide**, si cada punto aislado de $\sigma(T)$ es un autovalor de T. Por el Teorema 1.33 se tiene que cada operador polaroide es isoloide.

Observación 16. Si $T \in L(X)$ tiene la propiedad $H(p) \Rightarrow T$ es un operador polaroide. En efecto:
Sea $\lambda \in iso\sigma(T)$, por el Teorema 1.34 se tiene que:

$$X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p \oplus K(\lambda I - T).$$

Esta última igualdad se tiene ya que T satisface la propiedad $H(p)$. Luego;

$$(\lambda I - T)^p(X) = (\lambda I - T)^p(K(\lambda I - T)) = K(\lambda I - T). \text{ De esta manera,}$$

$X = N(\lambda I - T)^p \oplus (\lambda I - T)^p(X)$. Ahora, por la Proposición 38.4 de Heuser [25] se obtiene que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$. En consecuencia, λ es un polo del resolvente de T.

Los operadores escalar generalizado, log-hiponormal, p-hiponormal, M-hiponormal, $*$-paranormal, totalmente $*$-paranormal y operadores de convolución sobre $L^1(G)$, donde G es un grupo abeliano localmente compacto; son ejemplos de operadores polaroides, ya que dichos operadores satisfacen la propiedad $H(p)$.

La clase de los operadores que satisface la propiedad $H(p)$ no es comparable a los operadores descomponibles, por ejemplo, el operador $T := U \oplus R$ definido en el Ejemplo 2.2 satisface la condición $H(p)$ por ser hiponormal, pero no es descomponible, ya que su dual $T' = U \oplus L$ no tiene la SVEP. Por otro lado, el operador Q definido en el Ejemplo 2.6 es descomponible pero no satisface la propiedad $H(p)$ por no ser polaroide polaroide ($p(Q) = \infty$).

Teorema 2.15. *Sea $T \in L(X)$.*
T es polaroide $\Leftrightarrow$ para cada $\lambda \in iso\sigma(T)$, existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que T es polaroide y sea $\lambda \in iso\sigma(T)$. Luego, λ es un polo del resolvente de T. Ahora, del Teorema 1.33, si $p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T)$, se tiene que

$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$.

$\Leftarrow$) Sea $\lambda \in iso\sigma(T)$, entonces por hipótesis existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:
$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$. Así,

$$X = N(\lambda I - T)^p \oplus K(\lambda I - T), \text{ (ver Teorema 1.34). Luego,}$$

$$(\lambda I - T)^p(X) = (\lambda I - T)^p(K(\lambda I - T)) = K(\lambda I - T). \text{ De esta manera,}$$

$X = N(\lambda I - T)^p \oplus (\lambda I - T)^p(X)$. Ahora, por la Proposición 38.4 de Heuser [25] se obtiene que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$. En consecuencia, λ es un polo del resolvente de T. ∎

Recordemos que la clase de operadores $\mathcal{P}_0(X)$, se define como la clase de los operadores $T \in L(X)$ tal que para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$, existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$. Por el Teorema 1.42 se tiene que:

$$T \in \mathcal{P}_0(X) \Leftrightarrow p_{00}(T) = \pi_{00}(T).$$

De este modo, los operadores polaroides están contenidos en la clase $\mathcal{P}_0(X)$.

Lema 2.1. *Si $T \in L(X)$ es polaroide $\Rightarrow \pi_{00}(T) \subseteq \Delta(T)$*

Demostración.
Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Ahora, como T es polaroide, entonces $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$.
Luego, por el Teorema 1.13 se tiene que $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T)$. ∎

Observemos que del lema 2.1 se deduce, que si T^* es polaroide, entonces $\pi_{00}(T^*) \subseteq \Delta(T^*)$.

Lema 2.2. *Si $T \in L(X)$ es polaroide $\Rightarrow T^* \in L(X^*)$ es polaroide.*

Demostración.
Sea $\lambda \in \sigma(T^*) = iso\sigma(T)$, entonces como T es polaroide se tiene que $0 < p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Ahora, del Teorema anterior se obtiene que:

$$X = N(\lambda I - T)^p \oplus (\lambda I - T)^p(X). \qquad (*)$$

Además, por el Teorema 1.34, $(\lambda I - T)^p(X)$ es cerrado, ya que este subespacio corresponde al núcleo de la proyección espectral asociada al conjunto espectral $\{\lambda\}$. Luego, de la Observación 1 se tiene:

$$X^* = N((\lambda I - T)^p)^\perp \oplus (\lambda I - T)^p(X)^\perp \qquad \text{(por (*))}.$$

Ahora, por las igualdades $(\lambda I - T)^p(X)^\perp = N((\lambda I^* - T^*)^p)$ y $N((\lambda I - T)^p)^\perp = (\lambda I^* - T^*)^p(X^*)$; se obtiene que:

$X^* = (\lambda I^* - T^*)^p(X^*) \oplus N((\lambda I^* - T^*)^p)$ y por la Proposición 38.4 de Heuser [25],

se tiene que $0 < p(\lambda I^* - T^*) = q(\lambda I^* - T^*) < \infty$. De esta manera, λ es un polo del resolvente de T^*. ■

Teorema 2.16. *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide:*
i) T satisface el teorema de Browder $\Leftrightarrow$ T satisface el teorema de Weyl.
ii) T^* satisface el teorema de Browder $\Leftrightarrow$ T^* satisface el teorema de Weyl.

Demostración.
i) $\Leftarrow$) Esta implicación siempre es cierta, siendo T polaroide o nó. (ver Teorema 1.40).

$\Rightarrow$) Si T es polaroide, por el Lema 2.1 se tiene que $\pi_{00}(T) \subseteq \Delta(T)$. Ahora, como T satisface el teorema de Browder se tiene que $\Delta(T) = p_{00}(T)$. De esta manera; $\pi_{00}(T) \subseteq \Delta(T) = p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$. Así, $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$.

ii) Se demuestra de manera análoga a (i). ■

Definición 2.9. Un operador $T \in L(X)$ se dice a-**polaroide**, si $iso\sigma_a(T) = \emptyset$ o si cada punto aislado de $\sigma_a(T)$ es un polo del resolvente de T, o equivalentemente (en virtud del Teorema 1.33), T es a-polaroide si:

$$iso\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Un operador $T \in L(X)$ se dice a-**isoloide**, si cada punto aislado de $\sigma_a(T)$ es un autovalor de T, es decir, $iso\sigma_a(T) \subseteq \sigma_p(T)$.

Observemos que cada operador a-polaroide es a-isoloide, ya que cada punto aislado de $\sigma_a(T)$ es un polo del resolvente de T y en consecuencia, es un autovalor de T.

Teorema 2.17. *Sea $T \in L(X)$.*

i) $iso\sigma(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$,

ii) Si T es a-polaroide $\Rightarrow$ T es polaroide.

Demostración.
i)Sea $\lambda \in iso\sigma(T)$, entonces T y T^* tienen la SVEP en λ, ya que $iso\sigma(T) = iso\sigma(T^*)$. Si suponemos que $\lambda \notin \sigma_a(T)$, entonces $\lambda I - T$ es inyectivo y tiene rango cerrado. Así, $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$. Ahora, por los Teoremas 1.28 y 1.29 se tiene que $0 = p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T)$. Luego, $\lambda \notin \sigma(T)$ lo cual es absurdo. En consecuencia, $\lambda \in \sigma_a(T)$. Así, $\lambda \in iso\sigma_a(T)$.

ii) Supongamos que T es a-polaroide, entonces de (i) se tiene que:

$$iso\sigma(T) \subseteq iso\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\} \subseteq iso\sigma(T)$$

Así, $iso\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\}$.
En conscuencia, T es un operador polaroide. ■

El reciproco del Teorema 2.17(ii) no es cierto. Consideremos el operador $T := U \oplus R$ del Ejemplo 2.2. En este caso; $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$, $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$ y $p(T) = \infty$. Luego, $iso\sigma(T) = \emptyset$ y T es un operador polaroide. Por otro lado, $0 \in iso\sigma_a(T) = \{0\}$ y como $p(T) = \infty$, T no es un operador a-polaroide.

Lema 2.3. *Sea $T \in L(X)$ un operador a-polaroide, entonces:*
$p_{00}^a(T) = p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}^a(T)$

Demostración.
Observemos primero que si T es a-polaroide se tiene que:

$$iso\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\} = iso\sigma(T).$$

Así, $\pi_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$. Veamos ahora que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$.
Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Ahora, como T es polaroide (Teorema 2.15), se tiene que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$.
Luego, del Teorema 1.13 se sigue que $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. De esta manera, $\lambda I - T \in B(X)$ y $\lambda \in \sigma(T)$; es decir, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T)$.
Así, $\pi_{00}^a(T) = \pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Por otro lado, sabemos que $p_{00}(T) \subseteq p_{00}^a(T)$ y $p_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$. De este modo, obtenemos las igualdades:

$$p_{00}^a(T) = p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}^a(T).$$

■

El teorema siguiente mejora el Teorema 2.21 de Aiena-Peña [9].

Teorema 2.18. *Sea $T \in L(X)$ un operador a-polaroide. Entonces; son equivalentes para T: el teorema de a-Browder, el teorema de a-Weyl y la propiedad (w).*

Demostración.
Es suficiente demostrar las implicaciones:
a-Browder $\Rightarrow (w) \Rightarrow a$-Weyl, ya que por el Teorema 1.45, el teorema de a-Weyl implica el teorema de a-Browder.
i) Si T cumple el teorema de a-Browder, entonces por el Teorema 1.37;
$\Delta^a(T) = p_{00}^a(T)$ y del Lema anterior $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$. Así, $\Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$; es decir,

T satisface la propiedad (w).

ii) Si T satisface la propiedad (w), entonces $\Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$ y por el Lema 2.3, $\pi_{00}(T) = \pi^a_{00}(T)$. Así, $\Delta^a(T) = \pi^a_{00}(T)$. ■

Por el Teorema 4.36 de [1], cada multiplicador $T \in M(A)$ de un álgebra de Banach Tauberiana regular semi-simple y conmutativa es un operador polaroide. Ahora, del Teorema 5.54 de [1] se tiene que $T \in M(A)$ satisface que $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. De esta manera, dichos multiplicadores $T \in M(A)$ son a-polaroides. En virtud del Teorema 5.118 de [1], cada $T \in M(A)$ satisface el teorema de a-Weyl. En consecuencia, cada multiplicador $T \in M(A)$, donde A es un álgebra de Banach Tauberiana regular semi-simple y conmutativa satisface la propiedad (w). En particular, cada operador de convolución sobre $L^1(G)$, donde G es un grupo abeliano compacto satisface la propiedad (w).

Observación 17. Un resultado similar al Teorema 2.18 no vale si suponemos que T es polaroide; es decir, si T es polaroide, el teorema de a-Weyl y la propiedad (w) pueden no ser equivalentes. En efecto:
Consideremos el operador $T := U \oplus R$ del Ejemplo 2.2. Entonces, T es un operador polaroide que verifica el teorema de a-Weyl y no satisface la propiedad (w).

El teorema siguiente es un poco más general que el Teorema 2.24 de Aiena-Peña[9].

Teorema 2.19. *Sea $T \in L(X)$.*

i) Si T es polaroide y T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{lw}(T) \Rightarrow T^*$ satisface la propiedad (w).

ii) Si T es polaroide y T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T) \Rightarrow T$ satisface la propiedad (w).

Demostración.
i) Supongamos que T es polaroide y que T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$, entonces T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta(T)$, ya que $\Delta(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$. Por el Teorema 1.38 se sigue que T^* verifica el teorema de Browder. Ahora, del lema 2.2 se deduce que T^* es polaroide ya que T es polaroide. Luego, del Teorema 2.14 se tiene que T^* satisface el teorema de Weyl y por el Teorema 2.8, T^* satisface la propiedad (w), ya que T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma_s(T) \setminus \sigma_{lw}(T)$.

ii) Supongamos que T es polaroide y que T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T)$, entonces por el Teorema 2.7, $\Lambda(T) = \emptyset$. Por otro lado, T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta(T) = \Delta^a(T)$. Entonces, T satisface el teorema de Browder y como T es un operador polaroide, se sigue que T satisface el teorema de Weyl. De esta manera, $\Delta(T) = \Delta^a(T) = \pi_{00}(T)$; es decir, T satisface la propiedad (w). ■

Corolario 2.6. *Sea* $T \in L(X)$.

i) Si T *es polaroide y* T *tiene la SVEP* $\Rightarrow T^*$ *satisface la propiedad* (w).

ii) Si T *es polaroide y* T^* *tiene la SVEP* $\Rightarrow T$ *satisface la propiedad* (w).

El ejemplo siguiente muestra que en la parte (i) del Corolario 2.6, la hipótesis de que T^* tiene la SVEP, no puede ser reemplazada por la hipótesis de que T tenga la SVEP.

Ejemplo 2.10. Consideremos el operador $T := U \oplus R$ del Ejemplo 1.26. Entonces, T es un operador polaroide y T tiene la SVEP. Por otro lado, del Ejemplo 2.2, T no satisface la propiedad (w).

De forma análoga, en la parte (ii) del Corolario 2.6, la hipótesis de que T tiene la SVEP, no puede ser reemplazada por la hipótesis de que T^* tiene la SVEP.

Ejemplo 2.11. Consideremos el operador de traslación a izquierda $L \in L(\ell_2)$, y sea $U^{'}$ el adjunto del operador U definido en el Ejemplo 2.2. Tenemos que $L^{'} = R$, donde R es el operador de traslación a derecha. Definamos $S := L \oplus U^{'}$, entonces $S^{'} = R \oplus U$ tiene la SVEP. Así, S^* tiene la SVEP. Por otro lado, $S^{'}$ no satisface la propiedad (w), por lo que S^* no satisface la propiedad (w) (Teorema 2.6). Además, S es un operador polaroide ya que $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ y en consecuencia $iso\sigma(T) = \emptyset$.

Vamos a demostrar ahora, un teorema que generaliza al Teorema 2.22 de Aiena-Peña [9] y al Teorema 2.7 de Aiena-Guillén-Peña [8]. Pero antes daremos tres lemas que son fundamentales para nuestro teorema.

Lema 2.4. *Sea* $T \in L(X)$. *Si* T *o* T^* *tiene la SVEP. Entonces:*

$$f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T)); \quad f(\sigma_{uw}(T)) = \sigma_{uw}(f(T)) \ y \ f(\sigma_{lw}(T)) = \sigma_{lw}(f(T)).$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
Ver Corolario 3.72 de [1]. ■

Lema 2.5. *Sea* $T \in L(X)$ *un operador isoloide. Entonces:*

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)), \ para \ cada \ f \in \mathcal{H}(\sigma(T)).$$

Demostración.
Ver Lema 3.89 de [1]. ■

Lema 2.6. *Sea $T \in L(X)$. Si T o T^* tiene la SVEP. Entonces:*
$f(T)$ y $f(T)^*$ satisfacen el teorema de a-Browder para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
Ver Corolario 3.73 de [1]. ■

Teorema 2.20. *Sea $T \in L(X)$ tal que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Entonces:*

i) Si T^* tiene la SVEP y T es isoloide $\Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

ii) Si T tiene la SVEP y T^* es isoloide $\Rightarrow f(T)^*$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Demostración.
i) Si T^* tiene la SVEP, por el Teorema 1.25(i) se tiene que $f(T^*) = [f(T)]^*$ tiene la SVEP. Ahora, del Teorema 2.9, se sigue que la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl son equivalentes para $f(T)$. Veamos entonces, que $f(T)$ satisface la propiedad (w), para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Como $f(T)^*$ tiene la SVEP, por el Teorema 2.7 se sigue que $\Lambda(f(T)) = \emptyset$. Luego, es suficiente ver que $f(T)$ satisface el teorema de Weyl.

Por el Lema 2.6, se tiene que $f(T)$ satisface el teorema de a-Browder y por tanto el teorema de Browder. Por otro lado, T satisface la igualdad
$\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Ahora, como T satisface el teorema de Browder, se deduce del Teorema 1.40 que T satisface el teorema de Weyl, y así,
$\sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$. Luego, al ser T un operador isoloide, por el Lema 2.5 tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) &= f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) \\ &= f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T)) \text{ (por el Lema 2.4)}.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\pi_{00}(f(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \sigma_w(f(T))$; es decir, $f(T)$ satisface el teorema de Weyl.

ii) Si T tiene la SVEP, por el Teorema 1.25(i) se tiene que $f(T)$ tiene la SVEP. Ahora, del Teorema 2.9, se sigue que la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl son equivalentes para $f(T)^*$. La demostración sigue de manera similar al apartado (i). ■

Corolario 2.7. *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide. Entonces:*
i) Si T^* tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

ii) Si T tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)^*$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Corolario 2.8. *Si $T \in L(X)$ verifica el teorema de Weyl. Entonces:*

i) Si T^* tiene la SVEP y T es isoloide $\Rightarrow f(T)$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

ii) Si T tiene la SVEP y T^* es isoloide $\Rightarrow f(T)^*$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Teorema 2.21. *Sea $T \in L(X)$ un operador isoloide y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ inyectiva. Entonces:*

i) $\pi_{00}(f(T)) = f(\pi_{00}(T))$,

ii) *Si $T \in \mathcal{P}_0(X) \Rightarrow f(T) \in \mathcal{P}_0(X)$.*

iii) *Si $T \in \mathcal{P}_0(X)$ tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)$ satisface el teorema de Weyl.*

Demostración.
i) Como T es isoloide, del Lema 2.5 se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) &= f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = f(\sigma(T)) \setminus f(\pi_{00}(T)) \\ &= \sigma(f(T)) \setminus f(\pi_{00}(T)).\end{aligned}$$

La segunda igualdad se tiene de la inyectividad de f y la última igualdad se tiene del teorema de la aplicación espectral. De esta manera, se tiene que $\pi_{00}(f(T)) = f(\pi_{00}(T))$.

ii) Supongamos que $T \in \mathcal{P}_0(X)$, entonces del Teorema 1.42 se tiene que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Luego,
$p_{00}(f(T)) = f(p_{00}(T)) = f(\pi_{00}(T)) = \pi_{00}(f(T))$ (por Teorema 2.13 y el apartado (i)).

iii) Si T tiene la SVEP, entonces $f(T)$ tiene la SVEP (Teorema 1.25). Ahora, del apartado (ii) se tiene que $f(T) \in \mathcal{P}_0(X)$. Luego, el resultado se sigue trivialmente del Teorema 1.42. ■

Teorema 2.22. *Sea $T \in L(X)$. Si T o T^* tiene la SVEP y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ inyectiva. Entonces:*

i) $\Delta^a(f(T)) = f(\Delta^a(T))$,

ii) $\Delta(f(T)) = f(\Delta(T))$.

Demostración.
i) Por el Lema 2.6 se tiene que $f(T)$ satisface el teorema de a-Browder. Así,
$\Delta^a(f(T)) = p^a_{00}(f(T)) = f(p^a_{00}(T)) = f(\Delta^a(T))$ (por el Teorema 2.13 y el hecho que T satisface el teorema de Browder).

ii) Se demuestra de forma análoga. ■

Capítulo 3

Estabilidad de la Propiedad (w) para Operadores Polaroides

En este capítulo abordaremos con detalle los resultados expuestos en Aiena-Guillén-Peña [8]. La clase de los operadores que satisfacen la propiedad (w), es una subclase de la clase de operadores que satisfacen el teorema de Weyl, pero en el caso de que el dual tenga la SVEP, estas dos propiedades son equivalentes para dicho operador. Este capítulo esta compuesto por dos secciones. En la primera sección, trataremos de mostrar la dificultad de estudiar de manera general la estabilidad de la propiedad (w) para un operador cualquiera $T \in L(X)$, bajo perturbaciones que conmuten con T y al final de la sección, se demostrará que el teorema de Weyl, la propiedad (w) y en teorema de a-Weyl son estables bajo perturbaciones nilpotentes. En la segunda sección, nos delimitaremos al estudio de la estabilidad de la propiedad (w) bajo perturbaciones nilpotentes sobre operadores polaroides.

3.1. Propiedad (w) y Perturbaciones

En esta sección, trataremos algunos resultados preliminares relacionados a la estabilidad bajo operadores nilpotentes de los espectros que hemos estudiado a lo largo de este trabajo. Comenzaremos nuestra discusión con un ejemplo que muestra que la propiedad (w) no se transmite de un operador T a una perturbación cuasi-nilpotente.

Ejemplo 3.1. Consideremos $T \equiv 0$ y $Q \in L(\ell_2(\mathbb{N}))$, definido por:

$$Q(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots) \text{ para cada } x = (x_n) \in \ell_2.$$

Sabemos que Q es un operador cuasi-nilpotente y además;

$$\pi_{00}(Q) = \{0\} \neq \sigma_a(Q) \setminus \sigma_{uw}(Q) = \emptyset.$$

De esta manera, T satisface la propiedad (w) y $T + Q = Q$ no satisface la propiedad (w).

EL siguiente resultado de estabilidad para los espectros de Browder y de Weyl bajo perturbaciones de Riesz que conmutan con el operador, se debe a Schechter ([40]) y Rakočević ([39]). Recordemos $T \in L(X)$ se dice un **operador de Riesz**, si: $\lambda I - T \in \Phi(X)$, para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es claro que los operadores cuasi-nilpotentes y los operadores compactos son operadores de Riesz.

Teorema 3.1. *Sea $T \in L(X)$ y R un operador de Riesz que conmuta con T. Entonces:*

i) $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{uw}(T+R)$ *y* $\sigma_{lw}(T) = \sigma_{lw}(T+R)$.

ii) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+R)$ *y* $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lb}(T+R)$.

iii) $\sigma_{b}(T) = \sigma_{b}(T+R)$ *y* $\sigma_{w}(T) = \sigma_{w}(T+R)$.

Teorema 3.2. *Sea $T \in L(X)$ y R un operador de Riesz que conmuta con T; tal que $\sigma_a(T) = \sigma_a(T+R)$ y $\sigma(T) = \sigma(T+R)$. Entonces: $\Lambda(T) = \Lambda(T+R)$.*

Demostración.
Por el teorema anterior tenemos que:
$\Delta^a(T+R) = \sigma_a(T+R) \setminus \sigma_{uw}(T+R) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \Delta^a(T)$ y
$\Delta(T+R) = \sigma(T+R) \setminus \sigma_w(T+R) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T)$.
En consecuencia:
$\Lambda(T+R) := \Delta^a(T+R) \setminus \Delta(T+R) = \Delta^a(T) \setminus \Delta(T) = \Lambda(T)$. ■

Corolario 3.1. *Sean $T, R \in L(X)$ operadores que satisfacen las hipótesis del Teorema anterior y además, $\Lambda(T) = \emptyset$. Entonces:*
$T + R$ satisface el teorema de Weyl $\Leftrightarrow$ $T + R$ satisface la propiedad (w).

Demostración.
Por el Teorema anterior se tiene que $\Lambda(T+R) = \Lambda(T) = \emptyset$ y el resultado se deduce del Teorema 2.4. ■

Teorema 3.3. *Sea $T \in L(X)$ y Q un operador de cuasi-nilpotente que conmuta con T. Entonces: $\sigma_a(T) = \sigma_a(T+Q)$ y $\sigma_s(T) = \sigma_s(T+Q)$. En este caso tenemos que $\Lambda(T) = \Lambda(T+Q)$.*

Demostración.
La inclusión $\sigma_a(T+S) \subseteq \sigma_a(T) + \sigma_a(S)$ siempre es cierta para operadores $T, S \in L(X)$ que conmutan entre si (ver [27]). De esta manera, $\sigma_a(T+Q) \subseteq \sigma_a(T) + \sigma_a(Q) = \sigma_a(T)$, ya que Q es cuasi-nipotente. La otra inclusión la obtenemos por simetria al considerar $\sigma_a(T) = \sigma_a(T+Q-Q) \subseteq \sigma_a(T+Q)$. La igualdad $\sigma_s(T) = \sigma_s(T+Q)$, se obtiene por dualidad. ■

Del teorema anterior se tiene que si $T \in L(X)$ y Q es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T, entonces $\Lambda(T) = \Lambda(T+Q)$. De esta manera, la clase $\mathfrak{C}_\Lambda := \{T \in L(X) : \Lambda(T) = \emptyset\}$ permanece estable bajo perturbaciones cuasi-nilpotentes que conmutan con el operador. Ahora, para tener la estabilidad de la propiedad (w) en este caso, sólo haría falta que $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+Q)$. Desafortunadamente, esta última igualdad en general no es cierta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Consideremos $T := I$ el operador identidad y el operador $Q(x_1, x_2, \ldots) := (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$, definidos sobre $\ell_2(\mathbb{N})$.

Entonces, Q es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T. Por otro lado, $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(I) = \emptyset$ y $\pi_{00}(T+Q) = \pi_{00}(I+Q)$. Ahora, como $\sigma(I+Q) = \{1\}$ y $\alpha(I-(I+Q)) = 1$, entonces $\pi_{00}(T+Q) = \{1\}$. Así, $\pi_{00}(T) = \emptyset \neq \{1\} = \pi_{00}(T+Q)$.

El siguiente resultado muestra que $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+N)$, cuando N es un operador nilpotente que conmuta con T. Antes veamos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea T un endomorfismo lineal sobre un espacio de Banach X que satisface $\alpha(T) < \infty$. Entonces, $\alpha(T^n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.
Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que $\alpha(T^n) < \infty$; es decir, $dim(N(T^n)) < \infty$. Como $T(N(T^{n+1})) \subseteq N(T^n)$, consideramos la restricción $T_0 := T|_{N(T^{n+1})}$. Entonces:

$$T : N(T^{n+1}) \mapsto N(T^n) \ \text{ y } \quad T_0x := Tx.$$

Observemos que $N(T_0) = N(T) \cap N(T^{n+1})$. De este modo, $N(T_0) = N(T)$.
Consideremos ahora, la aplicación cociente:

$$\hat{T} : N(T^{n+1})/N(T) \mapsto N(T^n), \ \text{ definida por } \ \hat{T}(\hat{x}) := T_0x.$$

$\hat{T}$ es una aplicación inyectiva y $dim(N(T^n)) < \infty$. Así;

$$dim(N(T^{n+1})/N(T)) \leq \alpha(T^n) < \infty. \ \text{ Ahora, como}$$

$N(T^{n+1}) \cong \frac{N(T^{n+1})}{N(T)} \oplus N(T)$, entonces $\alpha(T^{n+1}) \leq \alpha(T) + \alpha(T^n) < \infty$. ■

Teorema 3.4. *Sea $T \in L(X)$ y M un operador nilpotente que conmuta con T. Entonces:*

i) $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+M)$,

ii) $\pi_{00}^a(T) = \pi_{00}^a(T+M)$.

Demostración.
Supongamos que $M^p = 0$.
Afirmación 1: $N(\lambda I - T) \subseteq N(\lambda I - T - M)^p$:
Si $x \in N(\lambda I - T)$, entonces $(\lambda I - T)x = 0$. Así, $(\lambda I - T)^n x = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $\lambda I - T$ y M conmutan se tiene que:

$$(\lambda I - T - M)^p x = [\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (\lambda I - T)^{p-i} (-M)^i] x = 0, \ \text{ ya que } (-M)^p = 0.$$

Luego, $N(\lambda I - T) \subseteq N(\lambda I - T - M)^p$.

Afirmación 2: $N(\lambda I - T - M) \subseteq N(\lambda I - T)^p$:
Si $(\lambda I - T - M)x = 0$, entonces $(\lambda I - T)x = Mx$. Luego,
$(\lambda I - T)^2 x = (\lambda I - T)Mx = M(\lambda I - T)x = M^2 x$, ya que $\lambda I - T$ y M conmutan. Ahora, de forma inductiva tenemos que:

$$(\lambda I - T)^p x = M^p x = 0, \quad \text{ya que} \quad M^p = 0.$$

Así, $x \in N(\lambda I - T)^p$.

Veamos ahora que $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T + M)$.

i) $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T + M)$:
Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T) = iso\sigma(T+M)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Sólo resta ver que $0 < \alpha(\lambda I - T - M) < \infty$. Por la Afirmación 1, se tiene:

$$\alpha(\lambda I - T - M)^p \geq \alpha(\lambda I - T) > 0.$$

Esto implica que $\alpha(\lambda I - T - M) > 0$. Veamos ahora que $\alpha(\lambda I - T - M) < \infty$. En efecto; como $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, entonces por el lema 3.1, se tiene que $\alpha(\lambda I - T)^p < \infty$. Ahora, por la Afirmación 2, se obtiene que
$\alpha(\lambda I - T - M) \leq \alpha(\lambda I - T)^p < \infty$.

ii) $\pi_{00}(T + M) \subseteq \pi_{00}(T)$:
Sea $\lambda \in \pi_{00}(T + M)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T + M) = iso\sigma(T)$ y
$0 < \alpha(\lambda I - T - M) < \infty$. Por la Afirmación 2:

$$\alpha(\lambda I - T)^p \geq \alpha(\lambda I - T - M) > 0.$$

Esto implica que $\alpha(\lambda I - T) > 0$. Por el Lema 3.1 se tiene que
$\alpha(\lambda I - T - M)^p < \infty$, ya que $\alpha(\lambda I - T - M) < \infty$. Ahora, de la Afirmación 1 obtenemos que $\alpha(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T - M)^p < \infty$. Así, $\lambda \in \pi_{00}(T)$.

ii) Se demuestra de manera análoga al apartado (i). ■

Observemos que del Teorema 3.1 y el Teorema 3.3, se tiene que:
$p_{00}(T + N) := \sigma_a(T + N) \setminus \sigma_{ub}(T + N) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = p_{00}(T)$, donde N es un operador nilpotente que conmuta con T.

Teorema 3.5. *Sea $T \in L(X)$ y N un operador nilpotente que conmuta con T. Entonces:*

i) Si $T \in \mathcal{P}_0(X) \Rightarrow T + N \in \mathcal{P}_0(X)$.

ii) Si T satisface el teorema de Browder $\Rightarrow T + N$ satisface el teorema de Browder.

iii) Si T satisface el teorema de Weyl $\Rightarrow T + N$ satisface el teorema de Weyl.

iv) Si T satisface la propiedad $(w) \Rightarrow T+N$ satisface la propiedad (w).

v) Si T satisface el teorema de a-Weyl $\Rightarrow T+N$ satisface el teorema de a-Weyl.

Demostración.
i) Supongamos que $T \in \mathcal{P}_0(X)$, entonces:

$$p_{00}(T+N) = p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+N). \text{ Así, } T+N \in \mathcal{P}_0(X).$$

ii) Supongamos que T satisface el teorema de Browder, entonces
$\Delta(T) = p_{00}(T)$. Así;

$$\Delta(T+N) = \Delta(T) = p_{00}(T) = p_{00}(T+N).$$

De esta manera, $T+N$ satisface el teorema de Browder.

iii) Si T satisface el teorema de Weyl, entonces se cumple que:

$$\Delta(T+N) = \Delta(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+N).$$

De este modo, $T+N$ satisface el teorema de Weyl.

iv) Si T satisface la propiedad (w), entonces del apartado anterior se deduce que $T+N$ satisface el teorema de Weyl. Por otro lado, del Teorema 3.3 y del hecho que T satisface la propiedad (w), se obtiene que $\Lambda(T+N) = \Lambda(T) = \emptyset$. Así, por el Teorema 2.4 se deduce que $T+N$ satisface la propiedad (w).

v)Si T satisface el teorema de a-Weyl, entonces se cumple que:

$$\Delta^a(T+N) = \Delta^a(T) = \pi^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T+N).$$

Esta última igualdad se tiene del Teorema 3.4(ii).De este modo, $T+N$
satisface el teorema de a-Weyl. ■

La hipótesis de la conmutatividad es importante para la estabilidad bajo perturbaciones nilpotentes, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3. Consideremos los operadores $T, N \in L(\ell_2)$ definidos por:

$$T(x_1, x_2, \dots) := (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \dots) \quad ; \quad (x_n) \in \ell_2;$$
$$N(x_1, x_2, \dots) := (0, \frac{-x_1}{2}, 0, 0, \dots) \quad ; \quad (x_n) \in \ell_2.$$

Por el Ejemplo 1.24, N es un operador nilpotente que no conmuta con T y además, T es un operador cuasi-nilpotente que satisface el teorema de Weyl. Como $\sigma(T^*) = \sigma(T) = \{0\}$, se tiene que T^* tiene la SVEP. De esta manera, $\Lambda(T) = \emptyset$ y en consecuencia, T satisface la propiedad (w). Ahora, del Ejemplo 1.24 también se tiene que $T+N$ no verifica el teorema de Weyl. De este modo, $T+N$ no satisface la propiedad (w).

En general, la propiedad (w) no se transmite bajo perturbaciones de rango finito que conmutan con el operador.

Ejemplo 3.4. Sea $Q \in L(\ell_2)$ un operador inyectivo y cuasi-nilpotente cualquiera y consideremos el operador $U \in L(\ell_2)$ definido por

$$U(x_1, x_2, \ldots) := (-x_1, 0, 0, \ldots).$$

Definamos ahora sobre $H = \ell_2 \oplus \ell_2$ los operadores T y K por:

$$T := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad ; \qquad K := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el Ejemplo 1.25, vimos que K es un operador de rango finito que conmuta con T. Además:

$$\sigma(T) = \sigma_w(T) = \{0, 1\} \quad y \quad \pi_{00}(T) = \Delta(T) = \emptyset.$$

Luego, T satisface el teorema de Weyl y $\Lambda(T) = \emptyset$. Así, T verifica la propiedad (w). Por otro lado, $T + K$ no verifica el teorema de Weyl (Ejemplo 1.25) y en consecuencia, $T + K$ no satisface la propiedad (w).

3.2. Perturbaciones Nilpotentes de Operadores Polaroides

En esta sección, el autor estudia la estabilidad de los operadores polaroides bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador. Además, veremos algunos resultados sobre la estabilidad de la propiedad (w), haciendo uso de la SVEP, para los operadores $f(T)$, donde T es un operador polaroide. Los resultados que aparecen en esta sección fueron obtenidos por Aiena-Guillén-Peña en [8].

Recordemos que la parte cuasi-nilpotente de un operador $T \in L(X)$ se define por:

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}.$$

Veamos ahora que la parte cuasi-nilpotente de un operador es invariante bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador.

Lema 3.2. *Sea $T \in L(X)$ y N un operador nilpotente que conmuta con T. Entonces:*

$$H_0(T+N) = H_0(T).$$

Demostración.
Supongamos que $N^m = 0$, para algún $m \in \mathbb{N}$.
i) $H_0(T) \subseteq H_0(T+N)$: Observemos primero que:

$$\begin{aligned}(T+N)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} T^{m-k} N^k \\ &= T[\binom{m}{0} T^{m-1} + \binom{m}{1} T^{m-2} N + \ldots + \binom{m}{m-1} N^{m-1}] \\ &= TU = UT\end{aligned}$$

Estas igualdades se deben a la conmutatividad de T y de N, donde U es el operador definido por; $U := \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} T^{m-1-k} N^k$. De esta manera,

$\|(T+N)^{mn} x\| = \|(UT)^n x\| \leq \|U^n\| \|T^n x\|$, para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, si $x \in H_0(T)$ tenemos las siguientes desigualdades:

$$\|(T+N)^{mn} x\|^{\frac{1}{n}} \leq \|U^n\|^{\frac{1}{n}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq \|U\| \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \|(T+N)^{mn}\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

En consecuencia, $x \in H_0(T+N)$.

La otra inclusión la obtenemos por simetría:
$H_0(T+N) \subseteq H_0((T+N) - N) = H_0(T)$. Así, $H_0(T+N) = H_0(T)$. ■

Observación 18. Los operadores polaroides no permanecen estables bajo perturbaciones cuasi-nilpotentes que conmutan con el operador; ya que de lo contrario, si T y $T+Q$ son operadores polaroides donde Q es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T, se tendria que:

$$\pi_{00}(T+Q) = p_{00}(T+Q) = p_{00}(T) = \pi_{00}(T).$$

Esta última ecuación no es cierta en general. Para un ejemplo concreto ver el ejemplo 3.2.

Teorema 3.6. *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide y M un operador nilpotente que conmuta con T. Entonces, $T+M$ es polaroide.*

Demostración.
Supongamos que $M^m = 0$. Si $iso\sigma(T+M) = \emptyset$, el resultado es trivial. En virtud del Teorema 2.14, debemos demostrar que para cada $\lambda \in iso\sigma(T+M)$, existe $r := r(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - (T+M)) = N(\lambda I - (T+M))^r$.

Sea $\lambda \in iso\sigma(T+M) = iso\sigma(T)$ (ya que $\sigma(T+M) = \sigma(T)$), entonces λ es un punto aislado del espectro de T y como T es polaroide, se tiene que λ es un polo del resolvente de T. Ahora, si $p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T)$, por el lema anterior y el Teorema 1.34 se obtiene que:

$$H_0(\lambda I - T - M) = H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p.$$

Afirmación. $H_0(\lambda I - (T+M)) = N(\lambda I - (T+M))^{p.m}$:
La inclusión $N(\lambda I - (T+M))^n \subseteq H_0(\lambda I - (T+M))$, siempre es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in H_0(\lambda I - (T+M)) = N(\lambda I - T)^p$. Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}(\lambda I - T - M)^{p.m}x &= \sum_{k=0}^{pm} \binom{pm}{k} (\lambda I - T)^{pm-k}(-M)^k x \\ &= [\sum_{k=0}^{pm-p} \binom{pm}{k} (\lambda I - T)^{pm-k}(-M)^k]x \\ &+ [\sum_{k=pm-p+1}^{pm} \binom{pm}{k} (\lambda I - T)^{pm-k}(-M)^k]x\end{aligned}$$

En el primer sumando, observemos que $k \leq pm - p$, entonces $pm - k \geq p$ y por tanto, $(\lambda I - T)^{pm-k}x = 0$. Ahora, en el segundo sumando observemos que $pm - p + 1 \geq m$. Luego, como $k \geq pm - p + 1 \geq m$, se tiene que $(-M)^k = 0$.

En consecuencia, ambos sumandos son iguales a cero. De esta manera,
$x \in N(\lambda I - (T+M))^{pm}$. Así:
$H_0(\lambda I - (T+M)) = N(\lambda I - (T+M))^{p.m}$, por lo que $T+M$ es un operador polaroide.
$\blacksquare$

Lema 3.3. *Si $T \in L(X)$ tiene la SVEP y Q es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T. Entonces, $T + Q$ tiene la SVEP.*

Demostración.
Ver Corolario 2.12 de [1]. ■

Observemos que en particular, la SVEP se mantiene bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador.

Teorema 3.7. *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide y N un operador nilpotente que conmuta con T. Entonces:*

i) Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{lw}(T) \Rightarrow T^* + N^*$ satisface la propiedad (w).

ii) Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \in \Delta^a(T) \Rightarrow T + N$ satisface la propiedad (w).

Demostración.
i) Por el Teorema 2.18(i), T^* satisface la propiedad (w). Ahora, si $N^m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $(N^m)^* = (N^*)^m = 0$. Por tanto, N^* es un operador nilpotente que conmuta con T^*. Luego, del Teorema 3.5(iv) se deduce que $T^* + N^*$ satisface la propiedad (w).

ii) Por el Teorema 2.19(ii), se tiene que T satisface la propiedad (w). Luego, como N es un operador nilpotente que conmuta con T, entonces del Teorema 3.5(iv) se deduce que $T + N$ satisface la propiedad (w). ■

Teorema 3.8. *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide y N un operador nilpotente que conmuta con T y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Entonces:*

i) Si T tiene la SVEP $\Rightarrow f(T)^* + N^*$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

ii) Si T^* tiene la SVEP $\Rightarrow f(T) + N$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

Demostración.
i) Por el corolario 2.7(ii), se tiene que $f(T)^*$ satisface la propiedad (w). Ahora, como N^* es un operador nilpotente que conmuta con $f(T)^*$, entonces del Teorema 3.5(iv), $f(T)^* + N^*$ satisface la propiedad (w) y equivalentemente el teorema de a-Weyl.

ii) Del Corolario 2.7(i), se tiene que $f(T)$ satisface la propiedad (w). Luego, como como N es un operador nilpotente que conmuta con $f(T)$, se tiene que $f(T) + N$ satisface la propiedad (w) y equivalentemente el teorema de a-Weyl. ■

Corolario 3.2. *Si* $T \in L(X)$ *es un operador* $H(p)$ *y* N *un operador nilpotente que conmuta con* T*. Entonces,* $f(T)^* + N^*$ *satisface la propiedad* (w) *y el teorema de a-Weyl, para cada* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$*.*

Demostración.
Como cada operador que satisface la propiedad $H(p)$ es polaroide, el resultado es una consecuencia inmediata del Teorema anterior. ■

El siguiente corolario muestra que los operadores $f(T+N)$ satisfacen la propiedad (w) bajo las mismas hipótesis del teorema anterior.

Corolario 3.3. *Sea* $T \in L(X)$ *un operador polaroide y* N *un operador nilpotente que conmuta con* T *y* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$*. Entonces:*

i) Si T *tiene la SVEP* $\Rightarrow$ $f(T+N)^*$ *satisface la propiedad* (w) *y el teorema de a-Weyl.*

ii) Si T^* *tiene la SVEP* $\Rightarrow$ $f(T+N)$ *satisface la propiedad* (w) *y el teorema de a-Weyl.*

Demostración.
i) Como T es un operador polaroide, por el Teorema 3.6, $T+N$ es un operador polaroide. Ahora, como T tiene la SVEP, se sigue que $T+N$ tiene la SVEP, entonces por el Corolario 2.6(ii) se concluye que $f(T+N)^*$ satisface la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

ii) se procede de forma análoga al apartado (i). ■

Conclusiones

El objetivo central de este trabajo, es el estudio de las variantes del teorema de Weyl, que son la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl. En esta tesis, se desarrolla una gran cantidad de resultados relacionados a estas variantes del teorema de Weyl, sustentados en tres publicaciones ([8],[9] y [10]). En realidad se ha cumplido uno a uno, los objetivos específicos planteados en nuestro proyecto inicial de investigación. Más aún, en los capítulos 2 y 3, se presentan mejoras a la mayoría de los resultados conseguidos en [8] y [9]. Dentro de estos resultados obtenidos, podemos destacar:

a) Caracterización de la propiedad (w) mediante ciertos subconjuntos del plano (ver Teoremas 2.2 y 2.4).

b) Sea $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.
i) Si T^* tiene la SVEP. Entonces son equivalentes para $f(T)$; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl.

ii) Si T tiene la SVEP . Entonces son equivalentes para $f(T^*)$; el teorema de Weyl, la propiedad (w) y el teorema de a-Weyl. (ver Teorema 2.9).

c) Se introduce la clase de los operadores que satisfacen $\Lambda(T) = \emptyset$ y, se demuestra que esta clase se mantiene estable bajo perturbaciones cuasi-nilpotentes que conmutan con el operador. Además, la propiedad (w) es equivalente al teorema de Weyl para los operadores que satisfacen $\Lambda(T) = \emptyset$ (ver Teoremas 2.5 y 3.3).

d) Sea $T \in L(X)$. Si T es un operador escalar generalizado $\Rightarrow f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen la propiedad (w) para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ (ver Teorema 2.10).

e) El teorema de a-Browder, el teorema de a-Weyl y la propiedad (w) son propiedades equivalentes para los operadores a-polaroides (ver Teorema 2.17).

f) La parte cuasi-nilpotente de un operador permanece estable bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador.

g) La propiedad (w) se mantiene estable bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con el operador.

h) Si $T \in L(X)$ es un operador polaroide tal que T^* tiene la SVEP (respectivamente, T tiene la SVEP), entonces la propiedad (w) permanece estable para $f(T)$ (respectivamente, $f(T)^*$) bajo perturbaciones nilpotentes que conmutan con T. Ver el Teorema 3.8.

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers.* Kluwer Acad. Publishers(2004).

[2] P. Aiena, *Semi-Fredholm Operators, Perturbation Theory and Localized SVEP.* XX Escuela Venezolana de Matemáticas. Ediciones IVIC, (2007).

[3] P. Aiena, *Classes of operators Satisfying a-Weyl's theorem.* Studia Math. 169(2005), 105-122.

[4] P. Aiena, M. T. Biondi. *Browder's theorems trough localized SVEP*. Mediterranian J. Math.(2005).

[5] P. Aiena, C. Carpintero, E. Rosas, *Some characterization of operators satisfying a-Browder theorem*. J. Math. Anal. Appl. (2005).

[6] P. Aiena, M. L. Colasante, M. González, *Operators which have a closed quasinilpotent part*. Proc. Amer. Math. Soc. 130,(9)(2002), 2701-2710.

[7] P. Aiena, T. L. Miller, M. M. Neumann, *On a localized single-valued extension property*. Proc. Royal Irish Ac.104A(1), 17-34.

[8] P. Aiena, J. Guillén, P. Peña, *Property* (w) *for Perturbations of Polaroid Operators*. Linear Algebra Appl. 428, (2008), 1791-1802.

[9] P. Aiena, P. Peña, *A Variation on Weyl's theorem*. J. Math. Anal. Appl. 324,(2006), 566-579.

[10] P. Aiena, J. Guillén, P. Peña, *Weyl's Type theorem and Perturbations*. Divulgaciones Matemáticas. Vol. 16, N^0 1.(2008), 55-72.

[11] P. Aiena, E. Rosas, *The sigle-valued extension property at the points of the aproximate point spectrum*. J. Math. Anal. Appl. 279(1),(2003), 180-188.

[12] P. Aiena, F. Villafañe, *Weyl's theorem for some classes of operators.*Int. Eq. Oper. Theory. 53, (2005), 453-466.

[13] B. A. Barnes, *Points and Weyl's theorem*. Integral Equations and Oper. Theory. 34 (1999), 187-196.

[14] N. N. Chourasia, P. B. Ramanujan, *Paranormal operators on Banach spaces.* Bull. Austral.Math. Soc. 21 (1980), 161-168.

[15] L. A. Coburn, *Weyl‘s theorem for nonnormal operators.* Michigan Math. J. 20 (1970), 529-544.

[16] R. E. Curto, Y. M. Han, *Weyl‘s theorem for algebraically paranormal ooperators.* Integ. Equa. Oer. Theory 50, (2004), N^0 2, 169-196.

[17] B. P. Duggal, *Polaroid operators satisfying Weyl‘s theorem.* Linear Algebra and Applications 414 (2006), 271-277.

[18] D. S. Djordjevic, *Operators obeying a-Weyl‘s theorem.* Publicationes Math. Debrecen 55, 3-4, N^0 3 (1999), 283-298.

[19] J. K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space.* Pacific J. Math. 58 (1975), 61-69.

[20] C. Foiaş, *Spectral Maximal Spaces and Decomposable Operators in Banach Spaces.* Archiv der Math. 14, (1963), 341-349.

[21] T. Furuta, M. Ito, T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes.* Scientiae Mathematicae 1 (1998), 389-403.

[22] Y. M. Han, An-Huyn Kim, *A note on $*$- paranormal operators.* Integr. Equat. Oper. Theory 49, (2004), 435-444.

[23] Y. M. Han, W. Y. Lee, *Weyl spectral and Weyl‘s theorem.* Stud.Math. 148 (2001), 193-206.

[24] R. Harte, Woo Young Lee, *Another note on Weyl‘s theorem.* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 2115-2124.

[25] H. Heuser, *Functional Analysis.* Marcel Dekker, New York. (1982).

[26] V. Kordula, V. Muller, *On semi-Browder spectrun.* Studia Math. Anal. 123 (1997), 1-13.

[27] K. B. Laursen, M. M. Neumann, *Introduction to local spectral theory.* Clarendon Pres, Oxford (2000).

[28] W. Y. Lee, S. H. Lee, *On Weyl‘s theorem (II).* Math. Japo. 43 (1996),549-553.

[29] C. Lin, Y. Ruan, Z. Yan, *p-hyponormal operators are subscalar.* Proc. Amer. Math. Soc. 131(2003), N^0 9, 2753-2759.

[30] C. Lin, Y. Ruan, Z. Yan, *w-hyponormal operators are subscalar.* Integr. Equat. Oper. Theory 50, (2004), 165-168.

[31] V. Müller, *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral System in Banach Algebras*. Birkhäuser Verlag, Berlin, (2003).

[32] K. K. Oberai, *On the Weyl spectrum II.* Illinois J. Math. 21 (1977), 84-90.

[33] M. Oudghiri, *Weyl's and Browder's theorem for operators satisfying the SVEP.* Studia Math. 163, 1, (2004). 85-101.

[34] M. Oudghiri, *Weyl's theorem and perturbations*. Integr. Equat. Oper. Theory, 53 (2005),N^0 4 , 535-545.

[35] M. Oudghiri, *a-Weyl's theorem and perturbations*. Studia Math. 173, 2, (2004), 193-201.

[36] V. Rakočević, *On a class of operators*. Math. Vesnik 37(1985), 423-426.

[37] V. Rakočević, *Operators obeying a-Weyl's theorem.* Rev. Roumaine. Math. Pures et Appl. 34(1989). N^0 10, 915-919.

[38] V. Rakočević, *Semi- Fredholm operators with finite ascent or descent and perturbations*. Proc. Amer. Math. Soc. 123, (1995), 3823-3825.

[39] V. Rakočević, *Semi-Browder operators and perturbations*. Studia Math. Vol. 122, (1997), 131-137.

[40] M. Schechter, R. Whitley, *Best Fredholm perturbations theorems.*Studia Math. Vol. 90, (1988), 175-190.

[41] H. Weyl, *Uber Beschreankte Quadratiche Formen, deren Differenz Vollsteigist*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 27 (1909), 373 - 392.

[42] J. Zemánec, *The Semi-Fredholm Radius of a Linear Operator*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 32 (1984), 67-76.