Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
Mérida - Venezuela

Estudio de las órbitas acotadas de las funciones cuadráticas para parámetros en el complemento del conjunto de Mandelbrot

Ramírez Matheus Antonio José

Tutor: Leonardo Mora

Índice general

Introducción

En esta monografía analizaremos la geometría del conjunto formado por los puntos z tales que su orbita por medio de la función compleja $Q_c(z) = z^2 + c$ se mantiene acotada, para valores de $|c| > 2$. Para ello hemos dividido el trabajo en 4 capítulos cuyos contenidos son:

Capitulo 1 Se darán algunas definiciones que serán utilizadas. Analizaremos la función compleja $Q_c(z) = z^2 + c$ y la función multivaluada $F(w) = \sqrt{w - c}$, también presentaremos el conjunto de Mandelbrot. Además para cada valor de c ($|c| > 2$) localizaremos el conjunto que queremos estudiar en el interior del disco $C(0, |c|)$.

Capitulo 2 Analizaremos las preimágenes del disco que contiene al conjunto por medio de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ y se verificara que dicha preimagen está en el interior del disco $C(0, |c|)$.

Capitulo 3 Se presentan dos caminos para demostrar la convergencia a 0 del diámetro de los "discos" $D_{i_1,\ldots,i_n}$ cuando $n \to \infty$. Uno de estos caminos nos servirá para demostrar dicha convergencia para valores de $|c| > \dfrac{5 + \sqrt{24}}{4}$. En el segundo camino introduciremos unas nuevas definiciones que nos ayudaran a demostrar tal convergencia para valores de $|c| > 2$.

Capitulo 4 Expondremos el teorema principal. Definamos el conjunto:

$$\bigwedge\nolimits_c = \{z \in \mathcal{C} \ : \ su\ orbita\ por\ medio\ de\ la\ funcion\ \mathrm{Q}_c\ esta\ acotada\}.$$

Demostraremos que:

Teorema Principal Sea $c \in \mathcal{C}$ con $|c| > 2$ entonces $\bigwedge_c$ es un conjunto de Cantor.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiaremos algunas funciones de variable compleja que serán utilizadas en este trabajo. Luego definiremos algunos conceptos que nos ayudarán a entender cual es nuestro objetivo.

Para comenzar recordemos que una función F de variable compleja z se dice **analítica** (holomórfica) en un conjunto abierto si tiene derivada en todo punto del conjunto.

Observación: Denotaremos el conjunto de numeros complejos como $\mathcal{C}$.

Definición 1.1 *Una* **Función Multivaluada** *que denotaremos como F es una asignación de un subconjunto $U \subset \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ tal que, le asigna más de un valor $F(z)$ a un punto $z \in U$.*

Cuando se estudian funciones multivaluadas tomamos solo uno de los valores asignados a cada punto y así se construye una función univaluada (o sea que cada punto del dominio de la función se le asigna un solo valor) a partir de la función multivaluada.

Definición 1.2 *Se define una* **Rama de una función multivaluada** *$F : U \subset \mathcal{C} \to V \subset \mathcal{C}$ como una función univaluada $G : U \to V_1 \subset V$ que sea analítica en su dominio en el que cada punto z tiene asignado uno de los valores de $F(z)$.*

Ejemplo: Sea la función $G(w) = w^2$, veamos que está función origina una función multivaluada, en efecto si despejamos z de la ecuación $z = w^2$ obtenemos $z^{1/2}$ y así, sí $z = re^{i\theta}$ es un número complejo no nulo entonces sabemos que $z^{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\theta}$ tiene dos valores que representan las dos raíces de z y donde θ es el valor principal

$(-\pi < \theta \leq \pi)$ del argumento de z (lo denotaremos $arg(z)$). Pero si escogemos solo el valor positivo y hacemos:

$$F(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, \ \ -\pi < \theta < \pi)$$

entonces construimos una rama de la función $z^{1/2}$ que es univaluada y analítica en su dominio. Está rama de la función $z^{1/2}$ es llamada la rama principal (de manera análoga podríamos hacerlo con el valor $-\sqrt{r}e^{i\theta/2}$), además obtenemos que la función $G(w) = w^2$ es tal que $F(G(w)) = w$ y $G(F(z)) = z$.

Notemos que para cada α fijo la función

$$F(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, \ \ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

es una rama de $z^{1/2}$.

Análisis de la función multivaluada $\mathbf{f(w) = \sqrt{w - c}}$

Notemos que la función $f(w) = \sqrt{w-c}$ es una composición de la traslación $Z(w) = w - c$ con la función bivaluada (o sea que toma dos valores) $H^{\frac{1}{2}}$. Así cada rama de $H^{\frac{1}{2}}$ produce una rama de $(w-c)^{\frac{1}{2}}$. Si $H = Re^{i\theta}$, las ramas de $H^{\frac{1}{2}}$ son:

$$H^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}e^{\frac{i\theta}{2}} \qquad (R > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi).$$

En consecuencia si llamamos $R = |w - c|, \ \theta = arg(w - c)$, construimos la rama principal de $(w - c)^{1/2}$ como:

$$\psi_0(w) = +\sqrt{|w-c|}e^{\frac{iarg(w-c)}{2}} \qquad (-\pi < arg(w-c) < \pi)$$

o

$$\psi_1(w) = -\sqrt{|w-c|}e^{\frac{iarg(w-c)}{2}} \qquad (-\pi < arg(w-c) < \pi),$$

además tenemos que la función $Q_c(z) = z^2 + c$ en dominios distintos es la función inversa de ψ_0 y ψ_1. Veamos en la Figura 1 que el plano W menos la recta pintada

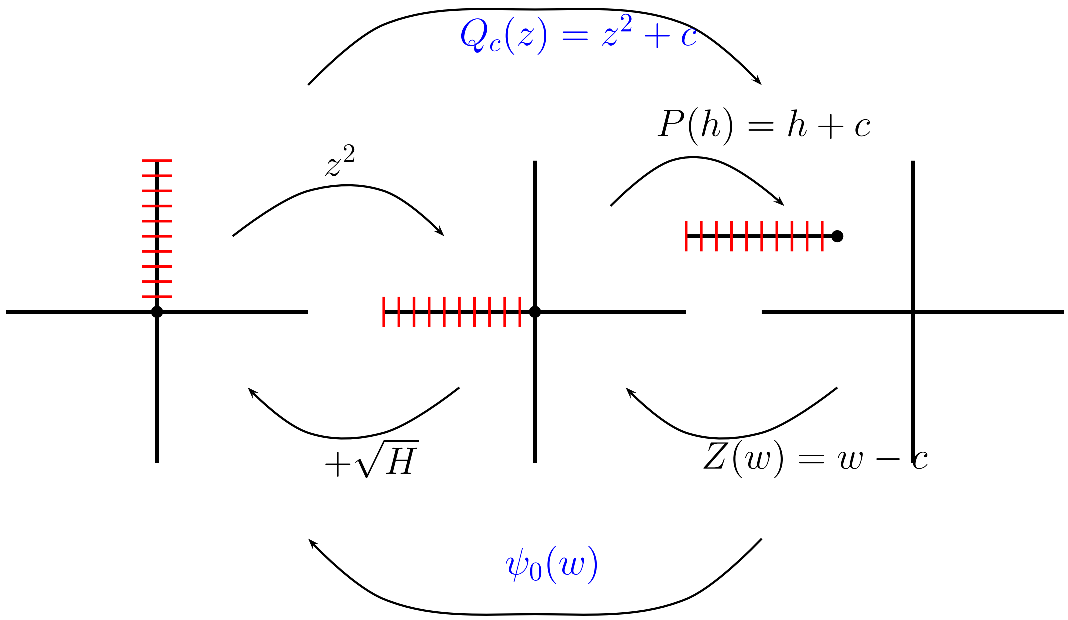

Figura 1

en rojo es transformado por medio de $\psi_0(w)$ al semi-plano derecho del plano Z (y de manera análoga $\psi_1(w)$ manda el plano W menos la recta pintada en rojo al semi-plano izquierdo del plano Z).

Notemos que si tomamos como rama

$$\psi_0(z) = \sqrt{|w-c|}e^{\frac{iarg(w-c)}{2}} \quad (0 < arg(w-c) < 2\pi),$$

entonces el plano W menos la recta pintada en rojo (ver Figura 2) es transformada por medio de ψ_0 al semi-plano de arriba del plano Z.

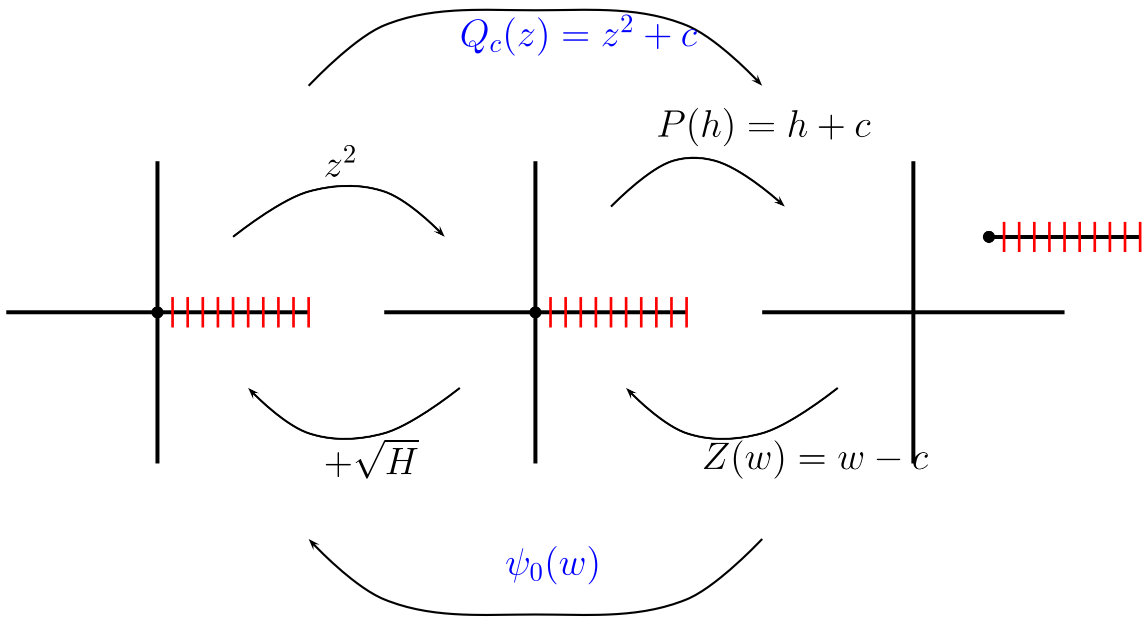

Figura 2

Conjunto de Mandelbrot

Definición 1.3 *Un conjunto $\bigwedge$ es un conjunto de Cantor si es cerrado, totalmente disconexo y un conjunto perfecto. Un conjunto es totalmente disconexo si no contiene "bolas " y un conjunto es perfecto si cada punto en el es un punto de acumulación del conjunto.*

Definición 1.4 *Se define la órbita de $z \in \mathcal{C}$ por medio de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ como el conjunto $\{z, Q_c(z), {Q_c}^2(z), ..., {Q_c}^n(z), ...\}$,donde ${Q_c}^{n+1}(z) = Q_c \circ {Q_c}^n(z)$.*

Definición 1.5 *Un punto $z \in \mathcal{C}$ es llamado* **punto fijo de la función $\mathbf{Q_c(z)}$** *si $Q_c(z) = z$. Y un punto z para el cual se tiene ${Q_c}^p(z) = z$ para algún $p \in Z^+$, se dice que es un* **punto periódico** *de período n.*

Los puntos periódico se pueden clasificar según el valor de $\lambda = |({Q_c}^p)'(z)|$ de la siguiente manera:

$0 < \lambda < 1$ *se dice que z es un punto atractor*
$\lambda > 1$, *z es un punto repulsor*
$\lambda = 0$, *z es un punto superatractor*
$\lambda = 1$, *z es un punto indiferente.*

Definición 1.6 *Sea $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un polinomio. Se define el conjunto* **Julia**, *como la clausura del conjunto de puntos repulsores de P (y lo denotaremos J(P)).*

En matemática algunos conjuntos son generados por iteraciones, o sea repetir un proceso varias veces y por lo general este proceso es la aplicación de una función y para nuestro objetivo será la función compleja $Q_c(z) = z^2 + c$.

Definición 1.7 *Se define el conjunto de* **Mandelbrot** *como el subconjunto del plano complejo definido por:*

$$M = \{c \in \mathcal{C} \ : \ la\ sucesion\ {Q_c}^n(0)\ no\ converge\ a\ infinito\}$$

o equivalentemente

$$M = \{c \in \mathcal{C} \ : \ J_c \ \ es\ conexo\}.$$

Una ilustración de este conjunto se muestra en la Figura 3.

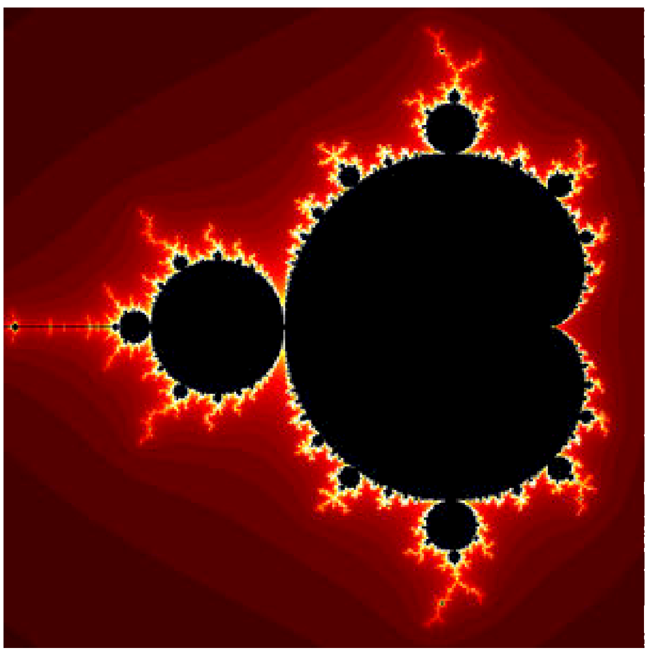

Figura 3

De manera que estamos ya preparados para conocer cual es nuestro objetivo. Definamos el conjunto:

$$\bigwedge_c = \{z \in \mathcal{C} \ : \ su\ orbita\ por\ medio\ de\ la\ funcion\ \mathrm{Q}_c\ esta\ acotada\}.$$

Demostraremos que:

Teorema Principal Sea $c \in \mathcal{C}$ con $|c| > 2$ entonces $\bigwedge_c$ es un conjunto de Cantor.

Afirmamos aunque no lo demostraremos que este conjunto es el conjunto de **Julia** para valores de $|c| > 2$. Así estaremos demostrando que el conjunto de Julia es un conjunto de Cantor para $|c| > 2$ y además que el conjunto de Mandelbrot esta en el disco de centro 0 y radio 2.

Observación: La finalización de la demostración de un teorema o una proposición lo denotaremos como ✠ y definiremos un disco de centro 0 y radio r como el conjunto $S = \{z \in \mathcal{C}; |z| \leq r\}$, lo denotaremos $C(0, r)$.

Localización del conjunto $\bigwedge_{\mathbf{c}}$

Proposición 1.1 *Sea $|c| > 2$ y supongamos que $|z| \geq |c|$, entonces ${Q_c}^n(z) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración: Sea $|z| = r \geq |c| > 2$. Entonces Q_c transforma la frontera disco de radio r centrado en 0 en la frontera del disco de radio r^2 centrado en c.
En efecto, sea $|z| = r$ y veamos que:

$$|Q_c(z) - c| = |(z^2 + c) - c| = |z^2| = |z|^2 = r^2. \qquad (1)$$

Como $r > 2$ entonces $r^2 > 2r$.

Afirmamos que el disco $C(0, r)$ está en el interior del disco $C(c, r^2)$.
Para verificar esto, tomemos $z \in C(0, r)$ y veamos que

$$|z - c| \leq |z| + |c| \leq r + r < r^2$$

así $C(0, r) \subset C(c, r^2)$.

Luego por (1) y debido a que el disco $C(0, r)$ esta en el interior de $C(c, r^2)$ podemos afirmar que $|Q_c(z)| > r$, en consecuencia $|Q_c(z)| > |z| \quad \forall\, |z| \geq |c|$.

Demostremos ahora que $|{Q_c}^n(z)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Afirmamos que $\quad |{Q_c}^n(z)| > |c|\, (|c| - 1)^{2^{n-1}} \qquad \forall\, n$.

Caso $n = 1$. Veamos que:

$$|z^2 - c + c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

así,

$$|z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|$$

luego

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |c|^2 - |c| = |c|[|c| - 1] \quad (|z| \geq |c|).$$

Por tanto es cierto cuando $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n - 1$ esto es

$$|{Q_c}^{n-1}(z)| > |c| \; (|c| - 1)^{2^{n-2}},$$

y demostremos que es cierto para el caso n. En efecto:

$$|{Q_c}^{n}(z)| = |Q({Q_c}^{n-1}(z))| = |({Q_c}^{n-1}(z))^2 + c| \geq |{Q_c}^{n-1}(z)|^2 - |c| > |c|^2 \; (|c| - 1)^{2^{n-2+1}} - |c|$$

siguiendo que $|c|^2 \; (|c| - 1)^{2^{n-2+1}} - |c| = |c| \; [|c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}} - 1]$.
Ahora veamos que

¿$|c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}} - 1 > (|c| - 1)^{2^{n-1}}$?
o sea debemos preguntarnos si ¿$(|c| - 1)^{2^{n-1}+1} > 1$? Pero sabemos que $|c| - 1 > 1$ así $(|c| - 1)^{2^{n-1}+1} > 1$ entonces obtenemos que:

$$|{Q_c}^{n}(z)| > |c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}}.$$

Por tanto es cierto para el caso n, así podemos concluir que

$$|{Q_c}^{n}(z)| > |c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}} \quad \forall \; n.$$

Luego tomando límite cuando $n \to \infty$ en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} |{Q_c}^{n}(z)| > \lim_{n\to\infty} |c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty} |c| \; (|c| - 1)^{2^{n-1}} = \infty$$

así,

$$\lim_{n\to\infty} |{Q_c}^{n}(z)| = \infty \; .$$ ✠

De manera que concluimos por la proposición anterior que el conjunto $\bigwedge_c$ esta en el interior del disco de centro 0 y radio $|c|$.

$\bigwedge_{\mathbf{c}}$ es un conjunto invariante por medio de la función $\mathbf{Q_c(z)}$

Sea $z \in \bigwedge_c$ entonces su orbita se mantiene acotada para valores de $|c| > 2$.
Veamos que $Q_c(z) \in \bigwedge_c$:
En efecto, ya que la sucesión

$$z, Q_c(z), {Q_c}^2(z), ..., {Q_c}^n(z), ..., Q_c \circ {Q_c}^n(z)... \qquad 1)$$

se mantiene acotada y la sucesión

$$Q_c(z), {Q_c}^2(z), ..., {Q_c}^n(z), ..., Q_c \circ {Q_c}^n(z)...$$

es una cola de la sucesión 1), de manera que la orbita de $Q_c(z)$ se mantiene acotada para valores de $|c| > 2$. Por tanto $Q_c(z) \in \bigwedge_c$.

Capítulo 2

Análisis de las preimagenes del disco $\mathbf{C(0,|c|)}$ por medio de la función $\mathbf{Q_c(z) = z^2 + c}$

Como ya vimos en el capitulo 1 para cada c (|c|>2) el conjunto Λ_c está en el interior del disco $C(0,|c|)$ y además sabemos que si $z \in \Lambda_c$ sus iteradas por medio de la funcion $Q_c(z)$ tambien pertenecen a Λ_c entonces sus iteradas tambien estan en el interior del disco $C(0,|c|)$ de manera que trabajaremos hallando la preimagen de $C(0,|c|)$ por medio de la funcion $Q_c(z)$.

Proposición 2.1 *Sea γ la preimagen del disco de centro 0 y radio $|c|$ por medio de la función compleja $Q_c(z) = z^2 + c$ entonces,*

1. *“ γ tiene forma de ocho“.*

2. *γ está en el interior del disco de centro cero y radio $|c|$, además los puntos que están en el complemento de γ y en el interior de $C(0,|c|)$ sus iteradas están en el exterior de $C(0,|c|)$.*

Demostración:
1)Afirmamos: “ γ tiene forma parecida a un ocho“ (ver Figura 4).

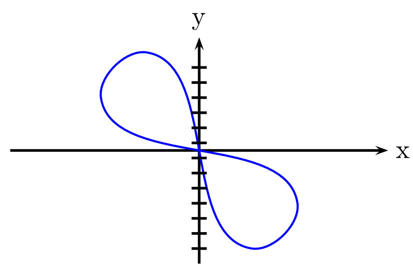

Figura 4

Sea $w \: \varepsilon \: C(0, |c|)$, sabemos que w proviene de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ de manera que $w = z^2 + c$, despejando obtenemos que $z = \sqrt{w - c}$ la cual es la función analizada en el capitulo 1, asi si suponemos que "c" se encuentra en el semiplano izquierdo de la frontera del disco $C(0, |c|)$ definimos la rama principal de esta función como

$$\begin{aligned} z = \psi_0(w) &= \sqrt{|w-c|}e^{i\frac{arg(w-c)}{2}} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad -\pi < arg(w-c) < \pi \\ z = \psi_1(w) &= -\sqrt{|w-c|}e^{i\frac{arg(w-c)}{2}}. \end{aligned}$$

Observación: Si "c" se encuentra en el semiplano derecho entonces trabajariamos con la rama $\psi_0(w)$ y $\psi_1(w)$ con el $0 < arg(w-c) < 2\pi$, en tal caso el procedimiento es el mismo.

Así:

a) Si $w = c$ entonces existe una sola preimagen ya que $z = \sqrt{w-c} = \sqrt{c-c} = 0$ así $z = 0$.

b) Si $w \neq c$ existen dos preimagen dadas por $\psi_0(w)$ y $\psi_1(w)$ respectivamente.

Para obtener lo deseado observemos como se mueve el radio vector de $z = \psi_0(w)$ y $z = \psi_1(w)$ cuando w se desplaza a lo largo de la frontera de $C(0, |c|)$.
Cuando $w = c$ sabemos que $z = 0$ y cuando $w \neq c$, observemos que si $w = |c|e^{i\theta_w}$ y $c = |c|e^{i\theta_c}$ entonces los $|z|$ estan dados por la función

$$
\begin{aligned}
V(\theta_w) &= \sqrt{|w-c|} \;=\; \sqrt{|c|e^{i\theta_w} - |c|e^{i\theta_c}} \;=\; \sqrt{|c|}\sqrt{|e^{iw_\theta}||1-\tfrac{e^{i\theta_c}}{e^{i\theta_w}}|} \\
&= \sqrt{|c|}\sqrt{1-e^{i(\theta_c-\theta_w)}} \quad \text{ya que} \quad e^{i(\theta_c-\theta_w)} = \tfrac{e^{i\theta_c}}{e^{i\theta_w}} \text{ y } |e^{i\theta_w}| = 1 \\
&= \sqrt{|c|}\sqrt{|1-\cos(\theta_c-\theta_w) + i\,\mathrm{sen}(\theta_c-\theta_w)|} \qquad (e^{i\theta} = \mathrm{sen}\,\theta + i\cos\theta) \\
&= \sqrt{|c|}\sqrt[4]{(1-\cos(\theta_c-\theta_w))^2 + \mathrm{sen}^2(\theta_c-\theta_w)} \qquad (|z| = \sqrt{x^2+y^2}) \\
&= \sqrt{|c|}\sqrt[4]{(1-2\cos(\theta_c-\theta_w) + \cos^2(\theta_c-\theta_w) + \mathrm{sen}^2(\theta_c-\theta_w)} \\
&= \sqrt{|c|}\sqrt[4]{2-2\cos(\theta_c-\theta_w)}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Para ver la gráfica de (1) vemos que la función $V(\theta_w)$ tambien depende del valor de $|c|$ y de θ_c.

Veamos donde varia $\theta_c - \theta_w$ (ver Figura 5),

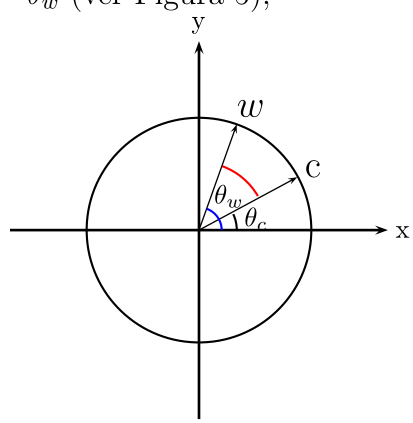

Figura 5

observamos que cuando w recorre la frontera del disco $C(0,|c|)$ entonces $\theta_c - \theta_w$ varia entre

$$\theta_c \le \theta_c - \theta_w \le \theta_c + 2\pi.$$

De manera que en cualquier lugar que se encuentre c en el disco $C(0,|c|)$, el ángulo $\theta_c - \theta_w$ estará en un intervalo de longitud 2π. Así para valores de $|c| > 2$,

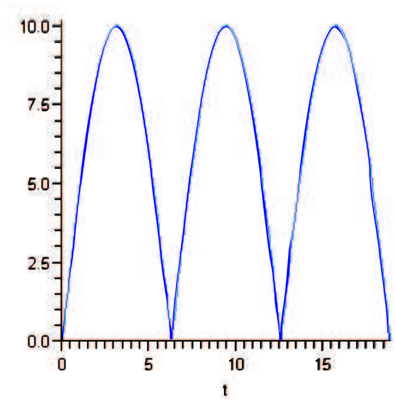

Figura 6

obtenemos (ver Figura 6) que los valores de $|z|$ llegan a un máximo y a un mínimo en cualquiera de los intervalos de longitud 2π, asi si restringimos nuestro análisis a uno de los intervalos de longitud 2π (debido a que nuestra funcion es periódica de periodo 2π) vemos que la función V(θ_w) alcanza un mínimo en $z = 0$ y luego la función alcanza un máximo que depende del valor $|c|$ para así volver nuevamente al mínimo en $z = 0$.

Por ultimo, veamos cual es la abertura del "ocho". Para ello analizaremos donde varía el $arg(z)$ cuando w se mueve a través de la frontera de $C(0, |c|)$. Así,

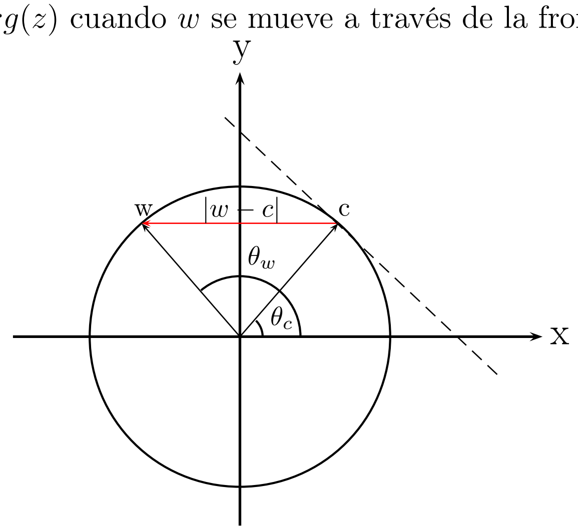

Figura 7

cuando w recorre la frontera del disco $C(0, |c|)$ (ver Figura 7) el $arg(w - c)$ varía

con respecto a l de 0 a π.
Luego trasladando el vector $w - c$ al origen obtenemos que

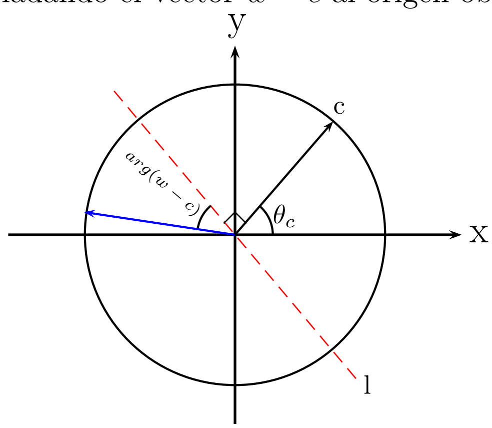

Figura 8

el $arg(w - c)$ con respecto al eje x cumple con (ver Figura 8)

$$\theta_c + \frac{\pi}{2} < arg(w - c) < \theta_c + \frac{3\pi}{2}.$$

Así dividiendo entre 2 obtenemos que $\frac{arg(w-c)}{2}$ con respecto al eje x cumple con

$$\frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{arg(w - c)}{2} < \frac{\theta_c}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

concluyendo así que los argumentos de los z están dentro de un cono de abertura $\frac{\pi}{2}$ (ver Figura 9).

.

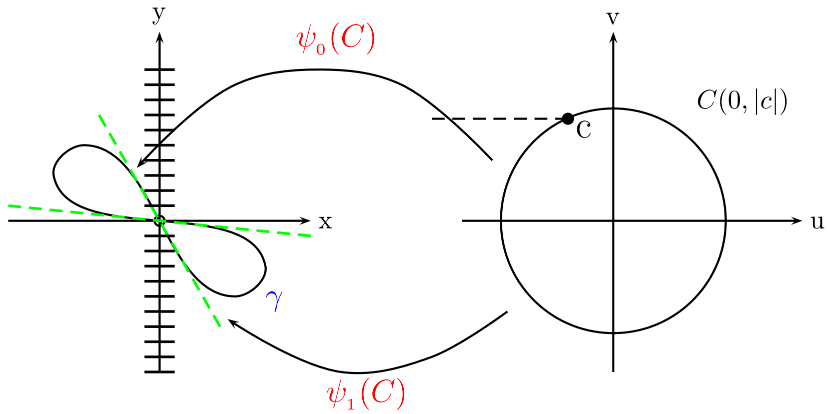

Figura 9

Lo cual demuestra que γ tiene la forma deseada.

2) γ está en el interior del disco de centro cero y radio $|c|$ (ver Figura 10) además los puntos que están en el complemento de γ y en el interior de $C(0,|c|)$ sus iteradas están en el exterior de $C(0,|c|)$.

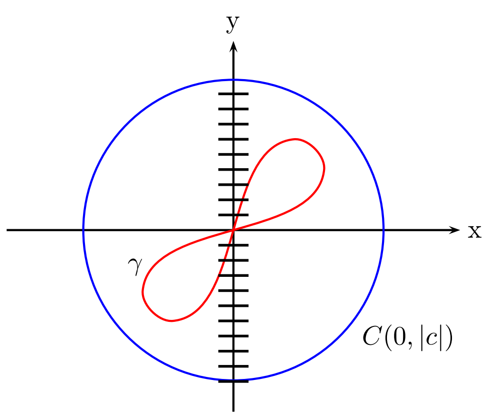

Figura 10

Sea $z \in \gamma$ y supongamos por reducción al absurdo que $|z| \geq |c|$, entonces por la proposición 1.1 su primera iterada estaría fuera de $C(0,|c|)$, pero esto es absurdo ya que z es preimagen de un $w \in C(0,|c|)$. Por tanto $|z| < |c| \;\; \forall z \in \gamma$, así $\gamma \subset C(0,|c|)$.

Veamos ahora que los puntos que están en el complemento de γ y en el interior de $C(0,|c|)$ sus iteradas están en el exterior de $C(0,|c|)$. En efecto, ya que si suponemos que su primera iterada está dentro del disco $C(0,|c|)$ entonces su preimagen estuviera dentro de γ pero esto es $(A \subset B \Longrightarrow {Q_c}^{-1}(A) \subset {Q_c}^{-1}(B))$ absurdo ya que lo estamos tomando entre γ y $C(0,|c|)$ por consiguiente las iteradas de estos puntos están en el exterior de $C(0,|c|)$. ✠

Seleccionemos ahora $r < |c|$ tal que γ esté contenido en el interior del disco $C(0,r)$ (esto es posible ya que γ es compacta y además está en el interior del disco $C(0,|c|)$) y demostremos que:

Proposición 2.2 *Sea $C = C(0,r)$ el disco que está en el interior de $C(0,|c|)$ y contiene a γ entonces*

1. $\bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$.
2. ${Q_c}^{-n}(C)$ *está formado por la unión de 2^n "discos".*

Demostración :

1) $\bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{-n}(C)$.

Sea $p \in \bigwedge_c$, entonces por la proposiccion 1.1 sus iteradas por medio de la función Q_c están en el interior de $C(0,|c|)$. Lo cual significa que

$$p, Q_c(p) = w_0, {Q_c}^2(p) = w_1, {Q_c}^3(p) = w_2, \ldots, \subset C(0,|c|)$$

de manera que obtenemos

$$\psi_0(w_0) = p,\ \psi_0(w_1) = {Q_c}^1(p),\ \psi_0(w_2) = {Q_c}^2(p), \ldots, \subset \gamma \subset C$$

(esto se debe a que la preimagen de C es γ y además ψ_0 y Q_c son funciones inversas), por ende $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{-n}(C)$.

Por otra parte si $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{-n}(C)$ entonces $p, Q_c(p), {Q_c}^2(p), \ldots, \subset C$ y $C \subset C(0,|c|)$ así $p \in \bigwedge_c$. Por consiguiente tenemos que $\bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$.

2) $Q_c{}^{-n}(C)$ **está formado por la unión de** 2^n **"discos"**

Verifiquemos que $Q_c{}^{-1}(C)$ consiste de la unión de dos " discos".

En efecto, ya que cuando w recorre la frontera del disco C entonces su preimagen forma la frontera de un "disco" D_0 (homeomorfo a un disco) por medio de la función analítica ψ_0, de manera análoga se forma la frontera de un segundo "disco" D_1 por medio de la función analítica ψ_1. Además, tenemos que $D_0 = \psi_0(C) \subset \psi_0(C(0,|c|))$ y $D_1 = \psi_1(C) \subset \psi_1(C(0,|c|))$ $(A \subset B \Longrightarrow \psi_0(A) \subset \psi_0(B))$.

Así $Q_c{}^{-1}(C)$ está formado por la unión de dos "discos" que son
$\psi_{i_1}(C) = D_{i_1}$ donde $i_1 = 0, 1$ (ver Figura 11).

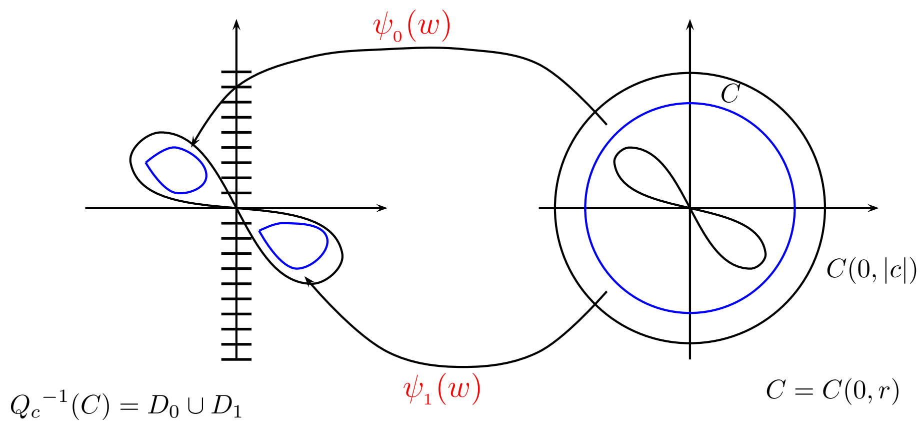

Figura 11

Del mismo modo cada uno de estos "discos" generan dos "discos" más, uno por $\psi_0(w)$ y otro por $\psi_1(w)$. Llegandose así a que $Q_c{}^{-2}(C)$ esta compuesto por la unión de 2^2 "discos" que son
$\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}(C) = D_{i_1,i_2}$ donde $i_1, i_2 = 0, 1$.
Observemos que

$$
\begin{array}{llll}
Q_c{}^{-1}(C) & & Q_c{}^{-2}(C) & \\
& \nearrow & \psi_0(\psi_0(C)) = D_{0,0} & \\
\psi_0(C) & & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_0(C)) = D_{1,0} & \text{Formandose así} \\
& \nearrow & \psi_0(\psi_1(C)) = D_{0,1} & 2^2 \text{ “discos” (ver Figura 12).} \\
\psi_1(C) & & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_1(C)) = D_{1,1} &
\end{array}
$$

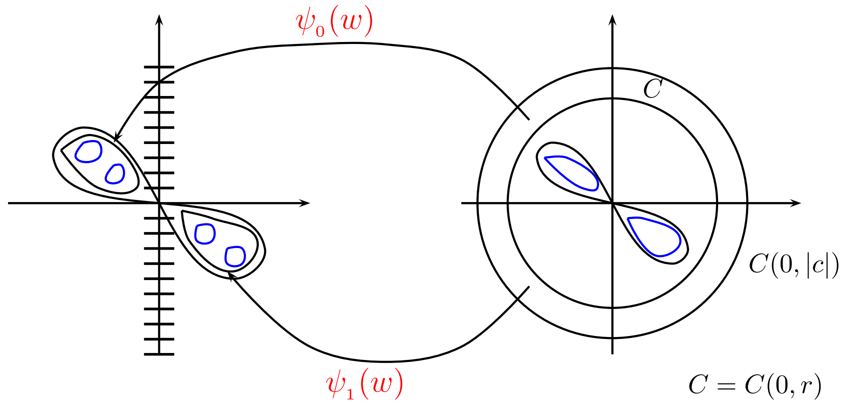

Figura 12

Igualmente $Q_c{}^{-3}(C)$ está formado por la unión 2^3 “discos” que son $\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2} \circ \psi_{i_3}(C) = D_{i_1,i_2,i_3}$ donde $i_1, i_2, i_3 = 0, 1$.

$$
\begin{array}{lll}
& \nearrow & \psi_0(\psi_0(\psi_0(C))) = D_{0,0,0} \\
\psi_0(\psi_0(C)) & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_0(\psi_0(C))) = D_{1,0,0} \\
& \nearrow & \psi_0(\psi_1(\psi_0(C))) = D_{0,1,0} \\
\psi_1(\psi_0(C)) & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_1(\psi_0(C))) = D_{1,1,0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
& \nearrow & \psi_0(\psi_0(\psi_1(C))) = D_{0,0,1} \\
\psi_0(\psi_1(C)) & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_0(\psi_1(C))) = D_{1,0,1} \\
& \nearrow & \psi_0(\psi_1(\psi_1(C))) = D_{0,1,1} \\
\psi_1(\psi_1(D)) & & \\
& \searrow & \psi_1(\psi_1(\psi_1(C))) = D_{1,1,1}.
\end{array}
$$

Continuando este proceso llegamos a que $Q_c{}^{-n}(C)$ esta formado por la unión de 2^n “discos.” En efecto, ya que que $Q_c{}^{-n+1}(C)$ esta formado por la unión de 2^{n-1} “discos,” y cada uno me genera dos discos más, así $Q_c{}^{-n}(C)$ estará formado $22^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$ “discos” que era lo deseado.

Concluyendo que ${Q_c}^{-n}(C)$ está formado por la unión de 2^n "discos" definidos como
$\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(C) = D_{i_1,...,i_n}$ donde $i_1, ..., i_n = 0, 1$. ✠

Observación: De ahora en adelante cuando hablemos de la funcion $\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}$ entenderemos que los indices $i_1, ..., i_n$ estan en el conjunto $A = \{0, 1\}$ y cuando hablemos de un "disco" de ${Q_c}^{-n}(C)$, osea un "disco" $D_{i_1,...,i_n}$ entenderemos que los indices estan en el conjunto A. Tambien escribiremos solamente discos sin comillas para referirnos a los conjuntos homeomorfos a un disco $D_{i_1,...,i_n}$.

Proposición 2.3 *Sea* $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$. *Entonces existe un disco* $C(0, r)$ *tal que* $\gamma \subset C(0, r) \subset C(0, |c|)$ *y además* $C(0, r) \cap C(c, 1/4) = \emptyset$.

Demostración:

Para demostrar que podemos hallar un disco $C(0, r)$ con las condiciones que indica el enunciado de la proposición comenzaremos respondiendo a las siguientes preguntas:

a) ¿ Cuál es el máximo valor que toma $|\psi_{i_1}(w)|$ cuando w esta en la frontera de $C(0, |c|)$?

b) ¿ Dónde estará $\psi_{i_1}(C(0, |c|))$ en comparación con $C(c, 1/4)$ para valores de $z = \psi_{i_1}(w)$ $(w \in C(0, |c|))$ cercanos a nuestro máximo?

a) Para responder nuestra primera pregunta veamos cual es el máximo radio vector de los puntos en la frontera de γ. Sabemos que dichos puntos provienen de la frontera de $C(0, |c|)$ por medio de la función $\psi_{i_1}(w)$ y ademas conocemos cual es la función que nos genera $|z|$

$$|z| = \sqrt{|w - c|} = \sqrt{|c|}\sqrt[4]{2 - 2\cos(\theta_c - \theta_w)}.$$

Sabemos que $-1 \leq \cos(\theta_c - \theta_w) \leq 1$, de manera que
$0 \leq 2 - 2\cos(\theta_c - \theta_w) \leq 4$ y así obtenemos

$$0 \leq \sqrt{|c|}\sqrt[4]{2 - 2\cos(\theta_c - \theta_w)} \leq \sqrt{2}\sqrt{|c|}.$$

En consecuencia de la ecuación anterior el máximo radio vector $|z|$ va ser alcanzado en $\sqrt{2}\sqrt{|c|}$.

Observación: Denotaremos como z_m el vector de máximo $|z|$.

b)Continuando con nuestra segunda pregunta, verifiquemos que para valores de $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ podemos probar ¿$\sqrt{|c|}\sqrt{2} < |c| - 1/4$?

Para ello definamos $f(|c|) = \sqrt{|c|}\sqrt{2}$ y $g(|c|) = |c| - 1/4$ para $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ y veamos que

$$\begin{aligned} f(c) &= g(c) \qquad \text{o sea} \\ \sqrt{|c|}\sqrt{2} &= |c| - 1/4 \\ (\sqrt{|c|}\sqrt{2})^2 &= (|c| - 1/4)^2 \\ 2|c| &= |c|^2 - \frac{|c|}{2} + \frac{1}{16} \qquad \text{continuando que} \\ |c|^2 - \frac{5}{2}|c| + \frac{1}{16} &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$|c| = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}}}{2}$$

(esto viene de la ecuación $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que se usa para buscar las soluciones de polinomios cuadráticos)

$$\begin{aligned} |c| &= \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{24}}{2}}{2} \\ |c| &= \frac{5 \pm \sqrt{24}}{4} \Longrightarrow |c|_1 = \frac{5+\sqrt{24}}{4} \approx 2,47. \end{aligned}$$

De manera que si $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ entonces tenemos que $\sqrt{|c|}\sqrt{2} < |c| - 1/4$ y así $\gamma \cap C(c, 1/4) = \emptyset$, por tanto podemos hallar el disco $C(0, r)$ tal que $\gamma \subset C(0, r) \subset$

$C(0,|c|)$ y además cumple que $C(0,r) \cap C(c,1/4) = \emptyset$. ✠

Verifiquemos que encontrar un "disco" (homeomorfo a un disco) que cumplan con las condiciones de la proposicion 2.3 para valores de $\mathbf{2 < |c| < \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}}$ no es posible

Para verificar que no es posible obtener tal disco para valores de $\mathbf{2 < |c| < \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}}$ se verificara como estará el $arg(z_m)$ en comparación con θ_c y ello nos ayudara ver sí $C(c,1/4)$ se intersecta con γ (ver Figura 13).

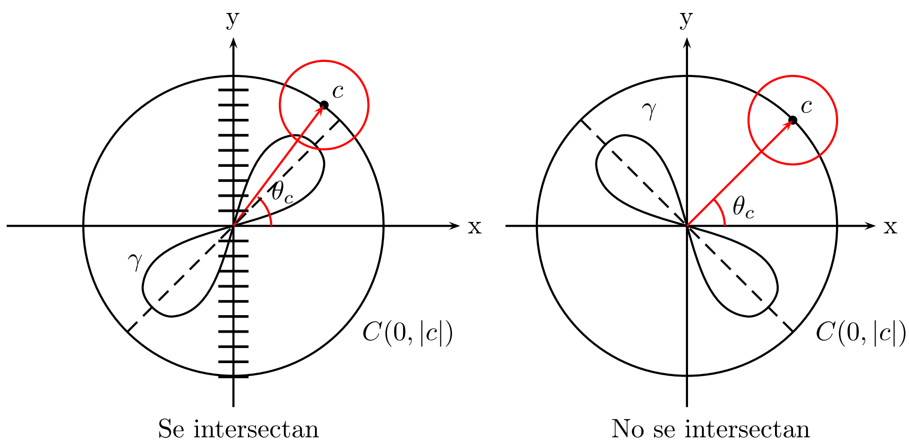

Figura 13

Para ello veamos en la Figura 14 que cuando w recorre la frontera del disco $C(0,|c|)$ el argumento del vector $w-c$ con mayor magnitud estará en $\dfrac{\pi}{2}$ con respecto a l,

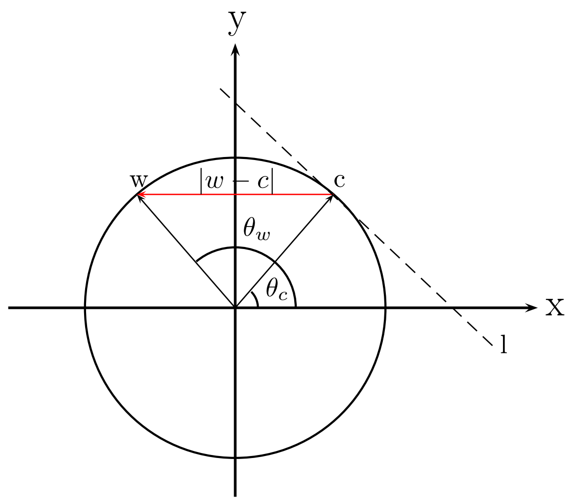

Figura 14

por tanto el argumento de mayor radio vector $\sqrt{|w-c|}$ va ser tomado en $\pi/2$ con respecto a l.

Así el $arg(z_m)$ con respecto a l será el argumento del vector de mayor $\sqrt{|w-c|}$ dividido entre 2, o sea $\dfrac{\pi}{4}$.

Pero como se había demostrado trasladando nuestro problema al origen (ver Figura 15), los argumentos de los vectores $w-c$ con respecto al eje x cumplían con

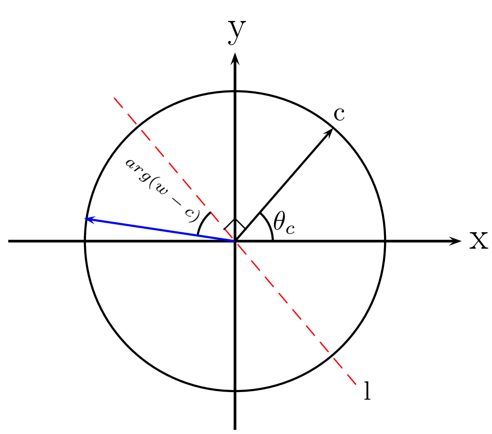

Figura 15

$$\theta_c + \frac{\pi}{2} < arg(w-c) < \theta_c + \frac{3\pi}{2}$$

y así obteníamos que

$$\frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{arg(w-c)}{2} < \frac{\theta_c}{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

por tanto el $arg(z_m)$ con respecto al eje x sera

$$\frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Ahora veamos si $\frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{2}$ esta lejos o cerca de θ_c (para valores de θ_c). Si $\theta_c = \frac{\pi}{4}$ entonces nos queda que

$$argz_m = \frac{\theta_c}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} \text{ (ver Figura 16)}$$

.

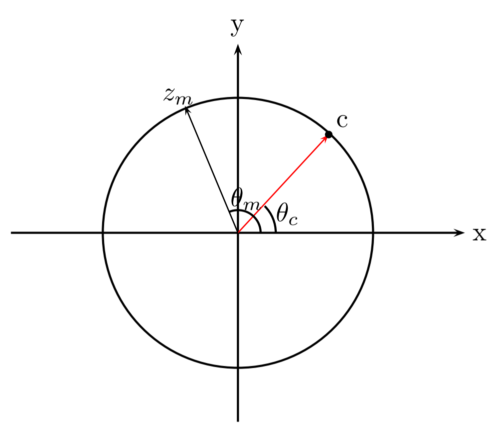

Figura 16

Si $\theta_c = 0$
entonces $argz_m = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (ver Figura 17).

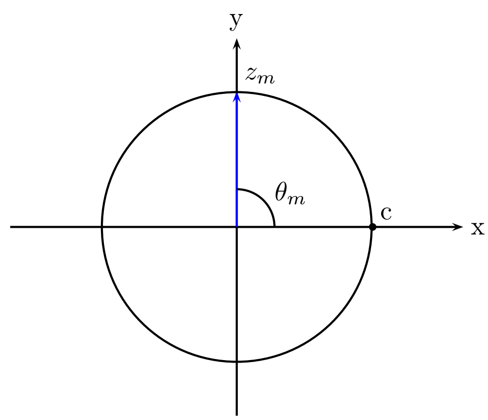

Figura 17

De manera que para $\theta_c = \dfrac{\pi}{4}$ y $\theta_c = 0$ el argumento $\dfrac{\theta_c}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ no va estar cerca de θ_c.

Luego si $\theta_c = \pi$ entonces $\dfrac{\theta_c}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, con lo que θ_c y $\dfrac{\theta_c}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ coinciden (ver Figura 18).

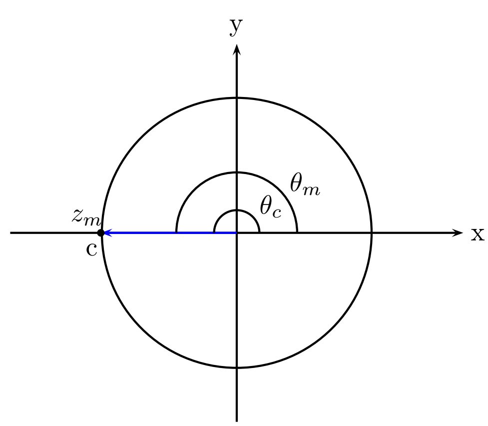

Figura 18

Y además si θ_c esta cerca de π entonces $\dfrac{\theta_c}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ esta cerca de θ_c (ver Figura 19).

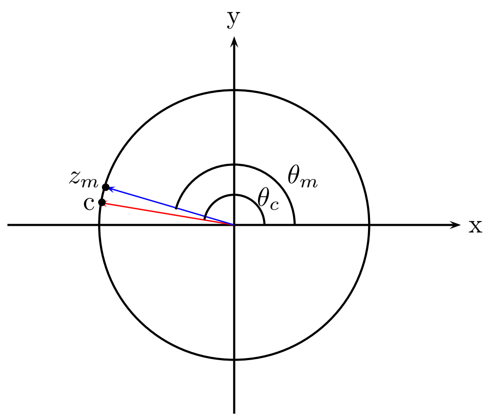

Figura 19

De manera que podemos concluir que si el ángulo del vector c esta cerca o coincide con π entonces $\gamma \cap C(c, 1/4) \neq \emptyset$, de manera que nuestro intento de encontrar un “disco“ para valores de $2 < |c| < \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ no es posible.

Observación: Denotaremos el ínfimo y el supremo de un conjunto A con la notación $\inf(A)$ y $\sup(A)$.

Proposición 2.4 *Sea* $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ *y* $d = minimo\{n, h\}$ *donde* $n = \inf(\{|z|, z \in D_0\})$ *y* $h = \inf(\{|z|, z \in D_1\})$, *entonces* $d > \dfrac{1}{2}$.

Demostración:

Para demostrar que $n = \inf\{|z|, z \in D_0\}$ y $h = \inf\{|z|, z \in D_1\}$ son estrictamente mayores que $\dfrac{1}{2}$ tomemos el disco de radio 1/2 centrado en el origen $C(0, 1/2)$.

Notemos que los puntos z tales que $|Q_c{}'(z)| \leq 1$ son los puntos que están en el disco $C(0, 1/2)$, ya que $|Q_c{}'(z)| = |2z|$ y $2|z| \leq 1$ sí $|z| \leq \dfrac{1}{2}$ así $z \in C(0, 1/2)$. Además veamos que este disco es transformado por Q_c en el disco $C(c, 1/4)$ (ver Figura 20).

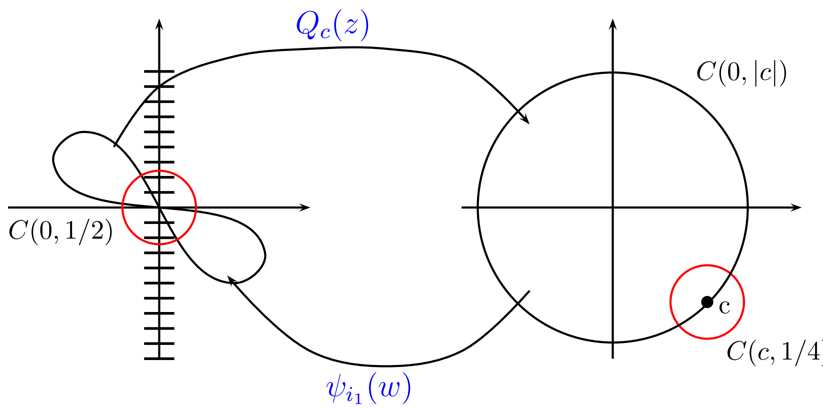

Figura 20

En efecto ya que si $z \,\varepsilon\, C(0, 1/2)$ entonces

$$|Q_c(z) - c| = |z^2| \leq \frac{1}{4}.$$

Luego los puntos w que están en el disco centrado en c y radio $1/4$ $(Q_c(C(0, 1/2)) = C(c, 1/4))$ cumplen con $|\psi'_{i_1}(w)| \geq 1$.
En efecto,
$|\psi'_{i_1}(w)| = \dfrac{1}{|Q'_c(\psi_{i_1}(w))|} \geq 1 \quad \text{para} \qquad w \,\varepsilon\, C(c, 1/4) \quad (\psi_{i_1}(w) \in C(0, 1/2)).$

En consecuencia los puntos que están fuera del disco $C(c, 1/4)$ su derivada es menor que uno.

Así por la proposición 2.3 sea el disco $C(0, r)$ tal que $C(0, r) \supset \gamma$ y $C(0, r) \cap C(c, 1/4) = \emptyset$ para valores de $|c| > \dfrac{5 + \sqrt{24}}{4}$ entonces $\psi_0(C(0, r))$ y $\psi_1(C(0, r))$ están fuera del disco de centro 0 y radio $\dfrac{1}{2}$ de manera que podemos garantizar $n = \inf\{|z|, z \in D_0\}$ y $h = \inf\{|z|, z \in D_1\}$ son estrictamente mayores que $\dfrac{1}{2}$ para $|c| > \dfrac{5 + \sqrt{24}}{4}$, por lo tanto $d > \dfrac{1}{2}$. ✠

Capítulo 3

Convergencia a 0 del $\mathbf{diam}(\mathbf{D}_{\mathbf{i_1},\mathbf{i_2},\ldots,\mathbf{i_n}})$ cuando $\mathbf{n} \to \infty$ para valores de $|\mathbf{c}| > \mathbf{2}$

Para demostrar que $diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para $|c| > 2$ utilizaremos dos caminos, uno de estos caminos nos servirá solo para valores de $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ y para el segundo camino introduciremos unas nuevas herramientas que nos ayudaran a demostrarlo para $|c| > 2$.

Sea C el disco de la proposición 2.2) y demostraremos:

Proposición 3.1 *Sea* $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$ *entonces*

1. $diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \lambda^n diam(C) \qquad 0 < \lambda < 1.$

2. $diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración:
1)$\mathbf{diam}(\mathbf{D}_{\mathbf{i_1},\mathbf{i_2},\ldots,\mathbf{i_n}}) \leq \lambda^{\mathbf{n}}\mathbf{diam}(\mathbf{C})$

Sea $x, y \in C$ y consideremos el segmento de recta que une x con y

$$p(t) = x(1-t) + yt \quad \text{donde} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Luego como ψ_{i_1} es una función continua entonces $\psi_{i_1}(p(t)) = \widehat{p_{i_1}}(t)$ es una curva dentro de D_{i_1} (ver Figura 21).

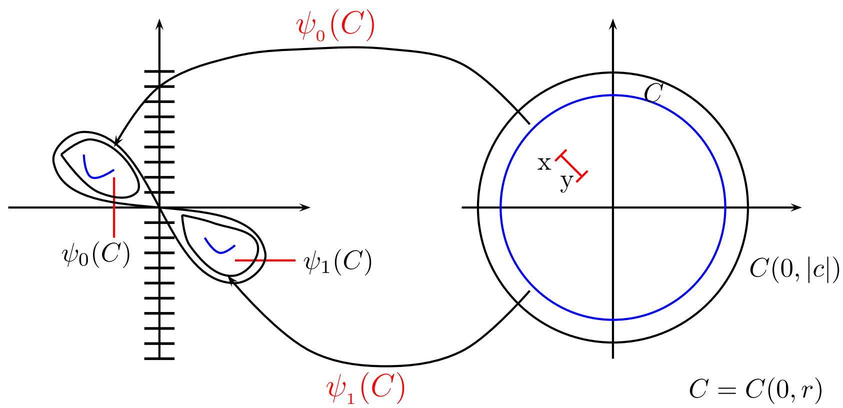

Figura 21

Así tenemos que

$$d(\psi_{i_1}(x),\psi i_1(y)) \leq l(\widehat{p_{i_1}}(t)).$$

Nota: La notación $l(\widehat{p_{i_1}}(t))$ es la longitud de la curva.
Además tenemos

$$l(\widehat{p_{i_1}}(t)) = \int_0^1 |(\widehat{p_{i_1}}(t))'|dt \qquad (1) \quad \Big(\text{esto es por definición de} \quad l(\widehat{p_{i_1}}(t))\Big),$$

$$|(\widehat{p_{i_1}}(t))'| = |\psi_{i_1}(p(t))'| = |\psi'_{i_1}(p(t))||p'(t)| \quad (2)\Big(\text{esto es por la } R \text{ cadena y propiedades de la norma}\Big)$$

$$\begin{aligned} |\psi'_{i_1}(p(t))| &= \frac{1}{|Q_c{}'(\psi_{i_1}(p(t)))|} & \Big(\text{esto es debido a que } \psi_{i_1} \text{ y } Q_c \\ &= \frac{1}{2|\psi_{i_1}(p(t))|} \quad (3) & \text{son funciones inversas).} \end{aligned}$$

Por otra parte sea "d" tal que
$d = minimo\{n,h\}$ donde $n = \text{ínf}\{|z|, z \in D_0\}$ y $h = \text{ínf}\{|z|, z \in D_1\}$.

Así $|z| \geq d \quad \forall z \in D_0 \quad (z \in D_1)$. Luego como $\psi_0(p(t)) \subset D_0$ y $\psi_1(p(t)) \subset D_1$ entonces $|\psi_0(p(t))| \geq d$ y $|\psi_1(p(t))| \geq d$, por tanto $|\psi_{i_1}(p(t))| \geq d$ y así obtenemos $\frac{1}{d} \geq \frac{1}{|\psi_{i_1}(p(t))|}$, continuando que

$$|\psi'_{i_1}(p(t))| = \frac{1}{2|\psi_{i_1}(p(t))|} \leq \frac{1}{2d} \qquad (4).$$

Volviendo a (1) y en virtud $(2), (3), (4)$ obtenemos que

$$d(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y)) \leq \int_0^1 |(\widehat{p_{i_1}}(t))'|dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{2|\psi_{i_1}(p(t))|}|p'(t)|\right] dt \leq \left(\int_0^1 |p'(t)|dt\right)\left(\frac{1}{2d}\right)$$

y teniendo $\int_0^1 |p'(t)|dt = d(x,y)$ (ya que es la longitud de una recta que une x con y) nos queda,

$$d(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y)) \leq \frac{1}{2d} d(x,y) \quad (5)$$

donde $\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y) \in D_{i_1}$.

Aplicando supremo ambos lados de (5) y debido a sus propiedades tenemos que

$$\sup_{\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y) \in D_{i_1}} d(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y)) \leq \frac{1}{2d} \sup_{(x,y)\in C} d(x,y),$$

en consecuencia podemos afirmar

$$diam(D_{i_1}) \leq \frac{1}{2d} diam(C),$$

luego por la Proposición 2.3 tenemos que $d > \frac{1}{2}$
así,

$$0 < \frac{1}{2d} < 1$$

y llamando(lambda) $\lambda = \frac{1}{2d}$ se tiene

$$diam(D_{i_1}) \leq \lambda diam(C).$$

Por otra parte por (5) tenemos que

$$d(\psi_{i_1}(\psi_{i_2}(x)), \psi_{i_1}(\psi_{i_2}(y)) \leq \lambda d(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y)),$$

por tanto aplicando supremo obtenemos

$$\sup_{\psi_{i_1}(\psi_{i_2}(x)), \psi_{i_1}(\psi_{i_2}(y)) \in D_{i_0,i_1}} d(\psi_{i_1}(\psi_{i_2}(x)), \psi_{i_1}(\psi_{i_2}(y)) \leq \lambda \sup_{\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y) \in D_{i_1}} d(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y))$$

así

$$diam(D_{i_1,i_2}) \leq \lambda\, diam(D_{i_1})$$

por ende tenemos

$$diam(D_{i_1,i_2}) \leq \lambda^2 diam(C).$$

De manera análoga obtenemos que

$$diam(D_{i_1,i_2,i_3}) \leq \lambda^3 diam(C)$$

y continuando este proceso por inducción llegamos a que

$$diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \lambda^n diam(C).$$

En efecto ya que en el paso $n-1$ tenemos que

$$diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}}) \leq \lambda^{n-1} diam(C).$$

Luego resolviendo el mismo procedimiento que se realizo después de (5) se llega a

$$diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \lambda diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}})$$

por tanto

$$diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \lambda^n diam(C).$$

2) $\mathbf{diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \to 0}$ cuando $\mathbf{n \to \infty}$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en lo probado en 1) obtenemos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \left(\lim_{n\to\infty} \lambda^n\right) \mathrm{diam}(C). \tag{1}$$

Pero el $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ cuando $0 < \lambda < 1$, por tanto aplicando el Teorema del Emparedado en (1) nos queda que

$$\lim_{n\to\infty} diam(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) = 0,$$

para $|c| > \dfrac{5+\sqrt{24}}{4}$. ✠

Para continuar con el segundo camino daremos unas nuevas definiciones.

Observación: Se define una bola de centro 0 y radio r como el conjunto $E = \{z : |z| < r\}$, que denotaremos $B(0, r)$.

Comencemos recordemos que en la geometría diferencial podemos definir una nueva norma de un vector así:

Definición 3.1 *Sea $B = B(0,1)$, entonces se define la función de Poincare* $\rho : B \to B$ *como* $\rho(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$.

Definición 3.2 *Sea $B = B(0,1)$ y $z \in B$, se define la longitud de un vector $E \in C$ saliendo de z como*

$$||E||_{\rho,z} = \rho(z)|E|_e \qquad \textit{(donde } |E|_e \textit{ denota la longitud euclidiana).}$$

Así obtenemos una nueva medida de longitud de una curva.

Definición 3.3 *Sea $B = B(0,1)$. Si*

$$\tau : [a, b] \longrightarrow B$$

es una curva continuamente diferenciable entonces se define la longitud con la función ρ como

$$l_\rho(\tau) = \int_a^b \|\tau'(t)\|_{\rho,\tau(t)} dt$$

donde

$$\|\tau'(t)\|_{\rho,\tau(t)} = \rho(\tau(t))|\tau'(t)|.$$

Definición 3.4 *Sea $B = B(0,1)$, se define el conjunto $C_B(P,Q)$ como la colección de curvas continuamente diferenciables* $\tau : [0,1] \longrightarrow B$ *tal que* $\tau(0) = P$ *y* $\tau(1) = Q$.

Ahora se definirá la distancia de Poincare .

Definición 3.5 *Sea $B = B(0,1)$ y sean $P, Q \in B$, se define la distancia de Poincare de P a Q como*

$$d_\rho(P,Q) = \text{ínf}\{l_\rho(\tau) \;:\; \tau \in C_B(P,Q)\}.$$

Definición 3.6 *Sea $B = B(0,1)$ y sea $f : B \longrightarrow B$ una función continuamente diferenciable, se define el "pullback" con ρ bajo f como*

$$f^{\star}\rho(z) = \rho(f(z)) \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|.$$

También asumiremos algunas proposiciones que no serán demostradas.

Proposición 3.2 *Si $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ es analítica , $f(z_1) = w_1$ y $f(z_2) = w_2$ entonces*

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\overline{w_2}}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|$$

y

$$|f'(z_1)| \leq \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2}.$$

Demostración: Ver Página 16 de Steven. G Krantz, Complex Analysis the Geometic Viewpoin.

Proposición 3.3 *La topología inducida en $B(0,1)$ por la métrica de Poincare es la misma que la métrica euclidiana.*

Demostración: Ver Página 54 de Steven.G Krantz, Complex Analysis the Geometic Viewpoin.

Proposición 3.4 *El disco unitario con la métrica de Poincare es un espacio métrico completo.*

Demostración: Ver Página 55 de Steven.G Krantz, Complex Analysis the Geometic Viewpoin.

Se demostrara ahora el clásico lema de Schwarz.

Teorema 3.1 *Sea $B = B(0,1)$ y $F : B \longrightarrow B$ una función analítica entonces F disminuye la distancia de Poincare bajo la función ρ. Esto es para cualquier $z \in B$*

$$|F^{\star}(\rho(z))| \leq |\rho(z)|.$$

Y además si $\tau : [0,1] \longrightarrow B(0,1)$ es una curva continuamente diferenciable entonces

$$l_\rho(F_o\tau(t)) \leq l_\rho(\tau(t)).$$

Y si P y Q son elementos de B entonces

$$d_\rho(F(P), F(Q)) \leq d_\rho(P, Q)\ .$$

Demostración: Sabemos que

$$F^\star(\rho(z)) = |F'(z)|\rho(F(z)) = |F'(z)|\frac{1}{1-|F(z)|^2}.$$

Por la Proposición 3.2 haciendo $w = F(z)$ obtenemos,

$$|F'(z)| \leq \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$$

pero esto es

$$|F'(z)|\frac{1}{1-|F(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} = \rho(z),$$

así

$$F^\star\rho(z) \leq \rho(z) \qquad (1).$$

Por otra parte si $\tau : [0,1] \longrightarrow B$ es curva continuamente diferenciable entonces por (1)

$$\rho(F(\tau(t)))|(F'(\tau(t)))| \leq \rho(\tau(t))$$

luego multiplicando ambos miembros por $|\tau'(t)|$ nos queda

$$\rho(F_\circ\tau(t))|F'(\tau(t))||\tau'(t)| \leq \rho(\tau(t))|\tau'(t)|,$$

y esto significa

$$\|(F_\circ\tau(t))'\|_{(\rho,F_\circ\tau(t))} \leq \|\tau'(t)\|_{\rho,\tau(t)} \qquad \text{(definición)}.$$

Integrando ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene

$$\int_0^1 \|(F_\circ\tau(t))'\|_{(\rho,F_\circ\tau(t))}dt \leq \int_0^1 \|\tau'(t)\|_{\rho,\tau(t)}dt$$

por tanto

$$l_\rho((F_\circ\tau(t))) \leq l_\rho(\tau(t)) \qquad (2).$$

Por otro lado sea $P, Q \in B$ y $\tau : [0,1] \longrightarrow B$ una curva continuamente diferenciable que une P con Q, entonces la curva $F(\tau(t))$ es continuamente diferenciable y cumple con $F(\tau(0)) = F(P)$ y $F(\tau(1)) = F(Q)$ por tanto es una curva que une $F(P)$ con $F(Q)$ y por (2) obtenemos,

$$l_\rho((F_\circ \tau(t))) \leq l_\rho(\tau(t)$$

y aplicando ínfimos ambos miembros

$$\text{ínf}(l_\rho((F_\circ \tau(t)))) \leq \text{ínf}(l_\rho(\tau(t))),$$

pero esto significa por definición que

$$d_\rho(F(P), F(Q)) \leq d_\rho(P, Q) \qquad (d_\rho(P,Q) = \text{ínf}\,\{L_\rho(\tau)\ :\ \tau \in C_B(P,Q)\}). \qquad ✠$$

Teorema 3.2 *Sea $B = B(0,1)$ y $F : B \longrightarrow B$ una función analítica en su dominio además asumamos que la imagen $M = \{F(z)\ :\ z \in B\}$ de F es un compacto en B entonces F es una contracción con la métrica de Poincare .*

Demostración: Por hipótesis existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $m \in M$ y $|z| \geq 1$ entonces $|m - z| > 2\varepsilon$ (ver Figura 22).

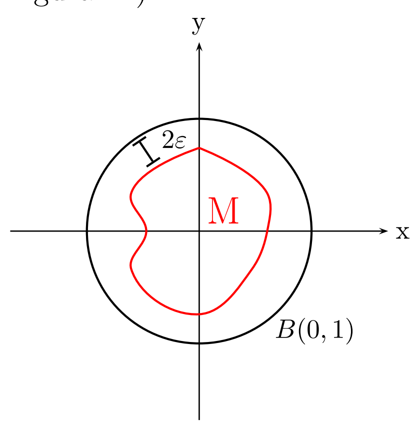

Figura 22

Fijemos $z_0 \in B(0,1)$ y definamos

$$g(z) = F(z) + \varepsilon(F(z) - F(z_0)).$$

Como g es la composición de funciones analíticas entonces es analítica, además g manda $B(0,1)$ dentro $B(0,1)$ para ello veamos

$$\begin{aligned} |g(z)| \;=\; |F(z) - \varepsilon(F(z) - F(z_0))| &\;\leq\; |F(z)| + \varepsilon|F(z) - F(z_0)| \qquad \text{(desigualdad triangular)} \\ &\;<\; 1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon \;=\; 1 \end{aligned}$$

por tanto $|g(z)| < 1$. Por otra lado $g'(z) = F'(z) + \varepsilon F'(z)$, así

$$g'(z_0) = (1+\varepsilon)F'(z_0).$$

Luego como g es una función analítica entonces por el Teorema 3.5 tenemos que

$$|g^\star\rho(z_0)| \leq |\rho(z_0)|$$

esto significa que

$$\begin{aligned} |g^\star\rho(z_0)| &= |(1+\varepsilon)F'(z_0)\rho(g(z_0))| &&= (1+\varepsilon)|F'(z_0)|\rho(F(z_0)) \\ &= (1+\varepsilon)|F^\star\rho(z_0)| &&\leq |\rho(z_0)|, \end{aligned}$$

y como z_0 es cualquiera de B entonces

$$(1+\varepsilon)|F^\star\rho(z)| \leq |\rho(z)|. \quad (1)$$

Por otra parte si $\tau : [0,1] \longrightarrow B(0,1)$ es curva continuamente diferenciable entonces por (1) tenemos que

$$(1+\varepsilon)\rho(F(\tau(t)))|F'(z)| \leq |\rho(\tau(t))|$$

así multiplicando por $|\tau'(t)|$,

$$(1+\varepsilon)\rho(F(\tau(t)))|F'(z)||\tau'(t)| \leq |\rho(\tau(t))|||\tau'(t)|.$$

Pero la ecuacion anterior significa

$$(1+\varepsilon)||F \circ \tau(t)||_{\rho, F\circ\tau(t)} \leq ||\tau(t)||_{\rho,\tau(t)},$$

e integrando ambos miembros nos queda

$$l_\rho(F_\circ\tau) \leq (1+\varepsilon)^{-1} l_\rho(\tau(t)) \quad \text{(por definicion)} \quad (2).$$

Por otro lado sea una curva $\sigma : [0,1] \longrightarrow B(0,1)$ continuamente diferenciable tal que $\sigma(0) = P$ y $\sigma(1) = Q$, luego la curva $F(\sigma(t))$ es continuamente diferenciable y además cumple $F(\sigma(0)) = F(P)$ y $F(\sigma(1)) = F(Q)$ y aplicando (2)

$$l_\rho(F_\circ \sigma(t)) \leq (1+\varepsilon)^{-1} l_\rho(\sigma(t)),$$

luego aplicando ínfimo ambos lados

$$d_\rho(F(P), F(Q)) \leq \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) d_\rho(P,Q) \ \ \text{(por definicion)}.$$

Así denotando $M = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$ entonces

$$d_\rho(F(P), F(Q)) \leq M d_\rho(P,Q) \quad \text{donde} \quad 0 < M < 1,$$

por tanto F es una contracción con la métrica ρ. ✠

Ahora trabajaremos con funciones analíticas definidas en la bola $B(0,r)$. Para ello daremos unas nuevas definiciones que nos ayudaran a utilizar las proposiciones demostradas, en las que trabajamos con la distancia de Poincare para funciones definidas en $B(0,1)$.

Definamos $h : B(0,1) \longrightarrow B(0,r)$ como

$h(z) = rz$, (notemos que h es una función biyectiva).

Así $h^{-1} : B(0,r) \longrightarrow B(0,1)$

$h^{-1}(z) = \dfrac{z}{r}$ (h, h^{-1} son funciones analíticas).

Ahora sea $x, y \in B(0,r)$ definimos

$d'(x,y) = d_\rho(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ (donde d_ρ denota la distancia de Poincare en la B(0,1))

observamos que d' es una métrica en el $B(0,r)$ y es llamada la métrica inducida por h^{-1}.

Teorema 3.3 *Sea $F : B(0,r) \longrightarrow B(0,r)$ una función analítica y asumamos que $M = \{F(z) \ : \ z \in B(0,r)\}$ es un compacto contenido en $B(0,r)$ entonces F es una contracción con la métrica inducida d'.*

Demostración: Definamos $G : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ como $G(\bar{x}) = h^{-1}{}_\circ F_\circ h(\bar{x})$ donde $\bar{x} \in B(0,1)$.

Veamos en la Figura 23 que G esta bien definida.

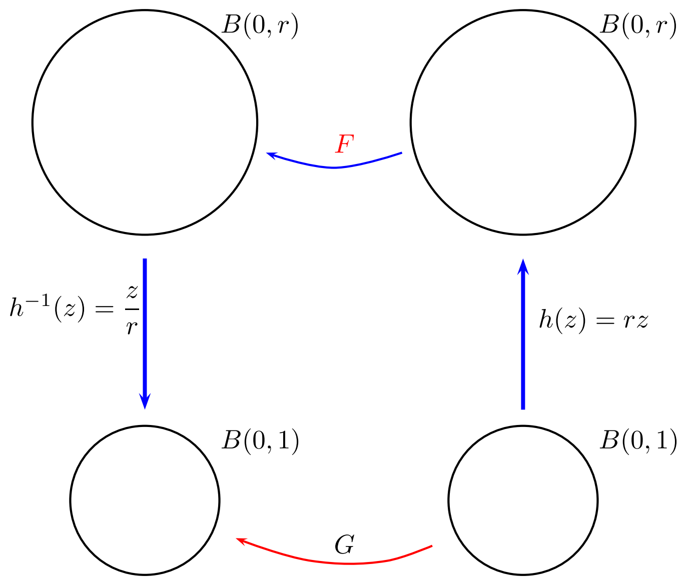

Figura 23

Por otra parte como la función G es composición de funciones analíticas entonces es analítica, así por el Teorema 3.2 tenemos que G es una contracción con la distancia de Poincare esto significa

$$d_\rho(G(\overline{x}), G(\overline{y})) \leq \lambda d_\rho(\overline{x}, \overline{y}) \quad \text{para} \quad 0 < \lambda < 1,$$

luego

$$d_\rho(G(\overline{x}), G(\overline{y})) \; = \; d_\rho(h^{-1} {}_\circ F_\circ h(\overline{x}), h^{-1} {}_\circ F_\circ h(\overline{y})),$$

pero $h(\overline{x})$ y $h(\overline{y})$ están en $B(0,r)$ así $h(\overline{x}) = x$ y $h(\overline{y}) = y$ donde $x, y \in B(0,r)$. Siguiendo que

$$d_\rho(h^{-1}(F(x)), h^{-1}(F(y))) = d_\rho\left(\frac{F(x)}{r}, \frac{F(y)}{r}\right) = d'(F(x), F(y))$$

y por otro lado se tiene $d_\rho(\overline{x}, \overline{y}) = d_\rho(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) = d'(x, y)$
por tanto tenemos que

$$d'(F(x), F(y)) \leq \lambda d'(x, y) \quad \text{para} \quad x, y \in B(0,r) \;\; \text{y} \;\; 0 < \lambda < 1.$$

Así la función F es una contracción con d'. ✠

Ahora sea el disco $C(0,r)$ de la proposición 2.2 y consideremos $B(0,r`)$ donde $r` > 0$ y $r < r` < |c|$ (lo cual es posible ya que $C(0,r)$ es un conjunto compacto contenido en el interior del disco $C(0,|c|)$) entonces probaremos:

Corolario 3.1 *Sea $B = B(0,r`)$ y $G : B \to B$ una función analítica en su dominio entonces la función G es una contracción con la métrica inducida d'.*

Demostración: Aplicando el teorema 3.3 G es una contracción con d'.

Observación: Denotaremos el diámetro con la métrica d' como $diam|_{ind}$ y con la métrica euclidiana como $diam|_e$.

Proposición 3.5 *Sea $|c| > 2$ entonces*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} diam|_{ind}(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} diam|_e(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) = 0.$

Demostración:

1) $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} diam|_{ind}(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) = 0}$

Sea $B = B(0,r`)$ y definamos $\psi_{i_1} : B \to B$, así por el corolario 3.1 ψ_{i_1} es una contracción con la métrica inducida d' ya que la función ψ_{i_1} es analítica en B y como el disco C de la proposición 2.2 esta en el interior de B entonces ψ_{i_1} es una contracción en el disco C con la métrica inducida d' así

$$d'(\psi_{i_1}(x), \psi_{i_1}(y)) \leq \lambda d'(x,y) \quad x, y \in C \qquad (1).$$

Aplicando nuevamente (1) con la función ψ_{i_1} para $\psi_{i_2}(x), \psi_{i_2}(y) \in C$ obtenemos

$$d'(\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}(x), \psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}(y)) \leq \lambda d'(\psi_{i_2}(x), \psi_{i_2}(y)) \leq \lambda^2 d'(x,y)$$

y en el paso n por inducción llegamos a

$$d'(\psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_n}(y)) \leq \lambda^n d'(x,y) \quad \text{donde} \quad 0 < \lambda < 1.$$

En efecto ya que en el paso $n-1$ tenemos

$$d'(\psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_n}(y)) \leq \lambda d'(\psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_{n-1}}(x), \psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_{n-1}}(y))$$

y además
$$d'(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_{n-1}}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_{n-1}}(y)) \leq \lambda^{n-1} d'(x,y)$$
así
$$d'(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(y)) \leq \lambda^n d'(x,y) \quad \text{donde} \quad 0 < \lambda < 1,$$
por tanto es cierto para el paso n. Luego aplicando supremos ambos miembros a la ecuación anterior
$$\sup d'(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(y)) \leq \lambda^n \sup d'(x,y)$$
pero esto significa
$$diam|_{ind}(D_{i_1,i_2,...,i_n}) \leq \lambda^n diam|_{ind}(C),$$
tomando límite a ambos miembros de la ecuación anterior se llega
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}iam|_{ind}(D_{i_1,i_2,...,i_n}) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n \mathrm{d}iam|_{ind}(C).$$
Luego como $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ cuando $0 < \lambda < 1$ y por el teorema del emparedado obtenemos
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}iam|_{ind}(D_{i_1,i_2,...,i_n}) = 0.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{d}iam|_e(D_{i_1,i_2,...,i_n}) = 0$

Tenemos que d' y la métrica euclidiana son equivalentes en cualquier compacto contenido en C, en particular en el conjunto compacto $D_0 \cup D_1$ así existe $M > 0$ y $K > 0$ tal que
$$Md\Big|_{\text{ind}}(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(y)) \leq d\Big|_{\text{e}}(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(y))$$
$$\leq Kd\Big|_{\text{ind}}(\psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(x), \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}(y)),$$
luego aplicando supremo obtenemos
$$Mdiam\Big|_{\text{ind}}(D_{i_1,i_2,...,i_n}) \leq diam\Big|_{\text{e}}(D_{i_1,i_2,...,i_n}) \leq Kdiam\Big|_{\text{ind}}(D_{i_1,i_2,...,i_n})$$
y tomando límite a la ecuación anterior se tiene

$$M \lim_{n\to\infty} diam\Big|_{\text{ind}} (D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq \lim_{n\to\infty} diam\Big|_{\text{e}} (D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \leq K \lim_{n\to\infty} diam\Big|_{\text{ind}} (D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}),$$

continuando que por lo demostrado en (1) y por teorema del emparedado obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} diam|_{\text{e}}(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) = 0 \qquad para \qquad |c| > 2. \qquad ✠$$

Capítulo 4

Teorema Principal

Antes de demostrar el teorema principal enunciaremos el siguiente teorema:

Teorema 4.1 (Intersección de Cantor) *Sea* $\{f_i\}$, $i \in N$ *una sucesión de subconjuntos cerrados, no vacíos y acotados de* R^n *que cumplen*

$$f_1 \supseteq f_2 \supseteq ... \supseteq f_n \supseteq ...$$

entonces existe un punto que pertenece a todos los conjuntos $\{f_i : i \in N\}$.

Demostración: Su demostración es bastante conocida en los libros de análisis matemático.

Consideremos el conjunto $\bigwedge_c$ definido en el capitulo 1 y demostremos:

Teorema Principal Sea $c \in \mathcal{C}$ con $|c| > 2$ entonces el conjunto $\bigwedge_c$ es un conjunto de Cantor.

Demostración:

$\bigwedge_{\mathbf{c}}$ es un conjunto cerrado.

Sabemos por la proposición 2.2 que $\bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{-n}(C)$.

Así cuando $n = 1$ obtenemos que ${Q_c}^{-1}(C)$ esta formado por la unión de dos discos, que son preimágenes de un disco C que es un conjunto cerrado en el plano, luego como ψ_0 y ψ_1 son funciones continuas entonces las preimágenes $\psi_0(C)$ y $\psi_1(C)$ son conjuntos cerrados, por tanto ${Q_c}^{-1}(C)$ es la unión de 2 conjuntos cerrados que es cerrado (ya que la unión finita de cerrados es cerrado).

Cuando $n = 2$, tenemos que ${Q_c}^{-2}(C)$ es la unión por 2^2 discos (que son cerrados), así ${Q_c}^{-2}(C)$ es un conjunto cerrado.

De manera análoga, continuando este proceso inductivamente llegamos a que ${Q_c}^{-n}(C)$ es la unión de 2^n discos, de manera que ${Q_c}^{-n}(C)$ es un conjunto cerrado. En efecto ya que ${Q_c}^{-n+1}(C)$ esta formado por 2^{n-1} discos que son conjuntos cerrados y cada uno de ellos me genera dos discos cerrados por medio de las funciones continuas ψ_0 y ψ_1, por tanto ${Q_c}^{-n}(C)$ estará formado por la unión $22^{n-1} = 2^n$ discos cerrados que es cerrado.

Luego como la intersección infinita de cerrados es cerrado entonces

$$\bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$$

es un conjunto cerrado.

$\bigwedge_{\mathbf{c}}$ es un conjunto totalmente disconexo

Tomemos $p \in \bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(D)$, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la $B(p, \varepsilon)$.
Supongamos por reducción al absurdo que

$$B(p, \varepsilon) \subset \bigwedge_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$$

entonces $B(p, \varepsilon) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$ de manera que,

$$0 < diam(B(p, \varepsilon)) \leq \operatorname{diam}(D_{i_1,\ldots,i_n})$$

(donde cada $D_{i_1,\ldots,i_n}$ es un disco de ${Q_c}^{-n}(C)$) así obtenemos que

$$0 < \ 2\epsilon \leq diam(D_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Luego aplicando en la ecuación anterior límite cuando $n \to \infty$ nos queda que

$$0 \leq \ 2\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} diam(D_{i_1,\ldots,i_n}),$$

pero en virtud de la Proposición 3.5 tenemos que $\lim_{n\to\infty} diam(D_{i_1,\ldots,i_n}) = 0$ para valores de $|c| > 2$ con lo que nos quedaría que $2\varepsilon = 0$, pero esto es absurdo ya que $\varepsilon > 0$.
Por tanto $B(p,\varepsilon)$ tiene puntos que no están en $\bigwedge_c$.
En consecuencia $\bigwedge_c$ no contiene bolas así $\bigwedge_c$ es un conjunto totalmente disconexo.

$\bigwedge_{\mathbf{c}}$ es un conjunto perfecto

Sea $p \in \bigwedge_c$, $\varepsilon > 0$ y consideremos $B(p,\varepsilon)$ luego como $\dim|_{\mathrm{e}}(D_{i_1,\ldots,i_n}) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces podemos encontrar un n tal que ${Q_c}^{-n}(D)$ contiene un disco tal que $D_{i_1,\ldots,i_{n_k}} \subset B(p,\varepsilon)$ y $D_{i_1,\ldots,i_{n_k}}$ contiene a p (también tiene puntos distintos de p).

Luego en la iteración $-n-1$, el disco $D_{i_1,\ldots,i_{n_k}}$ contiene 2 discos que vienen de ψ_0 (o de ψ_1) y están dentro de $B(p,\varepsilon)$, uno de estos discos contiene a p y el otro no.

Como en el disco que no contiene a p se va a generar una intersección anidada de discos entonces por el teorema de intersección de Cantor existe p_k perteneciente a dicha intersección anidadas de discos, que se genera de un disco de cada n por tanto,

$$p_k \in \bigwedge\nolimits_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {Q_c}^{-n}(C)$$

así $\bigwedge_c$ es un conjunto perfecto. ✠

Bibliografía

[1] DEVANEY, ROBERT L. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Second edition. Addison - Wesley Publishing Company, Inc, 1989.

[2] CHURCHILL, RUEL V.; BROWN, JAMES. *Variable compleja y aplicaciones.* Quinta edicion, Mc Graw - Hill, 1992

[3] MARSDEN, JERROLD E.; HOFFMAN, MICHAEL J. *Analisis básico de variable compleja.* Editorial Trillas. Primera edición. 1996.

[4] KRANTZ, STEVEN G. *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint.* The Matematical Association of America, 1990