Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Manipulabilidad En La Fusión Lógica

Amilcar Daniel Mata Díaz

Requisito Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciado en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón A. Pino Pérez

Mérida-Venezuela
2007

DEDICATORIA

A mis sobrinos Orianna, Saúl, y Aarón y a mis hermanitos Igmaryfeth, Luis Felipe y Luis Ignacio. Que esto les sirva de inspiración para lograr sus objetivos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco los consejos y ayuda de mi mentor, Ramón Pino, que no solo fue de trabajo, sino de amistad y solidaridad, quien me ayudo a mantenerme firme en la realización de este trabajo. Incluyo en este equipo a los profesores Carlos Cova, Jahn Franklin Leal y José Luis Chacón, el apoyo incondicional por parte de ellos fue mi soporte durante la carrera.

A mis padres, gurús morales y éticos, a ustedes les debo todo.

A los profesores de la carrera, en especial a los profesores Olga Porra, Marcos Lizana, Cristina Lizana, Carlos Uzcategui, Maria Gonzalez, Luis Gonzalez y Leonel Mendoza, quienes me ayudaron con mi formación profesional; con ustedes tengo un gran deuda intelectual.

A mis compañeros estudiantes, quienes forman parte de CEDECUM, gracias por su apoyo moral en todo este tiempo.

Amilcar Daniel Mata Díaz.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El problema de la fusión de la información es un problema central en varios campos de la ciencia. Su espectro va desde las tomas de decisiones, pasando por los diagnósticos médicos, hasta la integración automática de varias bases de datos.

En este trabajo nosotros nos proponemos un estudio desde el punto de vista de la lógica formal de algunos aspectos de la fusión de la información. Bajo este paradigma, el conocimiento es representado ya sea en teorías lógicas, ya sea mediante conjuntos finitos de fórmulas (bases de conocimiento). En este marco, la fusión -la fusión del conocimiento- estudia los mecanismos de extracción de una información coherente de un conjunto de informaciones que pueden ser eventualmente contradictorias.

Recientemente se ha puesto de manifiesto, gracias a los trabajos de Konieczny y Pino [Konieczny y Pino 1998, Konieczny y Pino 1999, Konieczny y Pino 2002] y [Konieczny y Pino 2005] (véase también [Rot 2001]) que ciertos mecanismos de fusión pueden ser representados por preferencias (relaciones de preorden sobre el conjunto de valuaciones) y el resultado de la fusión corresponde a la construcción de una preferencia global.

Precisamente el problema de construir una preferencia global a partir de preferencias individuales es el objeto de estudio de la Teoría de la elección social [Arrow 1963, Sen 1979, Sen 1982, Kelly 1978, Kelly 1988]. En particular, esta teoría estudia las propiedades de los sistemas de votos. Uno de los resultados mayores del área es el famoso teorema de manipulabilidad de los sistemas de votos que establece que no hay un sistema ideal de votación que no sea manipulable [Gibbard 1973, Satterhwaite 1975].

Las similitudes entre los problemas de la fusión lógica por una parte y los problemas de agregación de preferencias por otra son una fuente de interacción entre la Fusión Lógica y la Teoría de Elección Social (ver por ejemplo [Leal 2003]).

En ese trabajo nos proponemos extrapolar al marco de la Fusión Lógica la noción de manipulabilidad que surge en la Teoría de Elección Social y que ha sido recientemente generalizada en [Pino y Leal 2006].

Más precisamente el propósito de este trabajo es, en un primer tiempo, definir una noción general de manipulabilidad en el marco de la Fusión Lógica. Para ello, el punto de partida será la noción de manipulabilidad introducida recientemente en [Leal 2005, Pino y Leal 2005, Pino y Leal 2006].

En un segundo tiempo se hará la comparación con el trabajo de [Everare et al. 2004, Everare et al. 2007] en los que se definen nociones particulares de manipulabilidad y se analizan un conjunto concreto de operadores. Se tratará de las relaciones existentes entre las nociones particulares (vía índices de satisfacción) y las nociones generales et intrínsecas introducidas en este trabajo.

Por último se analizará el comportamiento con respecto a la manipulabilidad de algunos operadores introducidos en la literatura en particular los que aparecen en [Konieczny y Pino 2002, Everare et al. 2004, Everare et al. 2007].

El trabajo se organiza en tres capítulos. En el primero están los resultados más básicos (y ya clásicos) sobre los operadores de fusión lógica esto está basado principalmente en los artículos [Konieczny y Pino 2002, Konieczny y Pino 2005]. En el segundo capítulo aparece un panorama de los principales resultados de los artículos [Everare et al. 2004, Everare et al. 2007], en particular las nociones de manipulación vía índices de satisfacción. Finalmente, el último capítulo lo dedicamos a la noción de manipulación intrínseca y a sus relaciones con la manipulación vía índices.

Los resultados del capítulo 3 son todos nuevos. Algunas pruebas de los capítulos 1 y 2 son nuestras y simplifican las de los autores. En particular las pruebas de que los operadores $\Delta^{d,\Sigma}$, $\Delta^{d,Gmax}$ son de fusión y $\Delta^{d,Max}$ de cuasi-fusión, utilizan propiedades de las funciones de agregación que hacen el trabajo más fácil (de alguna manera lo factorizan). La noción de función de agregación es más general que la que aparece en trabajos previos (en particular en [Everare et al. 2004, Everare et al. 2007]) y está inspirada en la función Gmax.

CAPÍTULO 1

FUSIÓN LÓGICA

1.1. Bases y Conjuntos de Creencias

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las fórmulas proposicionales construidas sobre el alfabeto finito $\mathcal{P}$ de proposiciones atómicas. El conjunto de todas las interpretaciones es denotado por $\mathcal{W}$, y $\mathcal{P}^*(\mathcal{W})$ denotará el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$.

Sea φ una fórmula, $[\varphi]$ denota el conjunto de los modelos de φ, es decir

$$[\varphi] = \{w \in \mathcal{W} \mid w \models \varphi\}$$

Dado un conjunto de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, denotamos por $\bigwedge\Phi$ la conjunción de los elementos de Φ, es decir, $\bigwedge\Phi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$.

Lema 1 *Sea M un conjunto de modelos. Entonces existe φ_M fórmula tal que $[\varphi_M] = M$.*

Demostración: Supongamos $\mathcal{P}$ el conjunto de proposiciones atómicas y sea w una interpretación. Consideremos los conjuntos $\Phi = \{\alpha \in \mathcal{P} | w \models \alpha\}$ y $\Psi = \{\alpha \in \mathcal{P} | w \not\models \alpha\}$. Sea $\neg\Psi = \{\neg\alpha | \alpha \in \Psi\}$ y tomemos $\varphi_w = \bigwedge\Phi \wedge \bigwedge(\neg\Psi)$. Mostremos que $[\varphi_w] = \{w\}$.

Supongamos que existe $w' \in [\varphi_w]$ tal que $w' \neq w$. Así existe $\alpha' \in \mathcal{P}$ tal que $w \models \alpha'$ y $w' \not\models \alpha'$, o bien $w \not\models \alpha'$ y $w' \models \alpha'$. Sin perdida de generalidad supongamos que $w \models \alpha'$ y

$w' \not\models \alpha'$ (ya que el otro caso es análogo a este). Como $w' \not\models \alpha'$ entonces $w' \not\models \bigwedge\Phi$ y por lo tanto $w' \not\models \varphi_w$, lo cual es una contradicción.

Consideremos ahora M un conjunto de interpretaciones (M es finito porque el número de varables proposicionales es finito de hecho si hay n variables hay exactamente 2^n interpretaciones) y para cada $w \in M$ consideremos la fórmula φ_w, de tal forma de que w es el único modelo de φ_w. Consideremos φ_M la disyunción de las fórmulas φ_w, es decir $\varphi_M = \bigvee_{w \in M} \varphi_w$. Notemos que $M \subset [\varphi_M]$. Por otro lado, si $w' \in [\varphi_M]$ entonces $w' \models \varphi_w$, para algún $w \in M$. De esta forma $w' = w$. Así $M = [\varphi_M]$. ∎

Definición 1 *Una base de creencias φ es un conjunto finito de formulas proposicionales*

Note que si $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, ese conjunto es lógicamente equivalente[1] a $\varphi' = \{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\}$ y por lo tanto φ será identificada con una sola fórmula a saber $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.

Una base de creencias φ_i denotará las creencias de un agente i. Supondremos que todas las bases de creencias son consistentes, es decir, que cada agente posee información coherente. Como cada conjunto de creencias es considerada conjuntivamente, denotaremos φ a $\bigwedge\varphi$ de aquí en adelante.

Definición 2 *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n bases de creencias, no necesariamente diferentes. Denominaremos conjunto de creencias al multiconjunto Ψ que consiste de esas n bases de creencias: $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$*

Supongamos $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi' = \{\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_m\}$ dos multiconjuntos. La unión de los dos multiconjuntos es el conjunto $\Psi \sqcup \Psi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m\}$.

Denotemos por $\bigwedge\Psi$ a la conjunción de las bases de Ψ, es decir, $\Psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Cuando $w \models \bigwedge\Psi$ escribimos $w \models \Psi$.

Obsérvese que a diferencia de $\bigwedge\varphi$, que siempre suponemos consistente, $\bigwedge\Psi$ puede ser inconsistente. Basta con tomar $\Psi = \{\varphi, \varphi'\}$, donde $\varphi = \{\alpha\}$ y $\varphi' = \{\neg\alpha\}$, con α proposición

[1] Decimos que dos conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son lógicamente equivalentes si $C_n(\Sigma_1) = C_n(\Sigma_2)$

atómica.

Haciendo abuso de notación, si φ es una base de creencia, ella también denotará al conjunto de creencias $\Psi = \{\varphi\}$. Para un entero positivo n, denotaremos por Ψ^n al multiconjunto

$$\underbrace{\Psi \sqcup \cdots \sqcup \Psi}_{n-\textbf{veces}}.$$

Sean $\varphi \in \Psi$ y φ' una base de creencias, denotaremos por $\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]$ al nuevo multiconjunto formado al sustituir una ocurrencia de φ por φ' en Ψ.

Definición 3 *Sean Ψ, Ψ' dos conjuntos de creencias. Diremos que Ψ y Ψ' son equivalentes, denotado por $\Psi \leftrightarrow \Psi'$, si, y sólo si, existe $f : \Psi \to \Psi'$ una biyección de multiconjuntos[2] tal que*

$$\vdash f(\varphi) \leftrightarrow \varphi$$

para cada φ en Ψ.

Definición 4 *Un preorden $\leq$ sobre un conjunto A es una relación sobre A reflexiva y transitiva.*

Diremos que $\leq$ es un preorden total sobre A si cumple que

(i) $\leq$ es un preorden sobre A

(ii) Para cada w, w' en A se tiene que $w \leq w'$ o bien $w' \leq w$.

Definición 5 *Sea $\leq$ un preorden. Definimos $<$ la relación estricta correspondiente como sigue*

$$w < w' \textit{ si, y sólo si, } w \leq w' \textit{ y } w' \not\leq w,$$

y su correspondiente relación de indiferencia $\simeq$ como

$$w \simeq w' \textit{ si, y sólo si, } w \leq w' \textit{ y } w' \leq w.$$

Note que $\simeq$ es una relación de equivalencia cuando $\leq$ es un preorden total.

[2]Si $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi' = \{\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'\}$, entonces $f(\varphi_i) = \varphi_{\sigma(i)}$, con σ una permutación.

Definición 6 *Dado $\leq$ un preorden total, diremos que $w \in min(A, \leq)$ si, y sólo si, $w \in A$ y para cada $w' \in A$, $w \leq w'$.*

1.2. Operadores de Fusión

Una bases de creencias φ denotará las creencias de un agente. Un conjunto de creencias Ψ denotará las creencias individuales de los agentes en un grupo.

El objetivo de los operadores de fusión es determinar cuáles son las creencias de grupo a partir de las creencias de los individuos y las restricciones impuestas por el sistema (restricciones físicas, leyes, ...). Esas restricciones estarán codificadas en una base de creencias μ.

El concepto de operador de fusión que a continuación damos es una extensión del concepto introducido en [Konieczny y Pino 1998]. Fue acuñado en [Konieczny y Pino 1999] y ampliamente estudiado en [Konieczny 1999, Konieczny y Pino 2002, Konieczny y Pino 2005].

Un operador de fusión Δ es una función que envía un conjunto de creencias Ψ y una base de creencias μ (que denota las restricciones de integridad del sistema) en una bases de creencias. Formalmente:

$$\Delta : \mathbb{B} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

donde $\mathbb{B}$ denota el conjunto de todos los conjuntos de creencias. En vez de $\Delta(\Psi, \mu)$ escribiremos $\Delta_\mu(\Psi)$ por simplicidad.

Definición 7 (Operadores de Fusión IC) *Δ es un operador de fusión con restricciones de integridad (Operador de fusión IC) si, y sólo si, satisface lo siguiente:*

(IC0) $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$.

(IC1) *Si μ es consistente, entonces $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente.*

(IC2) *Si $\bigwedge\Psi$ es consistente con μ, entonces $\Delta_\mu(\Psi) \leftrightarrow \bigwedge\Psi \wedge \mu$.*

(IC3) *Si $\Psi \leftrightarrow \Psi'$ y $\mu \leftrightarrow \mu'$, entonces $\Delta_\mu(\Psi) \longleftrightarrow \Delta_{\mu'}(\Psi')$.*

(IC4) *Si $\varphi \vdash \mu$ y $\varphi' \vdash \mu$, entonces $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot \Rightarrow \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$.*

(IC5) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$.

(**IC6**) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \perp$, *entonces* $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$.

(**IC7**) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \vdash \Delta_{\mu\wedge\mu'}(\Psi)$.

(**IC8**) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \nvdash \perp$, *entonces* $\Delta_{\mu\wedge\mu'}(\Psi) \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu'$.

(ICO) asegura que el operador de fusión satisface las restricciones de integridad. **(IC1)** estipula que siempre que las restricciones de integridad sean consistentes, el resultado de la fusión será consistente. **(IC2)** nos dice que, de ser posible, el resultado de la fusión es la conjunción de las creencias con las restricciones de integridad. **(IC3)** expresa que el hecho de que el resultado de la fusión depende sólo de las opiniones expresadas por los agentes y no de su interpretación sintáctica. **(IC4)** es conocido como el postulado de equidad; el punto es que cuando fusionamos dos bases de creencias, el operador no debe dar preferencia a ninguna de ellas.**(IC5)** e **(IC6)** estipulan que si se pueden encontrar dos subgrupos cuyos resultados son consistentes entonces el resultado de la fusión global será exactamente la conjunción de los resultados. **(IC7)** e **(IC8)** estipulan que una alternativa que es preferida entre las alternativas posibles (μ) se mantendrá preferida si restringimos las posibles escogencias ($\mu \wedge \mu'$) y ella aún está allí.

La figura siguiente muestra esquemáticamente el comportamiento de un operador de fusión:

Fig. 1.1: Operadores de Fusión Lógica

Definamos ahora dos importantes subclases de operadores de fusión.

Definición 8 (Operador de Mayoría) *Un operador de fusión IC es un operador de mayoría si satisface la siguiente propiedad*

(**May**) $$\exists n \; \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n) \vdash \Delta_\mu(\Psi_2)$$

Esta condición nos dice que si una interpretación w es estrictamente más plausible que una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces para cualquier conjunto de creencias Ψ_1 de creencias, si se repite suficientemente Ψ_2, en ese nuevo conjunto de creencias $\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n$ se mantiene la misma relación estricta entre w y w'.

Definición 9 (Operador de Arbitraje) *Un operador de fusión IC es un operador de arbitraje si satisface la siguiente propiedad*

$$(\mathbf{Arb})\quad \left.\begin{array}{l} \Delta_{\mu_1}(\varphi_1) \longleftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \Delta_{(\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2)}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \not\vdash \mu_2 \\ \mu_2 \not\vdash \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow \Delta_{\mu_1}(\varphi_1)$$

(May) expresa el hecho de que si una opinión tiene una audiencia grande, esta será la opinión del grupo como un todo. Por otro lado **(Arb)** trata de satisfacer cada agente como sea posible.

Definición 10 (Asignación Sincrética) *Una asignación sincrética es una función que envía cada conjunto de creencias Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre las interpretaciones tal que para conjuntos de creencias Ψ, Ψ_1, Ψ_2 y bases de creencias φ_1, φ_2 cualesquiera se tiene:*

1. *Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$, entonces $w \simeq_\Psi w'$.*
2. *Si $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$, entonces $w <_\Psi w'$.*
3. *Si $\Psi_1 \longleftrightarrow \Psi_2$, entonces $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$*
4. $\forall\, w \models \varphi_1\ \exists\, w' \models \varphi_2,\ w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$
5. *Si $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w \leq_{\Psi_2} w'$, entonces $w \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$*
6. *Si $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w <_{\Psi_2} w'$, entonces $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$*

Las dos primeras condiciones aseguran que los modelos de los conjuntos de creencias (de haber) son las interpretaciones más plausibles[3] para el preorden asociado al conjunto de creencias. La tercera condición estipula que dos conjuntos de creencias equivalentes tienen el mismo preorden asociado.

La cuarta condición expresa que, cuando se fusionan dos bases de creencias, para cada modelo de la primera, existe un modelo de la segunda tal que es al menos tan buena como la primera. Esto asegura que las dos bases de creencias dadas tienen igual consideración.

[3] La relación $\leq_\Psi$ se interpreta como una relación de plausibilidad; así $w \leq_\Psi w'$ significará que w es más plausible que w'

La quinta condición dice que si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y de igual manera ocurre para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si se unen las dos bases de creencias w se mantendrá tan plausible como w'.

La sexta condición fortifica la condición previa. Esta condición expresa que si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y si w es estrictamente más plausible que w' para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si unimos las dos conjuntos de creencias w será estrictamente más plausible que w'.

Definición 11 (Asignación Sincrética de Mayoría) *Una asignación sincrética de mayoría es una asignación sincrética la cual satisface lo siguiente:*

7. *Si* $w <_{\Psi_2} w'$, *entonces existe* n *entero positivo tal que* $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n} w'$

Definición 12 (Asignación Sincrética Equitable) *Una asignación sincrética equitable es una asignación sincrética que satisface:*

8. $$\left.\begin{array}{l} w_1 <_{\varphi_1} w_2 \\ w_1 <_{\varphi_2} w_3 \\ w_2 \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w_3 \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w_2$$

Esta condición estipula que si una interpretación w_1 es estrictamente más plausible que una interpretación w_2 para una base de creencias φ_1, si w_1 es estrictamente más plausible que w_3 para una base de creencias φ_2, y además w_2 y w_3 son igualmente plausibles para el conjunto de creencias $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$, entonces w_1 tiene que ser estrictamente más plausible que w_2 y w_3 para $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$.

Ejemplo 1 Juan y Pedro[4] se perdieron del encuentro de fútbol entre estudiantes y mineros jugado el día de ayer, así que ellos no conocen el resultado. Juan escuchó en la mañana de hoy que estudiantes hizo un buen partido, así el piensa que una de victoria de estudiantes es más plausible que un empate, y que un empate es más confiable que una victoria de mineros. A Pedro le dijeron que después de ese partido que mineros tiene más chance de

[4]Este ejemplo es una modificación de un ejemplo ilustrativo aparecido en [Konieczny y Pino 2005].

ganar el campeonato. De esta información Pedro infiere que mineros ganó el partido, o si no que al menos empataron.

Confrontando sus puntos de vista, Juan y Pedro acordaron sobre el hecho de que los dos equipos tienen la misma fuerza, que cualquiera pudo haber ganado. Lo que demanda el arbitraje , con esa información, es que Juan y Pedro deben acordar que un empate es el resultado más plausible.

Teorema 1 (Teorema de representación, [Konieczny y Pino 1999, Konieczny y Pino 2002]) *Un operador es un operador de fusión IC si, y sólo si, existe una asignación sincrética que manda cada conjunto de creencias Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ tal que*

$$[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea Ψ un conjunto de creencias. Definimos la relación $\leq_\Psi$ de la siguiente forma:

$$\forall w, w' \; w \leq_\Psi w' \text{ si, y sólo si } w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

Veamos que $\leq_\Psi$ es un preorden total sobre $\mathcal{W}$

Totalidad Sean $w, w' \in \mathcal{W}$ y consideremos, en virtud del lema 1, la fórmula $\varphi_{\{w,w'\}}$, con $[\varphi_{\{w,w'\}}] = \{w, w'\}$. Así bien, por (IC1) y la consistencia de $\varphi_{\{w,w'\}}$, se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$ es consistente. Además, por (IC0), $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vdash \varphi_{\{w,w'\}}$. De esta manera $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$, o bien $w' \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$. De esta manera:

$$w \leq_\Psi w', \text{ o bien } w' \leq_\Psi w$$

Reflexividad Supongamos $w \in \mathcal{W}$ y consideremos la fórmula φ_w, con $[\varphi_w] = \{w\}$. Así, por ser φ_w consistente y en virtud de (IC1), $\Delta_{\varphi_w}(\Psi)$ es consistente, y además de (IC0) tenemos que

$$\emptyset \neq [\Delta_{\varphi_w}(\Psi)] \subset \{w\}$$

Así $[\Delta_{\varphi_w}(\Psi)] = \{w\}$ implicando que $\forall w' \in \mathcal{W}, \; w \leq_\Psi w'$. En especial $w \leq_\Psi w$.

Transitividad Supongamos $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$ tales que $w_1 \leq_\Psi w_2$ y $w_2 \leq_\Psi w_3$. Mostremos que $w_1 \leq_\Psi w_3$; para ello razonemos por el absurdo suponiendo que $w_1 \not\leq_\Psi w_3$. De esta forma

$$w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$$

Por otro lado, de la consistencia de $\varphi_{\{w_1,w_3\}}$ y por (IC0) e (IC1) tenemos que $\emptyset \neq [\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)] \subset \{w_1, w_3\}$, y como $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$, entonces

$$[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)] = \{w_3\}. \tag{1.1}$$

Luego, en virtud de (IC7) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}} \vdash \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$$

ya que $\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}} \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}} \leftrightarrow \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ y, en virtud de (IC3), Δ es independiente de la sintaxis. Así, consideremos los siguientes dos casos.

- $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ consistente.

  Por (IC8) y en virtud de la hipótesis tenemos que

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}.$$

  Así, por (1.1) se tiene que $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}] = \{w_3\}$, y de esta forma $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$. Nótese además que $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)] \neq \{w_2\}$. Así

  (i) $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)] = \{w_2, w_3\}$, o bien
  (ii) $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)] = \{w_3\}$

  En el primer caso, obsérvese que por la consistencia de $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ con $\varphi_{\{w_1,w_2\}}$, se tiene que

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}} \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$$

  en virtud de (IC3), (IC7), e (IC8).

Por otro lado, como $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$, entonces $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}}$, y por lo tanto $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$; lo que contradice que $w_1 \leq_\Psi w_2$.

Para el segundo caso, por la consistencia de $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ con $\varphi_{\{w_2,w_3\}}$, nuevamente por (IC3), (IC7) e (IC8), se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_2,w_3\}} \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_2,w_3\}}}(\Psi)$$

y como $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)] \wedge \varphi_{\{w_2,w_3\}} = \{w_3\}$, entonces $w_2 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_2,w_3\}}}(\Psi)$; lo que contradice que $w_2 \leq_\Psi w_3$.

- $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ es inconsistente.

  En este caso tenemos que $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \varphi_{w_2}$, y por lo tanto

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}} \longleftrightarrow \varphi_{w_2}.$$

  Ahora bien, en virtud de (IC3),(IC7) e (IC8) tenemos que

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}},$$

  ya que $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ es consistente con $\varphi_{\{w_1,w_2\}}$, lo que indica que $[\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)] = \{w_2\}$. De esta manera $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$, implicando que $w_1 \not\leq_\Psi w_2$. Contradicción.

Así, para cada Ψ conjunto de creencias, $\leq_\Psi$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}$.

Veamos ahora que para cada μ restricción de integridad $[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$.

- $[\Delta_\mu(\Psi)] \subset min([\mu], \leq_\Psi)$.

  Sea $w \in [\Delta_\mu(\Psi)]$ y supongamos que $w \notin min([\mu], \leq_\Psi)$. Así existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\Psi w$. De la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que

  $$w \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi). \tag{1.2}$$

Por otra parte, ya que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ es consistente, en virtud de (IC7) e (IC8), tenemos que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi). \tag{1.3}$$

Como $w \models \Delta_\mu(\Psi)$, en virtud de (IC0) $w \models \mu$, y como $w' \models \mu$ tenemos que $\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$. Luego, de (IC3) y de (1.3) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi).$$

De esta ecuación y de (1.2) se tiene que $w \not\models \Delta_\mu(\psi)$, lo que es una contradicción.

- $[\Delta_\mu(\Psi)] \supset min([\mu], \leq_\Psi)$.

  Supongamos $w \in min([\mu], \leq_\Psi)$. De esta manera para cada w' modelo de μ se tiene que $w \leq_\Psi w'$. Luego, de la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$.

  De (IC1) sabemos que $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente, ya que μ lo es. De esta manera, si $w' \models \Delta_\mu(\Psi)$ tenemos que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ es consistente y en virtud de (IC7) e (IC8) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

  Ahora bien, como $\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$, de (IC3) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

  Luego $w \models \Delta_\mu(\Psi)$, lo que indica que $w \in [\Delta_\mu(\Psi)]$.

Consideremos así la aplicación que relaciona a cada base de creencias Ψ con su preorden $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$, y mostremos que dicha aplicación es una asignación sincrética.

Consideremos los conjuntos de creencias Ψ, Ψ_1, Ψ_2 y las bases de creencias φ_1, φ_2.

1. Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$ entonces $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \not\vdash \perp$. De (IC2) tenemos que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}},$$

y como $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$ se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$$

de esta manera, $[\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)] = \{w, w'\}$, implicando que $w \leq_\Psi w'$ y $w' \leq_\Psi w$. Luego $w \simeq_\Psi w'$.

2. Si $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$ entonces $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \nvdash \bot$; más aún, $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \varphi_w$. De esta forma, en virtud de (IC2) tenemos que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \longleftrightarrow \varphi_w$$

De esta manera $w \leq_\Psi w'$ y $w' \not\leq_\Psi w$, y por lo tanto $w <_\Psi w'$.

3. Supongamos que $\Psi_1 \longleftrightarrow \Psi_2$, y sean $w, w' \in \mathcal{W}$ tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$. De esta manera $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1)$. De (IC3) sabemos que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$, y así $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$. De aquí se sigue que $w \leq_{\Psi_2} w'$.

4. Antes de demostrar esta propiedad, veamos que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ es consistente. Razonemos por el absurdo, y supongamos que no es así. De esta forma se tiene que

$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2 \vdash \bot \tag{1.4}$$

Por otro lado, en virtud de (IC0), $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Así, por (1.4) tenemos que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \vdash \varphi_1$ lo que nos dice que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_1 \nvdash \bot$. De (IC4) se tiene que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2 \nvdash \bot$, lo que contradice (1.4).

Continuando con la demostración de esta propiedad, supongamos $w \models \varphi_1$ y mostremos la existencia de $w' \models \varphi_2$ tal que $w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$.

Sea $w' \models \Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ y consideremos la base de creencias $\varphi_{\{w,w'\}}$. Por la consistencia de $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ y en virtud de (IC7) e (IC8) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$$

Como $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$, de (IC3) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$$

De esta forma $w' \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, implicando que $w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$.

5. Sean $w, w' \in \mathcal{W}$ tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w \leq_{\Psi_2} w'$. Así, por la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$. De (IC5) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2) \vdash \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2),$$

luego $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$. Así $w \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$.

6. Si $w, w' \in W$ son tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w <_{\Psi_2} w'$, entonces

$$w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2) \text{ y } w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2).$$

Por ser $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$ consistente, de (IC5) e (IC6) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$$

De esta manera, $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ y $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$, implicando que $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$.

($\Leftarrow$) Consideremos una asignación sincrética que asocia a cada conjunto de creencias Ψ, un preorden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ y definamos un operador $\Delta : \mathbb{P} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mediante la ecuación

$$[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi). \tag{1.5}$$

Mostremos que Δ satisface (IC0)-(IC8), para ello consideremos Ψ, Ψ' conjuntos de creencias y μ, μ' restricciones de integridad

(**IC0**) Directamente de la definición $[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi) \subset [\mu]$, y por el teorema de completitud $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$.

(**IC1**) Si μ es consistente, entonces $[\mu] \neq \emptyset$. Como existe un número finito de interpretaciones, no existe cadenas decrecientes infinitas de desigualdades, así $min([\mu], \leq_\Psi) \neq \emptyset$. Luego $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente.

(**IC2**) Supongamos que $\bigwedge\Psi \wedge \mu \nvdash \perp$, y mostremos que $[\bigwedge\Psi \wedge \mu] = min([\mu], \leq_\Psi)$.

- $[\bigwedge\Psi \wedge \mu] \subset min([\mu], \leq_\Psi)$:
  Notemos que si $w \models \Psi$, entonces, en virtud de los postulados 1 y 2, para cualquier $w' \in \mathcal{W}$ se tiene que $w \leq_\Psi w'$. De esta manera si $w \models \bigwedge\Psi \wedge \mu$ entonces para cualquier $w' \in \mathcal{W}$ $w \leq_\Psi w'$, implicando que $w \in min([\mu], \leq_\Psi)$.

- $[\bigwedge\Psi \wedge \mu] \supset min([\mu], \leq_\Psi)$:
  Sea $w \in min([\mu], \leq_\Psi)$ y, buscando una contradicción, supongamos que $w \not\models \bigwedge\Psi \wedge \mu$. De esta manera $w \not\models \Psi$, lo que nos dice que para cualquier $w' \models \Psi$ se tiene que $w' <_\Psi w$, en particular si tomamos $w' \models \Psi \wedge \mu$. Luego $w \notin min([\mu], \leq_\Psi)$, lo cual es una contradicción.

(**IC3**) Supongamos que $\Psi \longleftrightarrow \Psi'$ y que $\mu \longleftrightarrow \mu'$. Para ver que $min([\mu], \leq_\Psi) = min([\mu'], \leq'_\Psi)$, basta con mostrar que $min([\mu], \leq_\Psi) = min([\mu], \leq_{\Psi'})$ pues $[\mu] = [\mu']$. Pero esto es evidente pues por la propiedad 3, $\leq_\Psi = \leq_{\Psi'}$.

(**IC4**) Supongamos que φ y φ' son bases de creencias tales que $\varphi \vdash \mu$, $\varphi' \vdash \mu$ y $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot$. Mostremos que $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$.

Supongamos $w \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi$. Como $w \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi')$, por la definición de Δ, para cualquier $w'' \models \mu$ se tiene que $w \leq_{\varphi \sqcup \sigma} w''$. Por otro lado, en virtud del postulado 4, existe $w' \models \varphi'$ tal que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w$. Así, por transitividad, $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w''$ para cualquier w'' modelo de μ. Luego, por definición de Δ, $w' \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi')$ y por lo tanto $w' \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi'$, es decir $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$.

(**IC5**) Supongamos $w \models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$. De esta manera $w \models \mu$ y si $w' \models \mu$, entonces $w \leq_\Psi w'$ y $w \leq_{\Psi'} w'$. Así, de la condición 5 se tiene que, si $w' \models \mu$ entonces $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$, implicando que $w \in min([\mu], \leq_{\Psi \sqcup \Psi'})$, lo que nos dice que $w \models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Luego

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu\big(\Psi'\big) \vdash \Delta_\mu\big(\Psi \sqcup \Psi'\big)$$

en virtud del Teorema de completitud.

(**IC6**) Supongamos que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$ es consistente, y demostremos que

$$\Delta_\mu\big(\Psi \sqcup \Psi'\big) \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu\big(\Psi'\big).$$

Sea $w \models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Así para cualquier $w' \models \mu$ $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$. Supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, así $w \not\models \Delta_\mu(\Psi)$, o bien $w \not\models \Delta_\mu(\Psi')$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\Psi)$ (el caso $w \not\models \Delta_\mu(\Psi')$ se demuestra de forma análoga). En virtud de la consistencia de $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, podemos tomar $w' \models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, obteniendo así que $w' <_\Psi w$ y $w' \leq_{\Psi'} w$. Como consecuencia de la condición 5, $w' <_{\Psi \sqcup \Psi'} w$. De esta manera $w \notin min([\mu], \leq_{\Psi \sqcup \Psi'})$, y por lo tanto $w \not\models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Contradicción.

(**IC7**) Supongamos que $w \models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. Así:

$$\forall\, w' \models \mu_1,\ w \leq_\Psi w',$$

en especial si $w' \models \mu_1 \wedge \mu_2$. De esta manera $w \in min([\mu_1 \wedge \mu_2], \leq_\Psi)$, implicando que $w \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$. Por lo tanto $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$.

(**IC8**) Supongamos que $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ es consistente. Así existe $w' \models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. En búsqueda de una contradicción, supongamos $w \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$ tal que $w \not\models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. En virtud de (IC0) $w \models \mu_1 \wedge \mu_2$, así $w \not\models \Delta_{\mu_1}(\Psi)$ y por lo tanto $w' <_\Psi w$. Pero $w' \models \mu_1 \wedge \mu_2$, lo que nos lleva a que $w \notin min([\mu_1 \wedge \mu_2], \leq_\Psi)$ y en consecuencia $w \not\models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$, lo que es una contradicción. ∎

El teorema 1 nos dice que un operador de fusión IC le corresponde una familia de preordenes. De hecho, un operador está determinado completamente por estos preordenes, usando una función que envía cada conjunto de creencias a un preorden. Daremos algunos algunos ejemplos de esto en la siguiente sección.

Un análisis de la demostración del teorema 1 revela que el postulado (IC6) solamente se usó para demostrar la condición 6 de la definición de asignación sincrética y, del mismo modo, dicha condición se uso para demostrar (IC6). De igual forma, (IC4) corresponde a la condición 4 sobre la asignación. Esta simple observación nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 1 *Un operador satisface* (IC0)-(IC5), (IC7) *e* (IC8) *si, y sólo si, puede ser representado por una asignación que satisface* $1-5$*. Un operador satisface* (IC0)-(IC3), (IC5)-(IC8) *si, y sólo si, puede ser representado por una asignación que satisface* $1-3$*,* 5 *y* 6.

Próximamente daremos una variante del Teorema 1 debilitando el postulado (IC6) y su correspondiente condición sobre la asignación.

Consideremos el siguiente postulado

(IC6′) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \perp$ *entonces* $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \vee \Delta_\mu(\Psi')$

Esta propiedad dice que si una alternativa es tomada por un grupo, entonces si dividimos el grupo en dos subgrupos (los cuales concuerdan en algo), al menos uno de estos subgrupos tendrá esa alternativa. Esta propiedad corresponde a la siguiente condición que es obviamente más débil que la condición 6 para las asignaciones sincréticas.

6′. Si $w <_\Psi w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, entonces $w <_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$

Note que por ser $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi'}$ preórdenes totales el contrarecíproco de 6’ se puede escribir de la siguiente manera:

$$w' \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w \;\Rightarrow\; w \leq_\Psi w' \quad \text{o} \quad w <_{\Psi'} w'$$

Definición 13 *Diremos que un operador es un operador de cuasi-fusión IC si satisface* (IC0)-(IC5), (IC6’)*,* (IC7) *e* (IC8)*. Una asignación cuasi-sincrética es una asignación que satisface las condiciones* $1-5$ *y* $6'$.

Teorema 2 *Un operador* Δ *es un operador de cuasi-fusión si, y sólo si, puede ser representado por una asignación cuasi-sincrética.*

Demostración:

(⇒) Supongamos Δ un operador que satisface los postulados (IC0)-(IC5), (IC6’), (IC7) e (IC8), y definamos una asignación sincrética como se hizo en la demostración del teorema 1. En virtud del corolario 1, la asignación representada por Δ satisface las condiciones 1-5. De esta manera sólo nos queda por demostrar la condición 6'.

Supongamos que $w, w' \in \mathcal{W}$ son tales que $w <_{\Psi} w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, veamos que $w <_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$. Por hipótesis tenemos que:

(i) $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$

(ii) $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vee \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$

Así, en virtud de (IC0) e (IC6') se tiene que

$$[\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}\big(\Psi \sqcup \Psi'\big)] \subset [\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vee \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}\big(\Psi'\big)] \subset \{w\},$$

y de (IC5) se tiene que

$$\emptyset \neq [\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}\big(\Psi'\big)] \subset [\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}\big(\Psi \sqcup \Psi'\big)].$$

De esta manera $[\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')] = \{w\}$, lo que indica que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')$ y $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')$. De esta manera $w <_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$.

($\Leftarrow$) Consideremos una aplicación que envía a cada conjunto de creencia Ψ en un preorden total $\leq_{\Psi}$ sobre $\mathcal{W}$ que satisface 1-5 y 6' y definamos Δ como en la ecuación 1.5. Por el corolario 1 sabemos que Δ satisface (IC0)-(IC5), (IC7) e (IC8), faltando sólo por demostrar (IC6').

Supongamos $w \models \Delta_{\mu}(\Psi \sqcup \Psi')$. Por hipótesis existe w'' tal que $w'' \models \Delta_{\mu}(\Psi) \wedge \Delta_{\mu}(\Psi')$. Por definición de Δ, $\forall\, w' \models \mu$ se tiene que $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$, en particular $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w''$. Luego, en virtud de la condición 6 (su contrarecíproco), $w \leq_{\Psi} w''$ o $w \leq_{\Psi'} w''$; de allí se obtiene fácilmente que $w \in min([\mu], \leq_{\Psi})$, o bien $w \in min([\mu], \leq_{\Psi'})$ es decir $w \models \Delta_{\mu}(\Psi) \vee \Delta_{\mu}(\Psi')$. ∎

Teorema 3 *Un operador Δ es un operador mayoritario si, y sólo si, existe una asignación sincrética de mayoría tal que asocia a cada conjunto de creencia Ψ un preorden total $\leq_{\Psi}$*

sobre $\mathcal{W}$ tal que

$$[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea Δ un operador que satisface (IC0)-(IC8) y (May) . En virtud del teorema 1, sabemos que existe una asignación sincrética tal que a cada conjunto de creencias Ψ le asocia un preorden total $\leq_\Psi$. De esta manera, sólo nos falta por demostrar la condición de asignación sincrética de mayoría.

Supongamos Ψ y Ψ' conjuntos de creencias, y sean w, w' modelos tales que $w <_{\Psi'} w$. En virtud de (IC0) e (IC1) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi') \longleftrightarrow \varphi_w, \tag{1.6}$$

y por (May) sabemos que existe n tal que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \vdash \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$. En virtud de (IC1) y de (1.6) se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \longleftrightarrow \varphi_w$. De esta manera,

$$\exists n \; w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'$$

($\Leftarrow$) Consideremos una aplicación sincrética de mayoría que envía cada base de creencias Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, y definamos el operador Δ como en la ecuación (1.5). Por el teorema 1 sabemos que el operador Δ define un operador de fusión IC, satisfaciendo las condiciones (IC0)-(IC8). Veamos que Δ satisface también (May) ; para ello veamos primero, haciendo uso del Principio de inducción, que la siguiente condición es cierta:

$$w <_{\Psi'} w' \Rightarrow \; \exists \, n_0 \, \forall \, n \geq n_0 \quad w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \tag{1.7}$$

En efecto, si $w <_{\Psi'} w'$, por la condición 7 de mayoría tenemos que

$$\exists \, n_0 \; w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_0}} w';$$

luego por la condición 6 tenemos que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_0} \sqcup \Psi'} w'$, es decir

$$w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_0+1}} w',$$

puesto que $(\Psi \sqcup (\Psi')^{n_0}) \sqcup \Psi' = \Psi \sqcup (\Psi')^{n_0+1}$.

Supongamos ahora que para $n \geq n_0$ se tiene que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'$, y mostremos que para $n+1$ también se cumple que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}} w'$. Como $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, en virtud de la condición 6 se tiene que $w <_{(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \sqcup \Psi'} w'$.

Luego, como $(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \sqcup \Psi' = \Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}$, entonces $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}} w'$, con lo que se demuestra nuestra afirmación.

Ahora supongamos que $\forall n\ \Delta_\mu(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \not\vdash \Delta_\mu(\Psi')$ y veamos que esto nos lleva a una contradicción. De esta hipótesis se tiene que

$$\forall\, n\ \exists w_n \models \mu\ \forall w' \models \mu,\ w_n \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \ \wedge\ \exists w'_n \models \mu,\ w'_n <_{\Psi'} w_n \tag{1.8}$$

Consideremos la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ definida por $f(n) = (w_n, w'_n)$, donde w_n y w'_n cumplen con las propiedad dada en 1.8. Por la finitud de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ se tiene que existe (w, w') imagen de infinitos valores de n, es decir que para n arbitrariamente grande, se tiene que

$$\exists w \models \mu\ \forall w'' \models \mu,\ w \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'' \ \wedge\ \exists w' \models \mu,\ w' <_{\Psi'} w,$$

en especial:

$$w \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \wedge\ w' <_{\Psi'} w$$

lo que contradice 1.7. ∎

Teorema 4 *Un operador Δ es un operador de arbitraje si, y sólo si, existe una asignación sincrética equitable que envía cada conjunto de creencias Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, tal que $[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Consideremos Δ un operador que satisface los postulados (IC0)-(IC8) y (Arb) . Definamos una asignación sincrética como se hizo en la demostración del teorema 1, así sólo nos queda demostrar la condición de asignación sincrética equitable.

Supongamos $w <_\varphi w'$, $w <_{\varphi'} w''$ y $w' \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'} w''$. Notemos que si $w' = w''$ entonces de la condición 6 tenemos que $w <_{\varphi\sqcup\varphi'} w'$. Supongamos entonces que $w' \neq w''$.

Como $w <_\varphi w'$, entonces $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi)$. Así, en virtud de (IC0) e (IC1) tenemos que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \longleftrightarrow \varphi_w$.

De manera análoga, como $w <_{\varphi'} w''$, entonces

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w''\}}}\big(\varphi'\big) \longleftrightarrow \varphi_w$$

y por lo tanto

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w''\}}}\big(\varphi'\big) \tag{1.9}$$

Veamos que $(\varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}) \longleftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}}$. En efecto, como

$$\big(\varphi_{\{w,w'\}} \longleftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}\big) \longleftrightarrow \big((\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}) \wedge \neg(\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}})\big),$$

además como

$$\big(\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}\big) \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w',w''\}} \text{ y } \big(\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}}\big) \longleftrightarrow \varphi_w$$

entonces

$$\big((\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}) \wedge \neg(\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}})\big) \longleftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}} \tag{1.10}$$

Ahora bien, en virtud de (IC3) tenemos que

$$\Delta_{(\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}})}\big(\varphi \sqcup \varphi'\big) \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}\big(\varphi \sqcup \varphi'\big) \tag{1.11}$$

Por otro lado, como

$$[\Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}\big(\varphi \sqcup \varphi'\big)] = min([\varphi_{\{w',w''\}}], \leq_{\varphi\sqcup\varphi'}) = \{w', w''\}$$

entonces

$\Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}}$ así, en virtud de 1.10 y 1.11 tenemos que

$$\Delta_{(\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}})}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow (\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}) \tag{1.12}$$

Ahora bien, como

$$\left.\begin{array}{ccc} \varphi_{\{w,w'\}} & \nvdash & \varphi_{\{w,w''\}} \\ \varphi_{\{w,w''\}} & \nvdash & \varphi_{\{w,w'\}} \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

y $w' \neq w''$, en virtud de (Arb) , 1.9, 1.11 y 1.13, se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \tag{1.14}$$

Por otro lado, como $\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}} \longleftrightarrow \varphi_{\{w,w',w''\}}$, de (IC3) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \tag{1.15}$$

y como $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \longleftrightarrow \varphi_w$ se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow \varphi_w$. De esta manera

$$w <_{\varphi \sqcup \varphi'} w' \text{ y } w <_{\varphi \sqcup \varphi'} w''.$$

($\Rightarrow$) Consideremos una asignación sincrética equitable que asigna a cada conjunto de creencias Ψ un preorden total $\leq_\Psi$ y definamos Δ tomando para cada μ, restricción de integridad, $[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$. Por el teorema 1 que Δ satisface (IC0)-(IC8), faltando sólo por demostrar (Arb) . Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

$\Delta_\mu(\varphi) \longleftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$
$(\Delta_{(\mu \leftrightarrow \neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi')) \longleftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$
$\mu \wedge \neg\mu' \nvdash \bot$
$\mu' \wedge \neg\mu \nvdash \bot$

y demostremos que $\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow \Delta_\mu(\varphi)$, para ello veamos primero que $\Delta_\mu(\varphi) \vdash \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. Por la consistencia de μ tenemos que $\Delta_\mu(\varphi)$ es consistente. Sea w tal que $w \models \Delta_\mu(\varphi)$ y supongamos que $w \not\models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. De esta manera existe $w' \models \mu \vee \mu'$ tal que $w' <_{\varphi \sqcup \varphi'} w$.

Consideremos los siguientes tres casos:

Caso 1.1 Supongamos que $w' \models \mu \wedge \mu'$. Puesto que $w \models \Delta_\mu(\varphi)$ se tiene $w \leq_\varphi w'$, y como $\Delta_\mu(\varphi) \longleftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$ se tiene que $w \leq_{\varphi'} w'$. En virtud de la condición 5 tenemos que $w \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$, lo cual es una contradicción.

Caso 1.2 Supongamos que $w' \models \mu \wedge \neg\mu'$. Como $w' \not\models \mu'$ entonces, en virtud de (IC0), $w' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$, lo que nos lleva a que $w' \not\models \Delta_\mu(\varphi)$. De esta manera $w <_\varphi w'$.

Por otro lado, como $\mu' \wedge \neg\mu \nvdash \bot$, existe $w'' \models \mu' \wedge \neg\mu$. De esta manera, $w'' \not\models \mu$ y por lo tanto $w'' \not\models \Delta_\mu(\varphi)$, implicando que $w'' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$. Así $w <_{\varphi'} w''$.

Puesto que $\Delta_{(\mu \leftrightarrow \neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$, y como

$$(\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu) \longleftrightarrow (\mu \longleftrightarrow \neg\mu')$$

entonces $w', w'' \in [\Delta_{(\mu \leftrightarrow \neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi')]$, ya que $w', w'' \in [(\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu)]$. De esta forma $w' \simeq w''$. Luego, por la condición de asignación equitable, $w <_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$, lo cual es una contradicción

Caso 1.3 Si ocurre que $w' \models \mu' \wedge \neg\mu$ se procede análogamente al caso anterior.

En cualquiera de los casos hemos llegado a una contradicción, implicando que $\Delta_\mu(\varphi) \vdash \Delta_{\mu \vee \mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. Mostremos ahora que $\Delta_{\mu \vee \mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \vdash \Delta_\mu(\varphi)$.

Sea $w \models \Delta_{\mu \vee \mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$ y, razonando por el absurdo, supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$. En virtud de (IC0) tenemos que $w \models \mu \vee \mu'$, obteniendo así los siguientes casos

Caso 2.1 Supongamos que $w \models \mu \wedge \mu'$. Como $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$, entonces existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\varphi w$. Por definición de Δ podemos tomar w' tal que $w' \models \Delta_\mu(\varphi)$. Como $\Delta_\mu(\varphi) \longleftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$ entonces $w' <_{\varphi'} w$, implicando que $w' <_{\varphi' \sqcup \varphi} w$, en virtud de la condición 6. Esto nos conduce a que $w \notin min([\mu \vee \mu'], \leq_{\varphi \sqcup \varphi'})$, y por lo tanto $w \not\models \Delta_{\mu \vee \mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$, lo que es una contradicción.

Caso 2.2 Supongamos que $w \models \mu \wedge \neg\mu'$. Como $\mu' \nvdash \mu$, existe $w'' \models \mu'$ tal que $w'' \not\models \mu$. Por otro lado, ya que $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$ entonces existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\varphi w$. Por definición de Δ podemos suponer que $w' \models \Delta_{\mu}(\varphi)$. Como $\Delta_{\mu}(\varphi) \longleftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$, entonces $w' \models \Delta_{\mu'}(\varphi')$. Luego, como $w'' \not\models \Delta_{\mu}(\varphi)$ entonces $w'' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$, de esta manera $w' <_{\varphi'} w''$.

Ahora bien, como $(\mu \leftrightarrow \neg\mu') \longleftrightarrow ((\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu))$ entonces w y w'' son modelos de $\mu \longleftrightarrow \neg\mu'$, y como $\Delta_{(\mu\leftrightarrow\neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi') \longleftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$ entonces $w \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'} w''$. De aquí se tiene $w' <_{\varphi\sqcup\varphi'} w$, en virtud del postulado de 8 de asignación sincrética equitable. Por lo tanto $w \notin min([\mu \vee \mu'], \leq_{\varphi\sqcup\varphi'})$ y así $w \not\models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. Contradicción.

Caso 2.3 Si $w \models \mu' \wedge \neg\mu$, el estudio es análogo al anterior.

De esta manera $\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \vdash \Delta_{\mu}(\varphi)$, y por lo tanto

$$\Delta_{\mu\vee\mu'}\big(\varphi \sqcup \varphi'\big) \longleftrightarrow \Delta_{\mu}(\varphi).$$

∎

1.3. Algunos operadores de fusión IC

Daremos en esta sección la definición de tres familias de operadores. Todos estos operadores están basados sobre una distancia entre interpretaciones que inducen el preorden asociado a cada conjunto de creencias.

Definición 14 (Distancia entre interpretaciones) *Una pseudodistancia entre interpretaciones es una aplicación $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}^{+}$ tal que para cualesquiera $w, w', \in \mathcal{W}$ se cumple que:*

- $d(w, w') = d(w', w)$
- $d(w, w') = 0$ *si, y sólo si,* $w = w'$

Una distancia entre interpretaciones es una pseudodistancia que satisface la desigualdad triangular:

- *Para cada w, w', w'' interpretaciones,* $d(w, w') \leq d(w, w'') + d(w'', w')$

Dos distancias muy usadas entre interpretaciones son la distancia de Dalal, denotada por d_H, el cual es la distancia de Hamming entre interpretaciones (es decir el número de variables proposicionales sobre las cuales difieren dos interpretaciones), y la distancia drástica denotada por d_D, el cual es la distancia más simple que se pueda definir: es cero si las interpretaciones son la misma, y uno en otro caso.

Definición 15 *Para cada número natural n sea A_n un conjunto y $\preceq_n$ un orden lineal sobre A_n, y supongamos $\overline{0}_n = min(A_n, \preceq_n)$. Una función de agregación es una función total que asocia a cada n-upla finita de números reales no negativos un elemento en A_n, y es tal que para cada $x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y$ de reales positivos, cumple con*

Anonimato *Para cualquier permutación σ,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

Monotonía *Si $x < y$ entonces*

$$f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \prec_n f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$$

Minimalidad $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{0}_n$ *si, y sólo si,* $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

En muchos casos las estructuras ordenadas serán todas las mismas iguales a $\mathbb{R}^+$ con el orden natural. Ese será el caso de la función suma y máximo como observaremos más adelante. Pero en otros no será de esa manera, como en el caso de la función $Gmax$ donde para cada n, A_n será $(\mathbb{R}^+)^n$ y el orden $\preceq_n$ será el orden lexicográfico para los vectores de tamaño n.

Una distancia entre interpretaciones induce en forma natural una extensión, que llamaremos distancia entre una interpretación y una base de creencias de la siguiente manera

$$d(w, \varphi) = \min_{w' \models \varphi} d(w, w')$$

Esta a su vez, en conjunto con f, induce una "distancia" entre una interpretación y un conjunto de creencias como sigue: Sea $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

$$d_{d,f}(w,\Psi) = f(d(w,\varphi_1),\ldots,d(w,\varphi_n)).$$

Usaremos la notación $\underset{\varphi\in\Psi}{f}\big(d(w,\varphi)\big)$ para esta última expresión.

Esto nos permite definir un preorden sobre interpretaciones como sigue:

$$w \leq_{\Psi}^{d,f} w' \text{ si, y sólo si, } d_{d,f}(w,\Psi) \preceq_n d_{d,f}\big(w',\Psi\big)$$

Por abuso de lenguaje y con el deseo de simplificar la notación denotaremos a $\overline{0}_n$ por $\overline{0}$ y a $\preceq_n$ por $\preceq$ siendo claro del contexto de quien se trata.

Proposición 1 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación. La aplicación $\Psi \mapsto \leq_{\Psi}^{d,f}$ cumple con las primeras cuatro postulados de la asignación sincrética.*

Demostración: Consideremos Ψ, Ψ' conjuntos de creencias y φ y φ' bases de creencias cualesquiera.

1. Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$, entonces para cada $\varphi \in \Psi$ se tiene que $w \models \varphi$ y $w' \models \varphi$. De esta manera
$$\forall\, \varphi \in \Psi,\ d(w,\varphi) = d(w',\varphi) = 0$$
y de la propiedad de minimalidad de f se tiene que
$$d_{d,f}(w,\Psi) = \overline{0} = d_{d,f}\big(w',\Psi\big)$$
De esta manera $w \simeq_{\Psi}^{d,f} w'$.

2. Supongamos que $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$. Como $w \models \Psi$, $d_{d,f}(w,\Psi) = \overline{0}$. Por otro lado $w' \not\models \varphi$, para algún $\varphi \in \Psi$ y por lo tanto $d(w',\varphi) > 0$. Así de la propiedad de minimalidad se tiene
$$d_{d,f}\big(w',\Psi\big) = \underset{\varphi\in\Psi}{f}\big(d(w',\varphi)\big) \succ \overline{0}$$
De esta manera tenemos
$$d_{d,f}(w,\Psi) \prec d_{d,f}\big(w',\Psi\big)$$
lo que indica que $w <_{\Psi}^{d,f} w'$

3. Supongamos que $\Psi \longleftrightarrow \Psi'$. Así existe una biyección $g : \Psi \longrightarrow \Psi'$ tal que para cada $\varphi \in \Psi$, $\vdash g(\varphi) \longleftrightarrow \varphi$. Consideremos w y w' interpretaciones y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \leq_{\Psi}^{d,f} w'$. De esta manera $d_{d,f}(w, \Psi) \preceq d_{d,f}(w', \Psi)$.

   Puesto que para cada $\varphi \in \Psi$, $\vdash g(\varphi) \longleftrightarrow \varphi$ entonces,

$$\forall\, \varphi \in \Psi,\ d(w, \varphi) = d(w, g(\varphi))$$

   para cada φ en Ψ, y de la condición de anonimato de f se tiene

$$d_{d,f}(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d\big(w, g(\varphi)\big)\big)$$

   De la biyectividad de g y del anonimato se tiene que $d_{d,f}(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi'}{f} \big(d(w, \varphi)\big)$ y así

$$d_{d,f}(w, \Psi) = d_{d,f}\left(w, \Psi'\right)$$

   De igual manera se demuestra que $d_{d,f}(w', \Psi) = d_{d,f}(w', \Psi')$, lo que implica que

$$d_{d,f}\left(w, \Psi'\right) \preceq d_{d,f}\left(w', \Psi'\right)$$

   luego $w \leq_{\Psi'}^{d,f} w'$.

4. Sea $w \models \varphi$. Mostremos que existe $w' \models \varphi'$ tal que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w$.

   Consideremos $w' \models \varphi'$ tal que $d(w, w') = d(w, \varphi')$. Notemos que $d(w, \varphi) = d(w', \varphi') = 0$. Ahora bien,

$$d(w', \varphi) \leq d(w, w')$$

   de esta manera $d(w', \varphi) \leq d(w, \varphi')$. En virtud de la propiedad de monotonía de f tenemos que

$$f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \preceq f(d(w', \varphi'), d(w, \varphi')).$$

   De aquí se tiene que $f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \preceq f(d(w, \varphi), d(w, \varphi'))$, implicando que

$$d_{d,f}\left(w', \varphi \sqcup \varphi'\right) \preceq d_{d,f}\left(w, \varphi \sqcup \varphi'\right).$$

   Esto muestra que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,f} w$. ∎

Notación. La operación de concatenación de dos vectores cuyas coordenadas están en $\mathbb{R}^+$ será denotada por $\odot$.

Definición 16 *Diremos que una función de agregación f es pareto fuerte si para cualesquiera vectores $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$, con $|v_1| = |v_2|$ y $|v_3| = |v_4|$ se cumplen*

(*i*) $f(v_1) \preceq f(v_2) \wedge f(v_3) \preceq f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \preceq f(v_2 \odot v_4)$;

(*ii*) $f(v_1) \preceq f(v_2) \wedge f(v_3) \prec f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \prec f(v_2 \odot v_4)$

Diremos que una función de agregación f es pareto débil si cumple la condición (i) anterior y además la condición (ii') que se enuncia a continuación:

(*ii'*) $f(v_1) \prec f(v_2) \wedge f(v_3) \prec f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \prec f(v_2 \odot v_4)$

Proposición 2 *Sea d una pseudo distancia. Si f una función de agregación Pareto fuerte entonces la aplicación definida por que envía a cada conjunto de creencias Ψ en un preorden $\leq_{\Psi}^{d,f}$ es una asignación sincrética.*

La demostración de este resultado es directa de la proposición 1 y de las propiedades (*i*) y (*ii*) de la definición de Pareto fuerte.

Como corolario directo de esta proposición y del teorema de representación 1.

Corolario 2 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación Pareto fuerte de la proposición 2. Entonces el operador $\Delta^{d,f}$ es un operador de fusión IC.*

Proposición 3 *Sea d una pseudo distancia. Si f una función de agregación Pareto débil entonces la aplicación definida por que envía a cada conjunto de creencias Ψ en un preorden $\leq_{\Psi}^{d,f}$ es una asignación cuasi sincrética.*

La demostración de este resultado es directa de la proposición 1 y de las propiedades (*i*) y (*ii'*) de la definición de Pareto débil.

Como corolario directo de esta proposición y del teorema de representación 2

Corolario 3 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación Pareto débil. Entonces el operador $\Delta^{d,f}$ es un operador de cuasi fusión IC.*

La diferencia entre las tres familias de operadores que definiremos más adelante radica en la manera en que la distancia entre una interpretación y una base de creencias es usada para definir la distancia entre una interpretación y un conjunto de creencias, es decir en la función f que se va a considerar.

Definición 17 *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia max es definida por*

$$d_{d,Max}(w,\Psi) = \max_{\varphi\in\Psi} d(w,\varphi)$$

La función max es claramente una función de agregación. Como ya vimos esto induce un preorden sobre las interpretaciones de la siguiente manera:

$$w \leq_{\Psi}^{d,Max} w' \Leftrightarrow\ d_{d,Max}(w,\Psi) \leq d_{d,Max}\left(w',\Psi\right)$$

Definimos el correspondiente operador de fusión IC, $\Delta^{d,Max}$ como sigue:

$$[\Delta_{\mu}^{d,Max}(\Psi)] = min\big([\mu], \leq_{\Psi}^{d,Max}\ \big)$$

Teorema 5 *El operador $\Delta^{d,Max}$ es un operador de cuasi-fusión que cumple con (Arb) .*

Demostración:

Para ver que es un operador de cuasi-fusión basta ver, en virtud del corolario 3, la función max es una función de agregación Pareto débil. Que es de agregación es inmediato como ya lo observamos anteriormente. Las propiedades de Pareto débil se deducen directamente de las propiedades del máximo entre conjuntos.

Sólo nos queda por ver que la propiedad de 8 (de equidad) de las asignaciones (cuasi) sincréticas que como vimos implica (Arb) .

8 Supongamos que w, w' y w'' son interpretaciones tales que $w <_{\varphi}^{d,Max} w'$, $w <_{\varphi'}^{d,Max} w''$ y además $w' \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,Max} w''$. De esta manera

$d_{d,Max}\,(w,\varphi) \leq d_{d,Max}\,(w',\varphi)\,,\ d_{d,Max}\,(w,\varphi') \leq d_{d,Max}\,(w'',\varphi')$ y $d_{d,Max}\,(w',\varphi \sqcup \varphi') = d_{d,Max}\,(w'',\varphi \sqcup \varphi')$. Luego

$d(w,\varphi) < max\{d(w',\varphi), d(w',\varphi')\} = d_{d,Max}\,(w',\varphi \sqcup \varphi')$
$d(w,\varphi') < max\{d(w'',\varphi), d(w'',\varphi')\} = d_{d,Max}\,(w',\varphi \sqcup \varphi')$

lo que implica que

$$d_{d,Max}\left(w,\varphi \sqcup \varphi'\right) = max\{d(w,\varphi), d(w,\varphi')\} < d_{d,Max}\left(w',\varphi \sqcup \varphi'\right)$$

y por lo tanto $w <^{d,Max}_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$ ∎

La condición 6 no necesariamente se cumple, para esto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Consideremos las bases de creencias φ y φ' cuyos modelos son $[\varphi] = \{101, 100, 111\}$ y $[\varphi'] = \{110, 111\}$, y consideremos las interpretaciones $w = 101$ y $w' = 011$. Si consideramos la distancia de Hamming (número de posiciones en que las interpretaciones difieren), d_H, tenemos que:

$$d_H(w,\varphi) = 0, \qquad d_H(w,\varphi') = 1,$$

$$d_H(w',\varphi) = 1, \qquad d_H(w',\varphi') = 1$$

De esta manera $w <^{d_H,Max}_{\varphi} w'$ y $w <^{d_H,Max}_{\varphi'} w'$. Sin embargo

$$max\{d_H(w',\varphi), d_H(w',\varphi')\} = 1 = max\{d_H(w,\varphi), d_H(w,\varphi')\}$$

lo que implica $d_{d_h,Max}\,(w,\varphi \sqcup \varphi') = d_{d_h,Max}\,(w',\varphi \sqcup \varphi')$, y por lo tanto $w \simeq^{d_H,Max}_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$.

Ahora definiremos un nuevo operador a partir de la función suma (la suma de los elementos de un vector de números reales positivos). Esta función es claramente una función de agregación.

Definición 18 *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia Σ esta definida por*

$$d_{d,\Sigma}(w,\Psi) = \sum_{\varphi\in\Psi} d(w,\varphi)$$

Esto induce un preorden sobre las interpretaciones:

$$w \leq_{\Psi}^{d,\Sigma} w' \Leftrightarrow \; d_{d,\Sigma}(w,\Psi) \leq d_{d,\Sigma}\left(w',\Psi\right)$$

y el correspondiente operador de fusión $\Delta^{d\Sigma}$ definido por

$$[\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\Psi)] = min\big([\mu], \leq_{\Psi}^{d,\Sigma}\big)$$

El resultado de los operadores $\Delta^{d,\Sigma}$ puede ser considerado como la elección de la opción *más popular* entre las restricciones de integridad.

Este operador es en realidad un operador de fusión mayoritario, como lo establece el siguiente teorema, pero antes de ello mostremos la siguiente propiedad de la distancia $d_{d,\Sigma}$.

Lema 2 *Sea d una pseudo-distancia entre interpretaciones. Entonces, para cualesquiera Ψ y Ψ' conjuntos de creencias y w interpretación se tiene que*

$$d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi\sqcup\Psi'\right) = d_{d,\Sigma}(w,\Psi) + d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi'\right)$$

Demostración: Sabemos que

$$d_{d,\Sigma}(w,\Psi) = \sum_{\varphi\in\Psi} d(w,\varphi) \text{ y } d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi'\right) = \sum_{\varphi\in\Psi'} d(w,\varphi).$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} d_{d,\Sigma}(w,\Psi) + d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi'\right) &= \sum_{\varphi\in\Psi} d(w,\varphi) + \sum_{\varphi\in\Psi'} d(w,\varphi) \\ &= \sum_{\varphi\in\Psi\sqcup\Psi'} d(w,\varphi) \\ &= d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi\sqcup\Psi'\right) \end{aligned}$$

∎

Teorema 6 *Para cualquier pseudo-distancia d entre interpretaciones, el operador $\Delta^{d,\Sigma}$ es un operador mayoritario.*

Demostración: Para ver que el operador $\Delta^{d,\Sigma}$ es de fusion basta ver, en virtud del corolario 2, que la suma es una función de agregación Pareto fuerte. Esto último es bastante directo por la conmutatividad y la monotonía de la suma en cualquiera de sus argumentos. Las propiedades de Pareto fuerte se deducen del lema 2 y la monotonía. Así sólo falta ver que es mayoritario, lo que es equivalente a probar la propiedad 7 de las asignaciones sincréticas.

7. Supongamos w, w' interpretaciones tales que $w <^{d,\Sigma}_{\Psi'} w'$. De esta manera $d_{d,\Sigma}(w,\Psi') < d_{d,\Sigma}(w',\Psi')$. Para demostrar que $\exists n\ w <^{d,\Sigma}_{\Psi\sqcup(\Psi')^n} w'$ tenemos que demostrar que
$$d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi\sqcup(\Psi')^n\right) < d_{d,\Sigma}\left(w',\Psi\sqcup(\Psi')^n\right).$$
En virtud del lema 2 esto ocurre si, y sólo si,
$$d_{d,\Sigma}(w,\Psi) + n d_{d,\Sigma}\left(w,\Psi'\right) < d_{d,\Sigma}\left(w',\Psi\right) + n d_{d,\Sigma}\left(w',\Psi'\right).$$
Así basta con tomar
$$n > \frac{d_{d,\Sigma}(w,\Psi) - d_{d,\Sigma}(w',\Psi)}{d_{d,\Sigma}(w',\Psi') - d_{d,\Sigma}(w,\Psi')}$$
Note que por hipótesis el denominador es estrictamente positivo, luego tal n existe. ∎

Ahora vamos a definir la función $Gmax$. Si v es un vector de reales mayores o iguales a cero, denotamos $v\downarrow$ al vector obtenido de v ordenándolo en orden decreciente. Entonces definimos $Gmax(v) = v\downarrow$. Note así que los conjuntos $(\mathbb{R}^+)^n$ son enviados en $(\mathbb{R}^+)^n$ al cual ordenamos con el orden lexicográfico. Es fácil ver que $Gmax$ es una función de agregación.

Definición 19 *Sea $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de creencias y sea d una distancia entre interpretaciones. Para cada interpretación w construimos la lista $(d_1^w, d_2^w, \ldots, d_n^w)$ de distancias entre esta interpretación y las n bases de creencias en Ψ, es decir, $d_i^w = d(w, \varphi_i)$. Sea $d_{d,GMax}(w, \Psi)$ la lista obtenida de $(d_1^w, d_2^w, \ldots, d_n^w)$ al ordenarla de forma decreciente.*

De esta manera, si consideramos $\leq_{lex}$, el orden lexicográfico entre sucesiones de enteros con la misma longitud, definimos el siguiente preorden total

$$w \leq_{\Psi}^{d,Gmax} w' \;\Leftrightarrow\; d_{d,Gmax}(w, \Psi) \leq_{lex} d_{d,Gmax}\left(w', \Psi\right)$$

y el operador $\Delta^{d,Gmax}$ es definido por

$$[\Delta_{\mu}^{d,Gmax}(\Psi)] = min([\mu], \leq_{\Psi}^{d,Gmax})$$

De hecho $d_{d,GMax}\left((,w), \Psi\right) = \underset{\varphi\in\Psi}{Gmax}(d(w,\varphi))$ y $\Delta^{d,Gmax}$ es el operador definido a partir de d y la función $Gmax$ de la que pronto mostraremos es una función de agregación Pareto fuerte.

Supongamos L_1 y L_2 listas de números ordenados de forma decreciente. Denotamos por $L_1 \vec{\odot} L_2$ a la lista que se obtiene al ordenar de forma decreciente la concatenación de L_1 con L_2.

Notemos que de la definición de $d_{d,Gmax}$ tenemos que si Ψ y Ψ' son dos bases de creencias, para cualquier base de creencias w, $d_{d,Gmax}(w, \Psi \sqcup \Psi') = d_{d,GMax}(w, \Psi)\, \vec{\odot} d_{d,GMax}(w, \Psi')$. También, por medio de la definición, es fácil demostrar que el operador $\Delta^{d,Gmax}$ es un refinamiento del operador $\Delta^{d,Max}$.

Proposición 4 *Sea d una pseudo-distancia entre interpretaciones. Para cualesquiera restricción de integridad μ y cualquier conjunto de creencias Ψ, $\Delta_{\mu}^{d,GMax}(\Psi) \vdash \Delta_{\mu}^{d,Max}(\Psi)$.*

Demostración: Sea μ restricción de integridad, Ψ un conjunto de creencias y supongamos que $w \models \Delta_{\mu}^{G,Max}(\Psi)$. De esta manera $w \models \mu$, y para cada $w' \models \mu$ se tiene que $w \leq_{\Psi}^{d,GMax} w'$. Notemos que por definición tenemos que $d_{d,GMax}(w, \Psi) \leq_{lex} d_{d,GMax}(w', \Psi)$.

Supongamos que

$$d_{d,GMax}\left(w,\Psi\right)=(d_1^w,d_2^w,\ldots,d_n^w) \text{ y } d_{d,GMax}\left(w',\Psi\right)=(d_1^{w'},d_2^{w'},\ldots,d_n^{w'}).$$

Por definición sabemos que $d_1^w \geq d_i^w$ y $d_1^{w'} \geq d_i^{w'}$, para cada $1 \leq i \leq n$. De esta manera $d_1^w = \underset{\varphi\in\Psi}{max}\, d(w,\varphi)$ y $d_1^{w'} = \underset{\varphi\in\Psi}{max}\, d(w',\varphi)$, y en virtud del orden lexicográfico, $\leq_{lex}$, tenemos que $d_1^w \leq d_1^{w'}$. De esta manera $d_{d,Max}\left(w,\Psi\right) \leq d_{d,Max}\left(w',\Psi\right)$ para todo $w' \models \mu$, y por lo tanto $w \models \Delta_\mu^{d,Max}(\Psi)$. ∎

Lema 3 *Sean L_1, L_2 y L_3 lista de números enteros ordenados de forma decreciente con $|L_1| = |L_2|$. Si $L_1 \leq_{lex} L_2$, entonces $L_1\vec{\odot}L_3 \leq_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$.*

Demostración: Por inducción en el tamaño de L_3. En realidad el caso interesante es cuando $|L_3| = 1$, pues claramente si $L_3 = (a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)$ se tiene

$$L\vec{\odot}L_3 = (L\vec{\odot}(a_1,\ldots,a_{n-1}))\vec{\odot}(a_n)$$

Si $L_1 = L_2$ es trivial. Así supongamos que $L_1 \neq L_2$, lo que nos lleva a $L_1 <_{lex} L_2$. luego existe d'_j en la lista L_2 tal que $d_j \leq d'_j$ y si $k \in \overline{1,j-1}$ [5] se tiene que $d_k = d'_k$.

Sea $L_3 = (l)$. Si $l \leq d_j$, entonces $l \leq d'_j$. De esta manera las primeros j elementos de $L_1\vec{\odot}L_3$ y $L_2\vec{\odot}L_3$ son respectivamente los mismos de los vectores L_1 y L_2 lo que implica $L_1\vec{\odot}L_3 \leq_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$.

Por otro lado, si $l > d_j$ vamos a considerar dos casos: $l \geq d'_j$ o $l < dj'$. En el primer caso, como l va a coincidir con la i-ésima coordenada de la lista $L_2\vec{\odot}L_3$, para algún i en $\overline{1,j+1}$ y para ese mismo i l va a coincidir con la i-ésima coordenada de la lista $L_1\vec{\odot}L_3$. Así la situación será como se describe, más graficamente, a continuación

$$\begin{array}{ccccccccc} d_1 & d_2 & \ldots & d_{i-1} & l & d_i & \ldots & d_j \\ = & = & \cdots & = & = & = & \cdots & \wedge \\ d'_1 & d'_2 & \ldots & d'_{i-1} & l & d'_i & \ldots & d'_j \end{array}$$

[5] $\overline{1,n}$ denota el conjunto formado por los primeros n números naturales.

donde se ve claramente que $L_1 \vec{\odot} L_3 <_{lex} L_2 \vec{\odot} L_3$.

Si $l < d'_j$ entonces la j-ésima componente de $L_2 \vec{\odot} L_3$ sigue siendo d'_j y la j-ésima componente de $L_1 \vec{\odot} L_3$ es l (las primeras $j-1$ componentes son idénticas en ambos casos a las de L_2). Así, recapitulando, la situación es graficamente la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & \ldots & d_{j-1} & l & \ldots \\ \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \wedge & \cdots \\ d'_1 & d'_2 & \ldots & d'_{j-1} & d'_j & \ldots \end{array}$$

de donde se ve claramente que $L_1 \vec{\odot} L_3 \leq_{lex} L_2 \vec{\odot} L_3$. ∎

De forma análoga al lema anterior se demuestra el siguiente resultado.

Lema 4 *Sean L_1, L_2 y L_3 lista de números enteros ordenados de forma decreciente con $|L_1| = |L_2|$. Si $L_1 <_{lex} L_2$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_3 <_{lex} L_2 \vec{\odot} L_3$.*

Como corolario de los dos lemas anteriores, se tienen:

Corolario 4 *Sean L_1, L'_1, L_2, L'_2 listas de números enteros ordenados de forma decreciente tales que $|L_1| = |L'_1|$ y $|L_2| = |L'_2|$.*

(i) Si $L_1 \leq_{lex} L'_1$ y $L_2 \leq_{lex} L'_2$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L_1 \vec{\odot} L_2$.

(ii) Si $L_1 \leq_{lex} L_1$ y $L_2 <_{lex} L'_2$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_2 <_{lex} L_1 \vec{\odot} L_2$.

Demostración:

Demostremos sólo (i); (ii) se demuestra de forma análoga a (i), haciendo uso del lema 4. Supongamos que $L_1 \leq_{lex} L'_1$ entonces, por el lema 3, $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L'_1 \vec{\odot} L_2$ y $L_2 \vec{\odot} L'_1 \leq_{lex} L'_2 \vec{\odot} L'_1$. Como $L'_1 \vec{\odot} L_2 = L_2 \vec{\odot} L'_1$ y en virtud de la transitividad de la relación de orden $\leq_{lex}$ se tiene que $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L'_1 \vec{\odot} L'_2$. ∎

Mostremos ahora bien que los operadores $\Delta^{d,GMax}$ son operadores de arbitraje.

Teorema 7 *Para cualquier d una pseudo-distancia entre interpretaciones, el operador $\Delta^{d,GMax}$ define un operador de arbitraje.*

Demostración: Para ver que es un operador de fusión basta ver, por el corolario 2, que $Gmax$ es una función de agragación pareto fuerte. Que es de agregación es directo de la definición. Que se cumplen las propiedades de Pareto fuerte es consecuencia inmediata del corolario 4.

Nos queda por demostrar la propiedad de arbitraje lo cual es equivalente a la propiedad 8 para las asignaciones sincréticas:

8. Supongamos que w_1, w_2, w_3 son interpretaciones tales que $w_1 <_{\varphi}^{d,GMax} w_2$, $w_1 <_{\varphi'}^{d,GMax} w_3$ y que $w_2 \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,GMax} w_3$, veamos que $w_1 <_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,GMax} w_2$.

   Consideremos $d(w_i, \varphi) = d_{\varphi}^{w_i}$ y $d(w_i, \varphi') = d_{\varphi'}^{w_i}$, para cada $i = 1, 2, 3$, y notemos que $d_{\varphi}^{w_1} < d_{\varphi}^{w_2}$ y $d_{\varphi'}^{w_1} < d_{\varphi'}^{w_3}$. Ahora bien, como $w_2 \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,GMax} w_3$, tenemos los siguientes casos.

   Caso 1 Si $d_{\varphi}^{w_2} = d_{\varphi}^{w_3}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d_{\varphi}^{w_1} &< d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}, \\
d_{\varphi'}^{w_1} &< d_{\varphi'}^{w_3} = d_{\varphi'}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}.
\end{aligned}
$$

   De esta manera $d_{d,GMax}(w_1, \varphi \sqcup \varphi') <_{lex} d_{d,GMax}(w_2, \varphi \sqcup \varphi')$, y por lo tanto $w_1 <_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,GMax} w_2$

   Caso 2 Si $d_{\varphi}^{w_2} = d_{\varphi'}^{w_3}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
d_{\varphi}^{w_1} &< d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}, \\
d_{\varphi'}^{w_1} &< d_{\varphi'}^{w_3} = d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\},
\end{aligned}
$$

   lo que implica $d_{d,GMax}(w_1, \varphi \sqcup \varphi') <_{lex} d_{d,GMax}(w_2, \varphi \sqcup \varphi')$, y así $w_1 <_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,GMax} w_2$. ∎

Ahora, ilustremos el comportamiento de esta familias de operadores con un ejemplo.

Ejemplo 3 En una reunión de la directiva de un complejo recreacional, el presidente de dicho complejo propone, para el año venidero, la construcción de una cancha de tenis, una montaña rusa y una pista de carting. Durante la reunión la directiva se da cuenta que si dos de estas atracciones son construidas, la renta se incrementará significativamente para los accionistas del complejo.

Denotemos por C, M, P las construciones de la cancha de tenis, la montaña rusa y la pista de carting, respectivamente, y denotemos por I el incremento de la renta.

La directiva notó que la construcción de dos o más de las atracciones conducirá a un importante incremento sobre la renta

$$\mu = (C \wedge M) \vee (C \wedge P) \vee (M \wedge P) \rightarrow I$$

Hay cuatro miembros de la directiva cuyas creencias serán denotadas por φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Así, $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Dos de los miembros de la directiva quieren construir las tres atracciones y no les importa el incremento de la renta ($\varphi_1 = \varphi_2 = C \wedge M \wedge P$). El tercero de los miembros piensa que la construcción de cualquiera de las atracciones causará, el cualquier momento, un aumento en la renta y quiere que los accionistas paguen la renta más baja posible, de esta forma el se opone a cualquier construcción de ($\varphi_3 = \neg C \wedge \neg M \wedge \neg P \neg I$). El último directivo piensa que el complejo en realidad necesita la cancha de tenis y la pista de carting pero no desea un incremento en la renta ($\varphi_3 = C \wedge P \neg I$).

Las variables proposicionales C, M, P e I serán consideradas en ese orden para las valuaciones. Así:

- $[\mu] = \mathcal{W} - \{0110, 1010, 1100, 1110\}$
- $[\varphi_1] = [\varphi_2] = \{1110, 1111\}$
- $[\varphi_3] = \{0000\}$
- $[\varphi_4] = \{1010, 1110\}$

Los resultados de las distancias están en la tabla 1.1. Las Filas sombreadas corresponden a las interpretaciones rechazadas por la restricción de integridad. De esta manera, los resultados han de ser encontrados entre las interpretaciones que no están sombreadas.

Con el operador $\Delta^{d_H, Max}$, la distancia la distancia mínima es 2 y las interpretaciones escogidas son

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\Psi)] = \{0010, 0011, 0100, 1000, 1001\}$$

Así la decisión que más se ajusta a los deseos del grupo es entonces no incrementar la renta y construir una de las tres atracciones, o incrementar la renta y construir la cancha de tenis o sino la pista de carting.

Podemos observar en este ejemplo por qué el operador $\Delta^{d_H,Max}$ no es un operador de fusión IC. Por ejemplo las interpretaciones 0010 y 0011 son escogidas por $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\Psi)$, aunque 0010 es mejor para φ_3 y φ_4 que 0011, siendo así que estas dos son igualmente preferidas por φ_1 y φ_2. Parece natural entonces que 0010 es globalmente preferida a 0011.

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$d(w,\varphi_4)$	$dist_{Max}$	$dist_{\Sigma}$	$dist_{GMax}$
0000	3	3	0	2	3	8	(3,3,2,0)
0001	3	3	1	3	3	10	(3,3,3,1)
0010	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
0011	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
0100	2	2	1	2	**2**	7	(2,2,2,1)
0101	2	2	2	3	3	9	(3,2,2,2)
0110	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
0111	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
1000	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
1001	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
1010	1	1	2	0	2	4	(2,1,1,0)
1011	1	1	3	1	3	6	(3,1,1,1)
1100	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
1101	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
1110	0	0	3	0	3	3	(3,0,0,0)
1111	0	0	4	1	4	**5**	(4,1,0,0)

Tabla 1.1: Tabla 1

La familia de operadores $\Delta^{d,GMax}$ ha sido construida con la idea de que sea más selectiva que la familia $\Delta^{d,Max}$ al tener estos requerimientos en cuenta. Con el operador $\Delta^{d_H,GMax}$ el resultado es

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\Psi)] = \{0010, 1000\}$$

así la decisión en este caso es construir la pista de carting o la cancha de tenis sin incrementar la renta.

Pero si uno escoge $\Delta^{d_H,\Sigma}$ para resolver el conflicto de acuerdo a los deseos de la mayoría, el resultado es entonces

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\Psi)] = \{1111\}$$

y la decisión será construir las tres atracciones e incrementar la renta.

La elección mayoritaria, a menudo parece más democrático que los otros métodos pero, por ejemplo en este caso, este resultado sólo se dará a cabo si φ_3 acepta obedecer esta decisión que es totalmente opuesta a su opinión. Si φ_3 y a quienes representa deciden no pagar la mensualidad, los trabajos tal vez no se lleven a cabo por la carencia de dinero. Entonces si una decisión requiere de la decisión de todos sus miembros, un método más consensual, como el arbitraje, parece adecuado. Este tipo de eventos está altamente relacionados con la teoría de elección social.

1.4. Fusión lógica y la teoría de elección social

Gracias al teorema de representación, podemos resaltar un estrecho vínculo entre la fusión lógica y métodos de agregación de preferencias. De esta manera será interesante ver ciertas similitudes que existen entre los operadores de fusión y la teoría de elección social.

Recordemos que la teoría de elección social estudia, *grosso modo*, métodos para elegir las mejores alternativas dado un conjunto de preferencias individuales sobre esas alternativas (ver por ejemplo [Arrow 1963], [Kelly 1988], [Sen 1979], [Sen 1982]) .

Sea X un conjunto no vacío. Los elementos de X son llamados *alternativas*. Estas alternativas tienen que ser exclusivas, y además supondremos que estas son una descripción completa del mundo.

Usualmente cuando uno tiene que hacer una elección, no todas las alternativas están disponibles. Algunas restricciones limitan el número de estas alternativas a un subconjunto V de X. Tal conjunto es llamado *agenda*.

Una *relación de preferencia individual* es un preorden total $\leq_i$ sobre X que denota las preferencias del individuo i sobre el conjunto de alternativas X.

Llamaremos *perfil* a un multiconjunto de relaciones de preferencias individuales.

Una *función de elección* C es una función que escoge entre las alternativas de una agenda V un conjunto de alternativas (las mejores) $C(V)$, tal que $C(V) \neq \emptyset$ y $C(V) \subset V$.

Una *regla de elección social* es una función f tal que para cada perfil u, $f(u) = C$, donde C es una función de elección (ver fig.1.2). En otras palabras, una regla de elección social es una función que asocia a cada perfil la correspondiente función de elección.

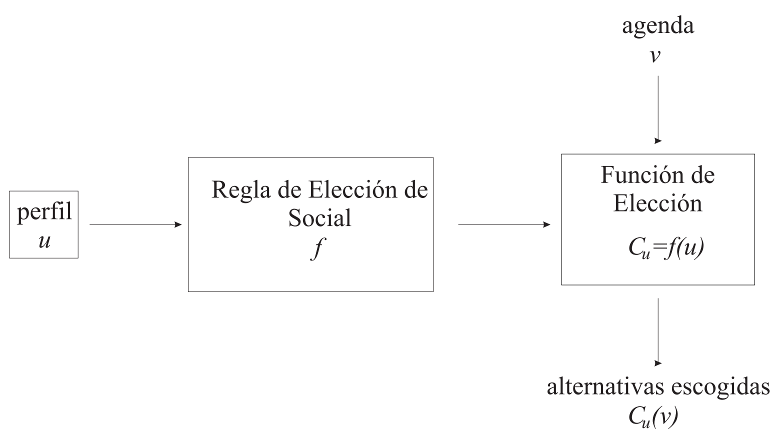

Fig. 1.2: Operadores de Fusión Lógica

Con estos conceptos establecidos, notemos que una alternativa es una interpretación (completa y exclusiva descripción del mundo). Los individuos están de igual forma determinados tanto en la la teoría de elección social como en la lógica de la fusión de bases, a través de la variable i.

Si un individuo i posee una base de creencia φ_i, dada una distancia d, a esta base le corresponde un preorden total $\leq^d_{\varphi_i}$. Así la base de creencias tomará el lugar de la relación de las preferencias individuales.

Un perfil es un conjunto de preferencias individuales. De esta forma a dicho conjunto le corresponde un conjunto de creencias.

Una agenda es un subconjunto de alternativas, es decir, una base μ que representa la restricción de integridad para la fusión.

Las reglas que vamos a considerar son los operadores de fusión. Estos agrupan las relaciones de preferencias individuales en una preferencia colectiva. Las alternativas escogidas por la función de elección son las mismas alternativas para su relación de preferencia colectiva. Esto es, las correspondientes funciones de elección son las funciones $f_u(V) = min(V, \leq_u)$, donde el preorden u es dada por la regla de elección (El operador de fusión).

La correspondencia entre la teoría de elección social y la fusión lógica es resumida en la tabla1.2 y las similitudes en su modo de operación se ven en la figura 1.3.

Característica	**Fusión Lógica**	**T.E.S**
individuos	i	i
preferencias personales	φ_i	$\leq_i$
perfiles	$\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$	$u = (\leq_1, \ldots, \leq_n)$
agenda	μ	V
función de elección	$\leq_\Psi$	C_u
alternativas escogidas	$[\Delta_\mu(\Psi)] = min([\mu], \leq_\Psi)$	$C_u(V)$

Tabla 1.2: Operadores de fusión vs. teoría de elección social

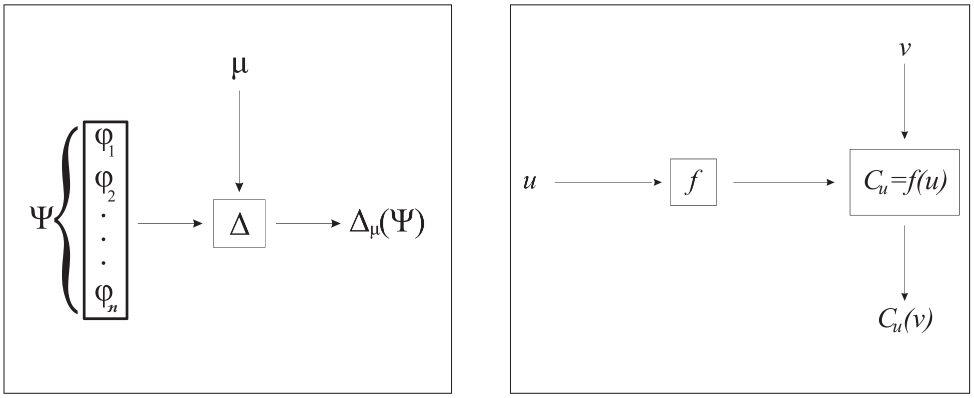

Fig. 1.3: Teoría de Elección Social Vs. Fusión Lógica

CAPÍTULO 2

MANIPULABILIDAD DE LOS OPERADORES DE FUSIÓN VÍA ÍNDICES

En este capítulo estudiamos algunas nociones introducidas en [Everare et al. 2004] y [Everare et al. 2007] concernientes a la manipulación de operadores de fusión.

2.1. Indices de satisfacción

Una pregunta natural e importante es la siguiente: ¿es posible para un agente dado mejorar el resultado del proceso de fusión con respecto a su propio punto de vista al mentir sobre sus verdaderas metas o creencias, dado que este conoce las creencias de cada agente del grupo y la forma en que son fusionadas? Si esta pregunta es respondida de forma afirmativa, entonces el operador es manipulable (el individuo puede beneficiarse al mentir). De esta forma, un operador de fusión es manipulable si se puede encontrar un conjunto de creencias Ψ, una restricción de integridad μ y dos bases φ y φ' tal que el resultado de la fusión de las bases en Ψ' (que resulta de substituir una ocurrencia de φ por φ' en Ψ) *es mejor* para el individuo cuya base esta dada por φ, que el resultado de fusionar Ψ .

Una de las dificultades de la idea expresada en el párrafo anterior es la definición formal de *ser mejor para* φ. Esto se estudia en este capítulo vía los índices definidos más abajo y en el próximo capítulo vía los levantamientos.

Denotaremos por $\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]$ al resultado de substituir una ocurrencia de φ por φ' en Ψ.

Definición 20 *Sea $i : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longmapsto \mathbb{R}$ una función (un índice). Un operador Δ es manipulable por i si, y sólo si, existe un conjunto de creencias Ψ, una restricción de integridad μ, y bases de creencias φ y φ', con φ en Ψ tales que*

$$i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) > i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi))$$

A la función i la denominaremos índice de satisfacción. Siempre que Δ sea manipulable por un índice i, a la upla formada por $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ la denominaremos situación de manipulabilidad (relativa a i). Además, si el operador Δ es manipulable por un índice i por medio de una situación $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$, diremos que Ψ es manipulable por φ relativo a Δ, i y μ. A la base de creencias φ lo denominaremos base inicial.

Los índices tratan de medir cuan similares son dos bases de creencias. Más grande será el resultado, más cerca estarán dos bases.

Los siguientes tres índices son significativos cuando ninguna información adicional está disponible. Denotemos por φ_Δ al resultado de la fusión, es decir, $\varphi_\Delta = \Delta_\mu(\Psi)$.

Definición 21 (Indice drástico débil)

$$i_{d_w}(\varphi, \varphi_\Delta) = \begin{cases} 1 & si \quad \varphi \wedge \varphi_\Delta \nvdash \bot \\ 0 & si \quad \varphi \wedge \varphi_\Delta \vdash \bot \end{cases}$$

Este indicador toma valor 1 si el resultado de la fusión es consistente con la base φ, y 0 en el otro caso. Esto significa que el individuo se considera plenamente satisfecho tan pronto como sus bases de creencias sea consistente con el resultado de la fusión.

Definición 22 (Indice drástico fuerte)

$$i_{d_s}(\varphi, \varphi_\Delta) = \begin{cases} 1 & si \quad \varphi_\Delta \models \varphi \\ 0 & si \quad \varphi_\Delta \not\models \varphi \end{cases}$$

Este indicador toma valor 1 si la base del individuo es una consecuencia lógica del resultado de la fusión, y 0 si no. Para estar plenamente satisfecho el individuo debe “imponer” sus creencias al grupo en pleno.

El último índice que definiremos no es booleano como los anteriores. Esto nos conduce a una noción más gradual de satisfacción. El grado de compatibilidad de φ con φ_Δ es el número (normalizado) de modelos de φ que son modelos de φ_Δ también.

Definición 23 (Indice de probabilístico)

$$i_p(\varphi, \varphi_\Delta) = \begin{cases} \dfrac{|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]|}{|[\varphi_\Delta]|} & si \quad [\varphi_\Delta] \neq \emptyset \\ \\ 0 & si \quad [\varphi_\Delta] = \emptyset \end{cases}$$

$i_p(\varphi, \varphi_\Delta)$ mide la probabilidad de obtener un modelo de φ de una muestra uniforme de los modelos de φ_Δ. Este indicador toma su valor mínimo cuando ningún modelo de φ es modelo de φ_Δ, y toma su valor máximo cuando cada modelo de φ_Δ es modelo de φ.

Hay relaciones entre estos índices en cuanto a la manipulabilidad se refiere.

Proposición 5 *Si un operador es manipulable por i_{d_w}, entonces es manipulable por i_p con la misma situación de manipulabilidad.*

Demostración:

Supongamos que Δ es manipulable por i_{d_w}. Así existe una situación de manipulabilidad $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ tal que

$$i_{d_w}(\varphi, \varphi'_\Delta) > i_{d_w}(\varphi, \varphi_\Delta)$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu\big(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)$.

De la definición de i_{d_w} se tiene que $\varphi \wedge \varphi_\Delta$ es inconsistente y $\varphi \wedge \varphi'_\Delta$ es consistente, implicando que $[\varphi] \cap [\varphi_\Delta] = \emptyset$ y $[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] \neq \emptyset$. De esta manera $[\varphi'_\Delta] \neq \emptyset$, conduciéndonos a que $i_p(\varphi, \varphi_\Delta) = 0$ e $i_p(\varphi, \varphi'_\Delta) > 0$. Así Δ es manipulable por i_p. ∎

Proposición 6 *Sea Δ un operador que genera sólo bases consistentes. Si Δ es manipulable por i_{d_s}, también lo es por i_p con la misma situación de manipulabilidad.*

Demostración:

Sea Δ un operador que genera sólo bases consistentes y supongamos que Δ es manipulable por i_{d_s}. De esta manera existen $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ tales que

$$i_{d_s}(\varphi, \varphi'_\Delta) > i_{d_s}(\varphi, \varphi_\Delta)$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu\big(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)$.

De la definición de i_{d_s} tenemos que $\varphi_\Delta \not\models \varphi$ y $\varphi'_\Delta \models \varphi$, lo que nos dice que $[\varphi_\Delta] \not\subset [\varphi]$ y $[\varphi'_\Delta] \subset [\varphi]$. Por otro lado, puesto que φ_Δ y φ'_Δ son consistentes se tiene que $[\varphi_\Delta] \neq \emptyset$ y $[\varphi'_\Delta] \neq \emptyset$.De esta forma

$$\begin{array}{lcl} [\varphi] \cap [\varphi_\Delta] \not\subset [\varphi_\Delta] & \Longrightarrow & i_p(\varphi, \varphi_\Delta) < 1 \\ [\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] = [\varphi_\Delta] & \Longrightarrow & i_p(\varphi, \varphi'_\Delta) = 1 \end{array}$$

Así Δ es manipulable por i_p. ∎

A pesar de estos dos resultados anteriores, la no manipulabilidad por i_{d_w} y no manipulabilidad por i_{d_s} son lógicamente independientes, es decir, un operador puede ser no manipulable por uno de ellos sin serlo para el otro, y puede ser manipulable para ambos o para ninguno. Esto se será demostrado a través de una serie de proposiciones y ejemplos que veremos mas adelante.

Concluyamos esta sección con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 Pedro, Maria y Alan siempre pasan las tardes juntos. Ellos están planeando que harán esta tarde. María no quiere salir a comer. Alan no quiere quedarse en casa, así que el quiere ir a cenar a un restaurant o al cine. Pedro quiere ir a un restaurante a cenar pero no quiere ir al cine. Si uno usa el operador de fusión $\Delta^{d_H,\Sigma}$ par determinar la meta del grupo, entonces la meta del grupo será ir a cenar y no al cine. En efecto:

Consideremos las variables proposicionales m: *ir al cine* y r: *ir al restaurante a cenar*, tomadas en este orden. Las metas de María, Alan y Pedro están dadas, respectivamente, por:

- $\varphi_1 = \neg r$, cuyos modelos son $\{00, 10\}$

- $\varphi_2 = m \vee r$, cuyos modelos son $\{01, 10, 11\}$
- $\varphi_3 = \neg m \wedge r$, cuyos modelos son $\{01\}$

La situación no posee restricción de integridad alguna: $\mu = \top$.

$[\top]$	$d(w, \varphi_1)$	$d(w, \varphi_2)$	$d(w, \varphi_3)$	$dist_\Sigma$
00	0	1	1	2
01	1	0	0	1
10	0	0	2	2
11	1	0	1	2

Tabla 2.1: Tabla de cálculos

La tabla 2.1 nos muestra que $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})] = \{01\} = [\neg m \wedge r]$, implicando que $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})$ es inconsistente con φ_1. Sin embargo, si maría notifica que ella quiere ir al cine y no quiere ir a un restaurante a cenar ($\varphi_1' = m \wedge \neg r$, con $[\varphi_1'] = \{10\}$), entonces, como se observa en la tabla 2.2, $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\})] = \{01, 10, 11\}$, de esta manera $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\})$ es consistente con φ_1. Esto nos muestra que

$$i_{d_w}\big(\varphi, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}\big(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\}\big)\big) > i_{d_w}\big(\varphi, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})\big)$$

Así, el resultado que obtiene María mintiendo es más satisfactorio para ella.

$[\top]$	$d(w, \varphi_1')$	$d(w, \varphi_2)$	$d(w, \varphi_3)$	$dist_\Sigma$
00	1	1	1	3
01	2	0	0	2
10	0	0	2	2
11	1	0	1	2

Tabla 2.2: Tabla de cálculos

2.2. Resultados de manipulabilidad

De manera general, veremos que existen familias de operadores manipulables por los tres índices que consideramos.

Sin embargo, imponer ciertas restricciones puede conducir a la no manipulabilidad. Una primera restricción atañe el número de bases a ser fusionadas. Un caso interesante es cuando $|\Psi| = 2$ donde, de vez en cuando, podemos alcanzar la no manipulabilidad, mientras que para conjuntos de creencias grandes el operador es manipulable.

Un segundo parámetro es la completitud de las bases de creencias del agente que dirige la manipulación. En algunos casos para tales bases de creencias la manipulación no es posible.

Un tercer parámetro significativo es la presencia de restricción de integridad. A veces agregar una restricción de integridad no trivial ($\top \not\models \mu$) puede dar una posible manipulación, mientras que no es el caso cuando no existe restricción de integridad alguna ($\mu \longleftrightarrow \top$). Por otro lado, agregar una restricción de integridad puede impedir alguna manipulación (simplemente al escoger una restricción μ que no sea consistente con la base φ del individuo manipulador) la cual podría ser posible de otra forma.

Un resultado general de no manipulabilidad para los operadores de fusión IC por medio de los tres índices definidos anteriormente, se obtiene cuando la distancia drástica d_D es considerada.

Proposición 7 *Sea f una función de agregación. $\Delta^{d_D,f}$ es no manipulable por i_p, i_{d_w} e i_{d_s}.*

Demostración: En virtud de las proposiciones 28 y 6, es suficiente demostrar no manipulabilidad del operador $\Delta^{d_D,f}$ por el índice de probabilidad.

Razonemos por el absurdo: supongamos que existe una situación $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ tal que

$$i_p(\varphi, \Delta_\mu^{d_D,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)) > i_p(\varphi, \Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi)) \tag{2.1}$$

De esta manera

$$\frac{|[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta]|}{|[\varphi'_\Delta]|} > \frac{|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]|}{|[\varphi_\Delta]|}$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu^{d_D,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$.

Veamos primero lo siguiente.

Afirmación 1

$$\min_{w \models \mu} d_{d_D,f}(w, \Psi) = \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Notemos primero que $i_p(\varphi, \varphi_\Delta) \neq 1$, pues de lo contrario $i_p(\varphi, \varphi_\Delta)$ toma un valor máximo lo que contradice (2.1).

Como $i_p(\varphi, \varphi_\Delta) < 1$, tenemos que $|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]| < |[\varphi_\Delta]|$, implicando que al menos un modelo de φ_Δ no satisface a φ. Así

$$\exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu;\ d_{d_D,f}\left(w', \Psi\right) = \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}(w, \Psi)$$

Por otro lado, puesto que $w' \models \neg\varphi$, tenemos que $d_D(w', \varphi) = 1$, siendo este valor maximal. De esta forma obtenemos que $d_D(w', \varphi') \leq d_D(w', \varphi)$.

Como la función f es no decreciente, tenemos que

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\right) \geq d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Pero $w' \models \varphi_\Delta$, es decir $d_{d_D,f}(w', \Psi) = \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}(w, \Psi)$

Luego, como $d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \geq \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$, tenemos que

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\right) \geq \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Así

$$\min_{w \models \mu} d_{d_D,f}(w, \Psi) \geq \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.2}$$

Por otro lado, notemos que $i_p(\varphi, \varphi'_\Delta) \neq 0$, lo que nos permite encontrar al menos un modelo w'' de $\varphi \wedge \mu$ que satisface φ'_Δ, es decir:

$$\exists\, w'' \models \varphi \wedge \mu \text{ y } d_{d_D,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \min_{w \models \mu} d_{d_D,f}(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])$$

Como $w'' \models \varphi$ se tiene que $d_D(w'', \varphi) = 0$, y como este valor es minimal tenemos que

$d_D(w'', \varphi) \leq d_D(w'', \varphi')$, más aún

$$d_{d_D,f}\left(w'', \Psi\right) \leq d_{d_D,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right),$$

De la definición de *min* y puesto que $w'' \models \mu$ tenemos que

$$\underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\right) \leq \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.3}$$

De esta manera, de (2.2) y (2.3) obtenemos que

$$\underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\right) = \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Demostremos ahora que sólo podemos incrementar el número de modelos de $\neg\varphi$ en φ_Δ, y disminuir el número de modelos de φ en φ'_Δ.

– Sea w' modelo de $\neg\varphi$ el cual es modelo de φ_Δ. De esta manera $d_D(w', \varphi) = 1$, la cual es una distancia maximal. De esta manera

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d_D,f}\left(w', \Psi\right) \tag{2.4}$$

Por otro lado, como $w' \models \varphi_\Delta$, entonces

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\right) = \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\right) \tag{2.5}$$

Ahora bien de la afirmación 1, (2.4) y (2.5) obtenemos que

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right),$$

y por lo tanto

$$d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Así, si $w \models \mu$ entonces $d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$, lo que nos conduce a que

$$\forall\, w \models \mu, \;\; w' \leq^{d_D,f}_{\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]} w$$

Así, $w' \in [\varphi'_\Delta]$, lo que demuestra que todo modelo de φ_Δ y de $\neg\varphi$, es modelo de φ'_Δ.

De aquí se deduce que:

$$[\neg\varphi] \cap [\varphi_\Delta] \subset [\neg\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] \tag{2.6}$$

– Consideremos ahora un modelo w de φ y de φ'_Δ: $w \models \varphi'_\Delta \wedge \varphi$.

De esta manera $d_D(w,\varphi) = 0$, implicando que $d_D(w,\varphi) \leq d_D(w,\varphi')$ y, por ser f una función no decreciente

$$d_{d_D,f}\,(w,\Psi) \leq d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.7}$$

Por otro lado, como $w \models \varphi'_\Delta$ tenemos que $d_{d_D,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \underset{w' \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$. lo que junto con 2.7 nos dice:

$$d_{d_D,f}\,(w,\Psi) \leq \underset{w' \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right).$$

y en virtud del la afirmación 1 tenemos que $d_{d_D,f}\,(w,\Psi) \leq \underset{w' \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\,(w',\Psi)$. Por lo tanto

$$d_{d_D,f}\,(w,\Psi) = \underset{w' \models \mu}{min}\, d_{d_D,f}\left(w',\Psi\right)$$

De esta manera $w \models \varphi_\Delta$, lo que nos permite concluir que todo modelo de φ'_Δ y de φ es modelo de φ_Δ:

$$[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] \subset [\varphi] \cap [\varphi_\Delta] \tag{2.8}$$

Ahora bien, como $[\varphi] \cap [\neg\varphi] = \emptyset$ tenemos que

$$\begin{aligned} |[\varphi_\Delta]| &= |[\varphi_\Delta] \cap [\varphi]| + |[\varphi_\Delta] \cap [\neg\varphi]| \\ |[\varphi'_\Delta]| &= |[\varphi'_\Delta] \cap [\varphi]| + |[\varphi'_\Delta] \cap [\neg\varphi]| \end{aligned}$$

Consideremos $\alpha = |[\varphi_\Delta] \cap [\varphi]|$, $\beta = |[\varphi_\Delta] \cap [\neg\varphi]|$, $\alpha' = |[\varphi'_\Delta] \cap [\varphi]|$ y $\beta' = |[\varphi'_\Delta] \cap [\neg\varphi]|$. (2.6) y (2.8) dicen $\alpha' \leq \alpha$ y $\beta \leq \beta'$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \alpha' \leq \alpha \wedge \beta \leq \beta' &\implies \alpha'\beta \leq \alpha\beta' \\ &\implies \alpha' \cdot \alpha + \alpha' \cdot \beta \leq \alpha' \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta' \\ &\implies \alpha'(\alpha+\beta) \leq \alpha(\alpha'+\beta') \\ &\implies \frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Como $\alpha + \beta = |[\varphi_\Delta]|$ y $\alpha' + \beta' = |[\varphi'_\Delta]|$ entonces

$$\frac{|[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta]|}{|[\varphi'_\Delta]|} \leq \frac{|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]|}{|[\varphi_\Delta]|}$$

lo que contradice nuestra suposición. Luego $\Delta^{d_D,f}$ es no manipulable. ∎

Como vimos en el ejemplo 4, la familia obtenida al considerar la distancia de Dalal es manipulable. Ahora hagamos un enfoque en esta familia y consideremos sucesivamente tres operadores obtenidos al considerar Σ, $Gmax$ y Max como funciones de agregación.

En cuanto a $\Delta^{d_H,\Sigma}$, el número de bases y la presencia de restricciones de integridad son significativas. Veamos primero que $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable en el caso general.

Proposición 8 *El operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable para i_{d_w}, i_{d_s} e i_p, incluso si hay solamente dos bases envueltas en el proceso de fusión.*

Demostración: El siguiente ejemplo demuestra la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ para i_{d_w}. Consideremos $\mu = a \vee b$ y las dos bases φ_1 y φ_2 definidas por sus respectivos conjuntos de modelos: $[\varphi_1] = \{00, 01\}$ y $[\varphi_2] = \{10\}$.

$[\mu]$	$d(w, \varphi_1)$	$d(w, \varphi_2)$	$d(w, \varphi'_1)$	$dist_\Sigma$	$dist'_\Sigma$
01	0	2	0	2	2
10	1	0	2	1	2
11	1	1	1	2	2

Tabla 2.3: Tabla de cálculos

Notemos que los cálculos de la tabla 2.3 nos muestran que $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{10\}$ lo que nos dice que $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ no es consistente con φ_1. De esta manera

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0.$$

Por otro lado, supongamos que el agente cuya base esta dada por φ_1 da como base φ'_1, con $[\varphi'_1] = \{01\}$ es vez de φ_1. Así, como se observa en la tabla 2.3,

$[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{01, 10, 11\}$, de esta forma $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)$ es consistente con φ_1, implicando que$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = 1$, logrando así la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ por el índice drástico débil, incluso si hay dos bases en el conjunto de creencias.

Como acabamos de ver que es manipulable por i_{d_w}, por la proposición 28, ya sabemos que es manipulable para i_p. Así, sólo queda por ver que es manipulable para i_{d_s}.

El siguiente ejemplo demuestra la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ por el índice i_{d_s}. Consideremos la restricción $\mu = (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ y las dos bases φ_1 y φ_2 definidas por sus conjuntos de modelos: $[\varphi_1] = \{000, 111\}$ y $[\varphi_2] = \{000, 001\}$.

$[\mu]$	$d(w, \varphi_1)$	$d(w, \varphi_1')$	$d(w, \varphi_2)$	$dist_{\Sigma}$	$dist'_{\Sigma}$
100	1	2	1	2	3
110	1	1	2	3	3
111	0	0	2	2	2

Tabla 2.4: Tabla de cálculos

En la tabla 2.4 se observa que $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{100, 111\}$, lo que nos dice que $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$, y por lo tanto $i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$.

Ahora bien, si el individuo que tiene como base φ_1 cambia sus creencias por φ_1', con $[\varphi_1'] = \{111\}$, obtenemos que $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{111\}$ (ver tabla 2.4), implicando que $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$ y de esta forma $i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = 1$. ∎

Si consideramos d una distancia cualquiera entre interpretaciones y si ninguna restricción de integridad es considerada, es decir $\mu \longleftrightarrow \top$, la familia de operadores $\Delta^{d,\Sigma}$ es no manipulable para los índices i_{d_w} e i_{d_s} cuando consideramos solamente dos bases de creencias; pero antes de demostrar este resultado veamos primero el siguiente lema.

Lema 5 *Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias. Entonces, para cualquier distancia d, $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_1$ y $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ son consistentes.*

Demostración: Si φ_1 es consistente con φ_2, entonces de (IC3) se tiene que

$$\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2,$$

con lo que culmina esta parte de la demostración.

De esta manera supongamos que φ_1 y φ_2 son inconsistentes entre sí, y consideremos $w_1 \models \varphi_1$ y $w_2 \models \varphi_2$ tales que

$$d(w_1, w_2) = min\{d(w, w')|w \models \varphi_1 \text{ y } w' \models \varphi_2\}$$

Veamos que $d(w_1, \varphi_2) = d(w_2, \varphi_1) = d(w_1, w_2)$.

Por un lado $d(w_1, \varphi_2) \leq d(w_1, w_2)$ y para cada $w \models \varphi_1$ tenemos que $d(w_1, w_2) \leq d(w_2, w)$, implicando que $d(w_1, w_2) \leq d(w_2, \varphi_1)$ y por lo tanto $d(w_1, \varphi_2) \leq d(w_2, \varphi_1)$. Del mismo modo se demuestra que $d(w_2, \varphi_1) \leq d(w_1, \varphi_2)$ lo que nos conduce a que $d(w_1, \varphi_2) = d(w_2, \varphi_1)$, y como $d(w_2, \varphi_1) \leq d(w_2, w_1)$ entonces que $d(w_1, w_2) = d(w_2, \varphi_1)$.

Ahora bien mostremos que $w_1, w_2 \in min\big(\mathcal{W}, \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2}^{d,\Sigma}\big)$.

Notemos que, en virtud del lema 2,

$$d_{d,\Sigma}\left(w_1, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) = d(w_1, \varphi_2) = d(w_2, \varphi_1) = d_{d,\Sigma}\left(w_2, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right). \tag{2.9}$$

Ahora bien, consideremos w una interpretación arbitraria. Para cada $w' \models \varphi_1$ y $w'' \models \varphi_2$ se tiene por desigualdad triangular y de la elección de w_1 y w_2 que

$$d(w_1, w_2) \leq d(w, w') + d(w, w''),$$

y de esta forma $d(w_1, w_2) \leq d(w, \varphi_1) + d(w, \varphi_2)$. En virtud del lema 2 y de (2.9) obtenemos

$$d_{d,\Sigma}\left(w_1, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) \leq d_{d,\Sigma}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) \text{ y } d_{d,\Sigma}\left(w_2, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) \leq d_{d,\Sigma}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right)$$

Luego, $w_1 \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2}^{d\Sigma} w$ y $w_2 \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2}^{d,\Sigma} w$ con lo que culmina la prueba. ∎

Proposición 9 *Sea d una distancia. Siempre que sólo dos bases van a ser fusionadas y no hay restricciones de integridad $\Delta^{d,\Sigma}$ no es manipulable por los índices i_{d_w} e i_{d_s}.*

Demostración: Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias. Probaremos primero la no manipulabilidad por i_{d_w}.

En virtud del lema 5 tenemos que $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_1$ y $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ son consistentes. De esta manera $i_{d_w}(\varphi_i, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 1$ para $i = 1, 2$; tomando de esta manera un valor maximal para i_{d_w}. Así $\Delta^{d,\Sigma}$ es no manipulable por i_{d_w}.

Veamos ahora la no manipulabilidad de $\Delta^{d,\Sigma}$ por i_{d_s} bajo las hipótesis de la proposición. Si $\Delta^{d,\Sigma}$ es manipulable por i_{d_s} con esta situación, podemos encontrar φ_1' tal que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) > i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2))$$

De esta manera $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$ y $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$. En virtud del lema 5, podemos encontrar w modelo de φ_2 tal que $w \models \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)$, y como consecuencia $w \models \varphi$. De esta manera φ_1 es consistente con φ_2, y en virtud de $(IC2)$, $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2$. De esta manera $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$, lo cual es una contradicción. ∎

La proposición anterior deja de ser cierta si se consideran más de dos bases. En efecto tenemos lo siguiente:

Proposición 10 *Si al menos tres bases van a ser fusionadas, el operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable por los índices i_{d_w} e i_{d_s} incluso si no existe restricción de integridad alguna interviniendo en el proceso.*

Demostración: La manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ por i_{d_w} ya se vio en el ejemplo 4

La manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ por i_{d_s} es mostrada mediante el siguiente ejemplo: consideremos tres bases φ_1, φ_2, φ_3, con $[\varphi_1] = \{000, 001, 111\}$, $[\varphi_2] = \{110, 001\}$ y $[\varphi_3] = \{110, 000\}$. Así, $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)]$ tiene como conjunto de modelos $\{000, 001, 110\}$, lo que implica que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = 0$$

Si consideremos φ_1' cuyos conjunto de modelos está dado por $\{000, 001\}$ se tiene que $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3)] = \{000, 001\}$ y por lo tanto

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3)) = 1$$

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$dist_\Sigma$	$dist_\Sigma'$
000	0	0	1	0	1	1
001	0	0	0	1	1	1
010	1	1	1	1	3	3
011	1	1	1	2	4	4
100	1	1	1	1	3	3
101	1	1	1	2	4	4
110	1	2	0	0	1	2
111	0	2	1	1	2	4

Tabla 2.5: Tabla de resultado de la fusión con $\Delta^{d_H,\Sigma}$

Así $\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}$ es manipulable con tres bases[1]. ∎

El resultado 9 no se cumple para el índice i_p como vemos en el siguiente resultado

Proposición 11 *El operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable por el índice i_p incluso si dos bases de creencias están envueltas en el proceso de fusión y ninguna restricción de integridad interviene en dicho proceso.*

Demostración: Consideremos las bases de creencias φ_1, definida por el conjunto de modelos $\{010, 100, 101\}$, y φ_2 definida por $\{000, 001\}$. Es fácil ver que $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{000, 001, 010, 100, 101\}$. Por lo tanto

$$i_p(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = \frac{3}{5}$$

Ahora bien, veamos qué pasa si el agente cuya base de creencia esta dada por φ_1 cambia a φ_1', con $[\varphi_1'] = \{010, 100\}$. Un cálculo fácil muestra que $\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)$ tiene como conjunto

[1]Es fácil probar que agregar $\top$ al conjunto de conocimiento no cambia el resultado para ninguna de las tres familias de operadores definidos con Max, $Gmax$ y Σ (es decir $\Delta_{\mu}^{d,*}(\Psi) = \Delta_{\mu}^{d,*}(\Psi \sqcup \top)$ donde $* \in \{Max, Gmax, \Sigma\}$). Así cuando esos operadores son manipulables para un conjunto de conocimiento de tamaño n lo serán para conjuntos de tamaño m, con $m \geq n$.

de modelos $\{000, 010, 100\}$. Luego

$$i_p(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = \frac{2}{3}$$

de esta manera $i_p(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) < i_p(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2))$ mostrando la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ por el índice i_p. ∎

A diferencia de $\Delta^{d_H,\Sigma}$, el operador $\Delta^{d_H,GMax}$ es manipulable en muchas más situaciones:

Proposición 12 $\Delta^{d_H,GMax}$ *es manipulable por los índices de satisfacción* i_{d_w} *e* i_p*, incluso si no hay restricciones de integridad, la base inicial* φ *es completa y sólo dos bases de creencias están involucradas en el proceso de fusión.*

Demostración: En virtud de la proposición 28, basta demostar que $\Delta^{d_H,GMax}$ es manipulable por i_{d_w}.

Consideremos las bases φ_1 y φ_2, con $[\varphi_1] = \{001\}$ y $[\varphi_2] = \{111\}$. Como se observa en la tabla 2.6, $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{011, 101\}$. De esta manera $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ y φ_1 no comparten ningún modelo. Luego

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$$

Por otro lado, si en individuo 1 se cambia a φ_1' cuyo conjunto de modelos es $\{000\}$, entonces $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}$, lo que nos dice

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = 1$$

Así $\Delta^{d_H,GMax}$ es manipulable por i_{d_w}. ∎

A pesar de esto, la no manipulabilidad de $\Delta^{d_H,Gmax}$ se logra casi siempre como veremos en la proposición 13; pero antes veremos un resultado que nos facilitará la prueba de dicha proposición.

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{GMax}$	$dist'_{GMax}$
000	1	0	3	(3,1)	(3,0)
001	0	1	2	(2,0)	(2,1)
010	2	1	2	(2,2)	(2,1)
011	1	2	1	(1,1)	(2,1)
100	2	1	2	(2,2)	(2,1)
101	1	2	1	(1,1)	(2,1)
110	3	2	1	(3,1)	(2,1)
111	2	3	0	(2,0)	(3,0)

Tabla 2.6: Tabla de resultado de la fusión con $\Delta^{d_H,Gmax}$

Lema 6 *Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias. Entonces si φ_1 es inconsistente con φ_2,*

$$|[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]| \geq 2.$$

Demostración: Sean w_1 y w_2 modelos de φ_1 y φ_2, respectivamente, tales que

$$d_H(w_1,w_2) = min\{d_H(w,w')|w \models \varphi_1 \text{ y } w' \models \varphi_2\}.$$

Como se observa en la demostración del lema 5

$$d_H(w_1,w_2) = d_H(w_1,\varphi_2) = d_H(w_2,\varphi_1)$$

Supongamos así que $d_H(w_1,w_2) = m$, para algún m entero estrictamente positivo (ya que $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es inconsistente), y sin pérdida de generalidad, supongamos que w_1 y w_2 difieren en las primeras m variables proposicionales[2]. De esta manera obtenemos los siguientes casos:

Caso 1 Si m es impar entonces, $m = 2k+1$ para algún k entero positivo. Supongamos así:

$$w_1 = (w_1^1, \ldots, w_{k+1}^1, \ldots, w_m^1, w_{m+1}, \ldots, w_n)$$
$$w_2 = (w_1^2, \ldots, w_{k+1}^2, \ldots, w_m^2, w_{m+1}, \ldots, w_n)$$

[2]De no ser así podemos reordenar las variables para obtener lo deseado.

y consideremos

$$\begin{aligned} w &= (w_1^1, \ldots, w_{k+1}^1, w_{k+2}^2, \ldots, w_m^2, w_{m+1}, \ldots, w_n) \\ w' &= (w_1^2, \ldots, w_{k+1}^2, , w_{k+2}^1 \ldots, w_m^1, w_{m+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

De esta forma
$d_H(w, w_1) = d_H(w', w_2) = k$, y
$d_H(w', w_1) = d_H(w, w_2) = k + 1$

Sabemos que $d_H(w, \varphi_1) \leq d_H(w, w_1) = k,$. Luego si $d_H(w, \varphi_1) < k$ entonces existe $w_1' \models \varphi_1$ tal que $d_H(w, w_1') < k$. De esta manera

$$d_H(w_1, w_2) \leq d_H(w_1', w_2) \leq d_H(w_1', w) + d_H(w, w_2) < 2k + 1$$

lo cual es una contradicción, lo que implica que $d_H(w, \varphi_1) = k$. De forma análoga se demuestra que $d_H(w, \varphi_2) = k + 1$, $d_H(w', \varphi_2) = k$ y $d_H(w', \varphi_1) = k + 1$. Así

$$d_{d_H, Gmax}\,(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2) = (k+1, k) = d_{d_H, Gmax}\left(w', \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right)$$

Veamos ahora bien que $(k+1, k) = \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\; d_{d_H, GMax}\,(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ con el orden lexicográfico.

Si $(k+1, k) \neq \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\; d_{d_H, GMax}\,(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ entonces existe una interpretación w'' tal que $d_{d_H, GMax}\,(w'', \varphi_1 \sqcup \varphi_2) <_{lex} (k+1, k)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$d_{d_H, GMax}\left(w'', \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) = (d_H(w'', \varphi_1), d_H(w'', \varphi_2)),$$

Si $d_H(w'', \varphi_1) = k+1$ entonces $d_H(w'', \varphi_2) < k$. Consideremos así $w_1' \models \varphi_1$ y $w_2' \models \varphi_2$ tales que $d_H(w'', w_1') = d_H(w'', \varphi_1)$ y $d_H(w'', w_2') = d_H(w'', \varphi_2)$. Luego

$$d_H(w_1, w_2) \leq d_H(w_1', w_2') \leq d_H(w_1', w'') + d_H(w_2', w'') < 2k + 1,$$

lo cual es una contradicción.

Por otro lado si $d_H(w'', \varphi_1) < k+1$, entonces $d_H(w'', \varphi_2) < k+1$. De esta manera si consideramos w'_1 y w'_2 como anteriormente lo hicimos, obtenemos

$$d_H(w_1, w_2) \leq d_H(w'_1, w'_2) \leq d_H(w'_1, w'') + d_H(w'_2, w'') < 2k+1$$

llegando nuevamente a una contradicción. De esta forma

$$(k+1, k) = \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\, d_{d_H, GMax}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right)$$

Note finalmente que por definición w y w' son diferentes y realizan ese mínimo.

Caso 2 Si m es par podemos escribir $m = 2k$, para algún k entero positivo. Así, como en el caso anterior, supongamos w_1 y w_2

$$\begin{aligned} w_1 &= (w^1_1, \ldots, w^1_k, \ldots, w^1_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \\ w_2 &= (w^2_1, \ldots, w^2_k, \ldots, w^2_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

y consideremos

$$\begin{aligned} w &= (w^1_1, \ldots, w^1_k, w^2_{k+1}, \ldots, w^2_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \\ w' &= (w^2_1, \ldots, w^2_k, w^1_{k+1} \ldots, w^1_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, notemos que $d_H(w, w_i) = d(w', w_j)$, con $i, j = 1, 2$, y análogamente como se hizo en caso anterior, tenemos que $d_H(w, \varphi_i) = d(w, \varphi_j)$, con $i, j = 1, 2$. Luego

$$d_{d_H GMax}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) = d_{d_H GMax}\left(w', \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) = (k, k)$$

Verifiquemos que $(k, k) = \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\, d_{d_H, GMax}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right)$
Si $(k, k) \neq \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\, d_{d_H, GMax}\left(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right)$, podemos encontrar una interpretación w'' tal que $d_{d_H, GMax}\left(w'', \varphi_1 \sqcup \varphi_2\right) <_{lex} (k, k)$.

Sin perdida de generalidad supongamos $d_H(w'', \varphi_1) \geq d_H(w'', \varphi_2)$ y consideremos w'_1 y w'_2 modelos de φ_1 y φ_2, respectivamente, tales que $d_H(w'', w'_1) = d(w'', \varphi_1)$ y

$d_H(w'', w'_2) = d(w'', \varphi_2)$.

Por un lado, si $d_H(w'', w'_1) = k$ entonces $d_H(w'', w'_2) < k$. Esto nos conduce a que

$$d_H(w_1, w_2) \leq d_H(w'_1, w'_2) \leq d_H(w_1, w'') + d_H(w_2, w'') < 2k$$

Lo que es una contradicción.

Por otro lado, si $d_H(w'', w'_1) < k$ entonces $d_H(w'', w'_2) < k$. Pero

$$d_H(w_1, w_2) \leq d_H(w'_1, w'_2) \leq d_H(w_1, w'') + d_H(w_2, w'') < 2k.$$

Contradicción.

De esta manera $(k, k) = \underset{w \in \mathcal{W}}{min}\, d_{d_H,GMax}(w, \varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Note, finalmente, que por definición w y w' sont diferentes y realizan ese mínimo.

Así, para cualesquiera de los dos casos, hemos encontrado dos modelos distintos de $\Delta_{\top}^{d_H,Gmax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, implicando que $|[\Delta_{\top}^{d_H,Gmax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]| \geq 2$ ∎

Una consecuencia directa del lema 6 y de (IC2) es el siguiente corolario:

Corolario 5 *Sean φ_1 y φ_2. Entonces $|[\Delta_{\top}^{d_H,Gmax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]| = 1$ si, y sólo si, φ_1 es consistente con φ_2 y además $|\varphi_1 \wedge \varphi_2| = 1$.*

Proposición 13 *El operador $\Delta^{d_H,GMax}$ es no manipulable por i_{d_s} si, y sólo si, ocurre que*

(i) Dos bases de creencias están involucradas en el proceso de fusión.

(ii) $\mu \longleftrightarrow \top$.

(iii) La base inicial es completa.

Demostración:

($\Leftarrow$) Supongamos φ_1 y φ_2 bases de creencias, con φ_1 una base completa, y supongamos también que el proceso de fusión no interviene ninguna restricción de integridad.

Si existe una bases de creencias φ_1' tal que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) < i_{d_s}(\varphi_1, \Delta^{\top}_{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2))$$

entonces $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$ y $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$. De esta manera

$$\Delta_{\top}^{d_H,GMax}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big) \longleftrightarrow \varphi_1,$$

lo que implica que $|\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)| = 1$.

En virtud del corolario 5 se tiene que $\varphi_1' \wedge \varphi_2$ es consistente y de (IC3) se tiene que

$$\Delta_{\top}^{d_H,GMax}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big) \longleftrightarrow \varphi_1' \wedge \varphi_2.$$

Luego, φ_1 es consistente con φ_2 y de (IC3) tenemos que

$$\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$

Puesto que $[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = [\varphi_1]$, se tiene

$$\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$$

lo cual es una contradicción.

($\Rightarrow$) Para demostrar esta implicación mostremos su contra-recíproco por medio de los siguientes ejemplos:

(i) Consideremos las bases φ_1, φ_2 y φ_3 las cuales están definidas, de manera respectiva, por los conjuntos de modelos $\{000\}$, $\{101, 100\}$ y $\{001\}$.
De esta manera $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})$ tiene como conjunto de modelos $\{000, 001\}$, como se observa en la tabla 2.7. De esta forma $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}) \not\models \varphi_1$,

implicando que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\})) = 0$$

Por otro lado, si el agente 1 se cambia a φ_1' con $[\varphi_1'] = \{010\}$ entonces $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1',\varphi_2,\varphi_3\})] = \{000\}$, como se puede observar en la tabla 2.7. Esto implica que $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1',\varphi_2,\varphi_3\}) \models \varphi_1$, y de esta forma

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}\big(\{\varphi_1',\varphi_2,\varphi_3\}\big)) = 1.$$

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$dist_{GMax}$	$dist'_{GMax}$
000	0	1	1	1	(1,1,0)	(1,1,1)
001	1	2	1	0	(1,1,0)	(2,1,0)
010	1	0	2	2	(2,2,1)	(2,2,0)
011	2	1	2	1	(2,2,1)	(2,1,1)
100	1	2	0	2	(2,1,0)	(2,2,0)
101	2	3	0	1	(2,1,0)	(3,1,0)
110	2	1	1	3	(3,2,1)	(3,1,1)
111	3	2	1	2	(3,2,1)	(2,2,1)

Tabla 2.7: Tabla de cálculos

(*ii*) Sean φ_1 y φ_2 bases tales que $[\varphi_1] = \{01\}$ y $[\varphi_2] = \{11\}$ y sea μ tal que $[\mu] = \{00, 01, 11\}$. Como se puede ver en la tabla 2.8, el conjunto de modelos de $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ esta dado por $\{01, 11\}$, lo que implica que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$$

pues $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$.

Ahora bien, si el agente cuya base esta dada por φ_1 opina φ_1', con $[\varphi_1'] = \{00\}$, entonces $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{01\}$, y de esta forma

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)) = 1$$

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{GMax}$	$dist'_{GMax}$
00	1	0	2	(2,1)	(2,0)
01	0	1	1	(1,0)	(1,1)
11	1	2	0	(1,0)	(2,0)

Tabla 2.8: Tabla de cálculo

(*iii*) Consideremos las bases de creencias φ_1 y φ_2 con $[\varphi_1] = \{01, 10\}$ y $[\varphi_2] = \{11\}$. Si en el proceso de fusión no interviene ninguna restricción de integridad entonces $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ tiene como conjunto de modelos $\{01, 10, 11\}$. De esta forma

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$$

Si el agente 1 da a conocer φ_1', con $[\varphi_1'] = \{00\}$, en vez de su verdadera creencia φ_1, entonces $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{01, 10\}$. Esto indica que $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$, implicando que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = 1$$

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{GMax}$	$dist'_{GMax}$
00	1	0	2	(2,1)	(2,0)
01	0	1	1	(1,0)	(1,1)
10	0	1	1	(1,0)	(1,1)
11	1	2	0	(1,0)	(2,0)

Tabla 2.9: Tabla de cálculo

∎

Al igual que el operador $\Delta^{d_H,GMax}$, la no manipulabilidad del operador $\Delta^{d_H,Max}$ se logra en muy pocos casos.

Proposición 14 *El operador $\Delta^{d_H,Max}$ es manipulable por los índices i_{d_w} e i_p, incluso si no existen restricciones de integridad involucradas en el proceso de fusión, dos bases son fusionadas y la base inicial es completa.*

Demostración: Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias definidas por los conjuntos de modelos $\{000\}$ y $\{011\}$, respectivamente. Como podemos notar en la tabla 2.10,

$[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{001, 010\}$, mostrando la inconsistencia de $\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ con φ_1. De esta manera

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$$

$[\top]$	$d(w, \varphi_1)$	$d(w, \varphi'_1)$	$d(w, \varphi_2)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
000	0	1	2	2	2
001	1	2	1	1	2
010	1	2	1	1	2
011	2	3	0	2	3
100	1	0	3	3	3
101	2	1	2	2	2
110	2	1	2	2	2
111	3	2	1	3	2

Tabla 2.10:

Por otro lado, si en vez de φ_1 el individuo 1 cambia a φ'_1, con $[\varphi'_1] = \{100\}$, resulta que el conjunto de modelos de $\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)$ está dado por $\{000, 001, 010, 101, 110, 111\}$, lo que indica que $\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)$ es consistente con φ_1. Luego

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\top}(d_H, Max)\varphi'_1 \sqcup \varphi_2) = 1$$

Mostrando la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,Max}$ por i_{d_w}, y como consecuencia por i_p. ∎

Un lema similar obtenido para el operador $\Delta^{d_H,GMax}$ por la inconsistencia de dos bases de creencias, también lo existe para el operador $\Delta^{d_H,Max}$.

Proposición 15 *Sean φ y φ' bases de creencias. Si φ es inconsistente con φ' entonces* $|[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi \sqcup \varphi')]| \geq 2$.

Demostración: Si $\varphi \wedge \varphi'$ es inconsistente entonces $|[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi \sqcup \varphi')]| \geq 2$. Ahora bien, en virtud de la proposición 4 tenemos que

$$[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi \sqcup \varphi')] \subset [\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi \sqcup \varphi')],$$

y de esta manera $|[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi \sqcup \varphi')]| \geq 2$. ∎

Como consecuencia directa de la proposición anterior y de (IC3) se tiene el siguiente corolario

Corolario 6 *Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias. Entonces* $|\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)| = 1$ *si, y sólo si,* φ_1 *es consistente con* φ_2 *y además* $|[\varphi_1 \wedge \varphi_2]| = 1$.

Proposición 16 *El operador* $\Delta^{d_H,Max}$ *es no manipulable por* i_{d_s} *si, y sólo si, ocurre que*

(i) Dos bases de creencias están involucradas en el proceso de fusión.

(ii) $\mu \longleftrightarrow \top$.

(iii) La base inicial es completa.

Demostración: La demostración de la condición de suficiencia es similar a la demostración de la condición de suficiencia de la proposición 13, haciendo uso del corolario 6. De esta forma sólo nos falta demostrar la condición de necesidad, y para ello demostraremos su contra-recíproco a través de los siguientes tres ejemplos.

(i) Consideremos las bases φ_1, φ_2 y φ_3 con $[\varphi_1] = \{000\}$, $[\varphi_2] = \{100, 101\}$ y $\varphi_3\{001\}$, respectivamente.

Como se puede observar en la tabla 2.11, $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})] = \{000, 001\}$, implicando que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})) = 0.$$

Sin embargo, si el agente 1 opina φ_1' con $[\varphi_1'] = \{010\}$ en vez de φ_1, entonces $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\})] = \{000\}$. Esto implica que $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\}) \models \varphi_1$, y de esta forma

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{\varphi_1', \varphi_2, \varphi_3\})) = 1.$$

(ii) Sean φ_1 y φ_2 bases definidas por los conjuntos de modelos $\{01\}$ y $\{11\}$, respectivamente, y consideremos la restricción de integridad μ tal que $\mu = \{00, 01, 11\}$. Como se

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi'_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
000	0	1	1	1	1	1
001	1	2	1	0	1	2
010	1	0	2	2	2	2
011	2	1	2	1	2	2
100	1	2	0	2	2	2
101	2	3	0	1	2	3
110	2	1	1	3	3	3
111	3	2	1	2	3	2

Tabla 2.11:

puede ver en la tabla 2.12, el conjunto de modelos de $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ esta dado por $\{01,11\}$, lo que implica que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0$$

pues $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$.

Ahora bien, si en vez de φ_1 el individuo opina φ'_1, con $[\varphi'_1] = \{00\}$, entonces $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)] = \{01\}$. De esta forma

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)) = 1$$

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi'_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
00	1	0	2	2	2
01	0	1	1	1	1
11	1	2	0	1	2

Tabla 2.12:

(*iii*) Consideremos las bases de creencias φ_1 y φ_2 con $[\varphi_1] = \{01,10\}$ y $[\varphi_2] = \{11\}$. Obsérvese que por los cálculos que se muestran en la tabla 2.13 $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ tiene como conjunto de modelos $\{01,10,11\}$. Así

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = 0.$$

Por otro lado, si el agente 1 se cambia a φ_1', con $[\varphi_1'] = \{00\}$, entonces $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{01, 10\}$. Esto indica que

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)) = 1$$

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
00	1	0	2	2	2
01	0	1	1	1	1
10	0	1	1	1	1
11	1	2	0	1	2

Tabla 2.13: Tabla de cálculo

∎

2.3. Estrategias Restringidas

Otro tipo de restricción a las antes mencionadas yace sobre las posibles estrategias disponibles para mentir. En el caso general, el individuo manipulador es libre de reportar cualquier base, incluso si está “bastante lejos” de sus verdaderas creencias o metas. De cualquier manera hay numerosas situaciones para los cuales los otro participantes del proceso de fusión tiene alguna información acerca de las verdaderas base del individuo manipulador.

Es por esta razón que ahora nos enfocaremos en dos restricciones sobre las estrategias disponibles para los agentes manipuladores. La manipulación por erosión (respectivamente por dilatación) es cuando la base reportada φ' es necesariamente más fuerte (respectivamente más débil) que la verdadera base φ.

Definición 24 *Sea i un índice de satisfacción.*

- *Un operador de fusión Δ es manipulable por erosión con respecto a i si, y sólo si, existe una situación de manipulabilidad Ψ, μ, φ, φ', tal que $\varphi' \models \varphi$ y además*

$$i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) > i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi))$$

- *Un operador de fusión Δ es manipulable por dilatación con respecto a i si, y sólo si, existe una situación de manipulabilidad Ψ, μ, φ, φ', tal que $\varphi \models \varphi'$ y además*

$$i(\varphi', \Delta_\mu(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) > i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi))$$

Proposición 17 *Sea d una pseudo distancia y sea f una función de agregación. El operador $\Delta^{d,f}$ es no manipulable por dilatación respecto a los índices i_p, i_{d_w} e i_{d_s}.*

Demostración: En virtud de las proposiciones 28 y 6, basta demostrar la no manipulabilidad con respecto a i_p.

Por reducción al absurdo, supongamos d pseudodistancia y f función de agregación tales que $\Delta^{d,f}$ es manipulable con respecto a i_p.

Bajo esta suposición, existe una situación de manipulabilidad $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$, con $\varphi' \models \varphi$ tal que

$$i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) > i(\varphi, \Delta_\mu(\Psi))$$

Al igual que antes, denotemos por $\varphi_\Delta = \Delta_\mu(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])$. Luego

$$\frac{|[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta]|}{|[\varphi'_\Delta]|} > \frac{|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]|}{|[\varphi_\Delta]|} \tag{2.10}$$

Como $\varphi \models \varphi'$, de la las propiedades de min se tiene que para cualquier interpretación w

$$d(w, \varphi') \leq d(w, \varphi)$$

Así, por ser f no decreciente se tiene que, para cualquier interpretación w,

$$d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}(w, \Psi) \tag{2.11}$$

De aquí es inmediato que

$$\min_{w \models \mu} d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq \min_{w \models \mu} d_{d,f}(w, \Psi)$$

Consideremos $w_1 \models \mu$ tal que $d_{d,f}(w_1, \Psi) = \min\limits_{w \models \mu} d_{d,f}(w, \Psi)$ y $w_2 \models \mu$ tal que

$d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \underset{w \models \mu}{min}\, d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$.

Entonces se tiene que

$$d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right).$$

Notemos φ es consistente con φ'_Δ, así consideremos $w \models \varphi \wedge \varphi'_\Delta$. Como $\varphi \models \varphi'$ entonces $d(w,\varphi) = d(w,\varphi') = 0$, luego $d_{d,f}\left(w, \Psi\right) = d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$.

Pero $w \models \varphi'_\Delta$ lo que implica que $d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$, y puesto que $d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right) \leq d_{d,f}\left(w, \Psi\right)$ entonces $d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right) \leq d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$. De esta manera

$$d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right) = d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.12}$$

Ahora bien, consideremos $w' \models \varphi_\Delta$. De aquí se tiene $w' \models \mu$ y $d_{d,f}\left(w', \Psi\right) = d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right)$, y por 2.12 $d_{d,f}\left(w', \Psi\right) = d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$. Por otro lado de (2.11) se tiene que $d_{d,f}\left(w', \Psi\right) \geq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$ lo que nos dice que

$$d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \geq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Así, necesariamente, $w' \models \varphi'_\Delta$, lo que demuestra que todo modelo de φ_Δ es modelo de φ'_Δ, es decir

$$[\varphi_\Delta] \subset [\varphi'_\Delta], \tag{2.13}$$

y de aquí se tiene que

$$[\varphi] \cap [\varphi_\Delta] \subset [\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] \tag{2.14}$$

Por otro lado, considerando $w'' \models \varphi \wedge \varphi'_\Delta$ se tiene que $d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = d_{d,f}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$, y como $w'' \models \varphi$ se tiene que $d(w'',\varphi) = d(w'',\varphi')$, obteniendo que $d_{d,f}\left(w'', \Psi\right) = d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$. De esta manera $d_{d,f}\left(w'', \Psi\right) = d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right)$, lo que indica que $w'' \models \varphi_\Delta$. Esto demuestra que $[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] \subset [\varphi] \cap [\varphi_\Delta]$ y, en virtud de (2.14) se tiene que

$$[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta] = [\varphi] \cap [\varphi_\Delta] \tag{2.15}$$

De (2.13) y (2.15) se concluye que

$$\frac{|[\varphi] \cap [\varphi'_\Delta]|}{|[\varphi'_\Delta]|} \leq \frac{|[\varphi] \cap [\varphi_\Delta]|}{|[\varphi_\Delta]|}$$

lo que es una contradicción. De esta forma $\Delta^{d,f}$ es no manipulable por i_p. ∎

Notemos que con los casos no restringidos donde los operadores se lograron manipular, esta se logró sin añadir nuevas interpretaciones en el conjunto de modelos de la base inicial. El resultado anterior nos dice que la manipulación no se hubiese logrado si se hubiese hecho esto.

La historia no es la misma para la manipulación por erosión. Podemos encontrar conjuntos de creencias que pueden ser manipulados usando la estrategia de erosión (Ver ejemplo 4).

Lema 7 *Sea d una pseudodistancia y f una función de agregación. Si un conjunto de creencias Ψ es manipulable por φ relativo a $\Delta^{d,f}$, i_{d_w} y μ, entonces existe una base completa φ_w, tal que*

$$i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)) > i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi))$$

Demostración: Supongamos que el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable por i_{d_w}. Así existe una situación de manipulabilidad $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ tal que

$$i_{d_w}(\varphi, \varphi'_\Delta) > i_{d_w}(\varphi, \varphi_\Delta)$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$.

De esta forma se tiene $i_{d_w}(\varphi, \varphi_\Delta) = 0$ y $i_{d_w}(\varphi, \varphi'_\Delta) = 1$, y además

$$\forall\, w \models \varphi \wedge \mu\ \exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu;\ d_{d,f}\left(w', \Psi\right) < d_{d,f}\left(w, \Psi\right) \tag{2.16}$$

$$\exists\, w_1 \models \varphi \wedge \mu \forall w \models \mu;\ d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.17}$$

Notemos que en (2.16) la escogencia de w' no depende de la elección de w, ya que φ es inconsistente con φ_Δ. De esta manera (2.16) es equivalente a

$$\exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu \forall w \models \varphi \wedge \mu;\ d_{d,f}\left(w', \Psi\right) < d_{d,f}\left(w', \Psi\right) \tag{2.18}$$

Sea w_1 como en 2.17 y consideremos $w \models \varphi'$ tal que $d(w_1, w) = d(w_1, \varphi')$. Sea φ_w la base completa determinada por la interpretación w. Mostremos que

$$i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)) > i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi))$$

Como $d(w_1, \varphi_w) = d(w_1, \varphi')$ se tiene

$$d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) = d_{d,f}\left(w_1, \Psi\right)$$

De (2.17) y de la ecuación anterior, se tiene

$$\forall w' \models \mu;\ d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.19}$$

Por otro lado como $\varphi_w \models \varphi'$ entonces, para cada interpretación $w' \models \mu$, $d(w', \varphi') \leq d(w', \varphi_w)$. Luego por ser f una función no decreciente tenemos que

$$\forall\, w' \models \mu;\ d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$$

y directamente de (2.19) se tiene que:

$$\forall w' \models \mu;\ d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$$

De esta manera $w_1 \models \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \wedge \varphi$, lo que implica que

$$i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)) > i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)).$$

∎

Lema 8 *Sea d una pseudodistancia y f una función de agregación. Si un conjunto de creencias Ψ es manipulable por φ relativo a $\Delta^{d,f}$, i_{d_s} y μ, entonces existe una base completa φ_w, tal que*

$$i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)) > i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi))$$

Demostración: Supongamos que un operador $\Delta^{d,f}$, donde d es una pseudodistancia y f es una función de agregación, es manipulable por el índice drástico fuerte, i_{d_s}. De esta manera, podemos encontrar una situación de manipulabilidad $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ tal que

$$i_{d_s}(\varphi, \varphi'_\Delta) > i_{d_s}(\varphi, \varphi_\Delta)$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$.

Esto implica que $i_{d_s}(\varphi, \varphi_\Delta) = 0$ e $i_{d_s}(\varphi, \varphi'_\Delta) = 1$, y como consecuencia $\varphi_\Delta \not\models \varphi$ y $\varphi'_\Delta \models \varphi$.

Consideremos $w_1 \models \varphi'_\Delta$ y sea $w \models \varphi'$ tal que $d(w_1, w) = d(w_1, \varphi')$. y consideremos la base de creencias φ_w cuyo único modelo esta dado por w. Notemos que $d(w_1, \varphi_w) = d(w_1, \varphi')$ así

$$d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) = d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.20}$$

Como $w_1 \models \varphi'_\Delta$ entonces

$$d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \tag{2.21}$$

Ahora bien como

$$\min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$$

en virtud de (2.20) y 2.21 se tiene

$$\min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \leq \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right).$$

Por otro lado, como $\varphi_w \models \varphi'$ entonces para cada interpretación w', $d(w', \varphi') \leq d(w', \varphi_w)$ y por ser f no decreciente, entonces

$$\forall\, w' \in \mathcal{W};\; d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$$

y por lo tanto

$$\min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)$$

y así

$$\min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right). \qquad (2.22)$$

De esta manera

$$d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right),$$

y puesto que $w_1 \models \mu$, tenemos que $w_1 \models \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big)$.

Mostremos ahora que

$$\Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big) \models \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\big).$$

Sea $w'' \models \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big)$. De esta manera $w'' \models \mu$ y además

$$d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right)$$

En virtud de 2.23 tenemos que

$$d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

y puesto que por monotonía $d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\right)$ entonces

$$d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

y por lo tanto

$$d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) = \min_{w' \models \mu} d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$$

Luego como $w'' \models \mu$ se tiene que $w'' \models \varphi'_\Delta$, y como consecuencia $w'' \models \varphi$ ya que $\varphi'_\Delta \models \varphi$. Luego $\Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big) \models \varphi$, implicando que $i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big)) = 1$ y de esta manera

$$i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi w}{\varphi}\right]\big)) > i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi))$$

∎

Proposición 18 *Sea d una distancia. Si $\Delta^{d,\Sigma}$ es manipulable por i_{d_w}, entonces es manipulable por erosión con respecto a i_{d_w}.*

Además, un conjunto de creencias Ψ es manipulable por φ, relativo a $\Delta^{d,\Sigma}$, i_{d_w} y μ sí, y sólo si, la manipulación es posible usando una base completa $\varphi_w \models \varphi$, es decir, existe $\varphi_w \models \varphi$ tal que

$$i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right])) > i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi))$$

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que $\Delta^{d,\Sigma}$ es manipulable por i_{d_w} y que no lo es por erosión. Así podemos encontrar una situación de manipulabilidad $\Psi, \mu, \varphi, \varphi'$ y $\varphi' \not\models \varphi$ tales que

$$i_{d_s}(\varphi, \varphi'_\Delta) > i_{d_s}(\varphi, \varphi_\Delta)$$

donde $\varphi_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ y $\varphi'_\Delta = \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$.

Por el lema 7 podemos suponer que φ' es completa, con $\varphi' = \{w'_1\}$ de la condición de manipulabilidad tenemos que

$$\begin{aligned} \forall\, w \models \varphi \wedge \mu\ \exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu;\ d_{d,f}\left(w', \Psi\right) \leq d_{d,f}\left(w, \Psi\right) \\ \exists\, w_1 \models \varphi \wedge \mu \forall w \models \mu;\ d_{d,f}\left(w_1, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,f}\left(w, \Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Consideremos la base φ_w definida por $[\varphi_w] = \{w_1\}$. Como hemos supuesto que el operador es no manipulable por erosión , y ya que $\varphi_w \models \varphi$, entonces

$$i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi)) \geq i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]))$$

de esta manera $i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right])) = 0$, y así tenemos que

$$\forall\, w'' \models \varphi \wedge \mu\ \exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu;\ d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) < d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \tag{2.24}$$

Por ser φ inconsistente con $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(\Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right])$, la escogencia de w' no depende de la elección de w. De esta manera (2.24) es equivalente a

$$\exists\, w' \models \neg\varphi \wedge \mu;\ \forall\, w'' \models \varphi \wedge \mu\ d_{d,f}\left(w', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) < d_{d,f}\left(w'', \Psi\left[\tfrac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right) \tag{2.25}$$

Escojamos así $w_2 \models \neg\varphi \wedge \mu$ satisfaciendo (2.25) y consideremos $\Psi' = \{\sigma \in \Psi | \sigma \neq \varphi\}$. Por 2.25, para cada $w \models \varphi \wedge \mu$

$$d(w_1, w_2) + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right) < d(w_1, w) + d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi'\right),$$

en especial, puesto que $w_1 \models \varphi \wedge \mu$, tenemos que

$$d(w_1, w_2) + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right) < d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi'\right). \tag{2.26}$$

Por otro lado, como $w_2 \models \mu$, de 2.23 se tiene que $d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right) \leq d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\right)$. Lo cual es equivalente a

$$d(w_1, \varphi') + d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi'\right) \leq d(w_2, \varphi') + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right)$$

Por lo tanto

$$d(w_1, w_1') + d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi'\right) \leq d(w_2, w_1') + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right). \tag{2.27}$$

Luego, de 2.26 y 2.27 se tiene

$$d(w_1, w_2) + d(w_1, w_1') + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right) + d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi'\right) < d(w_2, w_1') + d_{d,\Sigma}\left(w_2, \Psi'\right) + d_{d,\Sigma}\left(w_1, \Psi'\right)$$

y simplificando se obtiene que

$$d(w_1, w_2) + d(w_1, w_1') < d(w_2, w_1')$$

lo que contradice la desigualdad triangular. De esta manera la manipulación es posible por erosión a través de una base completa. ∎

Un resultado similar se prueba con respecto al índice drástico fuerte. Aquí no daremos la prueba la cual es análoga a la del resultado anterior.

Proposición 19 *Sea d una distancia. Si $\Delta^{d,\Sigma}$ es manipulable por i_{d_s}, entonces es manipulable por erosión con respecto a i_{d_s}.*

Además, un conjunto de creencias Ψ es manipulable por φ, relativo $\Delta^{d,f}$, i_{d_s} y μ sí, y sólo si, la manipulación es posible usando una base completa $\varphi_w \models \varphi$, es decir, existe $\varphi_w \models \varphi$ tal que

$$i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\left(\Psi\left[\frac{\varphi_w}{\varphi}\right]\right)) > i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi))$$

CAPÍTULO 3

MANIPULABILIDAD INTRÍNSECA DE LOS OPERADORES DE FUSIÓN

3.1. Levantamientos

Como vimos en el capítulo primero, existe una relación estrecha entre la fusión lógica y la teoría de elección social. Recientemente Ramón Pino Pérez y Jahn Franklin Leal [Pino y Leal 2006] definieron en el marco de la Teoría de elección social una noción de manipulabilidad intrínseca y general a para las funciones de elección. Ahora bien las similitudes que existen entre la fusión lógica y la teoría de elección social nos permitirán introducir, de forma natural, una noción de manipulabilidad para los operadores de fusión a través definidos a partir de distancia. La idea fundamental es poder "extender" un preorden total sobre $\mathcal{W}$, obtenido de una distancia d y una base φ a un preorden sobre conjuntos de interpretaciones. Dicha extensión transfiere la información de preferencias sobre interpretaciones en preferencias sobre conjuntos de interpretaciones.

En realidad esa es una idea muy natural y muy usada en muchos dominios. Quizas el primero a utilizarla fue Shackle [Shackle 1953, Shackle 1955] en teoría de la decisión y la teoría de elección social. El transfiere la información cualitativa de preferencias sobre puntos en preferencias sobre conjuntos. Este método ha sido utilizado en muchos contextos por varios autores (Lewis, Zadeh, Dubois, Spohn, Halpern, etc.). Algunas veces es llamado *medida de posibilidad comparativa* y corresponde al levantamiento I definido en [Pino y Leal 2006].

Introduzcamos en el contexto de la fusión lógica las nociones de levantamiento:

Definición 25 *Una aplicación $\leq \mapsto \sqsubseteq_{\leq}$ que envía un preorden total sobre $\mathcal{W}$, $\leq$, en una preorden total sobre $\mathcal{P}^*(\mathcal{W})$, $\sqsubseteq_{\leq}$, es denominado un levantamiento si, y sólo si, la siguiente condición se mantiene para cualquier par w, w' en $\mathcal{W}$.*

$$w \leq w' \Longleftrightarrow \{x\} \sqsubseteq_{\leq} \{y\}$$

De esta manera, si $\leq \mapsto \sqsubseteq_{\leq}$ es un levantamiento, el preorden total $\sqsubseteq_{\leq}$ es una "extensión" para el preorden $\leq$.

Consideremos $\leq$ un preorden total para $\mathcal{W}$. Consideremos A y B elementos cualesquiera de $\mathcal{P}^*(\mathcal{W})$. Definimos:

- $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} B \Longleftrightarrow \exists a \in \text{mín}(A, \leq) \wedge \exists b \in \text{mín}(B, \leq); a \leq b$
- $A \sqsubseteq^{II}_{\leq} B \Longleftrightarrow A \sqsubset^{I}_{\leq} B \vee \big(A \simeq^{I}_{\leq} B \wedge |A| \leq |B|\big)$
- $A \sqsubseteq^{III}_{\leq} B \Longleftrightarrow A \sqsubset^{I}_{\leq} B \vee \big(A \simeq^{I}_{\leq} B \wedge |min(A, \leq)| \leq |min(B, \leq)|\big)$
- $A \sqsubseteq^{IV}_{\leq} B \Longleftrightarrow A \sqsubset^{III}_{\leq} B \vee \big(A \simeq^{III}_{\leq} B \wedge |A| \leq |B|\big)$

Consideremos ahora las siguientes relaciones[1]

- $A \sqsubset^{V}_{\leq} B \Longleftrightarrow A \sqsubset^{I}_{\leq} B \ \vee \ \big(A \simeq^{I}_{\leq} B \wedge A \subset min(W, \leq) \wedge B \not\subset min(W, \leq)\big)$.
  $A \sqsubseteq^{V}_{\leq} B \Longleftrightarrow B \not\sqsubset^{V}_{\leq} A$.

La relación $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$ asociada a $\leq$ es, como dijimos previamente, una relación de posibilidad comparativa asociada con la "medida de posibilidad" $\leq$ (ver [Dubois et al. 1994, Dubois y Prade 2004]). Esta relación extiende de manera natural las preferencias sobre elementos en $\mathcal{W}$ expresados por $\leq$, a preferencias sobre $\mathcal{P}^*(W)$ expresadas por $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$. $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} B$ establece que el mejor elemento de A (relativo a $\leq$) es preferido o indiferente al mejor elemento de B (relativo a $\leq$); o, más gráficamente, que los mejores elementos de A están en el mismo nivel o en un nivel más bajo (mejor) que los mejores elementos de B.

[1] Esta definición se introduce por primera vez en este trabajo.

La relación $\sqsubseteq^{II}_{\leq}$ puede ser vista, de manera cuantitativa, como un refinamiento de la primera, con una probabilidad uniforme. Esto puede ser explicado de la siguiente manera: $A \sqsubseteq^{II}_{\leq} B$ si, y sólo si, el mejor elemento de A (relativo a $\leq$) es estrictamente preferido al mejor elemento de B (relativo a $\leq$) o en caso de que los mejores elementos de A y B estén en el mismo nivel, A tiene menos o igual número de elementos que B, es decir, cuando lo mejor de A y B estén en el mismo nivel, uno prefiere al conjunto más preciso (el más pequeño).

La relación III es de hecho la relación de posibilidad con el refinamiento leximín (ver [Dubois y Fargier 2004]); mientras que la relación IV es, como en el caso de la relación II, un refinamiento del tercero a través de una probabilidad uniforme.

La relación $\sqsubseteq^{V}_{\leq}$ (que es el preorden total asociado a $\sqsubset^{V}_{\leq}$) se puede ver como una deformación de $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$ en la que los conjuntos del nivel mínimo son aquellos formados solamente por elementos del nivel mínimo de $\leq$.

Para ilustrar la idea intuitiva del comportamineto de los levantamientos definidos previamente consideremos los siguientes ejemplos gráficos. Aquí, el preorden $\leq$ es representado por niveles y los elementos que se encuentran más abajo son mejores que los elementos que se encuentran más arriba como es usual en la literatura.

Ejemplo 5
En la figura 3.1 el preorden $\leq$ está representado por niveles. Aquí podemos observar que A y B satisfacen $A \sqsubset^{I}_{\leq} B$, $A \sqsubset^{II}_{\leq} B$, $A \sqsubset^{III}_{\leq} B$, $A \sqsubset^{IV}_{\leq} B$ y $A \sqsubset^{V}_{\leq} B$.

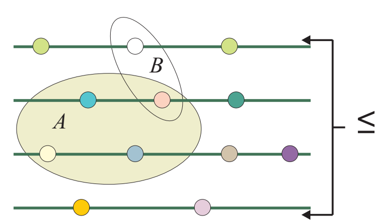

Fig. 3.1:

En la figura 3.2 los conjunto C y D satisfacen la siguiente relaciones: $C \simeq^{I}_{\leq} D$, $|C| = |D|$, así $C \simeq^{II}_{\leq} D$; pero $|min(D, \leq)| < |min(C, \leq)|$, así $D \sqsubset^{III}_{\leq} C$ y $D \sqsubset^{IV}_{\leq} C$. Por otro lado, $C, D \not\subset min(\mathcal{W}, \leq)$ lo que nos dice que C y D no son comparables por $\sqsubset^{V}_{\leq}$, así $C \simeq^{V}_{\leq} D$.

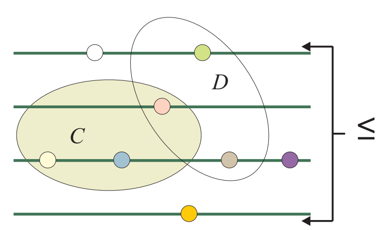

Fig. 3.2:

En la figura 3.3 los conjunto E y F satisfacen la siguiente relaciones: $E \simeq^{I}_{\leq} F$, pero $|E| < |F|$, así $E \sqsubset^{II}_{\leq} F$. Como $|min(E, \leq)| = |min(F, \leq)|$, $E \simeq^{III}_{\leq} F$; pero $E \sqsubset^{IV}_{\leq} F$. Por otro lado $E \subset min(\mathcal{W}, \leq)$ y $F \not\subset min(\mathcal{W}, \leq)$, implicando que $E \sqsubset^{V}_{\leq} F$

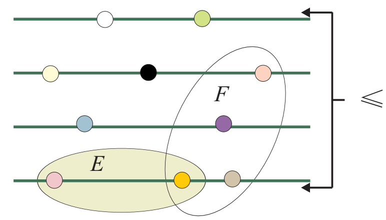

Fig. 3.3:

Proposición 20 *Para cada $\alpha \in \{I, II, III, IV, V\}$, la aplicación $\leq \mapsto \sqsubseteq^{\alpha}_{\leq}$ es realmente un levantamiento.*

Demostración:

Vamos a probar que la aplicación $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$ define un preorden total sobre $\mathcal{P}^*(W)$. Para los valores de II, III y IV es suficiente con notar que la relación lexicográfica asociada a dos preordenes totales es un preorden total puesto que las relaciones $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$, $\sqsubseteq^{II}_{\leq}$, $\sqsubseteq^{III}_{\leq}$ y $\sqsubseteq^{IV}_{\leq}$ están definidas como combinaciones lexicográficas de preordenes totales

Totalidad Supongamos A y B subconjuntos de $\mathcal{W}$, ambos no vacios. Por la finitud de $\mathcal{W}$, $min(A, \leq) \neq \emptyset$ y $min(B, \leq) \neq \emptyset$. De esta manera podemos tomar $a \in min(A, \leq)$ y $b \in min(B, \leq)$. Por ser $\leq$ un preorden total sobre $\mathcal{W}$ se tiene que $a \leq b$, o bien $b \leq a$. Esto nos lleva a que $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} B$, o bien $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} B$

Reflexividad Sea A un subconjunto no vacío de $\mathcal{W}$, y supongamos $a \in min(A, \leq)$. Por la reflexividad de $\leq$ tenemos que $a \leq a$, implicando que $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} A$.

Transitividad Sean A, B, C subconjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$ tales que $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} B$ y $B \sqsubseteq^{I}_{\leq} C$, mostremos que $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} C$.

Por definición de $\sqsubseteq^{I}_{\leq}$, podemos escoger $a \in min(A, \leq)$, $b, b' \in min(B, \leq)$ y $c \in min(C, \leq)$ tales que $a \leq b$ y $b' \leq c$. Como $b \simeq b'$ tenemos que $b \leq c$. Así, por ser $\leq$ una relación transitiva, tenemos que $a \leq c$ implicando que $A \sqsubseteq^{I}_{\leq} C$.

Verificar la condición de levantamiento para las relaciones I, II, III, IV, es decir que ellos extienden a $\leq$, es directo a partir de sus definiciones.

Veamos ahora que la aplicación $\leq \mapsto \sqsubseteq^{V}_{\leq}$ es también un levantamiento.

Totalidad Supongamos A y B subconjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$, y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \sqsubseteq^I_\leq B$. Si $A \sqsubset^I_\leq B$, directamente de la definición se tiene que $A \sqsubseteq^V_\leq B$.

Supongamos así que $A \simeq^I_\leq B$ y que $A \subset min(\mathcal{W}, \leq)$. Si $B \subset min(\mathcal{W}, \leq)$, entonces A y B son incomparables por $\sqsubset^V_\leq$, lo que implica que $A \simeq^V_\leq B$. Ahora bien, si $B \not\subset min(\mathcal{W}, \leq)$ directamente de la definición se tiene que $A \sqsubset^V_\leq B$.

Por otro lado, si $A \not\subset min(\mathcal{W}, \leq)$, considerando los casos en que $B \subset min(\mathcal{W}, \leq)$ y $B \not\subset min(\mathcal{W}, \leq)$ se tiene respectivamente que $B \sqsubset^V_\leq A$ y $A \simeq^V_\leq B$, por un razonamiento análogo al caso anterior.

Así $A \sqsubseteq^V_\leq B$ o $B \sqsubseteq^V_\leq A$.

Reflexividad Sea A un subconjunto no vacío de $\mathcal{W}$. Como $A \simeq^I_\leq A$ entonces, sin importar si A esta contenido o no en $min(\mathcal{W}, \leq)$, se tiene que $A \simeq^V_\leq A$.

Transitividad Sean A, B, C subconjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$ tales que $A \sqsubseteq^V_\leq B$ y $B \sqsubseteq^V_\leq C$. Mostremos que $A \sqsubseteq^V_\leq C$.

Primero observemos que por definición de $\sqsubseteq^V_\leq$ es inmediato ver que para cualesquiera X, Y conjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$ se tiene $X \sqsubseteq^V_\leq Y \Rightarrow X \sqsubseteq^I_\leq Y$.

De allí y por transitividad de $\sqsubseteq^I_\leq$ tenemos $A \sqsubseteq^I_\leq C$. Supongamos que $A \not\sqsubseteq^V_\leq C$. Como $\sqsubseteq^V_\leq$ es total necesariamente $C \sqsubset^V_\leq A$. Ahora bien, como $A \sqsubseteq^I_\leq C$ necesariamente $C \subseteq min(\mathcal{W}, \leq)$. Como $B \sqsubseteq^V_\leq C$ necesariamente $B \subseteq min(\mathcal{W}, \leq)$ y finalmente como $A \sqsubseteq^V_\leq B$ necesariamente $A \subseteq min(\mathcal{W}, \leq)$ lo que implica que $A \simeq^V_\leq C$, lo que contradice la suposición.

La demostración de la condición de levantamiento, es decir que $\sqsubseteq^V_\leq$ extiende al preorden $\leq$ viene del hecho que esa relación restringida a los singletones coincide con $\sqsubseteq^I_\leq$ el cual ya vimos extiende a $\leq$.

3.2. Manipulabilidad intrínseca de los Operadores de Fusión

Comenzaremos por transferir la noción de manipulabilidad de funciones de elección social, presentada por Pino Pérez y Leal, al marco de la fusión lógica, en particular a los operadores definidos a partir de una distancia.

Sabemos que si d es una pseudodistancia y φ es una base de creencias podemos definir un preorden total $\leq_\varphi^d$ sobre $\mathcal{W}$ asociado a φ poniendo $w \leq_\varphi^d w'$ ssi $d(w, \varphi) \leq d(w', \varphi)$. Así, si tenemos un levantamiento $\leq \mapsto \sqsubseteq_\leq$, escribiremos $\sqsubseteq_\varphi$ en vez de $\sqsubseteq_{\leq_\varphi^d}$, donde $\sqsubseteq_{\leq_\varphi^d}$ es la "extensión" de $\leq_\varphi^d$ por medio del levantamiento dado.

Definición 26 *Sea d una distancia entre interpretaciones y f una función de agregación. Diremos que el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable (relativo al levantamiento $\leq \mapsto \sqsubseteq_\leq$) si, y sólo si, existen una restricción de integridad μ, un conjunto de creencias Ψ, bases de creencias φ y φ', con $\varphi \in \Psi$ tales que*

$$[\Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\big) \sqsubset_\varphi [\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)]$$

A la base φ con la cual se logra la manipulación del operador de fusión la denominaremos *base inicial*.

Como se puede observar directamente de la definición de los cinco levantamientos dados anteriormente, siempre que un operador sea manipulable por el levantamiento I lo será también por los restantes. De igual manera, si un operador es manipulable por el levantamiento III, también lo será por el IV.

3.3. Levantamientos vs. índices

En esta sección vamos a establecer algunas relaciones entre la manipulabilidad definida en la sección precedente, a la que le daremos el nombre de manipulabilidad intrínseca y la manipulabilidad vía índices estudiada en el capítulo 2.

Los primeros resultados conciernen el uso de la distancia drástica d_D.

Teorema 8 *Para cualquier función de agregación f si $\Delta^{d_D,f}$ es manipulable por el levantamiento I para una situación Ψ, μ, φ y φ' entonces $\Delta^{d_D,f}$ es manipulable por el índice i_{d_w} para la misma situación.*

Demostración: Sea Ψ, μ, φ y φ' una situación de manipulación para el levantamiento I. Note que, debido al uso de la distancia drástica, $\leq_\varphi$ tiene a lo sumo dos niveles: $[\varphi]$ los minimales y $[\neg\varphi]$, los menos preferidos, en el segundo nivel. Como

$$[\Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])] \sqsubset_\varphi^I [\Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi)]$$

necesariamente $[\Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])] \cap [\varphi] \neq \emptyset$ y $[\Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi)] \subseteq [\neg\varphi]$. De allí es claro que

$$i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) = 1 \qquad \text{y} \qquad i_{d_w}(\varphi, \Delta_\mu^{d_D,f}(\Psi)) = 0$$

lo que significa que Ψ, μ, φ y φ' es también una situación de manipulación para i_{d_w}. ∎

El teorema anterior junto a otro resultado del capítulo 2 nos permiten establecer facilmente el siguiente resultado

Proposición 21 *Para cualquier función de agregación f, el operador $\Delta^{d_D,f}$ es no manipulable por el levantamiento I.*

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo. Sea Ψ, μ, φ y φ' una situación de manipulación para $\Delta^{d_D,f}$ con respecto al levantamiento I. Por el teorema precedente Ψ, μ, φ y φ' es también una situación de manipulación para i_{d_w} pero esto contradice la proposición 7. ∎

En contraste, este resultado no es cierto para los levantamientos II, III, IV.

Proposición 22 *Los operadores $\Delta^{d_D,\Sigma}$, $\Delta^{d_D,Gmax}$ y $\Delta^{d_D,Max}$ son manipulables con respecto a los levantamientos II, III, IV, incluso si no existe restricción de integridad, y dos bases de creencias están siendo fusionadas.*

Demostración: Para los operadores $\Delta^{d_D,\Sigma}$ y $\Delta^{d_D,Gmax}$ consideremos la siguiente situación: sean φ_1 y φ_2 bases de creencias definidas por los conjuntos de modelos $\{00, 10\}$ y $\{11\}$, respectivamente.

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi'_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_\Sigma$	$dist'_\Sigma$	$dist_{GMax}$	$dist'_{GMax}$
00	0	0	1	1	1	(1,0)	(1,0)
01	1	1	1	2	2	(1,1)	(1,1)
10	0	1	1	1	2	(1,0)	(1,1)
11	1	1	0	1	1	(1,0)	(1,0)

Tabla 3.1:

En los cálculos obtenidos en la tabla 3.1 se puede observar que

$$[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = [\Delta_{\top}^{d_D,Gmax}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{00, 10, 11\}$$

Sin embargo, si el individuo 1 expresa φ'_1, con $[\varphi'_1] = \{00\}$, en vez de φ_1, se tiene que

$$[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)] = [\Delta_{\top}^{d_D,Gmax}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)] = \{00, 11\}.$$

De esta manera

$$[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \simeq_{\varphi}^{I} [\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)].$$

Sin embargo, la cardinalidad de $[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)]$ es menor a la cardinalidad de $[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$. De igual manera el conjunto de los minimales de $[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)]$ con respecto a $\leq_{\varphi}^{d_D}$ es menor que el conjunto de los minimales de $[\Delta_{\top}^{d_D,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$ con el mismo orden.

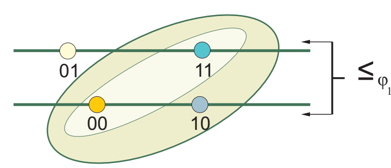

Fig. 3.4:

Esto muestra la manipulabilidad de $\Delta^{d_D,\Sigma}$ y de $\Delta^{d_D,GMax}$ con respecto a los levantamientos II, III y IV.

Para mostrar la manipulabilidad del operador $\Delta^{d_D,Max}$, consideremos las bases φ_1 y φ_2, con $[\varphi_1] = \{00, 01\}$ y $[\varphi_2] = \{00, 01, 10\}$.

Observando la tabla 3.2 notamos que $[\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{00, 01\}$. Sin embargo, si el individuo cuya bases esta dada por φ_1 da a conocer φ'_1, definido por el conjunto de interpretaciones $\{00\}$, en vez de su verdadera creencia, entonces $[\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi'_1 \sqcup \varphi_2)] = \{00\}$.

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
00	0	0	0	0	0
01	0	1	0	0	1
10	1	1	0	1	1
11	1	1	1	1	1

Tabla 3.2: Tabla de cálculos

De esta manera

$$[\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \simeq_{\varphi}^{I} [\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)].$$

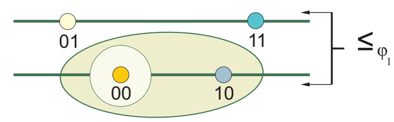

Fig. 3.5:

Pero

$$\big|[\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)]\big| < \big|[\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]\big|$$

al igual que

$$\Big|min\big([\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)], \leq_{\varphi}^{d_D}\ \big)\Big| < \Big|min\big([\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)], \leq_{\varphi}^{d_D}\ \big)\Big|$$

ya que $\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \longleftrightarrow \varphi$, $\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi$ y $\varphi \not\models \Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Así

$[\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)] \sqsubset_{\varphi_1}^{II} [\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$ y $[\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)] \sqsubset_{\varphi_1}^{III} [\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$

lo que demuestra también que

$$[\Delta_{\top}^{d_D,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)] \sqsubset_{\varphi_1}^{IV} [\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$$

∎

Otro resultado que pone en relación los índices con los levantamientos es el siguiente:

Proposición 23 *Sea d una pseudodistancia y f una función de agregación. Si el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable por i_{d_w} con cierta situación de manipulabilidad, entonces lo es con respecto a los levantamientos I, II, III, IV y V con la misma situación.*

Demostración: Supongamos que el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable por el índice i_{d_w}, y mostremos sólo la manipulabilidad de este operador con respecto al levantamiento I (la manipulabilidad por los levantaminetos restantes se obtendrá directamente de esta).

Por ser $\Delta^{d,f}$ manipulable por el índice i_{d_w}, existe una situación de manipulabilidad $\Psi,\ \mu,\ \varphi, \varphi'$, con $\varphi \in \Psi$ tal que

$$i_{d_w}\big(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)\big) > i_{d_w}\big(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\big).$$

De la definición del índice i_{d_w} se tiene $\varphi \wedge \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ es inconsistente mientras que $\varphi \wedge \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)$ es consistente. Tomemos de esta manera $w \models \varphi \wedge \Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)$. De esta manera $d(w, \varphi) = 0$; y de la inconsistencia de $\varphi \wedge \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ se tiene que para cada $w' \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$, $d(w', \varphi) > 0$. Así:

$$\forall\, w' \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi),\ d(w, \varphi) < d(w', \varphi)$$

y por lo tanto

$$\forall\, w' \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi),\ w <_\varphi^d w'.$$

Esto demuestra que $[\Delta_\mu^{d,f}\big(\Psi\left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]\big)] \sqsubset_\varphi^I [\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)]$. ∎

Del resultado previo y de resultados de manipulabilidad obtenidos en el capítulo 2 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 24 *El operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable por los levantamientos I, II, III, IV y V incluso si sólo dos bases de creencia participan en el proceso de fusión.*

Demostración: Recordemos que $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable para i_{d_w} (ver proposición 8). Así, por la proposición 23, $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable para el levantamiento I y por ende para los levantamientos II, III, IV y V. ∎

Proposición 25 *Sea d una distancia. Si sólo dos bases son funcionadas y no existe restricción de integridad en el proceso de fusión, entonces el operador $\Delta^{d,\Sigma}$ es no manipulable por el levantamiento I.*

Demostración: Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias. En virtud del lema 5 tenemos que $\Delta_\top^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ es consistente con φ_1. De esta, manera si tomamos $w \models \Delta_\top^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_1$ tenemos que para cualquier interpretación w', $w \leq_{\varphi_1}^d w'$, lo que nos conduce a que para cualquier base de creencias φ,

$$[\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \sqsubseteq_{\varphi_1}^{I} [\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\varphi \sqcup \varphi_2)].$$

∎

El resultado anterior no es necesariamente cierto para los levantamientos II, III, IV.

Proposición 26 *El operador* $\Delta^{d_H,\Sigma}$ *es manipulable por los levantamientos* II, III, IV*, incluso si sólo dos bases son funcionadas y no existe restricción de integridad en el proceso de fusión.*

Demostración: Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias, con $[\varphi_1] = \{000, 011\}$ y $[\varphi_2] = \{100, 001\}$.

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_1')$	$dist_{\Sigma}$	$dist'_{\Sigma}$
000	0	1	0	1	1
001	1	0	1	1	1
010	1	2	1	3	3
011	0	1	2	1	3
100	1	0	1	1	1
101	2	1	2	3	3
110	2	1	2	3	3
111	1	2	3	3	5

Tabla 3.3: Tabla de cálculos

Como se observa en los cálculos representados en la tabla 3.3, $[\Delta_{\top}(d_H, \Sigma)(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{000, 001, 011, 100\}$. Por otro lado si el individuo 1 da a conocer φ', con $[\varphi_1'] = \{000\}$, en vez de φ_1, entonces $[\Delta_{\top}(d_H, \Sigma)(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{000, 001, 100\}$.

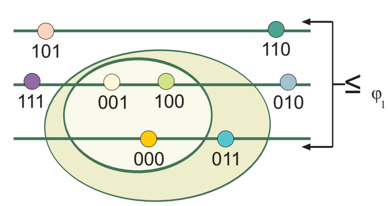

Fig. 3.6:

Considerando la interpretación $w = 000$ tenemos que $d(w, \varphi_1) = 0$, y puesto que $w \models \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)$, se tiene

$$[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \simeq_{\varphi_1}^{I} [\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)].$$

Por otro lado, $|\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)| < |\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)|$, al igual que $|min(\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2), \leq_{\varphi}^{d_H})| < |min(\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2), \leq_{\varphi}^{d_H})|$. De esta manera

$$[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] \sqsubset_{\varphi_1}^{II} [\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]$$

y

$$[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] \sqsubset_{\varphi_1}^{III} [\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)].$$

De la última ecuación se tiene que

$$[\Delta_{\top}(d_H, \Sigma)\varphi_1' \sqcup \varphi_2] \sqsubset_{\varphi_1}^{IV} [\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)],$$

como se observa de manera bien sintética en la figura 3.6. ∎

En contraste con la proposición 25, si en el proceso de fusión intervienen al menos tres bases de creencias el operador Σ puede ser manipulado incluso si no existe restricción de integridades en el proceso. Esto se establece en el siguiente resultado.

Proposición 27 *Si en el proceso de fusión no interviene restricción de intergridad alguna, el operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable con respecto al levantamiento I si al menos tres bases participan en este proceso.*

Demostración: En virtud de la proposición 8 sabemos que $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable con respecto a i_{d_w} cuando participan tres bases. Así por la proposición 23 $\Delta^{d_H,\Sigma}$ es manipulable con respecto al levantamiento I. ∎

A diferencia del operador $\Delta^{d_H,\Sigma}$, los operadores $\Delta^{d_H,GMax}$ y $\Delta^{d_H,Max}$ son manipulables con respecto al levantamiento I en muchas más situaciones.

Proposición 28 *Los operadores $\Delta^{d_H,Max}$ y $\Delta^{d_H,GMax}$ son manipulables por los levantamientos I, II, III, IV y V incluso si en el proceso de fusión no interviene restricción de integridad alguna, sólo dos bases son fucionadas y la base inicial es completa.*

Demostración: Para $\Delta^{d_H,GMax}$ es una consecuencia inmediata de las proposiciones 12 y 23.

Ahora veamos la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,Max}$ considerando el siguiente ejemplo: Supongamos φ_1 y φ_2 bases de creencias cuyos modelos están determinados por $\{000\}$ y

$\{011\}$, respectivamente. Como se observa en la tabla 3.4

$$[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{001, 010\}.$$

Luego si el individuo 1 opina φ_1', con $[\varphi_1'] = \{100\}$, en vez de φ_1 tenemos que

$$[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{000, 001, 010, 101, 110, 111\}.$$

$[\top]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_1')$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
000	0	2	1	2	2
001	1	1	2	1	2
010	1	1	2	1	2
011	2	0	3	2	3
100	1	3	0	3	3
101	2	2	1	2	2
110	2	2	1	2	2
111	3	1	2	3	2

Tabla 3.4: Tabla de cálculos

De esta manera, si consideramos $w = 000$, tenemos que $d(w, \varphi_1) = 0$, mientras que para cada w' modelo de $\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, $d(w'\varphi_1) > 1$. Así

$$\forall\ w' \models \Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2),\ w <_{\varphi_1}^{d_H,f} w'$$

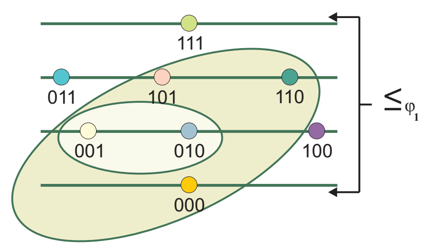

Fig. 3.7:

y por lo tanto

$$[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] \sqsubset_{\varphi_1}^{I} [\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)].$$

mostrando de esa manera la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,Gmax}$ respecto al levantamiento I, y en consecuencia por los cuatro restantes. ∎

Continuamos con las comparaciones entre la noción de de manipulabilidad intrinseca y la manipulabilidad vía índices a través de los cinco levantamientos definidos y los índices

i_{d_w}, i_{d_s} e i_p, definidos en el capítulo 2.

Observación 1 Volvemos a analizar el segundo ejemplo visto en la demostración de la proposición 22. Como logramos ver en este ejemplo el operador $\Delta^{d_D,Max}$ se logró manipular con respecto a los levantamientos II, III y IV. Sin embargo, como se logro notar, φ_1 es consecuencia semántica de $\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, lo que indica que $i_p\big(\varphi_1, \Delta_{\top}^{d_D,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)\big) = 1$ lo que demuestra que el operador no es manipulable por i_p ya que este esta tomando su valor maximal, y por lo tanto no es manipulable por i_{d_w} e i_{d_s} con esta misma situación.

El corolario de la observación precedente es que hay situaciones en las que se puede manipular para los levantamientos II, III y IV pero no son situaciones de manipulación para ninguno de los 3 índices estudiados.

Recordemos que la proposición 23 nos dice esencialmente que manipulación con respecto a i_{d_w} implica manipulación con respecto al levantamiento I. El recíproco de ese resultado no es cierto. Para mostrar esto consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6 Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias definidas por los conjuntos de modelos $\{101, 100\}$ y $\{011\}$, respectivamente, y consideremos μ, con $[\mu] = \{000, 010, 011, 110\}$, la restricción de integridad.

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_\Sigma$	$dist'_\Sigma$
000	1	2	2	3	4
010	2	1	1	3	2
011	2	2	0	2	2
110	1	0	2	3	2

Tabla 3.5: Tabla de cálculos

Como se puede observar en la tabla 3.5, $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{011\}$. Sin embargo, si el individuo cuyas creencias están dadas en φ_1 da a conocer φ_1', donde $[\varphi_1'] = \{110\}$, en vez de φ_1 entonces $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] = \{010, 011, 110\}$. Así, denotando $w = 110$ tenemos que $d_H(w, \varphi) < d_H(w', \varphi)$, para cada $w' \models \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, lo que implica que para cada $w' \models \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, $w <_{\varphi_1}^{d_H} w'$.

De esta manera

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] \sqsubset_{\varphi_1}^{I} [\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)]$$

Por otro lado, notemos que tanto $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ como $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)$ son inconsistentes con φ_1, demostrando que

$$i_{d_w}(\varphi_1, \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)) = \Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) = 0$$

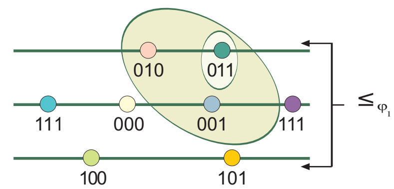

Fig. 3.8:

A diferencia del resultado obtenido en la proposición 23, el hecho que un operador $\Delta^{d,f}$ sea manipulable por el operador i_{d_s} con cierta situación, no asegura la manipulabilidad de este operador para los levantamientos I, II, III, IV. Para mostrar esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 Consideremos el operador $\Delta^{d_H,Max}$ y la restricción de integridad μ, donde $[\mu] = \{0000, 0001, 1010, 1110, 1111\}$. Sean φ_1 y φ_2 bases de creencias definida por los conjuntos de modelos $\{0000, 1010, 1110\}$ y $\{1111\}$, respectivamente.

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_1')$	$d(w,\varphi_2)$	$dist_{Max}$	$dist'_{Max}$
0000	0	1	4	4	4
0001	1	2	3	3	3
1010	0	1	2	2	2
1110	0	2	1	1	2
1111	1	3	0	1	3

Tabla 3.6: Tabla de cálculos

Al observar los cálculos realizados en la tabla 3.6, se puede notar que

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] = \{1110, 1111\},$$

lo que nos dice que $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$. Sin embargo, si el individuo con base de creencias φ_1 opina φ_1', determinada por el conjunto de modelos $\{1000\}$, en vez de su verdadera base, entonces

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)] = \{1010, 1110\},$$

demostrando que $\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$ y por lo tanto

$$i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)) > i_{d_s}(\varphi_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2))$$

Por otro lado notemos que

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \simeq_{\varphi_1}^{I} [\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)],$$

pues ambos resultados son consistentes con φ_1.

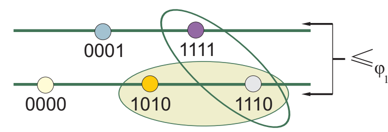

Fig. 3.9:

Puesto que $\big|[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]\big| = \big|[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)]\big|$ se obtiene

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \simeq_{\varphi_1}^{II} [\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)].$$

Notando que $\big|min\big([\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)], \leq_{\varphi_1}^{d_H}\ \big)\big| < \big|min\big([\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)], \leq_{\varphi_1}^{d_H}\ \big)\big|$, se tiene

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \sqsubset_{\varphi_1}^{III} [\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)].$$

y por lo tanto

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \sqsubseteq_{\varphi_1}^{IV} [\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)].$$

De esta manera no se puede manipular $\Delta^{d_H,Max}$ con la misma situación por alguno de los primeros cuatro levantamientos.

Sin embargo, como $\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \not\models \varphi_1$ y $\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2) \models \varphi_1$ podemos concluir que $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1' \sqcup \varphi_2)] \subset min(\mathcal{W}, \leq_{\varphi_1}^{d_H})$ $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)] \not\subset min(\mathcal{W}, \leq_{\varphi_1}^{d_H})$. De esta manera

$$[\Delta_\mu^{d_H,Max}\big(\varphi_1' \sqcup \varphi_2\big)] \sqsubset_{\varphi_1}^{V} [\Delta_\mu^{d_H,Max}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)].$$

logrando la manipulabilidad de $\Delta^{d_H,Max}$.

Esto último es, de hecho, un resultado general con el que cerramos este capítulo:

Teorema 9 *Sea d una pseudodistancia y f una función de agregación. Si el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable por el índice i_{d_s} con cierta situación de manipulabilidad, entonces dicho operador es manipulable por el levantamiento V con la misma situación.*

Demostración: Supongamos que el operador $\Delta^{d,f}$ es manipulable por el índice drástico fuerte, i_{d_s}. De esta manera existe una situación de manipulabilidad $\Psi,\ \mu,\ \varphi,\ \varphi'$, con $\varphi \in \Psi$, tal que

$$i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])) > i_{d_s}(\varphi, \Delta_\mu^{d,f}(\Psi)),$$

conduciéndonos a que $\Delta_\mu^{d,f}(\Psi) \not\models \varphi$ y $\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right]) \models \varphi$, y por lo tanto

$$\left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])\right] \subset min(\mathcal{W}, \leq_\varphi^d) \text{ y } \left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\right] \not\subset min(\mathcal{W}, \leq_\varphi^d) \tag{3.1}$$

Si $\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ es inconsistente con φ, entonces considerando $w \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])$ se tiene que $d(w,\varphi) = 0$ y para cada $w' \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi), d(w',\varphi) > 0$. De esta manera, para cada $w' \models \Delta_\mu^{d,f}(\Psi),\ d(w,\varphi) < d(w',\varphi)$, lo que implica que para cada w' interpretación de $\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ se tiene $w <_\varphi^d w'$.

Luego $\left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])\right] \sqsubset_\varphi^I \left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\right]$, y por lo tanto

$$\left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])\right] \sqsubset_\varphi^V \left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\right]$$

Por otra parte, si φ es consitente con $\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)$ entonces $\left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])\right] \simeq_\varphi^I \left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\right]$. De esto y de 3.1 se tiene

$$\left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi\left[\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right])\right] \sqsubset_\varphi^V \left[\Delta_\mu^{d,f}(\Psi)\right],$$

demostrando en ambos casos la manipulabilidad con respecto al levantamiento V. ∎

BIBLIOGRAFÍA

[Arrow 1963] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* New Haven and London, Yale University Press, 1963.

[Everare et al. 2004] P. Everaere, S. Konieczny, P. Marquis. On merging strategy-proofness. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Principles of Knowledge Representation And Reasoning, KR04*. Whistler, Canada. June 2-5, 2004, pp 357–368 Morgan- Kaufmann Publishers, 2004.

[Dubois y Fargier 2004] D. Dubois and H. Fargier, A Unified framework for order-of-magnitude confidence relations, in: *Proceedings of the Twentieth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-04)*, Arlington, Virginia, USA, 2004, pp. 138-145.

[Dubois et al. 1994] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, Possibilistic logic, in: D.M. Gabbay, et al. (Eds.), "Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming", Vol. 3, Oxford University Press, Oxford, UK, 1994, pp. 439-513.

[Dubois y Prade 2004] D. Dubois and H. Prade, Possibilistic logic: a retrospective and prospective view, *Fuzzy Sets and Systems*, 144 (2004) 3-23.

[Everare et al. 2004] P. Everaere, S. Konieczny, P. Marquis. On merging strategy-proofness. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Principles of Knowledge Representation And Reasoning, KR04*. Whistler, Canada. June 2-5, 2004, pp 357–368 Morgan- Kaufmann Publishers, 2004.

[Everare et al. 2007] P. Everaere, S. Konieczny, P. Marquis. The Strategy-Proofness Landscape of Merging, *Journal of Artificial Intelligence Research*, 28 (2007) 49-105.

[Gibbard 1973] P. A. Gibbard, Manipulations of voting schemes: A general result, *Econometrica*, 41 (1973), 587-602.

[Kelly 1978] J. S. Kelly. *Arrow impossibility theorems.* New York, Academic Press, 1978.

[Kelly 1988] J. S. Kelly. *Social Choice Theory : An Introduction.* Berlin, Springer-Verlag, 1988.

[Konieczny 1999] S. Konieczny. Sur la logique du changement: revision et fusion de bases de connaissances. Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1999.

[Konieczny y Pino 1998] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[Konieczny y Pino 1999] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, pages 233–244, July 5-9 1999.

[Konieczny y Pino 2002] S. Konieczny, R. Pino Pérez (2002) : Merging Information Under Constraints: A Logical Framework. *Journal of Logic and Computation* 12(5): 773-808.

[Konieczny y Pino 2005] S. Konieczny, R. Pino Pérez (2005) : Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. European Journal of Operation Research 160(3): 785–802.

[Leal 2003] J. F. Leal. Posibilidad e Imposibilidad en la Teoría de Elección Social. Trabajo Especial de Grado. Universidad de Los Andes. Julio 2003.

[Leal 2005] J. F. Leal. Manipulabilidad de funciones de elección. Tesis de Maestría. Universidad de Los Andes. Julio 2005.

[Pino y Leal 2005] R. Pino Pérez y F. Leal. Lifting preferences and manipulability. *Belief Revision in Rational Agents: Perspectivas from Artificial Intelligence Philosophy and Economics.* Dagstuhl, Alemania del 7 al 12 de agosto de 2005. [Participación por invitación especial.]

[Pino y Leal 2006] R. Pino Pérez y F. Leal. A notion of manipulability based on lifting preferences. Sometido. 2006.

[Rot 2001] H. Rott. *Change, Choice and Inference.* Oxford, Oxford University Press, 2001

[Satterhwaite 1975] M. A. Satterhwaite, Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions, *Journal of Economic Theory* 10 (1975), 187-217.

[Sen 1979] A. K. Sen *Collective Choice and Social Welfare.* Amsterdam, Elsevier, 1979.

[Sen 1982] A. K. Sen *Choice, Welfare and Measurement.* Oxford, Blackwell, 1982.

[Shackle 1953] G. L. S. Shackle, On the meaning and measure of uncertainty, *Metroeconomica*, 5 (1953), 97-115.

[Shackle 1955] G. L. S. Shackle, "Uncertainty in Economics and Other Reflections", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1955.