Universidad de Los Andes.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Taller de Pre-Cálculo
en la XI Escuela Venezolana para Enseñanza de la Matemática

Eleazar del Pilar León

Trabajo presentado ante la ilustre Universidad de Los Andes
para optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Tutores:
Interno: Prof. Roberto Morales
Externo: Prof. Arturo Reyes

Mérida-Venezuela

2007

Agradecimientos

Mis agradecimientos sinceros a los siguientes:

- A mi madre Bartola León, quien ha sabido comprenderme y escucharme en cada momento que lo he necesitado.
- Al Profesor Roberto Morales, mi tutor en todas mis labores de estudio e investigación matemática.
- Al Profesor Arístiden Arellán, Coordinador de la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, quien aceptó que realizara mi pasantía como trabajo de grado en el marco de la XI Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.
- Al Profesor Mauro Briceño, por su estímulo académico al sugerirme realizar como trabajo de grado la pasantía en la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.
- A mi compañera y esposa Yoleida Burgos, no tengo palabras como agradecerle el apoyo moral y solidario que fueron siempre necesarios. Este logro también es tuyo.
- A mis dos hijas, Catherine y Julihany, que proveen el estimulo y las fuerzas para lograr cada una de mis metas.
- A todos mis hermanos y amigos, en especial a mi amigo Franklin Leal por haberme apoyado en este trabajo.

Septiembre 2007.

Índice general

Introducción

Con la finalidad de brindar alguna contribución a la expansión y solidificación de algunos temas de matemáticas, hemos escrito las presentes notas, las cuales requieren básicamente, para su compresión, el haber cursado la matemática secundaria, aunque conviene señalar que el el tratamiento y contenido de algunos temas pueden resultar novedosos o desconocidos en el ámbito de la educación secundaria.

El contenido de las presentes notas se ha dividido en cinco capítulos, en el primero de los cuales se hace un breve repaso sobre funciones, y posteriormente se estudian los conceptos de traslación y homotecia en el plano a lo largo de los ejes coordenados y su efecto en la variación del área de ciertas figuras planas. Se puede complementar este capítulo con algunas lectura de los textos [8] y [**?**] de la bibliografía al final del texto. En el capitulo 2 se estudian las desigualdades desde el punto de vista gráfico. En particular, se considera de desigualdades donde intervienen una recta y una parábola. Mas detalles sobre este tema pueden verse en [1]. Continuamos luego con el capitulo 3 en el cual estudiamos en primer lugar el "Principio de Inducción Completa" en los números naturales, y en segundo lugar el tema de polinomios. Sobre éste último tema pueden consultarse el libro [7] de la Profesora Olga Porras, editado por la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Posteriormente, en el capitulo 4, estudiamos la descomposición en factores primos del factorial de un número entero. Mas detalles sobre este tema pueden verse en [4].

Finalmente en el capitulo 5 se exponen algunos resultados sobre sobre construcciones con regla y compás, comenzando con los números algebraicos, trascendentes y constructibles. Llegamos luego a ejemplos en los cuales la construcción con regla y compás no se puede realizar, como son los casos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo de 60°. El capitulo termina con las cuadraturas de lúnulas de las figuras planas, especialmente las lúnulas de Hipócrates, para terminar con un resultado bastante conocido de la no-cuadratura del círculo. Para abundar sobre números constructibles y construcciones con regla y compás pueden consultarse el texto [5] del álgebra de I.N Herstein. Para las cuadraturas conviene leer el artículo [6] del profesor Douglas Jiménez y el libro [3] para los aspectos históricos sobre el tema.

Mérida, 2007

Capítulo 1

Gráficos de funciones. Funciones biyectivas y funciones inversas

Introducción

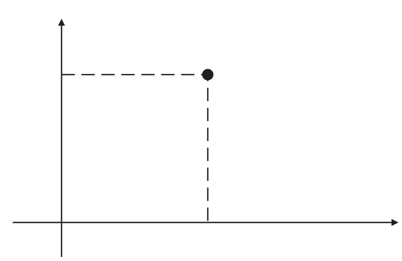
En este capitulo hacemos en primer lugar un breve repaso sobre funciones y sus gráficos, poniendo especial énfasis sobre las funciones biyectivas y el cálculo sobre sus respectivas funciones inversas. En segundo lugar estudiamos algunos movimientos básicos del plano, como la traslación y homotecias, así como también las relaciones entre las áreas de figuras planas y las áreas de las respectivas figuras homotéticas.

1.1. Gráfico de una función

Denotamos con $\mathbb{R}^2$ al plano cartesiano constituido por los pares ordenados (x, y) de números reales x e y. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

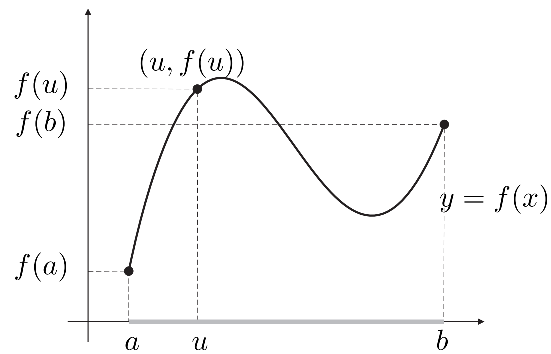
Cada elemento P de $\mathbb{R}^2$, es un "punto" del plano, y en consecuencia hay un par ordenado (x, y) tal que $P = (x, y)$. El número real x se llama la primera coordenada de P, y el número y es su segunda coordenada.



Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. entonces f asocia a cada elemento $x \in A$ un único número real $f(x)$, y el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ tales que $x \in A$, se llama el **gráfico** de la función f, y lo denotamos con G_f. Es decir,

$$G_f = \Big\{(x, f(x)) : \quad x \in A\Big\}.$$

Gráficamente tenemos:

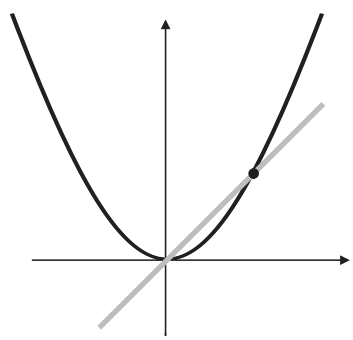


En el gráfico anterior, A es el intervalo cerrado $[a, b]$. La notación "$y = f(x)$" es una forma abreviada de denotar el gráfico de f.

Gráficos de algunas funciones elementales, son los siguientes.

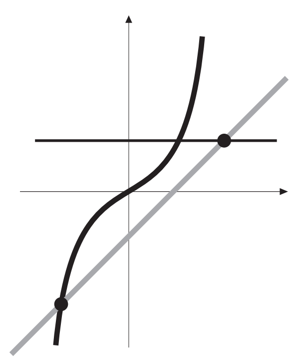
Ejemplo 1.1.1 *Gráficos de las funciones*

$$y = x^2, \quad y = x$$

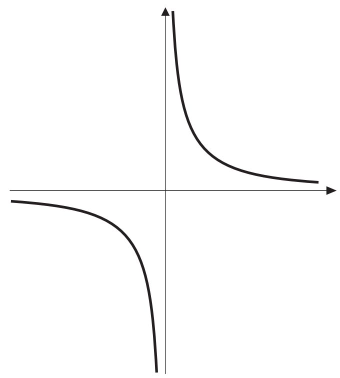


Ejemplo 1.1.2 *Gráficos de las funciones*

$$y = x^3, \quad y = 2 \quad y = x - 2$$



Ejemplo 1.1.3 *Gráfico de la hipérbola* $h(x) = \dfrac{1}{x}$.



1.1.1. Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es una **función inyectiva** si para cada par de puntos x e y en A, tales que $f(x) = f(y)$ se verifica que $x = y$. O también, si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

Dada una función f, si se desea estudiar si es inyectiva o no, se resuelve la siguiente ecuación

$$f(x) = f(y) \tag{1.1}$$

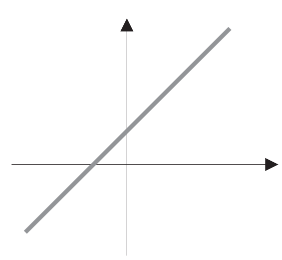
y si la solución es $x = y$, entonces f es inyectiva, en caso contrario no es inyectiva.

Ejemplo 1.1.4 *Toda recta de la forma* $y = ax + b$ *es una función inyectiva, cuando* $a \neq 0$.

Solución. La ecuación 1.1 en este caso se reduce a

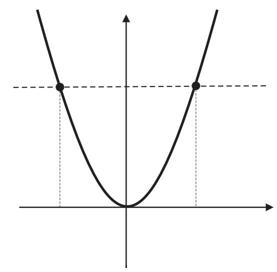
$$ax + b = ay + b$$

y tiene por solución $x = y$, luego la recta $y = ax + b$ es inyectiva.



$\ldots\blacktriangledown$

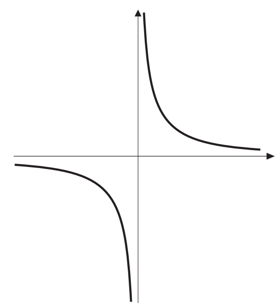
Ejemplo 1.1.5 *La parábola* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ *no es inyectiva.*



Solución. La ecuación $f(x) = f(y)$ es equivalente a $x^2 = y^2$ tiene solución $x = \pm y$. Por ejemplo $f(2) = f(-2)$ siendo $2 \neq -2$, luego $y = x^2$ no es inyectiva.

▼

Ejemplo 1.1.6 *La hipérbola* $h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ *dada por* $h(x) = \frac{1}{x}$ *es inyectiva.*



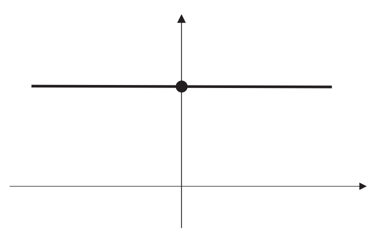
Solución. La ecuación

$$h(x) = h(y) \text{ es equivalente a } \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

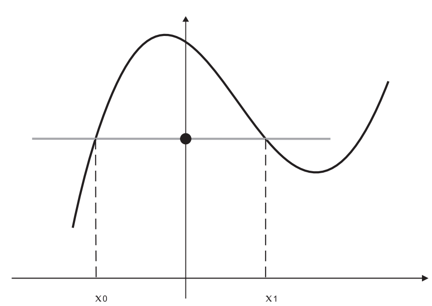
y tienen por solución $x = y$, luego la hipérbola h es inyectiva. . . ▼

1.1.2. Interpretación geométrica de la inyectividad

Fijemos un número real y_o, y considere el gráfico de la recta $y = y_o$:

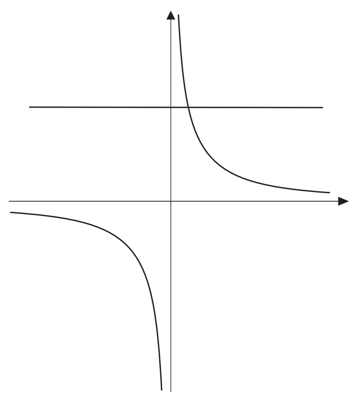


La recta horizontal que pasa por el punto $(0, y_o)$ del eje $\vec{Y}$ puede o no intersectar el gráfico G_f de la función f. Si la recta intersecta efectivamente a G_f al menos en dos puntos (x_o, y_o), (x_1, y_o), se tiene que,$f(x_o) = f(x_1) = y_o$, como $x_o \neq x_1$, resulta que f no es inyectiva.



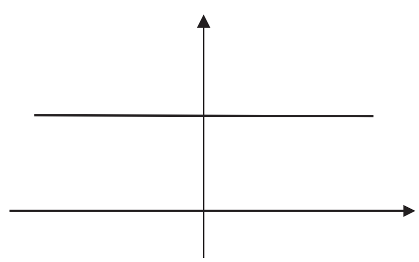
En conclusión. Tenemos que una función f es inyectiva si y sólo si cada recta horizontal intersecta al gráfico de la función a lo sumo en un punto, es decir, dicha recta o no intersecta G_f, o lo intersecta en un único punto.

Ejemplo 1.1.7 *La hipérbola* $h(x) = \dfrac{1}{x}$ *es una función inyectiva.*



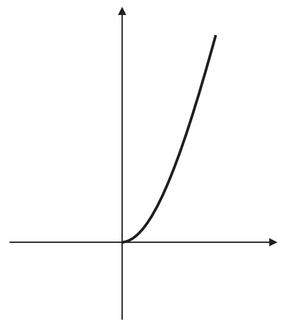
Obsérvese que toda recta horizontal que intersecta al gráfico de la hipérbola la intersecta en un único punto. Además, observe que la recta $y = 0$ no intersecta al gráfico de la hipérbola.

Ejemplo 1.1.8 *La función constante* $y = 3$ *no es inyectiva.*



Obsérvese que hay una única recta horizontal que intersecta al gráfico de la función constante y=3 en varios puntos, ¿cuál es la recta?.

Ejemplo 1.1.9 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = x^2$ ***no*** *es inyectiva!*
Pero, $f(x) = x^2$ *para* $x \geq 0$*, si es inyectiva.*



1.1.3. Función sobreyectiva

Consideremos dos conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. una función

$$f : A \to B$$

es una **función sobreyectiva** si y sólo si para cada elemento $y \in B$ existe un elemento $x \in A$, tal que $f(x) = y$: es decir, para cada $y \in B$, la recta horizontal que pasa por el punto $(0, y)$ del eje $\overrightarrow{Y}$, intersecta al gráfico de f.

Una función $f : A \to B$ es **biyectiva** o es una biyección si f es inyectiva y sobreyectiva. En este caso, para cada $y \in B$, la recta horizontal que pasa por $(0, y)$ intersecta a l gráfico de f en un **único** punto.

Ejemplo 1.1.10 *La función*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$$

es inyectiva y sobreyectiva (es biyectiva).

Solución.

Observe que para cada $y \in \mathbb{R}$, toda recta horizontal que pasa por $(0, y)$, intersecta al gráfico de g en un único punto.

.... ▼

Ejemplo 1.1.11 *La hipérbola*

$$h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

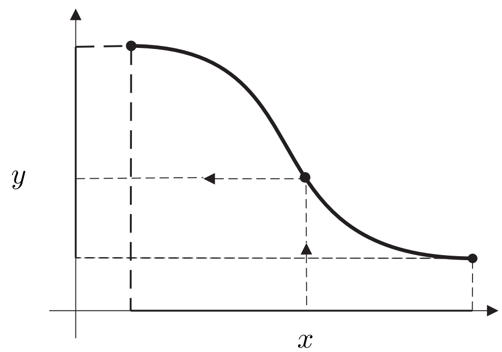
es biyectiva.

Solución. Para cada número $y \neq 0$ toda recta horizontal que pasa por (0,y), intersecta al gráfico de h en un **único** punto.

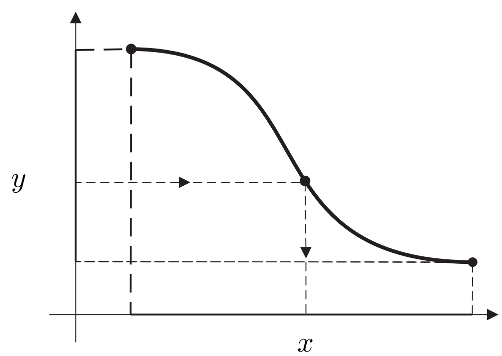
.... ▼

1.1.4. Función inversa

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función **biyectiva**. Entonces para cada $y \in B$, existe un **único** $x \in A$, tal que $f(x) = y$.



La unicidad del elemento $x \in A$, dado $y \in B$, se debe a la inyectividad y permite definir una nueva función del conjunto B en A.



La nueva función se define mediante la siguiente regla:

$$g : B \to A$$

dado $y \in B$, la imagen $g(y)$ es el único elemento $x \in A$ con $f(x) = y$. Esta nueva función g se le llama la **función inversa** de la función f y se denota usualmente por f^{-1}.

Directamente, de la definición de la función inversa, se tiene:

Proposición 1.1.1 *Una función biyectiva $f : A \to B$ y su inversa g, satisface la siguiente relación:*

$$f(g(y)) = y, \text{ para cada } y \in B$$

Demostración. Para cada elemento $y \in B$, si $g(y) = x \in A$, significa que f(x)=y. Luego,

$$g(y) = x \Rightarrow f(g(y)) = f(x) = y$$

Así, la composición de la función f con su inversa g, es la función identidad del conjunto B.

. . . . ▼

Corolario 1.0.1 *La inversa $g : B \to A$ también es inyectiva, y la inversa de g es la función f, es decir $g^{-1} = f$.*

Demostración. Resolvemos la ecuación $g(y_1) = g(y_2)$, para elementos $y_1,\ y_2 \in B$, luego,

$$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Así, la inversa g es inyectiva! Dado un elemento $x_o \in A$, tenemos que,

$$f(x_o) \in B, \quad \text{y} \quad g(f(x_o)) = x_o$$

Así, g es sobreyectiva y por la tanto es biyectiva.

La inversa de $g : B \to A$ está definida del conjunto A en el conjunto B, y se define de la siguiente manera, $g^{-1}(a) = b$ si $g(b) = a$.

Ahora,

$$g(b) = a \Rightarrow f(g(b)) = f(a) \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow g^{-1}(a) = f(a)$$

luego, se tiene $g^{-1} = f$.

. . . . ▼

1.1.5. Calculando la inversa de una función

Dada una función biyectiva f, para calcular su inversa, se intenta resolver la "ecuación"

$$f(x) = y$$

para un elemento dado y. Es decir, se trata de obtener (de despejar) x en función de y.

Ejemplo 1.1.12 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* $f(x) = x^3$, *entonces dado* $y \in \mathbb{R}$, *la ecuación*

$$x^3 = y$$

tiene como ***única*** *solución a* $x = \sqrt[3]{y}$. *Así que la función inversa de* f *es* $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

Ejemplo 1.1.13 *Si* $f(x) = x^2$ *para* $x \geq 0$, *entonces dado* $y \geq 0$, *la ecuación*

$$x^2 = y$$

tiene como única solución a $x = \sqrt{y}$. *La inversa de* f *es* $g(y) = \sqrt{y}$ *para* $y \geq 0$.

Ejemplo 1.1.14 *Si* $f(x) = 3x - 2$, *entonces la ecuación*

$$y = 3x - 2$$

tiene la única solución a $x = \frac{y+2}{3}$. *Luego,* $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$.

Ejemplo 1.1.15 *Tratemos de ver si la función*

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

tiene inversa. ***Resolvemos*** *la ecuación*

$$2x^2 - 4x - 2 = y$$

tenemos, $2x^2 - 4x - 2 - y = 0$, *y así*

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2(-2 - y)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{8 + 2y}}{2}$$

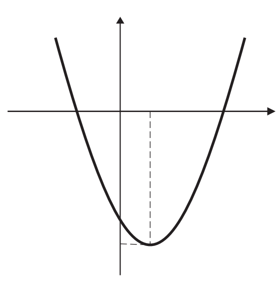
que para tener "solución" debemos tener $8 + 2y \geq 0$, *o sea* $y \geq -4$. *Así, para* $y \geq -4$ *tenemos dos soluciones de* x,

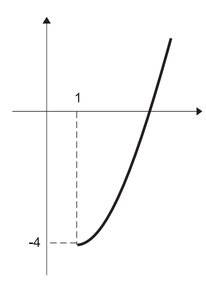
$$x = 1 + \frac{\sqrt{8 + 2y}}{2} \qquad y \qquad x = 1 - \frac{\sqrt{8 + 2y}}{2}$$

Luego, si consideramos solamente $x \geq 1$, $y \geq -4$, *la función*

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

considerada como función de $\{x \geq 1\} \xrightarrow{f} \{y \geq -4\}$ *tiene como inversa la función* $g(y) = 1 + \frac{\sqrt{8+2y}}{2}$. *Gráficamente, tenemos,*





1.1.6. Gráfico de la función inversa

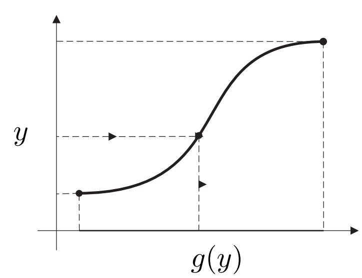
Dada una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ y su función inversa $g : B \longrightarrow A$, tratemos de ver cómo se obtiene el gráfico de g a partir del gráfico de f.

Antes de esto veamos el siguiente caso general: Dado un conjunto G en el plano, ¿qué condiciones debe cumplir G para que sea el gráfico de alguna función?. De acuerdo con lo que sabemos sobre gráficos de funciones obtendremos que G es el gráfico de alguna función si, y sólo si, para cada $x \in \mathbb{R}$, la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ intersecta a G a lo sumo en un punto. Si denotamos con A al conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que la recta vertical correspondiente intersecta a G, entonces tendremos una función $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida así: si $x \in A$ y si el par $(x, y) \in G$ es el único punto en que la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ intersecta a G, defino $h(x) = y$.

Veamos ahora el caso de la función inversa, supongamos que el siguiente es el gráfico de una función biyectiva

$$f : A = [a, b] \rightarrow B$$

Gráficamente tenemos:



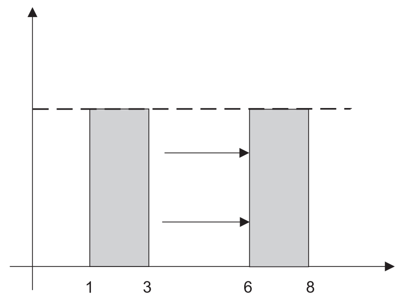
Aquí B es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$, si denotamos con g a la función inversa de f, entonces para cada $y \in B$, la recta horizontal que pasa por $(0, y)$, intersecta al gráfico G_f de f en un único punto:$(g(y), y)$.

Luego si nos situamos en el eje $\overrightarrow{Y}$ y miramos el gráfico G_f, lo que observamos es precisamente el gráfico de la inversa g. Es decir, si permutamos los ejes coordenados, el gráfico G_f se percibe desde el eje $\overrightarrow{Y}$ como el conjunto de pares ordenados $(y, g(y))$, el cual es precisamente el gráfico de g.
Así que, el gráfico de G es el conjunto de pares (y, x) tales que (x, y) este en le gráfico de f. Más adelante en la proposición 2.4.1 insistiremos en esto, cuando estudiemos el efecto que produce la permutación de los ejes coordenados en el gráfico de una función,y cómo a partir de aquí se construye el gráfico de f.

1.2. Transformaciones elementales del Plano

1.2.1. Traslación del plano a lo largo del eje $\vec{X}$

Considere el siguiente gráfico:



Queremos llevar el rectángulo con base en 1 y 3, hasta el rectángulo con base en 6 y 8. Se trata de mover el rectángulo de base 1 y 3 a lo largo del eje $\vec{X}$ en 5 unidades. ¿Cómo expresamos este movimiento en términos de las coordenadas de los puntos que forman el rectángulo? En este caso particular, la traslación consiste en aplicarle a cada par (x, y) de primer rectángulo la siguiente operación:

$$(x, y) \to (x + 5, y)$$

Por ejemplo:

$$(1, 0) \to (6, 0)$$

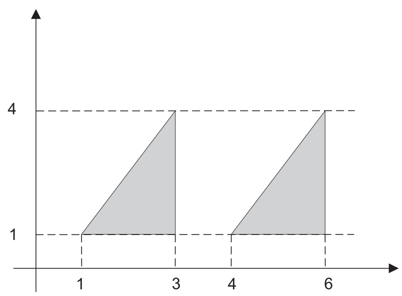
Es decir, la esquina de coordenadas $(1, 0)$ se traslada a la esquina $(6, 0)$, la esquina $(3, 0)$ en $(8, 0)$, la esquina $(1, 4)$ en $(6, 4)$ y $(3, 4)$ en $(8, 4)$.

En general, para un número real fijo r, la trasformación del plano $\mathbb{R}^2$ que consiste en transformar cada punto (x, y) en el correspondiente $(x + r, y)$ se llama "la traslación del plano a lo largo del eje $\vec{X}$" y de razón r. Si denotamos con T a esta transformación, entonces podemos escribir

$$T(x, y) = (x + r, y), \text{ para cada punto } (x, y) \text{ del plano.}$$

Si L es el conjunto de puntos del plano, $L \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $T(L)$ denota el conjunto transformado de L por la transformación T.

Ejemplo 1.2.1 *Si L es el triángulo con vértice en los puntos $(1, 1)$, $(3, 1)$ y $(3, 4)$ y $T(x, y) = (x+3, y)$, entonces $T(L)$ es el triángulo con vértices en los puntos $(4, 1)$, $(6, 1)$ y $(6, 4)$*

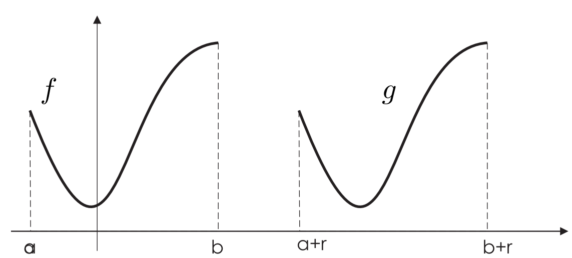


Nota. Si L es una figura geométrica cuya área es el número q, entonces $T(L)$ es una figura geométrica "análoga" a L y que tiene la misma área:

- Si L es un triángulo, $T(L)$ también.
- Si L es un círculo, $T(L)$ también.
- Si L es un rectángulo, $T(L)$ también.

Acción de la trasformación $T_r(x,y) = (x+r,y)$ sobre el gráfico de una función.

▷ El efecto de T sobre el gráfico de una función se ilustra en el siguiente dibujo:



Proposición 1.2.1 *Para una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la imagen del gráfico por T, $T(G_f)$ es el gráfico de la composición $g(x) = f(x-r)$, con dominio en el intervalo $a+r \leq x \leq b+r$.*

Demostración. Tenemos que: $T(a,0) = (a+r,0)$, $T(b,0) = (b+r,0)$. Entonces T transforma el intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[a+r,b+r]$. El resto de la prueba se basa en el siguiente resultado:

$$(x,y) \in T(G_f) \text{ si y sólo si } y = f(x-r).$$

En efecto, un punto $(x,y) \in T(G_f)$ si y sólo si existe $(\overline{x},\overline{y}) \in G_f$, tal que $T(\overline{x},\overline{y}) = (x,y)$. Note que: $\overline{y} = f(\overline{x})$. Luego,

$$(x,y) = T(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x}+r,\overline{y}) \Rightarrow x = \overline{x},\ y = \overline{y} = f(\overline{x}).$$

De donde, $y = f(\overline{x}) = f(x - r)$

. . . . ▼

Conclusión. Si G_f es el gráfico de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $T(G_f)$ es el gráfico de la composición $g(x) = f(x - r)$ que tiene por dominio el intervalo $[a + r, b + r]$.

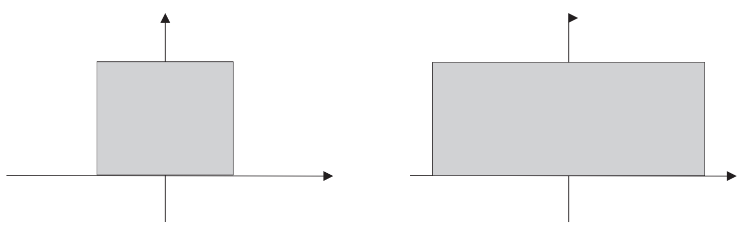
1.2.2. Homotecia del plano a lo largo del eje $\overrightarrow{X}$.

Homotecias: Sea m un número real que por comodidad agregaremos la condición $m > 0$. La transformación T definida en el plano $\mathbb{R}^2$ dada por la fórmula

$$H(x, y) = (mx, y)$$

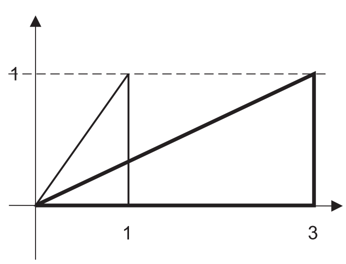
se llama "homotecia del plano a lo largo del eje $\overrightarrow{X}$" y de razón m.

El efecto de esta homotecia sobre un conjunto del plano es "estirarlo continuamente" a lo largo del eje $\overrightarrow{X}$.

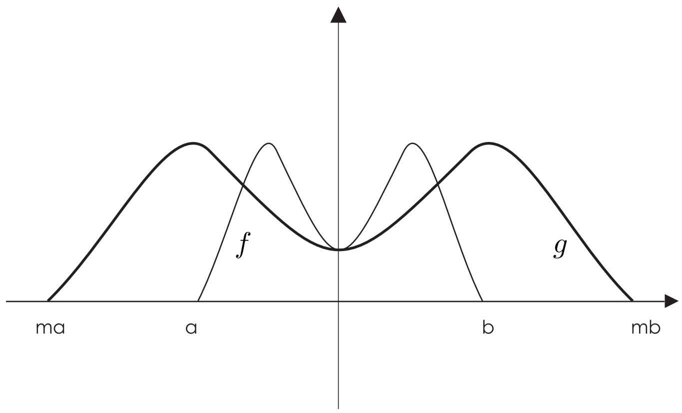


El gráfico anterior, muestra el "estiramiento a lo largo del eje $\overrightarrow{X}$" del rectángulo R es el rectángulo $H(R)$ a través del la homotecia: $H(x, y) = (2x, y)$

Ejemplo 1.2.2 *El triángulo de vértices* (0,0), (1,0) *y* (1,1) *se transforma en triángulo de vértices* (0,0), (3,0) *y* (3,1), *por la homotecia* $H(x, y) = (3x, y)$.



$\triangleright$ El efecto de la homotecia sobre el gráfico de una función $y = f(x)$ lo vemos en el siguiente gráfico:



Proposición 1.2.2 *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función, entonces* $H(G_f)$ *es el gráfico de la función* $g(x) = f\left(\dfrac{x}{m}\right)$, *para* $x \in [ma, mb]$.

Demostración. Tenemos que $H(a, 0) = (ma, 0)$, $H(b, 0) = (mb, 0)$. Entonces, H transforma el intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[ma, mb]$.

El resto de la prueba se basa en el siguiente resultado:

$$(x, y) \in H(G_f) \text{ si y sólo si } y = f\left(\frac{x}{m}\right).$$

En efecto, un punto $(x, y) \in H(G_f)$ si y sólo si existe un par $(\overline{x}, \overline{y}) \in G_f$, tal que $H(\overline{x}, \overline{y}) = (x, y)$. Note que: $\overline{y} = f(\overline{x})$. Luego,

$$(x, y) = H(\overline{x}, \overline{y}) = (m \cdot \overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow x = m \cdot \overline{x},\ y = \overline{y} = f(\overline{x})$$

De donde, $y = f(\overline{x}) = f\left(\frac{x}{m}\right)$.

Así tenemos la función $g : [ma.mb] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f\left(\frac{x}{m}\right)$, cuyo gráfico es $H(G_f)$, donde G_f es el gráfico de f. Observemos que como $m > 0$, se cumple:

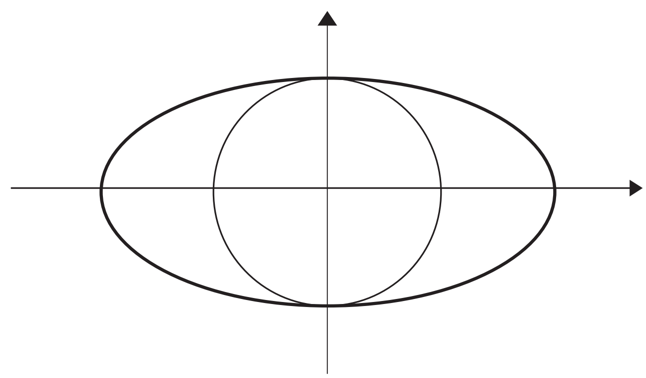
$$ma \leq x \leq mb \Leftrightarrow a \leq \frac{x}{m} \leq b$$

Si fuese $m < 0$, tendríamos $mb < ma$ y $mb \leq x \leq ma$ si y sólo si $a \leq \frac{x}{m} \leq b$.

. . . . ▼

Nota. Si $m > 0$ y L es una figura geométrica de área q entonces $H(L)$ tiene área $m \cdot q$, esto efectivamente vale si L es un rectángulo, un triángulo; y nosotros tomaremos esta propiedad como un hecho deducible de la observación y del razonamiento intuitivo.

Ejemplo 1.2.3 *Si C es una circunferencia, entonces $H(C)$ es una elipse y el área de la elipse $H(C)$ es $m \cdot \pi r^2$.*



Veamos: si $(x, y) \in H(C)$, entonces existen $(\overline{x}, \overline{y}) \in C$, tal que:

$$(x, y) = H(\overline{x}, \overline{y}) = (m\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \overline{x} = \frac{x}{m},\ y = \overline{y}$$

Como $(\overline{x}, \overline{y}) \in C$, $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = r^2$, luego:

$$\frac{x^2}{r^2} + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2 m^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

que es la misma ecuación de una elipse.

Además como el área del círculo limitado por C es de πr^2, el área de la región elíptica limitada por la elipse $H(C)$ es de $m\pi r^2$.

Con esta idea podemos calcular el área de cualquier región limitada por una elipse.

1.2.3. Traslaciones y homotecias a lo largo del eje $\overrightarrow{Y}$.

Podemos también hacer traslaciones y homotecias a lo largo del eje $\overrightarrow{Y}$. La traslación del plano a lo largo del eje Y y de razón r se define por

$$T(x, y) = (x, y + r)$$

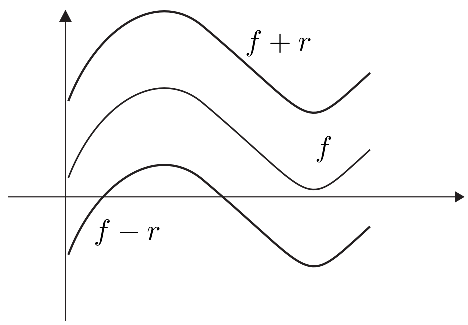
La homotecia de razón $m \neq 0$, es

$$H(x,y) = (x, my)$$

Los efectos sobre el gráfico de una función se ven en los siguientes resultados:

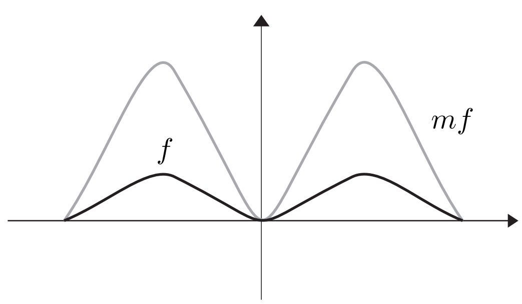
Proposición 1.2.3 (Traslaciones a lo Largo del eje $\overrightarrow{Y}$) *Si $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $H(G_f)$ es el gráfico de la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = f(x) + r$.*

Comentario. Gráficamente, la traslación $T(x,y) = (x, y+r)$ sube o baja la gráfica de f en r unidades.



Proposición 1.2.4 (Homotecia a los largo del eje $\overrightarrow{Y}$) *Si $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $T(G_f)$ es el gráfico de la función $g(x) = m\dot{f}(x)$.*

Comentario. Gráficamente, la homotecia $T(x,y) = (x, m \cdot y)$ "estira a lo largo del eje $\overrightarrow{Y}$" el gráfico de f en r unidades.

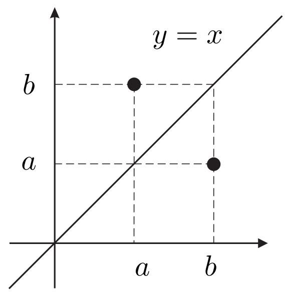


1.2.4. Reflexión del Plano

Veamos por último la transformación del plano que consiste en permutar los ejes coordenados y que se conoce con el nombre de " Reflexión del Plano" respecto a la recta $y = x$, la bisectriz del primer cuadrante. Esta transformación se define como

$$R(x, y) = (y, x)$$

Observe la acción de $R(x, y) = (y, x)$ sobre el par (a, b):



La acción de una reflexión sobre una función biyectiva, la presentamos en el siguiente resultado:

Proposición 1.2.5 *Si $f : [a, b] \to [c, d]$ es una función biyectiva y g es su función inversa entonces $R(G_f) = G_g$.*

Demostración.

De la definición de la reflexión R, se tiene que,

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (y, x) \in R(G_f).$$

Pero $(x, y \in G_f)$ si y sólo si $y = f(x)$. Si g es la inversa, entonces $x = g(y)$. En conclusión:

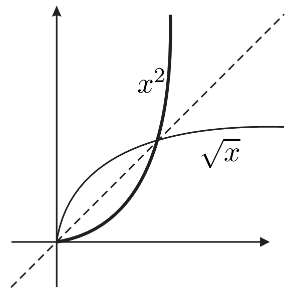
$$(y, x) \in R(G_f) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)$$

esto significa que $R(G_f)$ es el gráfico de la inversa g, en otras palabras, $R(G_f) = G_g$.

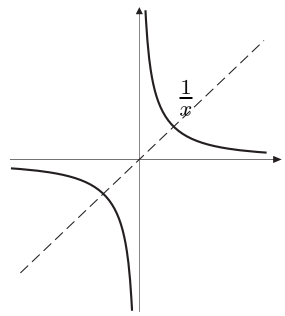
.... ▼

Comentario. Luego, para obtener el gráfico de la función g, inversa de f, a partir del gráfico G_f de f, reflejamos G_f respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 1.2.4 *Gráfico de la inversa de la función $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. El trazo grueso es la reflexión del gráfico G_f respecto a $y = x$.*



Ejemplo 1.2.5 *La hipérbola $h : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ dada por , $h(x) = \frac{1}{x}$ es su propia inversa. Es decir, $f^{-1} = f$. Observe la reflexión de las ramas de la hipérbola respecto a $y = x$.*



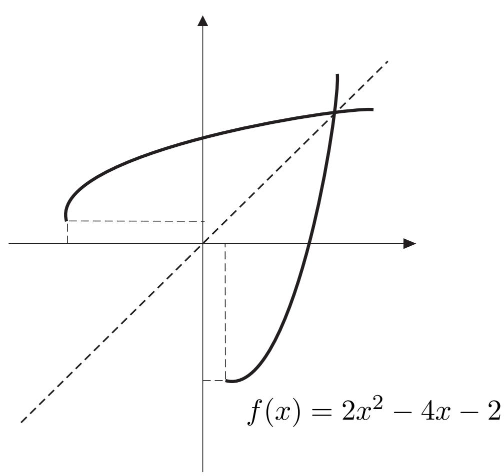
Ejemplo 1.2.6 *Vimos que la función*

$$f : \{x \geq 1\} \to \{y \geq -4\},\ f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

tiene como inversa

$$g : \{y \geq -4\} \to \{x \geq 1\},\ g(y) = 1 + \frac{\sqrt{8 + 2y}}{2}$$

Como $g(0) = 1 + \sqrt{2}$, entonces $f(1 + \sqrt{2}) = 0$. Los gráficos de f y la inversa g resultan entonces como en la siguiente figura



El trazo grueso es la reflexión del gráfico G_f respecto a $y = x$ y es el gráfico de la inversa g.

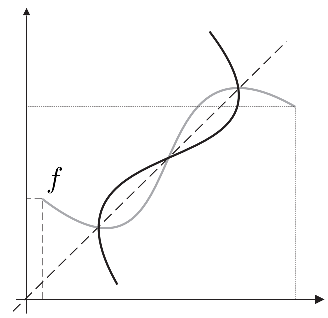
Ejemplo 1.2.7 *Para una función biyectiva*

$$f : [a, b] \to [\overline{a}, \overline{b}]$$

el gráfico de su inversa

$$g : [\overline{a}, \overline{b}] \to [a, b]$$

resulta finalmente como en el siguiente gráfico



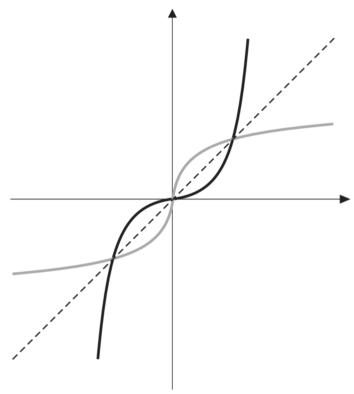
Ejemplo 1.2.8 *Para una función biyectiva*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^3$$

su inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

y sus gráficos son los siguientes.



Ejercicios

1. Hacer el análisis para determinar la función inversa de la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Poner $v_x = -\dfrac{b}{2a}$ y $v_y = -\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. El punto (v_x, v_y) es el vértice de la parábola y $f(x)$ se expresa así:

$$f(x) = a(x - v_x) + v_y.$$

Resolviendo la ecuación $y = ax^2 + bx + c = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$, para determinar x, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac(c - y)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac(y - v_y)}}{2a}.$$

Así que, $x = v_x \pm \dfrac{\sqrt{a(y - v_y)}}{a}$.

Deducir que hay dos casos:

(i) $a > 0$ e $y \geq v_y$,

(ii) $a < 0$ e $y \leq v_y$.

Dar ejemplo de los dos casos.

Finamente calcular las dos funciones inversas posibles:

Caso $a > 0$. Entonces $x = g(y) = v_x + \dfrac{\sqrt{a(y - v_y)}}{a}$, definida para $y \geq v_y$. Así, $g(y) \geq v_x$, y $x = h(y) = v_x - \dfrac{\sqrt{a(y - v_y)}}{a}$ definida también para $y \geq v_y$. Así, $x = h(y) = v_x$.

2. Sea $y = \dfrac{2 + 2x^2}{3}$. Determinar su gráfico y estudiar sus posibles funciones inversas, haciendo el gráfico de las mismas.

3. Dada la función $y = f(x)$, con $a \leq x \leq b$, obtener el gráfico de la función $g(x) = f(mx + r)$ con $m > 0$. Analizar para cuales valores de x esta definida $g(x)$ siguientes los siguientes pasos:

   (a) Primero hacer la traslación del plano $T(x, y) = (x - r, y)$. Si C es el gráfico de $f(x)$, entonces $T(C)$ es el gráfico de la función $g(x) = f(x + r)$.

   (b) En segundo lugar hacer la homotecia de $S(x, y) = \left(\dfrac{x}{m}, y\right)$. Si $\overline{C}$ es el gráfico de $g(x)$, entonces $S(\overline{C})$ es el gráfico de la función $h(x) = g(mx) = f(mx + r)$.

4. Usar el ejercicio anterior para graficar la curva $y = \left(\dfrac{x}{3} + 1\right)^2$ a partir del gráfico $y = x^2$.

5. Usar el ejemplo 1.2.3 para hallar el área de la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \; b > 0.$$

Capítulo 2

Desigualdades.Posiciones relativas de una parabola y una recta en el plano

Introducción

Como una introducción al tema de desigualdades podemos considerar el siguiente experimento: Calentamos un gas a un intervalo dado de temperatura y a a la presión ambiental. Denotamos con $v(t)$ el volumen del gas a temperatura t. Posteriormente aumentamos la presión hasta una presión p mayor que la ambiental, y denotamos con $w(t)$ el volumen del gas a temperatura t y presión p. Entonces nos planteamos los siguientes ejercicios:

(a) Determinar las temperaturas t bajo las cuales los volúmenes correspondientes $v(t)$ y $w(t)$ coinciden.

(b) Los valores de t, bajo los cuales el volumen del gas aumenta con el cambio de presión.

(c) Los valores de t, bajo los cuales el volumen del gas disminuye con el cambio de presión.

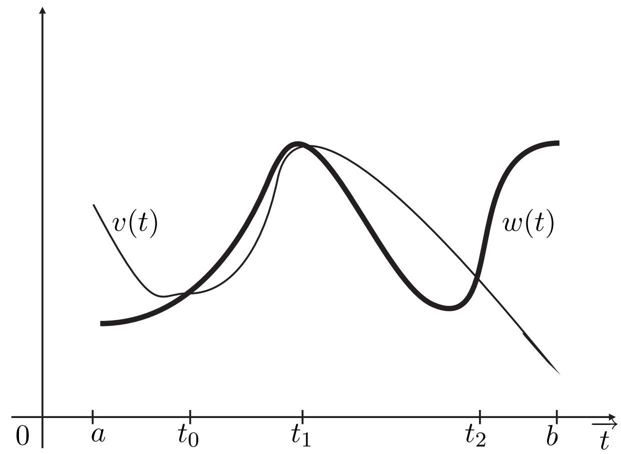
La interpretación de las situaciones anteriores en términos analíticos de expresa así:

(a') Hallar los valores de t, tales que $v(t) = w(t)$: Si representamos graficamente en el plano a las curvas $v(t)$ y $w(t)$, se trata entonces de determinar puntos de cortes.

(b') En el caso (b) se trata de las temperaturas bajo las cuales el volumen aumenta: Determinar los intervalos de temperatura en los cuales el gráfico de $w(t)$ esta por encima de $v(t)$.

(c') En el caso restante (c) corresponde a hallar los t tales que $w(t) < v(t)$, es decir, los intervalos de temperatura en los cuales el gráfico de $w(t)$ esta por debajo de $v(t)$.

El siguiente gráfico ilustra las tres situaciones:



En el gráfico anterior $[a, b]$ es el intervalo de temperaturas y además:

- $w(t)$ es la curva gruesa $w(t) = v(t)$ para $t = t_0, t_1, t_2$.
- $w(t) \geq v(t)$ en los intervalos $[t_0, t_1]$ y $[t_2, b]$.
- $w(t) \leq v(t)$ en los intervalos $[a, t_0]$ y $[t_1, t_2]$.

El ejemplo anterior muestra que podemos tener el caso general de dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en el plano, y se trata de determinar los intervalos en los cuales $f(x) \geq g(x)$, es decir, cuando el gráfico de f esta por encima de g.

El símbolo $f(x) \geq g(x)$ denota el conjunto de los números x del domino común de f y g tales que el número $f(x)$ es mayor o igual que el número $g(x)$. Al mismo símbolo $f(x) \geq g(x)$ se le da también el nombre de **desigualdad** o **inecuación.**

El proceso para resolver la inecuación $f(x) \geq g(x)$ es análogo al caso inicial del ejemplo del calentamiento de un gas. En general se procede así:

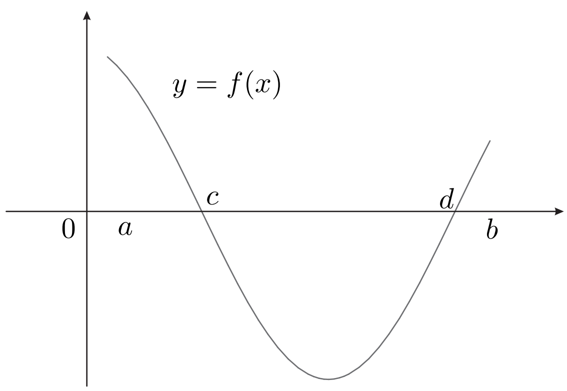
Se resuelve en primer lugar la ecuación

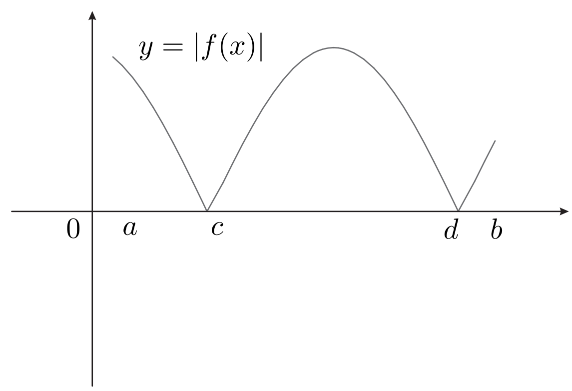
$$f(x) = g(x).$$

Se denota con J el dominio común de f y g, y si quitamos a J los números x donde $f(x) = g(x)$, entonces quedan unos intervalos, en cada uno de los cuales $f(x) > g(x)$ o bien $f(x) < g(x)$. Esto es así porque las funciones f y g a considerar son funciones básicas (ver introducción en el inicio del texto).

Un primer y sencillo ejemplo consiste en considerar una curva $y = f(x)$ y resolver la inecuación $f(x) \geq 0$. Es decir, determinas los intervalos donde el gráfico de f esta por encima del eje $\overrightarrow{X}$. A partir de aquí se puede construir el gráfico del valor absoluto de f, es decir $|f(x)|$, dado el gráfico de $f(x)$: en los intervalos donde $f(x) \geq 0$ los gráficos de $|f(x)|$ y $f(x)$ coinciden, porque en este caso $|f(x)| = f(x)$. Para los puntos restantes $f(x) < 0$, el gráfico de $|f(x)|$ es el simétrico respecto al eje $\overrightarrow{X}$ del gráfico de $f(x)$, porque en este caso $|f(x)| = -f(x)$.

El siguiente gráfico ilustra la situación.





Ejercicio:

(a) Graficar $|\sin(x)|$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Graficar $|x^3| = x^2|x|$ en todo $\mathbb{R}$.

(c) Graficar $|2x - 3|$ en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Estudiar el signo del trinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$. Es decir, resolver la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Indicaciones: Considere los dos casos:

(i) $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces, o sea, $b^2 - 4ac < 0$.

(ii) x_0 y x_1, con $x_0 < x_1$, son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Vea que el signo de $ax^2 + bx + c$ es el mismo signo de a en el caso (i), es decir, que $ax^2 + bx + c > 0$ si $a > 0$, y $ax^2 + bx + c < 0$ si $a < 0$, para cada valor de x. Para esto, use las desigualdades:

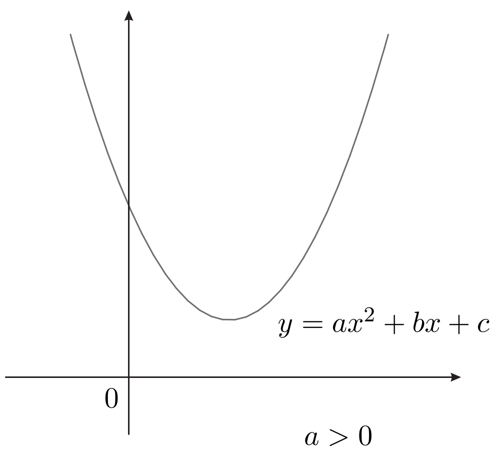
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Si no hay raíces $b^2 - 4ac < 0$, etc.

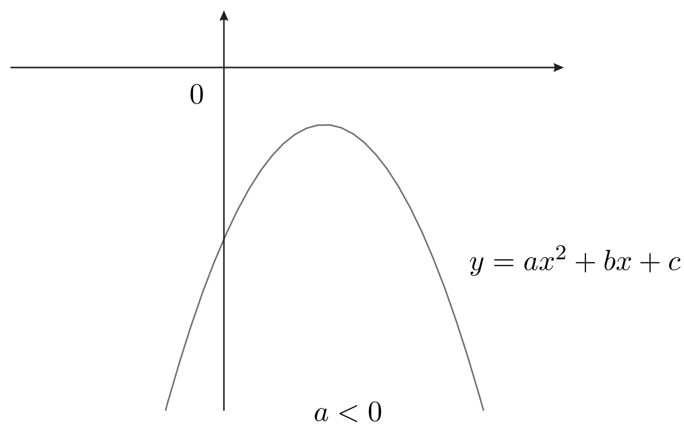
En el caso (ii), factorizar: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$ y deducir que:

- Si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c \geq 0$, en el intervalo $x \leq x_0$ ó $x \geq x_1$.
- Si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c \geq 0$, en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$.

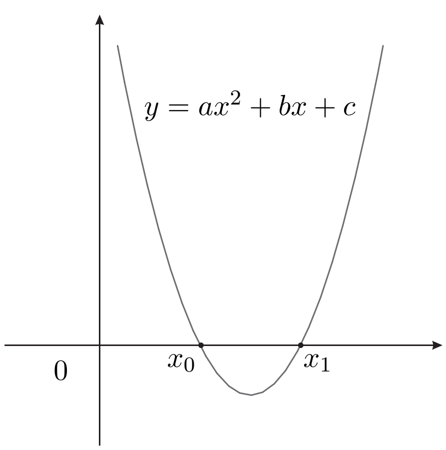
Ver los siguientes gráficos:



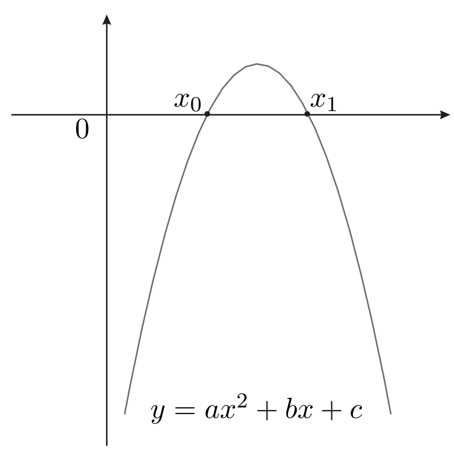
$a > 0$
$b^2 - 4ac < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$



$a < 0$
$b^2 - 4ac < 0$
$ax^2 + bx + c < 0$

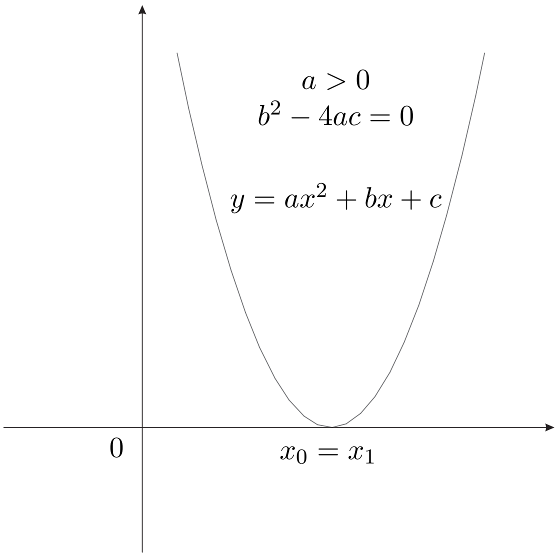


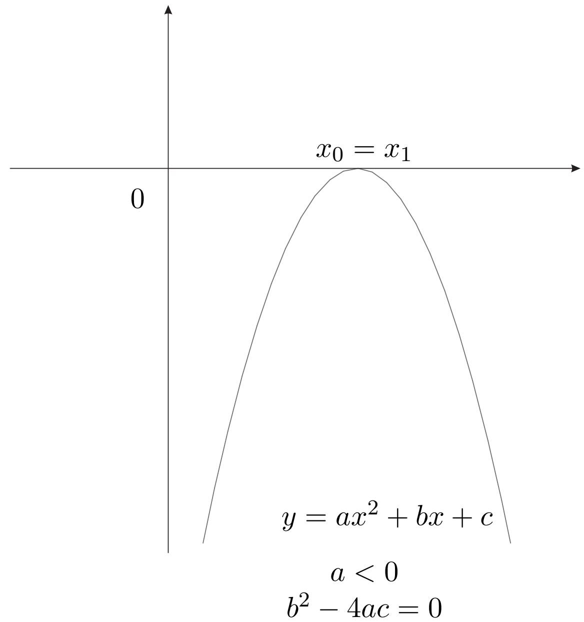
$a > 0$
$b^2 - 4ac > 0$



$a < 0$
$b^2 - 4ac > 0$

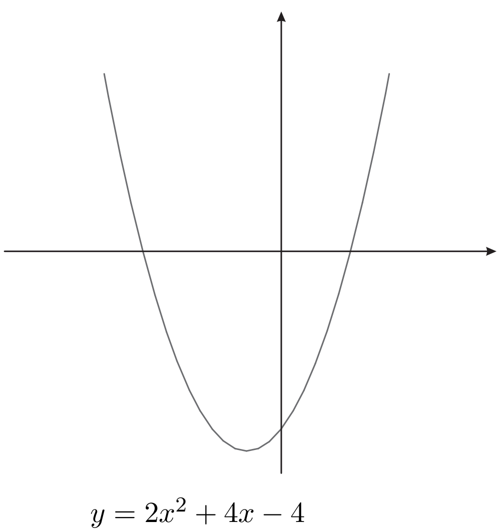
Finalmente queda el caso en que $b^2 - 4ac = 0$, es decir, cuando las raíces coinciden.

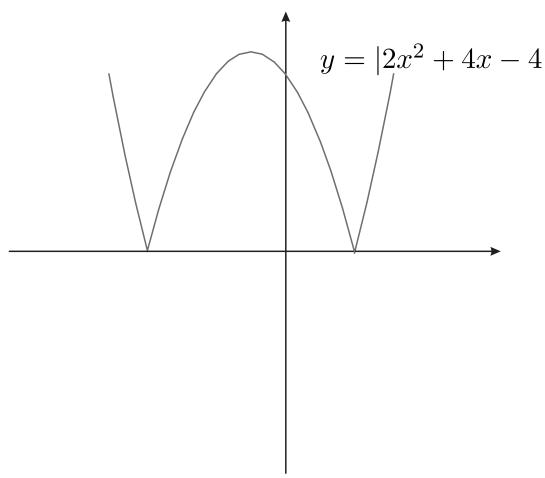




Ejemplo - Ejercicio: Graficar $2x^2 + 2x - 4$ y $|2x^2 + 2x - 4|$.

Las soluciones de $2x^2 + 2x - 4 = 0$ son $x_0 = 1$ y $x_1 = -2$, y así $2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$, y las gráficos son los siguientes:





Ejercicio: Resolver gráficamente la inecuación $2x^2 + 2x - 4 \geq x - 1$:

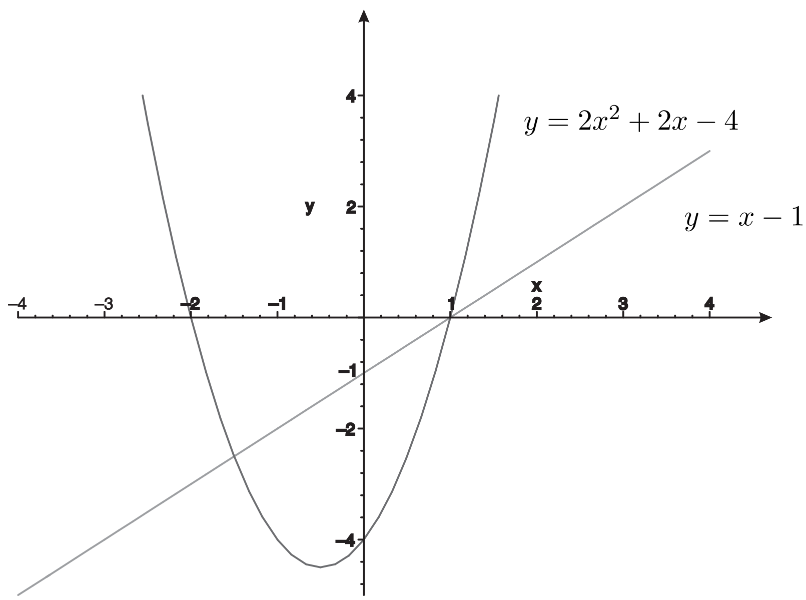
Primero buscamos dónde se cortan la parábola y la recta; resolvemos

$$2x^2 + 2x - 4 = x - 1$$

Las soluciones son 1 y $-\frac{3}{2}$.

x	$2x^2+2x-4$	$x-1$
1	0	0
$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{5}{2}$

Usando el gráfico del ejemplo anterior obtenemos el siguiente gráfico:

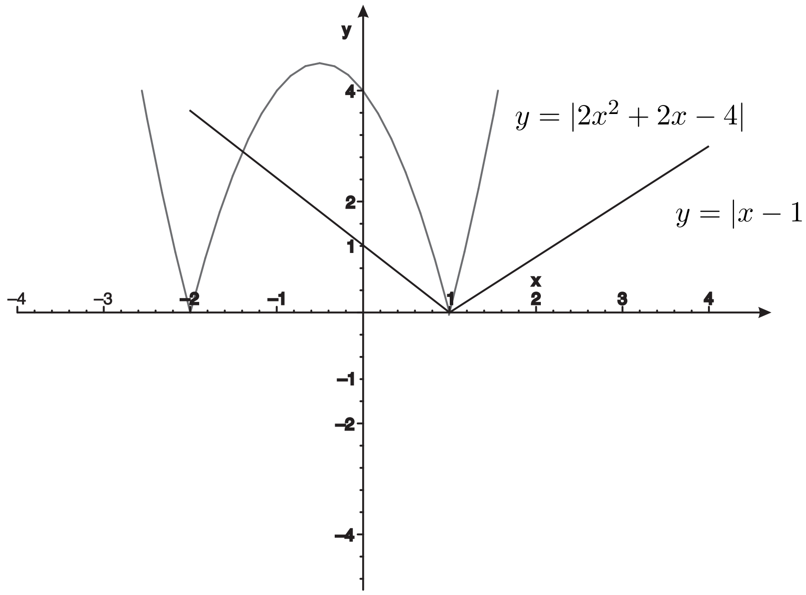


Conclusión: $2x^2 + 4x - 4 \leq x - 1$ en el intervalo $[-3/2, 1]$ y por lo tanto $2x^2 + 4x - 4 \geq x - 1$ en las semi-rectas

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty, -3/2]\} \text{ y } \{x \in \mathbb{R} : \ x \in [1, +\infty)\}$$

Ejercicio: Resolver $|2x^2 + 2x - 4| \leq |x - 1|$.

Solución. Usando el gráfico anterior obtenemos el gráfico de $|2x^2 + 2x - 4|$ y$|x - 1|$.



Comenzamos por resolver la ecuación $|2x^2 + 2x - 4| = |x - 1|$ para determinar los puntos de corte de $|2x^2 + 2x - 4|$ con $|x - 1|$. Entonces $|2x^2 + 2x - 4| \leq |x - 1|$ es equivalente

$$2x^2 + 2x - 4 = (x - 1) \text{ o } 2x^2 + 2x - 4 = -(x - 1).$$

La primera ecuación tiene solución $x = 1$ y $x = -3/2$. La segunda ecuación tiene solución $x = 1$ y $x = -5/2$. Así que los puntos de corte son:

$$(-5/2, 7/2), \ (-3/2, 5/2), \ (1, 0).$$

Con setos resultados y usando el gráfico anterior obtenemos que la solución de la desigualdad $|2x^2 + 2x - 4| \leq |x - 1|$ es el intervalo cerrado $[-5/2, -3/2]$.

Capítulo 3

Inducción completa en los números naturales. Polinomios

Introducción

Este capítulo se inicia con un somero estudio del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, su "Principio de Inducción Completa," a partir de la "Buena ordenación" de $\mathbb{N}$. Con esto estableceremos el "Método de Inducción Completa", el cual es muy útil para comprobar o demostrar algunos resultados del Cálculo Elemental, como tendremos oportunidad de ver en algunos ejemplos y ejercicios desarrollados más adelante.

Posteriormente continuamos con el tema de polinomios, pasando por el Algoritmo de la División de Polinomios y algunos criterios de divisibilidad para terminar con el estudio de la "Interpolación Polinomial."

3.1. El Principio de Inducción Completa

Denotamos con

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

al conjunto de los números naturales. Este conjunto esta ordenado por una relación $\leq$ tal que si m y n son dos números naturales cualesquiera, entonces se verifica que $n \leq m$ ó $m \leq n$. El conjunto $\mathbb{N}$ cumple además con la condición de que la relación de orden antes mencionada lo transforma en un conjunto bien ordenado. Esta Propiedad estableceremos sin la demostración correspondiente.

3.1.1. Principio de Buena Ordenación de los Números Naturales

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales con el orden usual.

Principio de buena ordenación: Todo subconjunto no vació de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento. Es decir, si $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$, entonces existe $m_0 \in M$ tal que $m_0 \leq m$ para cada m en M.

Notemos que esta propiedad no se verifica en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden usual ya que el intervalo abierto $(0,1)$ no tiene un primer elemento, puesto que para cada $x \in (0,1)$ se verifica que $0 < \frac{x}{2} < x < 1$ y así $\frac{x}{2} \in (0,1)$.

Una consecuencia del principio anterior es el siguiente principio.

3.1.2. Principio de Inducción Completa en $\mathbb{N}$

Sea M un subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

(i) $1 \in M$

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \in M$, entonces $n+1 \in M$

En estas condiciones resulta que $M = \mathbb{N}$. Es decir, el único subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica dos propiedades anteriores es $\mathbb{N}$ mismo.

Demostración. Sea $P = \mathbb{N} - M$ y supongamos que $P \neq \phi$. Entonces por el principio de buena ordenación existe un $n_0 \in P$ tal que $n_0 \leq n$ para cada $n \in P$.

Por otro lado como $1 \in M$, resulta que $n_0 > 1$ y $n_0 - 1 \notin P$ por la propiedad anterior de n_0. En consecuencia $n_0 - 1 \in M$, y por la propiedad (ii) de M, tenemos que $n_0 \in M$. Pero ésto contradice que $n_0 \in P = \mathbb{N} - M$. Concluimos entonces que la condición $P \neq \phi$ es falsa. Así que $P = \phi$ y $M = \mathbb{N}$.

El principio anterior nos permite establecer un método para probar o comprobar algunas fórmulas matemáticas que dependen esencialmente del conjunto $\mathbb{N}$. La situación sería como sigue: Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una fórmula matemática $F(n)$, y queremos demostrar que $F(n)$ es una "fórmula verdadera" para cada n. Entonces procedemos así: M es el conjunto de las n tales que $F(n)$ es "verdadera." Queremos usar el "principio de inducción completa" para probar que $M = \mathbb{N}$, es decir que $F(n)$ es verdadera para cada n en $\mathbb{N}$: Entonces procedemos de la siguiente manera:

- Primero probamos que $1 \in M$, o sea que $F(1)$ es "verdadera."
- Luego, dado n en $\mathbb{N}$, suponemos que $F(n)$ es verdadera. Esto se llama la "hipótesis inductiva".
- A partir de aquí debemos probar que $F(n+1)$ es verdadera.

Si logramos probar ésto, entonces de acuerdo con el "principio de inducción completa" resultará que $F(n)$ es una fórmula verdadera para cada número natural n. Lo descrito anteriormente constituye lo que se conoce con el nombre de "Método de Inducción Completa." Para ilustrar lo anterior, consideremos el siguiente:

Ejemplo 3.1.1 *Probar que para cada entero positivo n, $5^n - 1$ es multiplo de 4.*

Veamos: De acuerdo con el Método de Inducción Completa hay que ver en primer lugar que la proposición enunciada vale para $n = 1$, es decir que $5^1 - 1$ es múltiplo de 4, lo que es evidente: $5^1 - 1 = 4$.

Luego viene la hipótesis inductiva:

Hipótesis: $5^n - 1$ es múltiplo de 4.

Supongamos que $5^n - 1$ es múltiplo de 4. Con esta hipótesis hay que demostrar que $5^{n+1} - 1$ es múltiplo de 4,

En efecto:

$$5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = (4+1)5^n - 1 = 4 \cdot 5^n + 5^n - 1$$

En conclusión $5^{n+1} - 1$ es la suma de dos números que son múltiplo de 4, y así $5^{n+1} - 1$ también lo es.

Ejemplo 3.1.2 *Probar la siguiente fórmula:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (\star)$$

Solución. Pongamos para n natural:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

Hay que probar, usando el Método de Inducción Completa,

En efecto, para $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$, y por otro lado

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Así que la fórmula $(\star)$ vale para $n = 1$.

Hipótesis inductiva Supongamos que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, y probemos que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2 \\
S_n + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula $(\star)$ para $n+1$.

.... ▼

Ejercicio.

1. Probar que para cada número natural n,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Probar que para cada número natural n,

$$32n - 2^n \qquad \text{es múltiplo de } \ 7.$$

3.2. Polinomios

Para un entero positivo n, la n-ésima potencia es la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces la función $g(x) = ax^n$ es la n-ésima potencia general. La suma de un número finito de potencias generales se llama *función polinomial*, que por abuso de lenguaje llamaremos también *polinomio* con coeficientes reales.

Así por ejemplo,

$$f(x) = 3x^2 + x - 3 \text{ y } h(x) = x^5 + x^7 + 2 \text{ son polinomios.}$$

En general un polinomio es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los *coeficientes* del polinomio $f(x)$. Si todos los a_i son nulos tenemos el polinomio nulo, denotado por 0. Si algún $a_i \neq 0$ y entonces se define el *grado* de $f(x)$ como el máximo de los m tales que $a_m \neq 0$.

Para el polinomio nulo, no definimos el grado.

Esto es así porque en la definición de grado tenemos que para el producto $f(x)\,g(x)$ de dos polinomios no nulos tenemos que el grado de $f(x)\,g(x)$ es la suma de los grados de $f(x)$ y de $g(x)$. Aquí $f(x)\,g(x)$ es el producto como se define en la matemática secundaria.

3.2.1. Divisibilidad

Diremos que el polinomio $f(x)$ es divisible por el polinomio $g(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ tal que $f(x) = g(x)q(x)$.

Observe que de acuerdo a las propiedades del grado, el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$.

Veamos ahora un criterio sencillo para saber si un polinomio es divisible por el binomio $x - a$.

$x - a$ es un polinomio de grado 1 y a es constante. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces el número $p(a)$ es el valor de p en el punto $a \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Criterio de Divisibilidad por $x - a$

Para cada polinomio $p(x)$, el polinomio $p(x) - p(a)$ es divisible por $x - a$. Entonces $p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $p(a) = 0$.

Demostración. Sabemos que para cada entero $n \geq 1$, $x^n - a^n$ es divisible por $x - a$, de acuerdo a las propiedades de los productos notables:

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) \\ x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) \end{aligned}$$

En general,

$$x^n - a^n = (x-a)q(x),$$

donde $q(x)$ es una suma de las potencias $a^i x^{n-1-i}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$

Así, $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, entonces

$$p(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \ldots + a_na^n \text{ y } p(x) - p(a) = a_1(x-a) + a_2(x^2 - a^2) + \ldots + a_n(x^n - a^n)$$

y por lo tanto, según el resultado anterior $p(x) - p(a)$ es divisible por $x - a$.

Pongamos $p(x) - p(a) = (x-a)h(x)$. Entonces si $p(x) = 0$, resulta que $p(x) - 0 = (x-a)h(x)$ y $p(x)$ es divisible por $x - a$. Por otro lado si $p(x) = (x-a)g(x)$ para algún polinomio $g(x)$, entonces evaluando en $x = a$ obtenemos

$$p(a) = (a-a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0.$$

3.2.1.- Ejemplos y Ejercicios:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ es divisible por $x - 1$, porque $f(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

(b) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es divisible por $x + 1$, porque $g(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

(c) $h(x)$ es divisible por $2x - 1$ si y sólo si, es divisible por $x - \frac{1}{2}$, ya que $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, y en consecuencia si y sólo si, $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

(d) Verifique que $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 26$ es divisible por $3x + 2$.

(e) Sea $f(x)$ un polinomio y $S(f)$ la suma de los coeficientes de $f(x)$. Verificar que $f(x) - S(f)$ es divisible por $x - 1$.

(f) Si m es un entero positivo y si $S(m)$ es la suma de las cifras de m, entonces el número $m - S(m)$ es divisible por 9. Por lo tanto m es divisible por 9 si y sólo si $S(m)$ lo es.

Verifique que el resto de dividir 173628361 porque es 1.

3.2.3. Algoritmo de la División

Sean $f(x) \neq 0$ y $h(x) \neq 0$ dos polinomios tales que el grado de $f(x)$ sea mayor o igual al grado de $h(x)$. Entonces existen dos polinomios únicos $g(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x);$$

y donde grado de $g(x)$ es igual al grado de f menos el grado de $h(x)$ y el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$.

El polinomio $g(x)$ se llama el coeficiente de la división de $f(x)$ por $h(x)$ y el polinomio $r(x)$ es el resto de la misma. Así mismo $f(x)$ y $h(x)$ se llaman respectivamente dividiendo y divisor.

Demostración. Dados $f(x)$ y $h(x)$, consideremos el conjunto Ω de los polinomios de la forma $f(x) - h(x)g(x)$, donde $g(x)$ varía en el conjunto de todos los polinomios. Asociamos a cada polinomio en Ω su grado, y obtenemos el conjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ de todos los grados de polinomios de P. Por lo tanto hay polinomio $g_0(x)$ tal que $f(x) - h(x)g_0(x)$ tiene grado n_0 y además

$$\text{grado}\,(f(x) - h(x)g_0(x)) \leq \text{grado}\,(f(x) - h(x)g(x)) \qquad (\star\star)$$

para cada polinomio $g(x)$.

Poniendo ahora $r(x) = f(x) - h(x)g_0(x)$, verifiquemos que $r(x)$ tiene grado menor que $h(x)$.

En efecto, sabemos que $n_0 =$ grado de $r(x)$. Supongamos que n es el grado de $h(x)$ y que $n_0 \geq n$. Pongamos $r(x) = bx^{n_0} + \overline{r}(x)$ donde grado de $\overline{r}(x)$ es menos que el $r(x)$, y $h(x) = ax^n + \overline{h}(x)$ donde grado de $\overline{h}(x)$ es menor que el de $h(x)$. Entonces tenemos que

$$r(x) - h(x) - \left[\frac{a}{b}x^{n_0-n}\right] = f(x) - h(x)g(x)$$

con $g(x) = g_0(x) + \frac{a}{b}x^{n_0-m}$.

Pero $r(x) - h(x)$ tiene grado menor que $n_0 =$ grado de $r(x)$ y así es válida la condición $(\star\star)$ de arriba. En conclusión grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$.

.... ▼

3.2.4. Regla de Ruffini

Las técnicas para la división de polinomios se adquieren en los estudios secundarios. Aquí consideramos el caso especial en el que el divisor sea un polinomio de primer grado $ax + b$, $a \neq 0$, llamado usualmente un binomio. Como $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ podemos trabajar con binomio de la forma $x - a$, usando los resultados de las secciones 3.2.2 y 3.2.3. Hay un método debido al Matemático Italiano Ruffini usando para dividir un polinomio de grado mayor o igual a uno por el binomio $x - a$, llamado *Regla de Ruffini*. A continuación algunos ejemplos para recordar dicha regla.

Ejercicios: Dividir $x^4 - 3x^2 + x - 3$ por $x - 2$ y $x^4 + 5x^2 - x + 6$ por $3x - 2$.

3.2.5. Grado y Raíces de un Polinomio

Sea $f(x)$ un polinomio. Un número real a es raíz o cero de $f(x)$ si y sólo si $f(a) = 0$, y esto ocurre si y sólo si $f(x)$ es divisible por $x - a$. Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son m raíces distintas de $f(x)$ y probemos que en este caso $f(x)$ es divisible por el producto $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$.

La prueba se hace por inducción en m :

Si $m = 1$, ya sabemos que $f(x)$ es divisible por $x - a_1$ si y supongamos que $f(a_1) = 0$, $f(a_2) = 0, \ldots, f(a_m) = 0$, y $f(a_{m+1}) = 0$ y asumamos la hipótesis inductiva que establece que $f(x)$ es divisible por $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$ y probemos que entonces $f(x)$ es divisible por $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)(x-a_{m+1})$ por hipótesis $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)S(x)$ para algún polinomio $S(x)$. Entonces como $a_{m+1}\neq a_1,\dots,a_{m+1}\neq a_m$ y $f(a_{m+1})=0$, resulta entonces que $S(a_{m+1})=0$, y por lo tanto $S(x)$ es divisible por $x-a_{m+1}$, etc.

. . . . ▼

Teorema 3.1 *Un polinomio de grado $n>0$ no puede tener más de n raíces.*

En efecto, si grado de $f(x)$ es n, y $f(a_1)=f(a_2)=\dots=f(a_m)=0$ entonces es divisible por el producto $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)S(x)$$

donde $S(x)$ es un polinomio. Esta igualdad implica que

$$m+\text{ grado } S(x)=\text{grado de } f(x)=n$$

y por lo tanto $m\leq n$.

. . . . ▼

Ejercicio: Sea $f(x)$ un polinomio de grado mayor o igual a 2. Hallar el resto de dividir $f(x)$ por x^2-1, sabiendo que $f(1)=1$ y $f(-1)=2$.

3.3. Interpolación polinomial

El hecho geométrico que establece que por dos puntos diferentes del plano pasa una única recta, se expresa en términos de polinomios de la siguiente forma:

Dados los números reales a_1, b_1 y a_2, b_2, existe un único polinomio de primer grado $f(x)$ tal que $f(a_1)=b_1$ y $f(a_2)=b_2$. En efecto, tenemos que

$$f(x)=\left(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right)(x-1)+b_1.$$

De un modo general se puede obtener lo siguiente.

Teorema 3.2 *Dados los $2n+2$ números $a_0,\cdots,a_k$, $b_0,\cdots,b_k$, existe un único polinomio de grado n $f(x)$ tal que $f(a_0)=b_0,\cdots,f(a_n)=b_n$.*

Demostración. Sea $Q(x) = (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ y para $i = 0, 1, \cdots, n$ sea $R_i(x)$ el cociente de $Q(x)$ por $x - a_i$, acorde con el hecho de que $Q(a_i) = 0$ para cada $0 \leq i \leq n$. Además,

$Q_i(a_i) \neq 0$. Si definimos $P_i(x) = \frac{Q_i(x)}{Q_i(x_i)}$ resulta entonces que $P_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ y $P_i(a_i) = 1$.

Finalmente el polinomio $P(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \ldots + b_n P_n(x)$ es un polinomio de grado n tal que $P_i(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Dejamos al lector la demostración de la unicidad de $P(x)$.

.... ▼

3.3.1. Interpolación

Como un ejemplo de interpolación veremos a continuación el caso del cálculo de logaritmos decimales a partir de una pequeña tabla de logaritmos decimales de números con dos cifras decimales comprendidas entre 1 y 9,99.

En la primera columna vertical denotada con la letra N se localiza el número y su primera cifra decimal del número buscado.

Si queremos hallar el $\log 4,8$ localizamos 4,8 en la primera columna, luego tomamos como segunda cifra decimal el cero, lo que equivale a mirar la columna a la derecha que corresponde al cero; y obtenemos $\log 4,8 = 0,6812$.

Si en cambio queremos hallar $\log 4,86$ localizamos la columna que se corresponde con la segunda cifra decimal 6 y obtenemos $\log 4,86 = 0,6866$.

El procedimiento anterior permite obtener el logaritmo de cualquier número comprendido entre 1 y 9,99, multiplicando y dividiendo por 100. Así

$$\log(486) = \log(100 \cdot 4{,}86) = \log(100) + \log(4{,}86) = 2 + 0,6866 = 2,6866$$

También podemos calcular,

$$\log(0,00486) = \log \frac{4,86}{1000} = \log(4{,}86) - \log(10^3) = 0{,}6866 - 3 = \overline{3},6866$$

Con ayuda de esta simple tabla de logaritmos queremos hacer algunas aplicaciones para ver que efectivamente su uso agiliza el cálculo de potencias y producto de números reales,conviene sin embargo estudiar un método que permite obtener el logaritmo de un número real x si conocemos los logaritmos de dos números u y v tales que $u < x < v$ y tales que $u < x < v$ y tales que la diferencia $u - v$ sea "suficientemente pequeña". Con ayuda de este método ampliamos nuestra tabla de logaritmos para números de tres cifras decimales, y comprendidos entre 1 y el $9,998$.

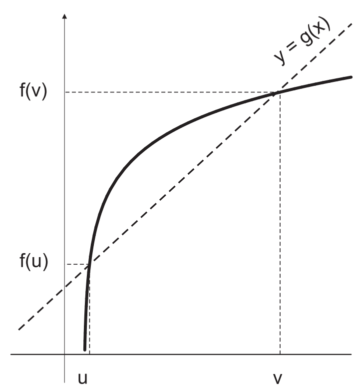
El método anterior se conoce con el nombre de **“Método de Interpolación Lineal”**, y consiste en lo siguiente: se da una función $y = f(x)$, dos números u y v y los valores $f(u)$ y $f(v)$, y se desea hallar aproximaciones de $f(x)$ para x en el intervalo $[u, v]$. esto se hace aproximando f por la recta que pasa por los puntos $(u, f(u))$ y $(v, f(v))$, esta recta tiene por ecuación:

$$g(x) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \cdot (x - u) + f(u)$$

y la misma preserva los datos iniciales $f(u)$ y $f(v)$, es decir $g(u) = f(u)$ y $g(v) = f(v)$.

En conclusión el valor $g(x)$ para x en $[u, v]$ se llama el valor aproximado de $f(x)$ que se obtiene interpolando en los valores $f(u)$ y $f(v)$ de f, la interpolación se llama **lineal** por que la función g representa una recta (una lineal en el plano).

En el siguiente gráfico se percibe $y = g(x)$ como una aproximación de $y = f(x)$, para funciones $f(x)$ suficientemente “buenas”: su gráfico es suave y continuo.



Por otro lado, si la función f tiene inversa, y se conoce un valor y_o de f y se desea hallar el número x_o con $f(x_o) = y_o$, es decir $h(y_o)$, donde h es la inversa de f, se procede así: la relación

$$f(x_o) \approx g(x_o) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \cdot (x_o - u) + f(u)$$

implica que,

$$x_o = \frac{(f(x_o) - f(u)) \cdot (v - u)}{f(v) - f(u)} + u$$

Los números u y v se determinan de manera que $u < x_o < v$ y tales que los valores $f(u)$ y $f(v)$ sean “próximos” del dato inicial $y_o = f(x_o)$.

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 3.3.1 *Usando la tabla de logaritmo calcular* $\log(2,372)$

Solución. Procedemos así: buscamos en la tabla los logaritmos de $u = 2,37$ y $v = 2,38$ que son lo número reales de la tabla tales que $u = 2,37 < x = 2,372 < 2,38 = v$ y que están más próximos de x.

Tenemos entonces:

$$\log u = \log 2,37 = 0,3747, \quad \log v = log 2,38 = 0,3766$$

también se tiene

$$x - u = 0,002, \quad \log v - \log u = 0,0019, \quad v - u = 0,01$$

y de aquí resulta:

$$\log x = \log 2,372 = \log u + (x - u)\frac{\log v - \log u}{v - u}$$

sustituyendo se obtiene que:

$$\log x = 0,3747 + 0,00038 = 0,37508 \approx 0,3751$$

Así $\log 2,372 \approx 0,3751$.

.... ▼

Ejemplo 3.3.2 *Calcular* x*, si* $\log(x) = 0,8772$

Solución. En este caso procedemos así: como $0,8772$ no aparece en la tabla como logaritmo de un número, buscamos los dos logaritmos que mejor aproximan a $0,8772$ por la izquierda y la derecha, y obtenemos:

$$0,8768 < 0,8772 < 0,8774$$

donde $\log 7,53 = 0,8768$ y $\log 7,54 = 0,8774$. Así resulta, tomando $u = 7,53$; $v = 7,54$,

$$x = u + \frac{(\log(v) - \log(u)) \cdot (v - u)}{\log(v) - \log(u)} = 7,53 + 0,0066 = 7,5366$$

Luego, $x = 7,5366$.

.... ▼

3.3.2. Cálculo de productos y potencias de números reales

Ejemplo 3.3.3 *Calcular* $(2,35)^{10}$

Solución. Denotamos $p = (2,35)^{10}$, y tomando logaritmo resulta

$$\log(p) = 10 \cdot \log 2,35 = 10 \cdot 0,3711 = 3,711$$

El valor $\log(2,35) = 0,3711$ lo da la tabla.

Ahora observamos que

$$\log(p) = 3 + 0,711 = \log(10^3) + \log(x) = \log(10^3 \cdot x)$$

lo que nos daría $p = 10^3 x$, con $\log(x) = 0,711$.

Localizamos $0,711$ en la tabla y resulta que $\log(5,14) = 0,711$ y $x = 5,14$. En conclusión

$$(2,35)^{10} = 10^3 \cdot 5,14 = 5140.$$

.... ▼

Nota. Si se usa una computadora manual y se calcula $(2,35)^{10}$ se obtiene que $(2,35)^{10} = 5136,6340$. Ahora bien, si calculamos $\log(2,35)$ con cinco cifras decimales usando una tabla que tiene los logaritmos con cinco cifras decimales, obtenemos que $\log(2{,}35) = 0,37107$. Así.

$$\log(2,35)^{10} = 10 \cdot \log(2,35) = 3,7107 = \log(3) + \log(x) = \log(10^3)x$$

donde $\log(x) = 0,7107$.

Nuestra tabla nos da que $x = 5,1367$, con lo cual

$$(2,35)^{10} = 10^3 \cdot 5,1367 = 5136,7$$

que es una mejor aproximación que la anterior para $(2,35)^{10}$.

En la última ecuación $\log(x) = 0,7107$ que acabamos de resolver, interpolando y con ayuda de la tabla de logaritmos, obtuvimos $x = 5,1367$. Este número se suele llamar el antilogaritmo de $0,7107$ y se denota por $\mathrm{a}\log \mathbf{0,7107}$. Así que $\log(x) = 0{,}7107$ es equivalente $x = \mathrm{an}\log 0,7107$ o lo que es lo mismo

$$x = 10^{0,7107} = 5,1367.$$

3.4. Cálculo de Raíces de Polinomios

A continuación exponemos algunos técnicas sencillas para determinar raíces de polinomios con coeficientes números racionales.

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y a_n que son números racionales. Entonces reduciendo a un común denominador, podemos expresar $f(x)$ en la forma:

$$f(x) = \frac{F(x)}{M},$$

donde $F(x)$ tiene coeficientes enteros y M es el común denominador de los denominadores de los números racionales a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y a_n.

Podemos entonces considerar polinomios con coeficientes enteros. Note que $f(x) = 0$ si y sólo si $F(x) = 0$.

Sea entonces $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con coeficientes a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0 números enteros.

Criterio 1. Si m ó $-m$ es un entero que es raíz de $F(x)$, entonces m es un divisor de a_0 :

En efecto: $F(m) = 0$ implica que $a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m = -a_0$ y en consecuencia a_0 es divisible por m.

Veamos un ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Las raíces enteras posibles de $F(x)$ son los divisores de $a_0 = 2$, los cuales son $1, -1, 2$ y -2.

Veamos $F(1) = -2$, $F(-1) = 6$, $f(2) = 0$ y $F(-2) = 4$ como 2 es raíz de $F(2)$, dividimos por $(x-2)$ y resulta $F(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 1)$. Así que las otras dos raíces de $F(x)$ son los dos raíces de $x^2 + 2x - 1$, las cuales son $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$

Criterio 2: Si $\frac{a}{b}$ es una raíz racional de $F(x)$, con a y b primos entre si, entonces el numerador a es un divisor de a_0 y el denominador b es un divisor de a_n.

En efecto: Si $F(\frac{a}{b}) = a_n(\frac{a}{b})^n + a_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{a}{b}) + a_0 = 0$, entonces multiplicando por b^n obtenemos

$$a_n a^n + a_{n-1}ba^{n-1} + \ldots + a_1 ab^{n-1} = -a_0 b^n$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es divisible por a, y entonces $a_0 b^n$ es divisible por a, y como a es primo con b, resulta que a_0 es divisible por a.

Usando ahora que $a_n a^n = -a_0 b^n - a_{n-1}ba^{n-1} - \ldots - a_1 ab^{n-1}$ se deduce que b es un divisor de a_n.

Ejemplo: Sea $F(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

Entonces las posibles raíces enteras de $F(x)$ son los divisores de 2, es decir, $1, -1, 2$ y -2 las raíces racionales $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$.

Calculando tenemos:

$$F(\tfrac{1}{2}) = 0 \qquad F(1) = 6 \qquad F(2) = 36$$

$$F(-\tfrac{1}{2}) = -3/2 \quad F(-1) = 0 \quad F(-2) = 0$$

Así que $F(x) = (x+2)(2x-1)(x+1)$.

.... ▼

Ejercicios

1. Calcular algunas raíces de los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ G(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 20 \\ H(x) &= 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2. \end{aligned}$$

2. Usar los criterios 1 y 2 para probar que los polinomios $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$ no tienen raíces racionales, es decir que para cada número racional r, $f(r) \neq 0$ y $g(r) \neq 0$.

Repuesta de los Ejercicios

(a) Para cada entero positivo n, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Pongamos $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ para $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ y $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$

Así que de fórmula vale para $n = 1$

Supongamos que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ y demostremos que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ S_{n+1} &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

(b) Para cada entero positivo n, $3^{2n} - 2^n$ es múltiplo de 7.

Para $n = 1$, $3^{2n} - 2^n = 9 - 2 = 7$

Supongamos que $3^{2n} - 2^n$ es múltiplo y probemos que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ también lo es:

En efecto,

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} &= 2^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^n = (7+2)3^{2n} - 2 \cdot 2^n \\ &= 7 \cdot 3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n). \end{aligned}$$

Esto es la suma de dos.

(c) Verifique que $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + \frac{26}{27}$ es divisible por $3x + 2$.

Como $3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$, hay que ver que $f(-2/3) = 0$.

Ahora

$$\begin{aligned} f(-2/3) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{26}{27} = \frac{-8}{27} + 3\frac{4}{9} - 2 + \frac{26}{27} \\ f(-2/3) &= \frac{28}{27} - 2 + \frac{26}{27} = \frac{54}{27} - 2 = 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual a dos. Hallar el resto de dividir $f(x)$ por $x^2 - 1$ sabiendo que $f(1) = 1$ y $f(-1) = 2$.

Veamos el algoritmo de la división y dividimos $f(x)$ por x^2-1; $f(x)=(x^2-1)q(x)+r(x)$, donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado del divisor x^2-1. Así $r(x)$ es a lo sumo de grado uno. Pongamos entonces $r(x)=ax+b$ y determinemos a y b.

Como $f(1)=1$, resulta $1=r(1)=a+b$ como $f(-1)=2$, resulta $2=r(-1)=-a+b$

Resolviendo el sistema se obtiene $a=-\frac{1}{2}$ y $b=3/2$

Así que el resto $r(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=\frac{3-x}{2}$.

.... ▼

Capítulo 4

Factores primos del factorial de un número entero

Introducción

En este capítulo determinaremos la descomposición en factores primos de $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$, del factorial de un número entero positivo n. A partir de aquí se pueda conocer el número exacto de ceros en que "termina" $n!$ cuando se expresa en cifras. Este es un problema planteado por el Prof.: José Nieto en su texto de "Olimpiadas Matemáticas." El planteamiento es como sigue: Si $n' = a_m\, a_{m-1} \ldots a_1\, a_0$, donde $a = 0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ y a_m son las cifras de $n!$, entonces se trata de determinar el entero $j < m$ tal que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0$ y $a_j \neq 0$. Veremos más adelante que j es precisamente la máxima potencia de 10 que divide a $n!$. Estos se generaliza al determinar los factores primos de $n!$. Lo que se hara más adelante. Como $10 = 2 \cdot 5$, entonces el entero j antes definido es precisamente el entero menor entre las máximas potencias de 2 y de 5 que dividen a $n!$. Para más detalle ver la seccioón 4.3 y 4.4.

Comenzaremos con una breve exposición sobre la definición de la expresión de un entero n en base un entero $p > 0$.

4.1. Expresión de números enteros en base a un entero $p > 0$

Sea $p > 0$ un entero. Entonces para cada entero $n > 0$, existen enteros $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tales que:

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p_m \qquad (*)$$

y con $0 \leq a_i < p$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Los números $a_0, a_1, \ldots, a_m$ son las cifras de n en base p, lo que expresamos así

$$n = a_m\, a_{m-1}\, \ldots\, a_1\, a_0 \qquad \text{en base } p.$$

Así por ejemplo los enteros se expresan usualmente en el sistema decimal, para el cual la base es 10.

Así que

$$\begin{aligned} 272 &= 2 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 \\ 10270 &= 7 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 10^4 \\ 83200 &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcccll} 8 &=& 2^3 = 1000 &=& 1 \cdot 2^3 & \text{en base } 2 \\ 15 &=& 2^3 + 2^2 + 2 + 1 &=& 1111 & \text{en base } 2 \\ 9 &=& 2^3 + 1 &=& 1001 & \text{en base } 2 \\ 15 &=& 3^2 + 2 \cdot 3 &=& 120 & \text{en base } 3 \\ 38 &=& 3^3 + 3^2 + 2 &=& 1102 & \text{en base } 3. \end{array}$$

4.1.1. Método para obtener las cifras de n en base p.

Si $n < p$, entonces $n = a_0$ es la expresión de n en base p.

Si $n \geq p$, dividimos n por p :

$$n = n_1 p + a_0 \qquad \text{con} \qquad 0 \leq a_0 < p$$

Si $n_1 < p$, entonces $n = a_1 p + a_0$ con $0 \leq a_1 = n_1 < p$.

Si $n_1 \geq p$, dividimos n_1 por p :

$$n_1 = n_2 p + a_1 \qquad \text{con} \qquad 0 \leq a_1 < p$$

Si $n_2 < p$, sustituimos n_1 y obtenemos:

$$n = (n_2 p + a_1)p + a_0 = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \qquad \text{con} \qquad 0 \leq a_2 = n_2 < p$$

y así $n = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ es la expresión de n en base de p.

Si $n_2 \geq p$, dividimos n_2 por p : $n_2 = n_3 p + a_2$, con $0 \leq a_2 < p$.

Continuando con este proceso y observando que $n_3 < n_2 < n_1 < n$, al cabo de algún m obtenemos que

$$n_{m-1} = n_m p + a_{m-1} \qquad \text{con} \qquad 0 \leq a_{m-1} < p \text{ y } n_m < p$$

Al final tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{cccccc}
n = n_1 p + a_0 & , & 0 \leq a_0 < p & ; & n \geq p & \\
n_1 = n_2 p + a_1 & , & 0 \leq a_1 < p & ; & n_1 \geq p & \\
n_2 = n_3 p + a_2 & , & 0 \leq a_2 < p & ; & n_2 \geq p & \\
\vdots & , & \vdots & ; & \vdots & \\
n_{m-1} = n_m p + a_{m-1} & , & 0 \leq a_{m-1} < p & ; & n_{m-1} \geq p \,; & n_m < p.
\end{array}$$

Sustituyendo los n_i en las ecuaciones correspondientes obtenemos finalmente:

$$n = n_m p^m + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0, \qquad (**)$$

Poniendo $n_m = a_n$, resultará $0 \leq a_i < p$ si $0 \leq i \leq m$, y la igualdad $(**)$ es la expresión de n en base p.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl}
200 & = & 1300 \quad \text{en base} \quad 5 \\
200 & = & 11001000 \quad \text{en base} \quad 2 \\
2000 & = & 3 \cdot 5^4 + 5^3 = 31000 \quad \text{en base} \quad 5 \\
165 & = & 5^3 + 5^2 + 3 \cdot 5 = 1130 \quad \text{en base} \quad 5
\end{array}$$

Una consecuencia de la teoría de divisibilidad de polinomios en el capítulo anterior es la siguiente

Proposición 4.1.1 *Sean m y p enteros positivos y $m = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$ la expresión de m en base p. Entonces el número $m - [a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n]$ es divisible por $p - 1$.*

4.2. El número de ceros en que termina un entero

A continuación establecemos un criterio muy sencillo para determinar el número de ceros en que "termina" un entero n. Para precisar supongamos que $n = a_m\, a_{m-1} \ldots a_1\, a_0$ es la expresión decimal de n, es decir,

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{m-1} 10^{m-1} + a_m 10^m$$

donde $0 \leq a_i < 10$ y $a_m \neq 0$.

Que n "termina" exactamente en j ceros significa que las últimas j cifras de n son nulas y que las cifras $a_j \neq 0$; es decir, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0$ y $a_j \neq 0$.

Si ésto es así, entonces $n = 10^j (a_j + a_{j+1} 10 + \ldots + a_m 10^{m-j})$ y en consecuencia n es divisible por 10^j, y como además $a_j \neq 0$, n no es divisible por 10^{j+1}. Así que j es la máxima potencia de 10 que divide a n.

Recíprocamente supongamos que n es divisible por 10^j pero no por 10^{j+1}. Entonces existe un entero m tal que $n = 10^j \cdot m$ y m es primo con 10. Esto último se expresa así: Si $m = b_j\, b_{j-1} \ldots b_1\, b_0$ es la expresión decimal de m, entonces $b_0 \neq 0$. Ahora sabemos que para multiplicar m por 10^j se agrega j ceros a la derecha de la expresión decimal de m :

$$10^j m = b_j\, b_{j-1} \ldots b_1\, b_0 \underbrace{0\, 0 \ldots 0}_{j \text{ veces}}$$

En consecuencia $n = 10^j \cdot m$ "termina" en j ceros.

Resumiendo tenemos.

Proposición 4.2.1 *El número de ceros en que termina un entero n es igual a la máxima potencia de* 10 *que divide a n.*

4.3. Factores primos de $n!$

Sean p un entero primo y s un entero. Denotamos con $f_p(s)$ a la máxima potencia de p que divide a_s. Entonces para enteros m y n, $f_p(mn) = f_p(m) + f_p(n)$ y $f_p(n) = 0$ si y sólo si n es primo con p.

Pongamos $g_p(n) = f_p(n!)$. Se trata ahora de dar un algoritmo para calcular $g_p(n)$:

Su $m < p$ entonces $p!$ es primo con p y $g_p(m) = 0$.

Si $m \geq p$, dividimos m por p :

$$m = \overline{m}p + a \qquad , \qquad 0 \leq a < p.$$

Entonces como $\overline{m}p + r$ es primo con p si $0 < r \leq a < p$, y siendo

$$(\overline{m}p + a)! = (\overline{m}p)!(mp + 1) \cdots (mp + a),$$

resultará que $g_p(\overline{m}p + a) = g_p(\overline{m}p)$.

Por otro lado en el factorial $(\overline{m}p)! = 1 \cdot 2 \cdots mp$, las únicos factores que no son primos con p son los números $p, 2p, \cdots, (\overline{m} - 1)p$ y $\overline{m}p$. En consecuencia tenemos:

$$g_p(\overline{m}p) = f_p(p \cdot 2p \cdots \overline{m}p) = f_p(p^{\overline{m}} \cdot \overline{m}!) = \overline{m} + f_p(\overline{m}!),$$

lo que da $g_p(\overline{m}p) = \overline{m} + g_p(\overline{m}) = g_p(m)$,

donde $m = \overline{m}p + a, \qquad 0 \leq a < p.$

Si $\overline{m} < p$, entonces $g_p(\overline{m}) = 0$, y en consecuencia

$$g_p(m) = g_p(\overline{m}p) = \overline{m}$$

Si $\overline{m} \geq p$, procedemos con $\overline{m}$ como hicimos con m :

Recordando que $m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{s-1}p^{s-1} + a_s p^s$, resulta

$$g_p(m) = (a_1 + a_2 p + \cdots + a_0 p^{s-1}) + (a_2 + a_3 p \cdots + a_s p^{s-2}) + g_p(a_2 + a_3 p \cdots + a_s p^{s-1}),$$

y así $g_p(m) = \frac{m - a_s}{p} + \frac{m - a_0 - a_1 p}{p^2} + \frac{m - a_0 - a_1 p - a_2 p^2}{p^3} + \cdots + \frac{m - a_0 - a_1 p \cdots a_{s-1} p_{s-1}}{p^s}$.

Para abreviar pongamos $S_i = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$, y

$$R_i = \frac{m - S_i}{p^{i+1}}, \qquad 0 \leq i \leq s - 1.$$

Así $g_p(m) = R_0 + R_1 + \cdots + R_{s-1}$.

Fijado $1 \leq j \leq s - 1,\ a_j$ a parece en R_i si $i + 1 \leq j$.

Sumando en los términos R_i con $0 \leq i \leq j - 1$, y tenemos la suma

$$a_j(p^{j-1} + p^{j-2} + \cdots + p + 1) = a_j \frac{(p^j - 1)}{p - 1}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

Conclusión: Si $m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{s-1}p^{s-1} + a_s p^s$

$$g_p(m) = \frac{a_1 p + \cdots + a_{s-1}p^{s-1} + a_s p^s - (a_1 + \cdots + a_{s-1} + a_s)}{p-1}$$

o sea

$$g_p(m) = \frac{m - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{s-1} + a_s)}{p-1}$$

Este es un número entero de acuerdo con la Proposición 4.1.2

4.4. Calculo de la máxima potencia de 10 que divide a un entero

Sea $n > 0$ un entero. Entonces existen enteros R y S, y r y s tales que

$$n = 2^r R \text{ y } n = 5^s S,$$

donde R es primo con 2, es decir, R es impar, y S es primo con 5.

De aquí se deduce que $n = 10^j T$, donde j es el menor de los números r y s y T es primo con 10.

Veamos lo que ocurre en el caso del factorial de un entero. Dado un entero m y un primo p, $g_p(m)$ denota, como en la sección anterior, la máxima potencia de p que divide a $n!$. En consecuencia la máxima potencia de p que divide a $n!$ es le menor de los números $g_2(n)$ y $g_5(n)$ ya que $10 = 2 \cdot 5$. En este caso resulta que $g_5(n) \leq g_2(n)$ y así $n! = 10^j Q$, donde Q es primo con 10 y $j = g_5(n)$.

Prueba de que $g_2(n) \geq g_5(n)$.

Esto es consecuencia de un resultado mas general: Dado un entero m, sea

$$m = \sum_{i=0}^{s} a_i 2^i = a_s a_{s-1} \cdots a_1 a_0$$

la expresión de m en base 2, en la cual para cada i, $a_i = 0$ o $a_i = 1$. Entonces

$$3m \geq 4 \sum_{i=0}^{s} a_i.$$

En efecto, si m es par, entonces $a_0 = 0$ y para $i \geq 1$,

$$3a_i 2^i \geq 4a_i.$$

Si m es impar, entonces se escribe así:

$$m = \sum_{i=i_0}^{s} a_i 2^i + a_{i_0+1} 2^{i_0+1} + 1, \qquad \text{con} a_{i_0+1} \neq 0.$$

Si $i \geq i_0 \geq 1$, se tiene $3a_i 2^i \geq 4a_i$ y $3(a_{i_0+1}2^{i_0+1} + 1) \geq 4a_{i_0} + 4$.

Volviendo a la desigualdad $g_2(m) \geq g_5(m)$, pongamos

$$m = \textstyle\sum_{i=0}^{s} a_i 2^i \text{ y } m = \sum_{i=0}^{r} b_i 5^i$$

las expresiones de m en bases 2 y 5 respectivamente. Como sabemos

$$g_2(m) = m - \textstyle\sum_{i=0}^{s} a_i \text{ y } g_5(m) = \dfrac{m - \sum_{i=0}^{r} b_i}{4}.$$

Luego $g_2(m) \geq g_5(m)$ es equivalente a

$$3m \geq 4\sum_{i=0}^{s} a_i - \sum_{i=0}^{r} b_i \tag{4.1}$$

Pero según $3m \geq 4\sum_{i=0}^{s} a_i$, y por lo tanto vale también la desigualdad 4.1.

Ejercicios

1. Hallar la máxima potencia de 2 que divide a 320!.
2. Hallar el número de ceros en que termina 320!.
3. Hallar la máxima potencia de 5 que divide a 2000!, y el número de ceros en que termina 2000!.

Respuestas

1. $320 = 4 \cdot 80 = 4 \cdot 4 \cdot 20 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 2^6 \cdot 5 = 2^6(2^2 + 1) = 2^8 + 2^6$. Así, $320 = 2^8 + 2^6 = 101000000$ en base 2.

   Luego $g_2(320) = 320 - (1 + 1) = 320 - 2 = 318$ es la máxima potencia de 2 que divide a 320!. Es decir, $320! = 2^{318}p$, con p impar.

2. Aquí necesitamos calcular $g_5(320)$.

$$320 = 5 \cdot 64 = 5(12 \cdot 5 + 4) = 5^2 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 5^2(2 \cdot 5 + 2) + 4 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5.$$

Así, $g_5(320) = 320 - \dfrac{(2+2+4)}{4} = \dfrac{320-8}{4} = \dfrac{312}{4} = 78$. Luego $320! = 10^{78} \cdot 5$ donde 5 es primo con 10 y entonces $320!$ termina en 78 ceros.

3. Para calcular $g_5(2000)$, expresamos 2000 en base 5.

$$2000 = 5 \cdot 400 = 5 \cdot 5 \cdot 80 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 16 = 5^3(3 \cdot 5 + 1) = 3 \cdot 5^4 + 5^3.$$

Luego, $g_5(2000) = \dfrac{2000-(3+1)}{4} = \dfrac{2000-4}{4} = 499$. Así, $2000!$ termina exactamente en 499 ceros.

Capítulo 5

Construcciones con regla y compás. Cuadraturas

Introducción

En este capítulo estudiamos algunas cuestiones elementales relacionadas con las construcciones geométricas que se hacen con la regla y el compás y que se estudian en la secundaria, tales como construir el punto medio de un segmento, la recta paralela a una recta dada y por un punto dado, etc.

Veremos así mismo que asociadas a las construcciones con regla y compás aparecen ciertos polinomios que sirven para determinar en muchos casos cuando una tal construcción es posible. Tal es el caso de la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo, etc.

Comenzaremos con la introducción del algunos conceptos algebraicos asociados a polinomios. Para el lector que desee profundizar en este tema le recomendamos el texto [5] de Álgebra, especialmente el capítulo 5. Además se puede leer el artículo [6] del Profesor: Douglas Jiménez y el texto [3] de W. Dunham para algunas consideraciones históricas sobre el tema.

5.1. Números Algebraicos y Números Trascendentes

Comencemos por recordar que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinomial o polinomio si y sólo si existen números reales a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y a_n tales que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Los números a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y a_n son los coeficientes de $f(x)$.

Si $f \neq 0$, el máximo i tal que $a_i \neq 0$ se llamó el grado de f. Diremos que $f(x)$ es un polinomio racional si y sólo si sus coeficientes son números racionales.

Si $f(x)$ es un polinomio racional existe un polinomio $g(x)$ con coeficientes números enteros y un entero M tal que

$$f(x) = \frac{g(x)}{M}.$$

Definición 5.1.1 *Un número real r es algebraico si y sólo si existe un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros y tal que $f(r) = 0$.*

Así, por ejemplo, cada número racional a/b, a y b enteros, es algebraico porque es la raíz de $g(x) = bx - a \,:\, g(a/b) = 0$.

$\sqrt{2}$ es raíz de $f(x) = x^2 - 2$ y, $\sqrt{2}$ no es racional.

Un resultado interesante que usaremos más adelante es el siguiente:

Teorema 5.1 *Un número α es algebraico si y sólo si su cuadrado α^2 lo es.*

Demostración.

En primer lugar es fácil ver que todo polinomio $f(x)$ se expresa como

$$f(x) = g(x) + xh(x),$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios pares, es decir, los coeficientes de las potencias impares de x son nulos. Esto equivale a que $g(x) = g(-x)$ y $h(x) = h(-x)$ para cada x en $\mathbb{R}$. Así, por ejemplo, $G(x) = x^4 + x^2 + 1$ es un polinomio par, mientras que $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x + 6$ se exprese como $f(x) = 2x^4 + 6 + x(x^4 + x^2 - 1)$, donde $2x^4 + 6$ y $x^4 + x^2 - 1$ son polinomios pares. En esta misma dirección tenemos que si $H(x)$ es un polinomio par, entonces existe un polinomio $\overline{H}(x)$ tal que $H(x) = \overline{H}(x^2)$, donde $\overline{H}(x^2)$ es el polinomio que se obtiene de $\overline{H}(x)$ al sustituir x en $\overline{H}(x)$ por x^2.

Supongamos ahora que α es un número algebraico y probemos que α^2 lo es.

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y tal que $f(\alpha) = 0$. Pongamos $f(x) = g(x) + xh(x)$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios pares y con coeficientes enteros.

Entonces tenemos $g(\alpha) = -\alpha h(\alpha)$, y elevando al cuadrado: $g^2(\alpha) = \alpha^2 h^2(\alpha)$, y así

$$g^2(\alpha) - \alpha^2 h^2(\alpha) = 0 \tag{5.1}$$

Como $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios pares, existen polinomios $G(x)$ y $H(x)$ con coeficientes enteros tales que $G(x^2) = g^2(x)$ y $H(x^2) = h^2(x)$.

Luego si $P(x) = G(x) - xH(x)$, tenemos que $P(x)$ tiene coeficientes enteros, y además

$$P(\alpha^2) = G(\alpha^2) - \alpha^2 H(\alpha^2) = g^2(\alpha) - \alpha^2 h(\alpha) = 2(\alpha) = 0,$$

de acuerdo con (5.1). En conclusión $P(\alpha^2) = 0$ y α^2 es algebraico.

Recíprocamente, supongamos que α^2 es algebraico. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y tal que $f(\alpha^2) = 0$. Sea $F(x) = f(x^2)$. Entonces $F(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y además $F(\alpha) = f(\alpha^2) = 0$, y en consecuencia α es algebraico.

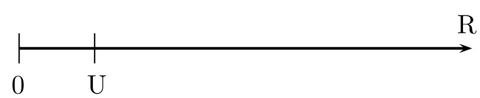
.... ▼

Definición 5.1.2 *Un número real α es un número trascendente si y sólo si α no es algebraico.*

Hay ejemplos de números trascendentes, como son π y e pero la demostración de su trascendencia no es totalmente elemental. Ahora bien el libro [] de Álgebra de I.N. Herstein tiene una demostración de la trascendencia de e en el capítulo 5, donde se dan referencia histórica sobre la trascendencia de π.

5.2. Números Constructibles

Consideremos una semirecta R orientada y con un sistema de coordenadas. Esto significa que existe un punto inicial 0 en R y un punto U en R a la derecha de 0 tal que el segmento $\overline{0U}$ tiene longitud 1.



Definición 5.2.1 *Un número real $\alpha > 0$ es constructible si y sólo si con la regla y el compás podemos marcar un punto P en R tal que el segmento $\overline{OP}$ tiene longitud α.*

Por construcción entonces 1 es constructibles, y usando el compás resulta que $2, 3$ son constructible, y en general cada entero positivo n.

Por otra parte, usando el proceso de dividir un segmento dado en n subsegmentos de longitudes iguales usando la regla y el compás, se deduce que para cada entero $n > 0$, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ y en general $\frac{m}{n}$ son números constructible, si $m > 0$ es entero. Así que los números racionales positivos son constructibles.

A continuación dos ejemplos interesantes.

Ejemplo 5.2.1 *Para cada entero positivo n, $\sqrt{n}$ es constructible.*

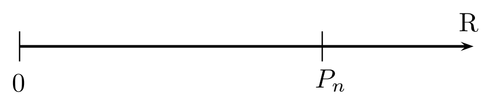
Más generalmente tenemos: Si a y b son constructibles, entonces $\sqrt{ab}$ es constructible.

Demostración.

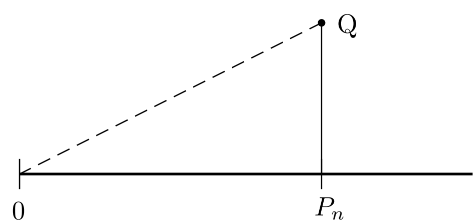
Por inducción en n.

Si $n = 1$, $\sqrt{n} = \sqrt{1} = 1$, y 1 es constructible por hipótesis. Supongamos que $\sqrt{n}$ es constructible, y demostremos que $\sqrt{n+1}$ lo es:

En la semirecta R :



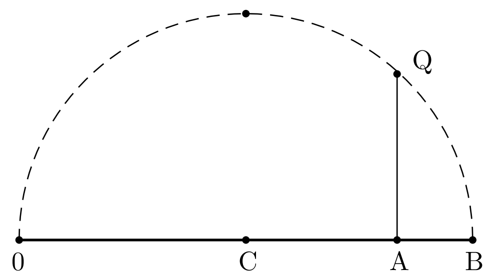
marcamos un punto P_n tal que $\overline{OP_n}$ tiene la longitud $\sqrt{n}$. Con la regla y compás construimos la perpendicular a $\overline{OP_n}$ en el punto P_n. En dicha perpendicular, y con el uso del compás, marcamos un punto Q tal que $\overline{P_nQ}$ tiene longitud 1:



Entonces usando el teorema de Pitágoras, resulta que el segmento punteado $\overline{OQ}$ tiene longitud $\sqrt{n+1}$.

.... ▼

Demostración de 5.2.2.



Con el compás construimos el semicírculo de centro C y radio $\frac{a+b}{2}$. Por el punto A levantamos la perpendicular a $\overline{OB}$, la cual corta al semicírculo en el punto Q. Veamos que la longitud del segmento $\overline{AQ}$ es $\sqrt{ab}$.

En efecto, la longitud $\overline{CA}$ es $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ y la longitud de $\overline{CQ}$ es $\frac{a+b}{2}$, entonces por el teorema de Pitágoras la longitud de $\overline{AQ}^2 = (\frac{a+b}{2}) - (\frac{a-b}{2}) = ab$.

. . . . ▼

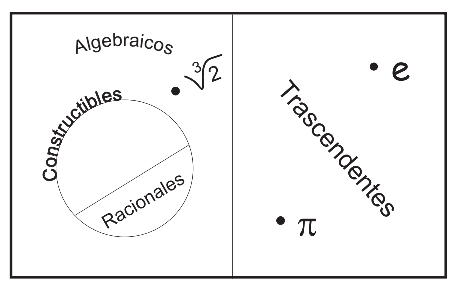
5.3. Polinomios y Constructibilidad

Un resultado importante que relaciona los números constructibles con los números algebraicos, y cuya demostración no es competencia de este texto, lo constituye el siguiente:

Teorema 5.2 *Cada número constructible es también algebraico.*

La demostración de este teorema y otros detalles sobre el mismo esta en [5], capítulo 5, especialmente la sección 4.

Es interesante señalar que hay números algebraicos que no son constructibles como es el caso de $\sqrt[3]{2}$, como veremos más adelante. Un gráfico que ilustra la situación general lo podemos ver a la derecha.



Continuaremos estableciendo criterios de constructibilidad en términos de polinomios irreducibles, concepto que damos a continuación.

Definición 5.3.1 *Un polinomio $f(x)$ con coeficiente racionales es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales, si y sólo si $f(x)$ no se puede expresar como el producto de dos polinomios racionales de grado mayor que cero.*

Si $\mathbb{Q}[x]$ denota el conjunto de los polinomios racionales, entonces $f(x) \in Q[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ si y sólo si $f(x) = g(x)h(x)$ con $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$, entonces $g(x)$ o $h(x)$ es un polinomio de grado cero.

Así por ejemplo el polinomio $x^2 - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, así como también lo es $x^3 - 2$.

Una consecuencia de la definición anterior y que relaciona la irreducibilidad de un polinomio $f(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ con sus raíces es el siguiente

Teorema 5.3 *Un polinomio $f(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 3, es irreducible si y sólo si $f(x)$ no tiene raíces racionales.*

Demostración. Supongamos primero que $f(x)$ es irreducible. Si en este caso $f(x)$ tuviese una raíz racional r, entonces $f(x)$ se factoriza como $f(x) = (x - r)q(x)$, donde $q(x)$ esta en $\mathbb{Q}[x]$, y en consecuencia $f(x)$ no es irreducible.

Supongamos ahora que $f(x)$ no es irreducible y probemos que tiene una raíz racional.

En efecto, en este caso $f(x)$ se factoriza como un producto $f(x) = g(x)h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ con grado mayor que cero cada uno.

Entonces, como además grado de $g(x)+$ grado de $h(x) =$ grado de $f(x) = 3$, resulta que grado de $g(x) = 1$ y grado de $h(x) = 2$, o bien grado de $g(x) = 2$ y grado de $h(x) = 1$. En cualquier caso uno de ellos es de grado uno, y por tanto tiene una raíz racional, las cuales a su vez una raíz racional de $f(x)$.

.... ▼

Ejemplo 5.3.1

(a) $x^3 - 2$ *es irreducible sobre* $\mathbb{Q}$.

(b) $8x^3 - 6x - 1$ *no tiene raíces racionales, según vimos al final del Capítulo III. Por lo tanto este polinomio es irreducible.*

Estos polinomios aparecen asociados a dos construcciones que no se pueden hacer con regla y compás. Para probar esta última afirmación, necesitamos el siguiente resultado que aparecen en [5], Capítulo 5.

Teorema 5.4 *Si un número real α es raíz de un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y de grado k, y si k no es una potencia de 2, entonces α no es constructible.*

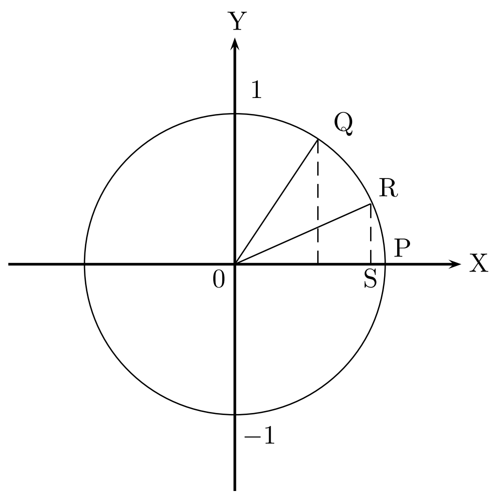
Así por ejemplo, $\sqrt[3]{2}$ es raíz del polinomio irreducible $x^3 - 2$, y en consecuencia $\sqrt[3]{2}$ no es constructible.

Veamos ahora los dos ejemplos geométricos asociados a los dos polinomios de 5.3.1.

(a) La duplicación del cubo. Construir un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado.

Si el cubo dado tiene arista de longitud 1, y si la longitud de la arista del cubo a construir es r, entonces debemos tener $r^3 = 2$. Si la construcción fuese posible con regla y compás, entonces r sería un número constructible. Pero, el polinomio $x^3 - 2$ es irreducible y el teorema 5.3.5, implica que r no es constructible. Es decir, no se puede duplicar un cubo, usando solamente la regla y el compás.

(b) La trisección del ángulo de $60°$. Consideremos el siguiente gráfico del círculo de radio 1 en el plano.



Aquí tenemos que la longitud de $\overline{OP}$ es 1. Además el ángulo $\measuredangle QOP$ es de $60°$.

Si con sólo regla y compás pudiésemos trisecar este ángulo, entonces obtendríamos un punto R como en el gráfico y tal que el ángulo $\measuredangle ROP$ es de $20°$. Construimos luego la perpendicular a $\overline{OP}$ que pasa por el punto R y obtendríamos un punto S en el eje $\overrightarrow{x}$. La longitud de $\overline{OS}$ es el $\cos 20°$, y así resultaría que $\cos 20°$ sería constructible. Veamos que $\cos 20°$ no es constructible y por lo tanto no se puede trisecar un ángulo de $60°$ con sólo regla y compás.

En efecto:

De la fórmula $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$, se obtiene elevando al cubo

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = e^{3i\alpha} = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

Desarrollando

$$\cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

Igualando las partes reales se obtiene

$$\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos 3\alpha$$

Sustituyendo $\sin^2 \alpha = 1 - \cos \alpha$, se obtiene, $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$

Finalmente si $\alpha = 20^\circ,\ \cos 3\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, entonces el número $u = \cos 20^\circ$ satisface la ecuación

$$8u^3 - 6u - 1 = 0$$

Pero según el ejemplo 5.3.1, el polinomio $8x^3 - 6x - 1$ es irreducible, y siendo $u = \cos 20^\circ$ una raíz de este polinomio, resultará de acuerdo al teorema 5.4 que $\cos 20^\circ$ no es constructible.

5.4. Cuadraturas

En esta sección consideremos un caso especial de constructibilidad con regla y compás. Se trata de lo siguiente: Dada una figura F en el plano con área determinada, construir con solo regla y compás un cuadrado de igual área a la de F. Si tal construcción es posible se dice que F es cuadrable, y el cuadrado antes construido se llama una cuadratura de F.

A continuación veremos que el círculo no es cuadrable: Con solo regla y compás no se puede construir un cuadrado con área igual a la del círculo de radio 1:

El círculo no es cuadrable

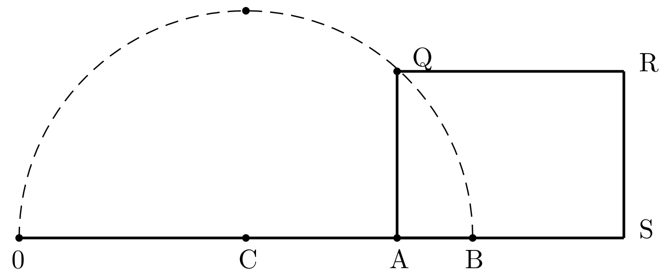
Si se tuviese un cuadrado cuyos lados tienen longitud α, construido con regla y compás solamente, y tal que $\alpha^2 = \pi =$ área del círculo de radio 1, entonces $\alpha = \sqrt{\pi}$ sería un número constructible. Entonces por el teorema 5.2, $\sqrt{\pi}$ sería un número algebraico, y por el Teorema 5.1, su cuadrado π también sería algebraico. Pero π es un número trascendente, hecho cuya demostración no forma parte de nuestros estudios. Es mas bien un hecho histórico cuya compresión escapa a nuestros conocimientos matemáticas actuales.

Seguimos ahora con algunos ejemplos de cuadraturas.

La cuadratura de un Rectángulo

Suponemos que tenemos un rectángulo tal que su base tiene longitud a y su altura de b. Entonces según vimos en el ejemplo 5.2.3, podemos construir con solo regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{ab}$. El cuadrado cuyos lados tienen longitud $\sqrt{ab}$ es entonces una cuadratura del rectángulo dado.

Recordemos el gráfico del ejemplo 5.2.3



El semicírculo tiene centro C y radio $\frac{a+b}{2}$.

El punto Q es la intersección del semicírculo con la perpendicular a $\overline{OB}$ que pasa por el punto A.

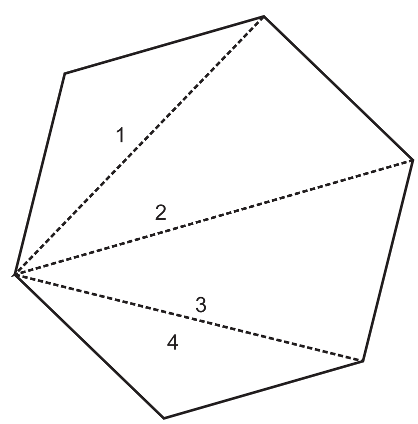
Finalmente, usando el teorema de Pitágoras resuelta que la longitud de $\overline{AQ}$ es $\sqrt{ab}$. Construimos el cuadrado de lado $\overline{AQ}$, y con vértice A, Q, R y S.

Cuadratura del triángulo:

Tenemos un triángulo, uno de cuyos lados tomando como base tiene longitud a y la altura correspondiente a este lado es h. Entonces el área del triángulo r a la $\frac{ah}{2}$. Por el resultado anterior se puede construir con regla y compás un cuadrado de área $a \cdot \frac{h}{2}$. En consecuencia este cuadrado es una cuadratura del triángulo.

Cuadratura de un Polígono

Supongamos que tenemos un polígono (hexágono) como en el siguiente gráfico. Dividimos un triángulo al trazar las tres diagonales, obteniendo cuatro triángulos:



usamos el resultado anterior y "cuadramos" cada uno de estos triángulos:

$$\text{Triángulo 1 de área}\, A : \text{Un cuadrado de lado}\, a\, \text{y}\, a^2 = A$$

$$\text{Triángulo 2 de área}\, B : \text{Un cuadrado de lado}\, b\, \text{y}\, b^2 = B$$

$$\text{Triángulo 3 de área}\, C : \text{Un cuadrado de lado}\, c\, \text{y}\, c^2 = C$$

$$\text{Triángulo 4 de área}\, D : \text{Un cuadrado de lado}\, d\, \text{y}\, d^2 = D$$

construimos a continuación tres triángulos rectángulo $\triangle_1$, $\triangle_2$ y $\triangle_3$ y un cuadrado H.

$$\triangle_1 \,\text{tiene catetos de longitud}\; a\, \text{y}\, b.\, \text{Su hipotenusa}\, \alpha\; \text{con}\, \alpha^2 = a^2 + b^2$$

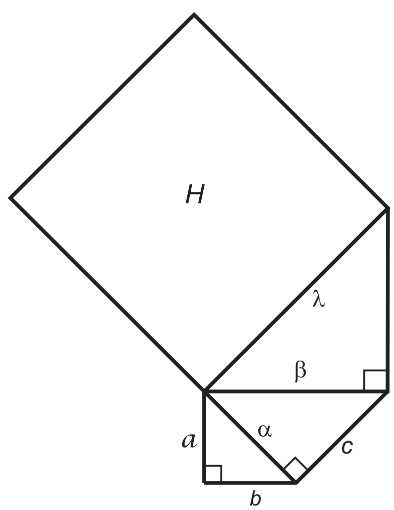
$$\triangle_2 \,\text{tiene catetos de longitud}\; \alpha\, \text{y}\, c.\, \text{Su hipotenusa}\, \beta\; \text{con}\, \beta^2 = \alpha^2 + c^2$$

$$\triangle_3 \,\text{tiene catetos de longitud}\; \beta\, \text{y}\, d.\, \text{Su hipotenusa}\, \lambda\; \text{con}\, \lambda^2 = \beta^2 + d^2.$$

Finalmente el cuadrado H tiene área:

$$\lambda^2 = \beta^2 + d^2 = \alpha^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2c^2 + d^2 = A + B + C + D$$

Así que λ^2 es el área del polígono dado, y el cuadrado H es una cuadratura de dicho polígono:



El caso que acabamos de ver corresponde a un polígono convexo: El segmento que une dos puntos cualesquiera de sus lados está contenido en el mismo.

Si el polígono P no es convexo, podemos agregar segmentos para convertir a P en un polígono convexo Q, originado algunos triángulos adicionales a P.

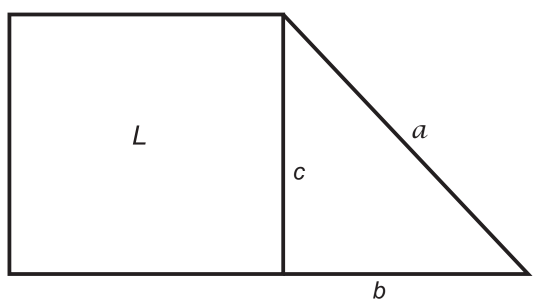
Entonces tenemos: Si área de Q es A, construimos un cuadrado de lado $a : a^2 = A$

La suma de las áreas de los triángulos adicionales es B, y usando el proceso anterior se construye un cuadrado de lado b, y $b^2 = B$

Finalmente el área del polígono original P es $A - B = a^2 - b^2$. Entonces construimos un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud a y m cateto de longitud b. Así resulta que el cateto restante tiene longitud c :

$$c^2 = a^2 - b^2 - A - B = \text{ área de } P.$$

En el siguiente gráfico el cuadrado L es una cuadratura de P



Cuadratura de las Lúnulas de Hipócrates

Hasta ahora hemos considerado cuadratura de figuras geométricas poligonales. Queremos estudiar cuadraturas de otras figuras planas relacionadas con el círculo, y en particular con algunos sectores circulares, quedando pendiente la cuadratura del círculo que veremos al final de este capítulo.

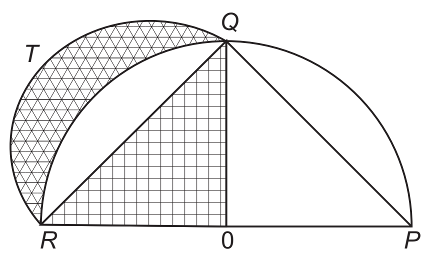
Fue el matemático griego Hipócrates que se planteó por primera vez la cuadratura de las lúnulas, construcción y concepto que él mismo inicio. Consideró una lúnula como la intersección de dos semicírculo, y para la demostración de la cuadratura de la lúnula hizo uso de los siguientes tres resultados

1. El teorema de Pitágoras
2. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto
3. Las áreas de dos círculos están en razón como los cuadrados de sus diámetros: Si A_1 y D_1 son el área y el diámtro de un círculo y si A_2 y D_2 son el área y el diámetro de otro círculo, entonces

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2}$$

Los dos primeros resultados eran bien conocidos antes de Hipócrates. Hay hoy en dia dudas razonables sobre si Hipócrates pudo probar el tercer resultado anterior, el cual apareció posteriormente en el libro XII de los Elementos de Euclides.

Veamos a continuación la construcción de Hipócrates, comenzando con el siguiente gráfico:



Primero tenemos un semicírculo de centro 0 y radio $\overline{OR} = \overline{OP}$ Construimos el segmento $\overline{OQ}$ perpendicular a $\overline{RP}$. Con centro el punto medio S del segmento RQ construimos el semicírculo RTQ, que tendrá radio igual a las longitudes de $\overline{RS}$ y $\overline{SQ}$. Tracemos la recta $\overline{QD}$. La zona rayada en este semicírculo RTQ es una lúnula de Hipócrates, quien prueba ahora que dicha lúnula tiene la misma área que la del triángulo punteado RQO.

En efecto, por (2) el $\measuredangle RQP$ es recto. Además los triángulos RQO y OQP son congruentes porque tienen $\overline{RO} = \overline{OP}$, $\overline{OQ}$ es un lado común y los ángulos comprendidos $\measuredangle ROQ = \measuredangle POQ = \pi/2$. Por lo tanto $\overline{RQ}$ y $\overline{QP}$ tienen igual longitud.

Usando ahora el teorema de Pitágoras:

$$\overline{RP}^2 = \overline{RQ}^2 + \overline{QP}^2 = 2\overline{RQ}^2$$

Usando el resultado (3):

$$\frac{\text{Área del semic. } RTQ}{\text{Área del semic. } RQP} = \frac{\overline{RQ}^2}{\overline{RP}^2} = \frac{\overline{RQ}^2}{2\overline{RQ}^2} = \frac{1}{2}$$

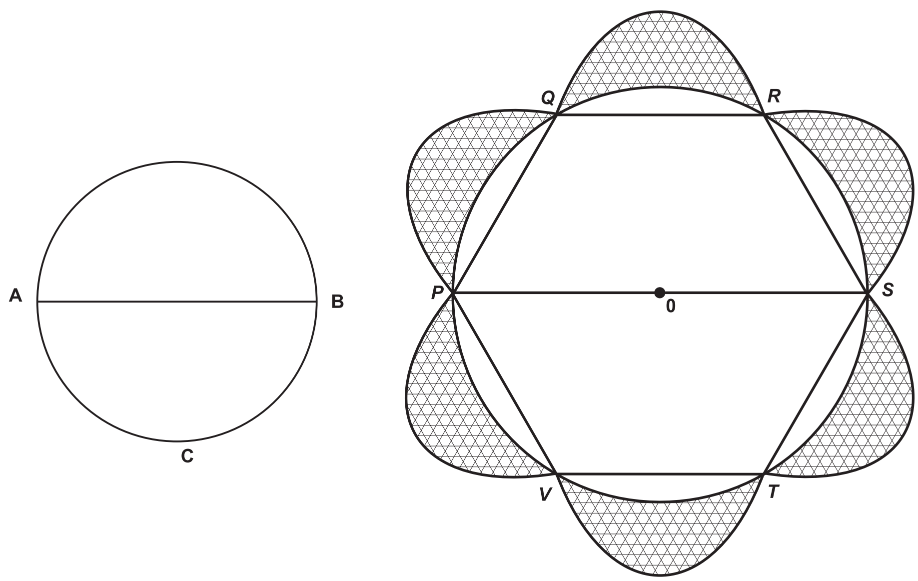
Luego Área del semic. $RTQ = \frac{1}{2}$ Área del semic. $RQP =$ área del cuadrante RLQ o del semicírculo RQP. De aquí se deduce que el área de la lúnula $RTQL$ coincide con el área del triángulo RQO. En conclusión la lúnula es cuadrable porque el triángulo RQO lo es.

La cuadratura del círculo

Como acabamos de ver la demostración de Hipócrates de la cuadratura de sus lúnulas es bastante directa y elegante. La lúnula constituye el primer ejemplo de figura geométrica plana y no usual de cuadratura. Para la época de Hipócrates se pensaba que las figuras curvilínea no podían ser cuadrables, y de aquí su mérito. De todos modos el éxito de Hipócrates replanteó la posibilidad de la cuadratura del círculo, que constituía por si solo el problema más importante sobre cuadraturas. Efectivamente, se atribuye a Hipócrates una "demostración" sobre la cuadratura del círculo, la cual detallamos a continuación siguiendo básicamente el texto [3] de W. Dunhan.

Comencemos entonces: tenemos un círculo C de diámetro d y de área $\overline{C}$ Construimos otro círculo $\mathcal{C}$ de diámetro $D = 2d$ y centro O, en el cual inscribimos un hexágono tomando como longitud de sus lados el radio $\frac{D}{2}$ del círculo $\mathcal{C}$.

Consideremos el siguiente gráfico:



Aquí tenemos:

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{ST} = \overline{TV} = \overline{VP} = \overline{OP} = \frac{D}{2} = d$$

Usando los seis lados del hexágono como diámetros, se construyen seis semicírculos dando lugar a 6 lúnulas que están sombreadas en el gráficos anterior. Cada uno de estos semicírculos tiene área igual a la mitad del área del círculo inicial C, que tiene diámetro d.

Consideremos ahora el área de la figura derecha del gráfico: Por un lado tenemos un hexágono más 6 semicírculos, y por otro tenemos el círculo grande $\mathcal{C}$ más las 6 semilunas.

Calculando las áreas tenemos:

$$\text{Área del hexágono } + 3(\text{área de } C) = \text{área de } \mathcal{C} + \text{Área de 6 semilunas} \qquad (\star)$$

Ahora usamos el resultado (2) de la sección anterior (ver pág.), y la notación: H = área del hexágono, $\overline{C}$ = área de C, $\overline{\mathcal{C}}$ = Área de $\mathcal{C}$ y obtenemos:

$$\frac{\overline{\mathcal{C}}}{\overline{C}} = \frac{D^2}{d^2} = \frac{4d^2}{d^2} = 4$$

Sustituimos en $(\star)$ de arriba:

$H + 3\overline{C} = \overline{\mathcal{C}} + $ Área de 6 esemilunas;

$H = \overline{\mathcal{C}} - 3\overline{C} + $ Área 6 lúnulas $= 4\overline{C} - 3\overline{C} + $ Área 6 semilunas,

Luego $\overline{C} = H -$ Área 6 lúnulas

Ahora se procede como sigue:

Cada lúnula es cuadrable y la reunión de las seis lúnulas lo es procediendo como en el caso de la cuadratura de un polígono convexo. Como además el hexágono es cuadrable, entonces imitando el proceso de cuadratura (para la diferencia) de un polígono general visto en la última parte de la sección 3, se deduce que el círculo C de área $\overline{C}$ es cuadrable.

Como sabemos, según la sección 5.4.1, que el círculo no es cuadrable, ¿donde está el error de la demostración? En primer lugar la cuadratura de la lúnula vista en la sección 4 es de una lúnula construida sobre el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia, mientras que las lúnulas anteriores están construidas sobre los lados de un hexágono regular, y no hay ninguna demostración de que tales lúnulas sean cuadrables.

Actualmente los estudiosos de este tema dudan que un matemático de la estatura de Hipócrates haya cometido el error antes señalado. Más bien se piensa que alguno de los intermediarios que utilizaron el argumento original de Hipócrates lo haya distorsionado de alguna manera.

Sobre las cuadraturas de las lúnulas, ya para el año 440 A.C se conocían tres tipos de lúnulas cuadrables por Hipócrates. Posteriormente, en 1777, Leonardo Euler 1707 - 1783 encontró dos tipos más de lúnulas cuadrables. Todo termina en el siglo XX cuando los matemáticos N. Tschebatorew, A. Dorodnow y Lindemann probaron que los anteriores cinco tipos de lúnulas eran las únicas cuadrables. Así que la lúnulas construida sobre el lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia, no es cuadrable.

Bibliografía

[1] Alson, Pedro. “Métodos de Graficación”. Edit. ERRO. Tercera Edición. Caracas - 1966.

[2] Brito, Wilman. “Estudio de funciones”. Ediciones “AULA”. V Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Mérida 2001.

[3] Dunham, William. “Journey throuch Genius”. Penguin Books. John Wiley & Sons. Inc. 1991.

[4] Enochs, Edgar E.. “Binomial Coefficients”. Boletin Asoc. Mat. Venezolana. Vol XI. N° 1. 2004.

[5] Herstein, I. N. “Álgebra Moderna”. Edit. Trillas México. 1973.

[6] Jiménez Douglas. “π: La letra griega que los griegos no usaron”. Boletin Asoc. Mat. Venezolana. Vol XI. N° 1. 2004. Matemática. Mérida 2001.

[7] Porras, Olga. “Polinomios”. Ediciones “AULA”. VI Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Mérida 2002.

[8] Reyes, Arturo. “Áreas, Logaritmos y Exponenciales”. Ediciones AULA. Tercera Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Mérida 1999.