Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matematicas
Grupo de Análisis Funcional

LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO PARA UN PAR DE FUNCIONES

Trabajo Especial de Grado para optar al Titulo de Licenciado en Matemáticas

Br. Igsil Augusto Dávila

Tutor: Jose R. Morales

Diciembre, 2006

Índice general

Resumen

Sean S, T funciones definidas de un espacio métrico (M, d) en sí mismo, queremos hallar condiciones sobre las funciones y\o sobre el espacio que nos permitan garantizar la existencia de un punto fijo común para S y T, i.e.,

$$\exists z \in M \quad | \quad T(z) = z = S(z)$$

En este trabajo presentaremos varias nociones que nos van a permitir dar respuesta al problema. Analizaremos los teoremas presentados en [4],[6],[7] y [13].

Introducción

En 1922, el matemático Polaco Banach probo un teorema que aseguraba las condiciones apropiadas para la existencia y unicidad de un Punto Fijo. Su resultado es llamado el Teorema del Punto Fijo de Banach o el Principio de Contracción de Banach (P.C.B). Este teorema probe una teoría para encontrar la solución de una gran variedad de aplicaciones en Matemática e Ingeniería.

Muchos autores han extendido, generalizado y probado el Principio de Contracción de Banach en diferentes caminos. En [5], [6], [7], [8] y [12], Jungck,G. y Rhoades generalizan el Principio de Contracción de Banach introduciendo la teoría de las funciones conmutantes y compatibles.

La pregunta que debemos hacernos es, dado un espacio métrico (M, d) y $S; T : M \to M$ dos funciones, bajo que condiciones sobre el espacio M y/o sobre las funciones S, T se puede garantizar la existencia de un punto fijo común para la funciones. El objetivo fundamental de este trabajo es hallar tales condiciones.

Con el objetivo de hacer este trabajo autocontenido y tratar así de facilitar su comprensión, el mismo ha sido dividido en cuatro capítulos de la siguiente manera:

Capítulo 1

Se harán referencia a algunas definiciones y resultados clásicos de la Teoría de los Espacios Métricos y se estudiará la teoría del punto fijo para una sola función en espacios métricos.

Capítulo 2

Estudiaremos teoremas del punto fijo para funciones que satisfacen ciertas condiciones Contractivas. Se analizaran los resultados referentes dados por Kannan, Chatterjea, Rus, Yen, etc. dados en [4].

Capítulo 3

Estudiaremos las definiciones de funciones conmutantes y analizaremos el resultado dado por G.Jungck, [5],[7], que generaliza el Principio de Contracción de Banach. Además se analizaran algunas generalizaciones del trabajo de Jungck.

Capítulo 4

Finalmente en este capítulo se estudiaran las nociones de funciones compatibles y analizaremos los correspondientes resultados sobre teoremas de punto fijo.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera sección se hará referencia a algunas definiciones y resultados que serán necesarios para el desarrollo satisfactorio de este trabajo. Muchos de los resultados del capítulo se presentan sin demostración, pues son resultados clásicos del análisis y la topología. Los interesados en dichas demostraciones pueden consultar cualquier libro sobre el tema,particularmente, [1],[2].

En la segunda sección daremos un breve resumen sobre la teoría del punto fijo para una función en espacios métricos y en consecuencia enunciaremos y probaremos algunos resultados clásicos de tal teoría.

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1 *Un espacio métrico es un conjunto no-vacio,* M *con una métrica o una función distancia,* $d : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *tal que satisfaga las siguientes condiciones para todo* $x, y, z \in \mathrm{M}$:

d1. $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

d2. $d(x, y) = d(y, x)$

d3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Desigualdad Triangular)*

Denotaremos a los espacios métricos con el par (M, d), donde M es un conjunto no-vacio y d es una métrica en M.

Ejemplo 1.1

Sea M, *un conjunto no-vacio y* $d : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \rightarrow \mathbb{R}$ *una función definida por*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

Es claro que d *es una función distancia sobre* M. *Llamada la métrica discreta sobre* M. *El par* (M, d) *se le conoce con el nombre de espacio métrico discreto.*

Ejemplo 1.2

Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *una función definida por*

$$d(x,y) = |x - y|$$

para todo $x, y \in \mathrm{M}$

Usando las propiedades del valor absoluto, se demuestra que d *es una métrica sobre* $\mathbb{R}$ *llamada la métrica usual de* $\mathbb{R}$ *y* $(\mathbb{R}, d)$ *es un espacio métrico.*

Ejemplo 1.3

Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}^n, n = 1, 2, ...$ *y definamos la función* $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, *por*

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$

Usando la desigualdad de Hölder se demuestra que d_p, $1 \leq p < \infty$, *es una métrica sobre* $\mathbb{R}^n$ *y por lo tanto* $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *es un espacio métrico.*

Observación si $p = 1$, *obtenemos*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

y así $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *es un espacio métrico; ahora si tomamos* $p = 2$ *se obtiene la llamada "métrica euclidiana":*

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

por lo tanto $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *es un espacio métrico.*

Si $p = \infty$ *definimos* $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$ *y por lo tanto* $(\mathbb{R}, d_\infty)$ *es un espacio métrico.*

En el resto de este trabajo M denota un espacio métrico.

Definición 1.2 *Se dice que* $A \subset \mathrm{M}$ *es acotado si existe* $k \geq 0$ *tal que* $d(x, y) \leq k$ *para cualesquiera* $x, y \in A$*. Si* A *es acotado y no vacio se define el diámetro de* A*; denotado* $\delta(A)$*, por*

$$\delta(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Definición 1.3 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en* (M, d)*. Se dice que* x_n *converge al punto* $x \in \mathrm{M}$ *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$*.*
En este caso lo denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

o

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

o

$$x_n \to x.$$

Proposición 1.1 *Propiedades de la sucesiones convergentes.*

1. *El limite de una sucesión convergente es único.*
2. *Si una sucesión* $\{x_n\}$ *en* (M, d) *converge a* $x \in \mathrm{M}$*, entonces toda subsucesión de* $\{x_n\}$ *converge a* x*.*
3. *Toda sucesión convergente es acotada.*
4. *Si* $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$ *en* (M, d) *entonces* $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

Definición 1.4 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en* (M, d).
Se dice que $\{x_n\}$*es una sucesión de Cauchy en* M *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.
En este caso lo denotamos por

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Proposición 1.2 *Propiedades de la sucesiones Cauchy.*

1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*
2. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*
3. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de Cauchy en* (M, d). *Si toda subsucesión de* $\{x_n\}$*converge a* x *entonces* $\{x_n\}$ *converge a* x.

Definición 1.5 *Se dice que el espacio métrico* (M, d) *es completo si toda sucesión de Cauchy en* M *es convergente a un punto de* M.

Proposición 1.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo entonces* $\{x_n\} \subset (\mathrm{M}, d)$ *es una sucesión de Cauchy si y solo si* $\{x_n\}$ *es convergente en* M.

Ejemplo 1.4
El espacio métrico, $(\mathbb{R}, |.|)$ *es completo.*

Ejemplo 1.5
El espacio métrico, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *es completo,* $1 \leq p \leq \infty$.

Ejemplo 1.6
$(0, 1) \subset (\mathbb{R}, |.|)$ *no es un espacio métrico completo.*

Definición 1.6 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *una función. Entonces* T *es una función,*

1. *Continua en el punto* $x \in \mathrm{M}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si,*$y \in \mathrm{M}$ *y* $d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(T(x), T(y)) < \epsilon$.
2. *Continua en* M, *si* T *es continua para todo* $x \in \mathrm{M}$.

Ejemplo 1.7

1. *La función constante es continua.*
2. *La función identidad es continua.*
3. *La suma de funciones continuas es continua.*

Definición 1.7 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *una función. Se dice que* T *es uniformemente continua si, para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que* $\forall x, y \in \mathrm{M}$ *y* $d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(T(x), T(y)) < \epsilon$.

Ejemplo 1.8

1. *La función constante es uniformemente continua.*
2. *La función identidad es uniformemente continua.*
3. *La función* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $T(x) = x^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ *no es uniformemente continua.*
4. *La función* $T : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *definida por* $T(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in (0, \infty)$ *no es uniformemente continua.*

Proposición 1.4 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *una función.Entonces*

Si T *es uniformemente continua entonces* T *es continua.*

Definición 1.8 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *una función. Se dice que* T *es una aplicación Lipschitziana si existe una constante* $\alpha \geq 0$ *tal que*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in \mathrm{M}.$$

Ejemplo 1.9

1. *La función* $T : [0, 1] \to [0, 1]$ *definida por* $T(x) = x^2$, $\forall x \in [0, 1]$ *es lipschitziana.*
2. *Toda transformación lineal* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es lipschitziana.*

Proposición 1.5 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *una función Lipschitziana entonces* T *es uniformemente continua.*

Definición 1.9 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en un espacio métrico* M.
Se dice que $\{x_n\}$ *es una sucesión* $\alpha-$*contracción si existe* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Lema 1.1 *Sea* $\{x_n\}$ *es una sucesión* $\alpha-$*contracción en* M *entonces* $\{x_n\}$ *es Cauchy en* M.

Demostración:
Observemos que de 1.1 se tiene que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$

Por desigualdad triangular tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)$$

por lo tanto por 1.2,

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + d(x_{n+1}, x_m)$$

Así aplicando nuevamente desigualdad triangular se obtiene

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

luego, por 1.2 se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_1, x_0)$$

por lo tanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)[1 + \alpha + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1-n}]$$

tomando $k = m - 1 - n$ tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k} \alpha^i$$

como $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$ por ser una serie convergente entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

por otra parte como $\alpha \in (0,1)$ y $k+1 = m-n > 0$ entonces α^n convergen a 0 por lo tanto,

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

luego, por la definición 4.1 $\{x_n\}$ es de Cauchy.

■

Lema 1.2 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión* $\alpha-$*contracción en un espacio métrico completo* (M, d) *entonces* $\{x_n\}$ *converge a un punto de* M.

Demostración:

Por el lema 1.1 $\{x_n\}$ es de Cauchy y como (M, d) es un espacio métrico completo, por la proposición 1.3 se tiene que $\{x_n\}$ converge a un punto de M.

■

En la siguiente sección daremos un breve resumen sobre la teoría del punto fijo para una función en espacios métricos y en consecuencia enunciaremos y probaremos algunos resultados clásicos de tal teoría.

1.2. Teoría del Punto fijo.

Definición 1.10 *Sea* M *un conjunto no-vacio y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una aplicación cualquiera. Un punto* $x \in \mathrm{M}$ *se llama* ***Punto Fijo*** *de* T *si* $T(x) = x$.

Ejemplo 1.10
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x) = \dfrac{1}{3}x$ *entonces* $x = 0$ *es un punto fijo de* T.

Notación 1.11
Denotaremos por F_T *al conjunto de puntos fijos de la aplicación* T*, es decir,*

$$F_T = \{x \in \mathrm{M} : T(x) = x\}.$$

Definición 1.12 *Sea* (M, d) *un espacio métrico, una función* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *se dice que es una* ***Contracción*** *(α-contracción,contracción de Banach,B-contracción) si existe* $\alpha \in [0, 1)$ *tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathrm{M}.$$

Ejemplo 1.11
Sea $T_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $T_\alpha(x) = \alpha x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha \geq 0$*. Es claro, que* T_α *es una B-contracción si y solo si* $\alpha < 1$.

Es claro que toda B-contracción es una aplicación Lipschitziana y por lo tanto continua.

El siguiente teorema nos dice que toda B-contracción definida en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

Teorema 1.1 *(Principio de Contracción de Banach-P.C.B)*

Sea (M, d) *un espacio métrico completo y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una B-contracción entonces*

1. *Si* $x_0 \in \mathrm{M}$ *es un punto arbitrario y* $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ *es una sucesión definida por* $x_n = T^n(x_0), n = 0, 1, 2...$ *entonces* $x_n \to z$
2. $F_T = \{z\}$, *es decir, existe un único punto fijo* $z \in \mathrm{M}$ *de* T
3. $d(x_n, z) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$
4. $d(x_{n+1}, z) \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n+1}, x_n)$
5. $d(x_{n+1}, z) \leq \alpha d(x_n, z)$

Demostración:

1. Sea x_0 un punto arbitrario, definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_{n+1} = T(x_n), n = 0, 1, 2, ...$ por lo tanto se tiene $x_1 = T(x_0)$; $x_2 = T(x_1) = TT(x_0) = T^2(x_0)$; en general $x_n = T^n(x_0)$.

   Entonces aplicando que T es una B-contracción se tiene

   $$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

   por lo tanto,

   $$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

   por otra parte,

   $$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

   y

   $$d(x_2, x_3) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

   Análogamente, por un razonamiento inductivo, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

   $$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1),$$

como $\alpha \in [0,1)$ entonces $\alpha^n \in [0,1)$ luego por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

2. Veamos que z es un punto fijo de T.
   Como T es una B-contracción entonces T es una función continua por lo tanto,
   $$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(z)$$
   así,
   $$T(z) = z.$$
   Por otra parte si x e y son puntos fijos de T; $T(x) = x$ y $T(y) = y$, entonces
   $$0 \leq d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y)$$
   por lo tanto,
   $$d(x,y) \leq \alpha d(x,y)$$
   y como $\alpha \in [0,1)$ entonces $d(x,y) = 0$, luego $x = y$, así el punto fijo es único.

3. En el lema 1.1 se demostró que para $n, m \geq 1$
   $$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \tag{1.3}$$
   ahora por desigualdad triangular
   $$d(x_n, z) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, z)$$
   por lo tanto,
   $$d(x_n, z) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) + d(x_m, z)$$
   por 1.3, tomando limite cuando $m \to \infty$ y como $\lim_{m\to\infty} d(x_m, z) = 0$ tenemos que
   $$d(x_n, z) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

4. Sea $m \geq 1$ por un razonamiento análogo al lema 1.2 tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n+1}) \tag{1.4}$$

como $d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \to d(x_{n+1}, z)$ cuando $m \to \infty$, entonces tomando limite cuando $m \to \infty$ en 1.4 obtenemos

$$d(x_{n+1}, z) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n+1}, x_n).$$

5. Como $z \in M$ es punto fijo de T entonces

$$d(x_{n+1}, z) = d(T(x_n), T(z)) \leq \alpha d(x_n, z)$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, z) \leq \alpha d(x_n, z).$$

■

Observaciones:

.- A una función discontinua no se le puede aplicar el P.C.B. (teorema 1.1)

Ejemplo 1.12
$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

T no es continua en $x = 0$, por lo tanto, no es una $\alpha-$contracción,luego no se le puede aplicar el P.C.B.

.- A una $\alpha-$contracción que este definida en un espacio métrico que no sea completo no se le puede aplicar el P.C.B. (teorema 1.1)

Ejemplo 1.13
$T : (0,1) \to (0,1)$ dada por $T(x) = \frac{1}{2}x$.
T es continua pero no se le puede aplicar el P.C.B. porque el conjunto $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ no es completo.

1.2.1. Algunas condiciones para que una función tenga un único punto fijo

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre la teoría de punto fijo para una función, dados por Kannan, Chatterjea ,Rus y Zamfirescu en [3],[4],[14].

El siguiente resultado fue dado por Zamfirescu, ver [14]

Teorema 1.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) \tag{1.5}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.5 se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, T(x_0))$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, T(x_1))$$

de esta manera,

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

luego, por inducción obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

así, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por 1.4 se tiene,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + \alpha d(z, T(z))$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$d(z, T(z)) \leq \alpha d(z, T(z))$$

luego,

$$(1 - \alpha)d(z, T(z)) \leq 0$$

como $0 < \alpha < 1$ entonces $d(z, T(z)) \leq 0$ por lo tanto

$$T(z) = z.$$

Veamos que z es el único punto fijo de T. En efecto
supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq \alpha d(z, T(z)) = \alpha d(z, z) = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

Corolario 1.1
Sea (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se satisface 1.5.*
Si $y = T(x)$ *entonces se tiene el teorema 1.1 (P.C.B)*

■

Teorema 1.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(y, T(y)) \tag{1.6}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 1.2

■

A continuación presentamos un resultado que generaliza la condición de contracción dada por Banach en el P.C.B y que fue presentada por Kannan [4]

Teorema 1.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{1.7}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.7 se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha[d(x_n, T(x_n)) + d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))]$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) + \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

así,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ entonces $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} < 1$, luego, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por 1.7 se tiene

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + \alpha[d(z, T(z)) + d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))]$$

de esta manera,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_n) + \alpha d(z,T(z)) + \alpha d(x_{n-1},x_n)$$

luego,

$$(1-\alpha)d(z,T(z)) \leq d(z,x_n) + \alpha d(x_{n-1},x_n)$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$(1-\alpha)d(z,T(z)) \leq 0$$

como $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ entonces, $d(z,T(z)) \leq 0$ así,

$$T(z) = z.$$

Veamos que z es el único punto fijo de T. En efecto
supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z,z^*) = d(T(z),T(z^*)) \leq \alpha[d(z,T(z)) + d(z^*,T(z^*))] = \alpha[d(z,z) + d(z^*,z^*)] = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

El siguiente resultado es una variación en la condición de Kannan y se debe a Chatterjea, ver [4]

Teorema 1.5 *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo, y* $T:\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ *una función para la cual existe* $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$ *tal que*

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha[d(x,T(y)) + d(y,T(x))], \forall x,y \in \mathrm{M} \tag{1.8}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema anterior 1.4

■

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los teoremas 1.1, 1.2 y 1.5.

Teorema 1.6 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1.- $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$

2.- $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x))$

3.- $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(y, T(y))$

4.- $d(T(x), T(y)) \leq \dfrac{\alpha}{2}[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

En el siguiente resultado se generaliza la condición contractiva de Kannan y fue dado por a S.Riech [4]

Teorema 1.7 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $a, b, c \in \mathbb{R}^+$*,* $a + b + c < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, T(x)) + bd(y, T(y)) + cd(x, y) \tag{1.9}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ definida por, $x_n = T^n(x_0), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.9 para $x = T^n(x_0)$ e $y = T^{n-1}(x_0)$ se tiene

$$\begin{aligned} d(T(T^n(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \ \leq \ & ad(T^n(x_0), T(T^n(x_0))) + bd(T^{n-1}(x_0), T(T^{n-1}(x_0))) \\ & + cd(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(1 - a)d(T(T^n(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \leq +(b + c)d(T^{n-1}(x_0), T(T^{n-1}(x_0)))$$

así,

$$d(T(T^n(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \leq \frac{(b + c)}{1 - a} d(T^{n-1}(x_0), T(T^{n-1}(x_0)))$$

luego, por definición de la sucesión se obtiene

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{(b+c)}{1-a} d(x_n, x_{n-1})$$

Como $a+b+c<1$ entonces $\dfrac{b+c}{1-a}<1$, luego, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por 1.9 tenemos que,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + ad(x_{n-1}, T(x_{n-1})) + bd(z, T(z)) + cd(x_{n-1}, z)$$

así,

$$(1-b)d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n) + cd(x_{n-1}, z)$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$(1-b)d(z, T(z)) \leq 0$$

como $a+b+c<1$ entonces, $d(z, T(z)) \leq 0$ luego,

$$T(z) = z.$$

Veamos la unicidad. En efecto
supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq ad(z, T(z)) + bd(z^*, T(z^*)) + cd(z, z^*)$$

luego,

$$(1-c)d(z, z^*) \leq 0$$

de esta manera,

$$z = z^*.$$

■

Corolario 1.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo.*
Si tomamos en la condición 1.9, $a = b = 0$ *entonces obtenemos el P.C.B.*

$\blacksquare$

Corolario 1.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo.*
Tomando en la condición 1.9, $a = b$ *y* $c = 0$ *entonces obtenemos el teorema 1.4*

$\blacksquare$

El siguiente resultado se debe a Rus, [15].

Teorema 1.8 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $a, b \in \mathbb{R}^+$*,* $a + 2b < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{1.10}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 1.7 ya que escribimos la condición 1.10 de la siguiente manera

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + bd(x, T(x)) + bd(y, T(y))$$

y $a + b + b = a + 2b < 1$.

$\blacksquare$

En el siguiente teorema se generalizan las condiciones contractivas que previamente hemos estudiado y fue presentado por Hardy-Rogers. [16]

Teorema 1.9 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función y* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}^+$*,* $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha_1 d(x, T(x)) + \alpha_2 d(y, T(y)) + \alpha_3 d(x, T(y)) \tag{1.11}$$

$$+\alpha_4 d(y, T(x)) + \alpha_5 d(x, y)$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ definida por, $x_n = T^n(x_0), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.11 para $x = T^n(x_0)$ e $y = T^{n-1}(x_0)$ se tiene,

$$\begin{aligned} d(T(T^n(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \leq\ & \alpha_1 d(T^n(x_0), T(T^n(x_0))) + \alpha_2 d(T^{n-1}(x_0), T(T^{n-1}(x_0))) \\ & + \alpha_3 d(T^n(x_0), T(T^{n-1}(x_0))) + \alpha_4 d(T^{n-1}(x_0), T(T^n(x_0))) \\ & + \alpha_5 d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq\ & \alpha_1 d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5) d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) \\ & + \alpha_4 d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) + \alpha_4 d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) \end{aligned}$$

luego,

$$(1 - \alpha_1 - \alpha_4) d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

de esta manera se tiene que,

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}{1 - \alpha_1 - \alpha_4} d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

usando la definición de la sucesión se tiene

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}{1 - \alpha_1 - \alpha_4} d(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ entonces $\dfrac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}{1 - \alpha_1 - \alpha_4} < 1$, luego, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(z))$$

por 1.11 se tiene

$$\begin{aligned} d(z, T(z)) \leq\ & d(z, x_n) + \alpha_1 d(x_{n-1}, T(x_{n-1})) + \alpha_2 d(z, T(z)) + \alpha_3 d(x_{n-1}, T(z)) \\ & + \alpha_4 d(z, T(x_{n-1})) + \alpha_5 d(x_{n-1}, z) \end{aligned}$$

así,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_n)+\alpha_1 d(x_{n-1},T(x_{n-1}))+\alpha_2 d(z,T(z))+\alpha_3 d(x_{n-1},z)+\alpha_3 d(z,T(z)) \\ +\alpha_4 d(z,T(x_{n-1}))+\alpha_5 d(x_{n-1},z)$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$d(z,T(z)) \leq \alpha_2 d(z,T(z)) + \alpha_3 d(z,T(z))$$

luego,

$$(1-\alpha_2-\alpha_3)d(z,T(z)) \leq 0$$

como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ entonces, $d(z,T(z)) \leq 0$ así,

$$T(z) = z.$$

Veamos la unicidad. En efecto
supongamos que $T(z^*) = z^*$ y $T(z) = z$ así, por 1.11 se tiene

$$d(z,z^*) = d(T(z),T(z^*)) \leq \alpha_1 d(z,T(z))+\alpha_2 d(z^*,T(z^*))+\alpha_3 d(z,T(z^*))+\alpha_4 d(z^*,T(z)) \\ +\alpha_5 d(z,z^*)$$

por lo tanto,
$d(z,z^*) \leq \alpha_1 d(z,z) + \alpha_2 d(z^*,z^*) + \alpha_3 d(z,z^*) + \alpha_4 d(z^*,z) + \alpha_5 d(z,z^*)$, luego,

$$(1-\alpha_2-\alpha_3)d(z,z^*) \leq 0$$

como $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$ entonces, $d(z,z^*) \leq 0$, luego, $z = z^*$.

■

Corolario 1.4 *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo.*
Si tomamos en la condición 1.11, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ *entonces obtenemos el P.C.B (teorema 1.1)* ■

Corolario 1.5 *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo.*
Tomando en la condición 1.11, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_4 = 0$ *entonces obtenemos el teorema 1.2.* ■

Corolario 1.6 *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo.*
Si tomamos en la condición 1.11, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ *entonces obtenemos el teorema 1.7.* ■

Corolario 1.7 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo.*
Considerando en 1.11, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ *y* $\alpha_1 = \alpha_2$ *entonces obtenemos el teorema de Kannan 1.4.* ■

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema anterior 1.9.

Teorema 1.10 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función para la cual existen* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a + 2b + 2c < 1$ *y*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + b[d(y, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{1.12}$$
$$+c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces* T *tiene un único punto fijo.*

El siguiente teorema se debe a Yen-1976, [4]

Teorema 1.11 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función para la cual existen* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a + 2b < 1$ *y*

$$d(T(x), T(y)) \leq a \operatorname{máx}\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y))\} \tag{1.13}$$
$$+c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $\mathcal{A} = \operatorname{máx}\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y))\}$
Si $\mathcal{A} = d(x, y)$ entonces de la condición 1.13 se obtiene la condición 1.10 del teorema 1.8, luego se concluye que T tiene un único punto fijo.

Si $\mathcal{A} = d(x, T(x))$ entonces de la condición 1.13 se obtiene la condición 1.11 del teorema 1.9 para $\alpha_1 = a$, $\alpha_3 = \alpha_4 = b$ y $\alpha_2 = \alpha_5 = 0$, por lo tanto, T tiene un único punto fijo.

Si $\mathcal{A} = d(y, T(y))$ entonces de la condición 1.13 se obtiene la condición 1.11 del teorema 1.9 para $\alpha_2 = a$, $\alpha_3 = \alpha_4 = b$ y $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, por lo tanto, T tiene un único punto fijo.

En cualquiera de los casos se concluye que T tiene un único punto fijo.

■

El siguiente teorema se debe a Ciric-1974, [4]

Teorema 1.12 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función para la cual existe* $a \in [0, \frac{1}{2})$ *tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq a \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), \frac{1}{2}[d(x,T(y)) + d(y,T(x))]\} \tag{1.14}$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 1.11.

■

El siguiente resultado fue dado por Iseki-1974, [4]

Teorema 1.13 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función tal que existe* $a \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a < 1$ *y*

$$d(T^2(x), T(y)) \leq ad(x, T(y)) \quad \forall x, y \in \mathrm{M} \tag{1.15}$$

entonces T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ definida por, $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.15 para $x = x_n$ e $y = x_{n-1}$ se tiene,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) = d(T^2(x_{n-1}), T(x_{n-1})) \leq ad(x_{n-1}, T(x_{n-1}))$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Demostremos que z es un punto fijo de T, estimemos

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},T(z)) = d(z,x_{n+1}) + d(T^2(x_{n-1}),T(z))$$

por lo tanto,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},T(z))$$

luego,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},z) + ad(z,T(z))$$

así,

$$(1-a)d(z,T(z)) \leq d(z,x_{n+1}) + ad(x_{n-1},z)$$

de esta manera haciendo $n \to \infty$ se obtiene que

$$(1-a)d(z,T(z)) \leq 0$$

luego, $T(z) = z$.

Veamos la unicidad, para ello supongamos que existe otro punto fijo, es decir, $T(z^*) = z^*$ para $z^* \in M$ y probemos que $z = z^*$. En efecto,

$$d(z,z^*) = d(T(z),T(z^*)) = d(T^2(z),T(z^*)) \leq ad(z,T(z^*)) = ad(z,z^*)$$

luego,

$$(1-a)d(z,z^*) \leq 0$$

así, $z = z^*$. De esta manera se tiene que T tiene un único punto fijo.

■

En el siguiente resultado presentamos una contracción de tipo racional y fue dado por Khan-1977, [4]

Teorema 1.14 *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo, y* $T:\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ *una función para la cual existe* $a \in [0,1)$ *tal que*

$$d(T(x),T(y)) \leq a\frac{d(x,T(x))d(x,T(y)) + d(y,T(y))d(y,T(x))}{d(x,T(y)) + d(y,T(x))} \tag{1.16}$$

$\forall x,y \in \mathrm{M}$ *entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ definida por, $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...$ Ahora aplicando 1.16 para $x = x_n$ e $y = x_{n-1}$ se tiene,

$$d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq a\frac{d(x_n, T(x_n))d(x_n, T(x_{n-1})) + d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))d(x_{n-1}, T(x_n))}{d(x_n, T(x_{n-1})) + d(x_{n-1}, T(x_n))}$$

por lo tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a\frac{d(x_n, x_{n-1})d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1})}{d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_n)}$$

luego,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_{n-1}, x_{n+1})$$

ahora por desigualdad triangular se tiene,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_{n-1}, x_n) + ad(x_n, x_{n-1})$$

por lo tanto,

$$(1 - a)d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_{n-1}, x_n)$$

así,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{a}{1-a}d(x_{n-1}, x_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

como $a \in [0, 1)$ entonces $\dfrac{a}{1-a} < 1$, luego, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de T,

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(z)) = d(z, x_{n+1}) + d(T(x_n), T(z))$$

así,

$$d(z, T(z)) \leq a\frac{d(x_n, T(x_n))d(x_n, T(z)) + d(z, T(z))d(z, T(x_n))}{d(x_n, T(z)) + d(z, T(x_n))}$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene que

$$d(z, T(z)) \leq 0$$

luego, $T(z) = z$.

Veamos la unicidad, para ello supongamos que existe otro punto fijo, es decir, $T(z^*) = z^*$ para $z^* \in M$ y probemos que $z = z^*$. En efecto,

$$d(z, z^*) = d(T(z), T(z^*)) \leq a\frac{d(z, T(z))d(z, T(z^*)) + d(z^*, T(z^*))d(z^*, T(z))}{d(z, T(z^*)) + d(z^*, T(z))}$$

por lo tanto,

$$d(z, z^*) \leq a\frac{d(z, z)d(z, z^*) + d(z^*, z^*)d(z^*, z)}{d(z, z^*) + d(z^*, z)}$$

luego,

$$d(z, z^*) \leq 0$$

así, $z = z^*$. De esta manera se tiene que T tiene un único punto fijo.

■

A continuación presentamos en resumen las condiciones contractivas y ejemplos donde se muestra que hay funciones que cumplen con una condición pero no con otra.

Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una función.

P1. Principio de Contracción de Banach-P.C.B

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in M \quad y \quad \alpha \in [0, 1)$$

P2. Teorema de Kannan

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \quad \forall x, y \in M \quad y \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

P3. Teorema de Chatterjea

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \quad \forall x, y \in M \quad y \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

P4. Teorema de S.Riech

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, T(x)) + bd(y, T(y)) + cd(x, y) \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a + b + c < 1$$

P5. Teorema de Rus

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a + 2b < 1$$

P6. Teorema de Hardy-Rogers.

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha_1 d(x,T(x)) + \alpha_2 d(y,T(y)) + \alpha_3 d(x,T(y))$$
$$+\alpha_4 d(y,T(x)) + \alpha_5 d(x,y)$$

donde $\alpha = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$

EJEMPLOS

En principio observemos que toda función que cumple la condición P1. es una función continua.

1.- Ejemplo de una función que satisface P2. pero no P1.

$$T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \dfrac{x}{5} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

así, T no es continua y por lo tanto no es P1. pero si es P2.

2.- Ejemplo de una función que satisface P1. pero no P2.

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$T(x) = \frac{x}{3}$$

T es continua y no cumple P2. tomar $y = 0$ y $x = \dfrac{1}{3}$.

3.- Ejemplo de una función que satisface P4. pero no P1. ni P2.

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{7x}{20} & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \dfrac{3x}{10} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

4.- Ejemplo de una función que satisface P2. pero no P3.

$$T : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \in (-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

5.- Ejemplo de una función que satisface P3. pero no P2.

$$T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \in [0, 1) \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

En el siguiente Capítulo estudiaremos algunas condiciones que nos permitan determinar cuando dos funciones poseen un punto fijo en común, analizaremos las versiones de los teoremas vistos, para dos funciones.

Capítulo 2

Teoría del Punto Fijo para dos funciones en espacios métricos.

2.1. Introducción

Dado un espacio métrico (M, d) y S,T dos funciones definidas de M en M queremos hallar condiciones sobre S,T y/o M de tal forma que S y T posean un punto fijo en común.

En 1968 Kannan probo que si (M, d) un espacio métrico completo, y $T, S : M \to M$ dos funciones para las cuales existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ tal que

$$d(T(x), S(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, S(y))], \quad \forall x, y \in M$$

entonces S y T posen un punto fijo en común.
Varias generalizaciones de este teorema se han obtenido en varias direcciones, las cuales se obtienen con la sustitución de la condición 1.7 para dos funciones por otras contracciones. En este capitulo estudiaremos algunas de estas condiciones que las hemos llamado condiciones contractivas y entre las cuales están las dadas por Kannan, Chatterjea, Rus, Yen,etc.

2.2. Propiedades Básicas.

Sea M un conjunto no vacío y $T, S : M \to M$ dos funciones. Un elemento $z \in M$ es un punto fijo en común para T y S si y solo si $z \in F_T \cap F_S$.

Así tenemos las siguientes Propiedades en general

Lema 2.1 *Sea* M *un conjunto no vacío y* $T_i, S_i : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones para* $i = 1, 2$. *si*

1. $F_{T_1} = F_{S_1} = \{z\}$
2. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$

entonces $F_{T_2} \cap F_{S_2} \neq \emptyset$

Demostración:
Como $F_{T_1} = z$ y $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ tenemos que $z \in F_{T_2}$ y como $F_{S_1} = z$ y $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$ tenemos $z \in F_{S_2}$, luego $F_{T_2} \cap F_{S_2} \neq \emptyset$.

■

Lema 2.2 *Sean* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones. Si existen* $m, n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$F_{T^n} = F_{S^m} = \{z\}$$

entonces

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:
Tomamos $T_1 = T^n$, $S_1 = S^m$,$T_2 = T$, $S_2 = S$ y aplicamos el lema 2.1

■

Lema 2.3 *Sean* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones. Si*

$$F_{T \circ S} = F_{S \circ T} = \{z\}$$

entonces

$$F_T \cap F_S = \{z\}$$

Demostración:
$(S \circ T)(S(z)) = S(z)$ y $(T \circ S)(T(z)) = T(z)$ luego por hipótesis $S(z) = z = T(z)$ así, $z \in F_T \cap F_S$
La unicidad del punto fijo común de T y S es obvio.

■

2.3. Teoremas del Punto Fijo para funciones que satisfacen ciertas condiciones contractivas

En esta sección analizaremos ciertas condiciones contractivas que satisfacen algunas funciones, generalizando las vista en el capítulo 1 y obteniendo sus análogas para dos funciones, que nos van a permitir garantizar la existencia de un punto fijo común para las funciones.

En el siguiente resultado presentamos una contracción de Banach para dos funciones.

Teorema 2.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), S(y)) \leq \alpha d(x, y) \tag{2.1}$$

entonces $F_T \cap F_S = \{z\}$

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), n = 0, 1, 2, ...,$ Ahora aplicando 2.1 se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) = \alpha d(x_0, x_1)$$

por lo tanto, $d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$.
Por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

de donde se obtiene que,

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

luego, por inducción obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

así, por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es punto fijo de T y S

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, T(z)) = d(z, x_{2n+1}) + d(S(x_{2n}), T(z))$$

por lo tanto por 2.1

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, z)$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$d(z, T(z)) \leq 0$$

luego,

$$T(z) = z.$$

Análogamente se prueba que $S(z) = z$.

Veamos que z es el único punto fijo común de T y S
supongamos que $T(z^*) = z^* = S(z^*)$ y $T(z) = z = S(z)$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), S(z^*)) \leq \alpha d(z, z^*)$$

como $0 < \alpha < 1$ entonces $z = z^*$.

$\blacksquare$

Corolario 2.1

Sea (M, d) *un espacio métrico completo,* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones y* $0 < \alpha < 1$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se satisface 2.1.*
Si $T = S$ *entonces se tiene el teorema 1.1 (P.C.B)*

$\blacksquare$

En el siguiente teorema se presenta el resultado de Kannan-1968 [4], para dos funciones.

Teorema 2.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones y* $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se tiene que*

$$d(T(x), S(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, S(y))] \tag{2.2}$$

entonces $F_T \cap F_S = \{z\}$

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Definimos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ por, $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), n = 0, 1, 2, ...,$ Ahora aplicando 2.2 se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq \alpha[d(x_0, S(x_0)) + d(x_1, T(x_1))]$$

por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

y,

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

Análogamente

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) \leq \alpha[d(x_1, T(x_1)) + d(x_2, S(x_2))]$$

por lo tanto,

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)]$$

así,

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2)$$

luego, por inducción obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

como $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ entonces $0 < \dfrac{\alpha}{1-\alpha} < \dfrac{1}{2}$ así por el lema 1.2 existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$.

Veamos que z es punto fijo de T y S

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, S(z))$$

luego,

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + d(T(x_{2n+1}), S(z))$$

por lo tanto por 2.2

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + \alpha[d(z, S(z)) + d(x_{2n+1}, T(x_{2n+1}))]$$

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + \alpha d(z, S(z)) + \alpha d(x_{2n+1}, T(x_{2n+1}))$$

$$(1-\alpha)d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + \alpha d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$(1-\alpha)d(z, S(z)) \leq 0$$

como $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ entonces

$$d(z, S(z)) \leq 0$$

de esta manera,

$$S(z) = z.$$

Análogamente se prueba que $T(z) = z$.

Veamos que z es el único punto fijo común de T y S
supongamos que $T(z^*) = z^* = S(z^*)$ y $T(z) = z = S(z)$ así,

$$d(z, z^*) = d(T(z), S(z^*)) \leq \alpha[d(z, T(z)) + d(z^*, S(z^*))] = \alpha[d(z, z) + d(z^*, z^*)] = 0$$

luego, $z = z^*$.

■

Corolario 2.2
Sea (M, d) *un espacio métrico completo,* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones y* $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ *tal que para cada* $x, y \in \mathrm{M}$ *se satisface 2.2.*
Si $T = S$ *y* $T(x) = y$ *entonces se tiene el teorema 1.1 (P.C.B)*

$\blacksquare$

Dando una variación en la condición contractiva de Kannan para dos funciones,Chatterjea -1972 presenta el siguiente resultado. [4]

Teorema 2.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *tal que*

$$d(T(x), S(y)) \leq \alpha[d(x, S(y)) + d(y, T(x))], \forall x, y \in \mathrm{M} \qquad (2.3)$$

entonces

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:
Sea $x_0 \in M$ arbitrario. Definimos x_n una sucesión en M de la siguiente manera $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$

Estimemos,
$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq \alpha[d(x_0, T(x_1)) + d(x_1, S(x_0))]$ por 2.3, por lo tanto, $d(x_1, x_2) \leq \alpha[d(x_0, x_2) + d(x_1, x_1)]$, así

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_2)$$

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

por desigualdad triangular, así

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Por otro lado,

$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) \leq \alpha[d(x_1, S(x_2)) + d(x_2, T(x_1))]$ por 2.3, por lo tanto, $d(x_2, x_3) \leq \alpha[d(x_1, x_3) + d(x_2, x_2)]$, así

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_3)$$

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2).$$

De esta manera por inducción tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el lema 1.2 tenemos que x_n es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces $x_n \to z$ para algún $z \in M$.

Veamos que z es punto fijo de T y S.

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, T(z))$$

por desigualdad triangular, por lo tanto

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + d(S(x_{2n}), T(z))$$

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_{2n+1}) + \alpha[d(z, S(x_{2n})) + d(x_{2n}, T(z))]$$

por 2.3

$$d(z, T(z)) \leq (\alpha + 1)d(z, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, T(z))$$

así, por desigualdad triangular tenemos que

$$d(z, T(z)) \leq (\alpha + 1)d(z, x_{2n+1}) + \alpha[d(x_{2n}, z) + d(z, T(z))]$$

luego,

$$(1-\alpha)d(z, T(z)) \leq (1+\alpha)d(z, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, z)$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ se tiene que $d(x_{2n}, z) \to 0$ y $d(z, x_{2n+1}) \to 0$ porque $x_n \to z$ así

$$(1-\alpha)d(z, T(z)) \leq 0$$

y como $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ se concluye que

$$T(z) = z.$$

Análogamente se prueba que $S(z) = z$.

Veamos que el punto fijo z de T y S es único

Sea $z^* \in M$ tal que $z = T(z) = S(z)$ y $z^* = T(z^*) = S(z^*)$ Estimando,

$$d(z, z^*) = d(T(z), S(z^*)) \leq \alpha[d(z, S(z^*)) + d(z^*, T(z))]$$

$$d(z, z^*) \leq \alpha[d(z, z^*) + d(z^*, z)] = 2\alpha d(z, z^*)$$

$$(1 - 2\alpha)d(z, z^*) \leq 0$$

como $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ entonces $d(z, z^*) \leq 0$ luego

$$z = z^*$$

de esta manera concluimos que T y S tienen un único punto fijo en común.

■

El siguiente resultado se debe a Rus-1973, [15]

Teorema 2.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a + 2b + 2c < 1$ *y*

$$d(T(x), S(y)) \leq ad(x, y) + b[d(y, T(x)) + d(y, S(y))] \tag{2.4}$$

$$+c[d(x, S(y)) + d(y, T(x))]$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_T = F_S = \{z\}.$$

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ arbitrario. Definimos x_n una sucesión en M de la siguiente manera $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$

Estimemos,

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq ad(x_0, x_1) + b[d(x_0, S(x_0)) + d(x_1, T(x_1))]$$
$$+c[d(x_0, T(x_1)) + d(x_1, S(x_0))]$$

por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_0, x_1) + b[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] + c[d(x_0, x_2) + d(x_1, x_1)]$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq (a + b)d(x_0, x_1) + bd(x_1, x_2) + cd(x_0, x_2)$$

por desigualdad triangular tenemos

$$d(x_1,x_2) \leq (a+b)d(x_0,x_1) + bd(x_1,x_2) + cd(x_0,x_1) + cd(x_1,x_2)$$

luego,

$$d(x_1,x_2) \leq (a+b+c)d(x_0,x_1) + (b+c)d(x_1,x_2)$$

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{a+b+c}{1-b-c}d(x_0,x_1).$$

Por otro lado,

$$d(x_2,x_3) = d(T(x_1),S(x_2)) \leq ad(x_1,x_2) + b[d(x_1,T(x_1)) + d(x_2,S(x_2))] \\ +c[d(x_1,S(x_2)) + d(x_2,T(x_1))]$$

por lo tanto,

$$d(x_2,x_3) \leq ad(x_1,x_2) + b[d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)] + c[d(x_1,x_3) + d(x_2,x_2)]$$

así,

$$d(x_2,x_3) \leq (a+b)d(x_1,x_2) + bd(x_2,x_3) + cd(x_1,x_3) + cd(x_2,x_2)$$

por desigualdad triangular tenemos

$$d(x_2,x_3) \leq (a+b+c)d(x_1,x_2) + (b+c)d(x_2,x_3)$$

luego,

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{a+b+c}{1-b-c}d(x_1,x_2),$$

y de esta manera por inducción tenemos que

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{a+b+c}{1-c-b}d(x_{n-1},x_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

como $0 < a+2b+2c < 1$ entonces $a+b+c < 1-b-c$ y así $0 < \dfrac{a+b+c}{1-b-c} < 1$
Por el lema 1.2 tenemos que x_n es una sucesión de Cauchy y como (M,d) es completo entonces $x_n \to z$ para algún $z \in M$.
Veamos que z es punto fijo de T y S.

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},T(z))$$

por desigualdad triangular, por lo tanto,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(S(x_{2n}),T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + ad(x_{2n},z) + b[d(z,T(z)) + d(x_{2n},S(x_{2n}))] \\ +c[d(z,S(x_{2n})) + d(x_{2n},T(z))]$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$d(z, T(z)) \leq bd(z, T(z)) + cd(z, T(z))$$

por lo tanto,

$$(1 - b - c)d(z, T(z)) \leq 0$$

como $1 - b - c < 1$ entonces

$$d(z, T(z)) \leq 0$$

luego,

$$T(z) = z$$

Análogamente se prueba que $S(z) = z$.

Veamos que el punto fijo z de T y S es único
Sea $z^* \in M$ tal que $z = T(z) = S(z)$ y $z^* = T(z^*) = S(z^*)$
Estimando,

$$\begin{aligned} d(z, z^*) = d(T(z), S(z^*)) &\leq ad(z, z^*) + b[d(z, T(z)) + d(z^*, S(z^*))] \\ &\quad + c[d(z, S(z^*)) + d(z^*, T(z))] \end{aligned}$$

de donde se tiene que,

$$d(z, z^*) \leq ad(z, z^*) + 2cd(z, z^*)$$

y,

$$(1 - (a + 2b))d(z, z^*) \leq 0$$

así,

$$d(z, z^*) \leq 0$$

luego,

$$z = z^*$$

y esto termina la prueba.

■

Corolario 2.3

Si consideramos en 2.4, $b = c = 0$ *entonces obtenemos el P.C.B* ■

Corolario 2.4

Tomando en 2.4, $a = c = 0$ *entonces obtenemos el teorema de Kannan.*

■

Corolario 2.5

Si tomamos en 2.4, $a = b = 0$ *entonces obtenemos el teorema de Chatterjea.*

■

Corolario 2.6

Si tomamos en la condición 2.4, $a = b = 0$ *y* $S = T$ *entonces obtenemos la condición (4) del teorema 1.6.*

■

El siguiente teorema generaliza los resultados anteriores y fue dado por Yen-1976, [4]

Teorema 2.5 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a + 2b < 1$ *y*

$$d(T(x), S(y)) \leq a \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,S(y))\} \tag{2.5}$$

$$+b[d(x,S(y)) + d(y,T(x))]$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:

Sea $\mathcal{A} = \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y))\}$.

Si $\mathcal{A} = d(x,y)$ entonces de la condición 2.5 se obtiene la condición 2.4 del teorema 4.1 con $b = 0$, luego se concluye que T tiene un único punto fijo.

Si $\mathcal{A} = d(x,T(x))$ entonces tomamos $x_0 \in M$ un punto arbitrario y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset M$ definida por, $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$

Ahora aplicando 2.5 para $x = x_1$ e $y = x_2$ se tiene que,

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq ad(x_1, T(x_1)) + b[d(x_1, S(x_0)) + d(x_0, T(x_1))]$$

por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_1, x_2) + b[d(x_1, x_1) + d(x_0, x_2)]$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_1, x_2) + bd(x_0, x_1) + bd(x_1, x_2)$$

luego,

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{b}{1-a-b} d(x_0, x_1).$$

Por otra parte,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) \leq ad(x_1, T(x_1)) + b[d(x_1, S(x_2)) + d(x_2, T(x_1))]$$

por lo tanto,

$$d(x_2, x_3) \leq ad(x_1, x_2) + b[d(x_1, x_3) + d(x_2, x_2)]$$

así,

$$d(x_2, x_3) \leq ad(x_1, x_2) + bd(x_1, x_2) + bd(x_2, x_3)$$

luego,

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{b}{1-a-b} d(x_1, x_2).$$

Ahora por un razonamiento inductivo tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{b}{1-a-b} d(x_n, x_{n-1}). \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $a + 2b < 1$ entonces $\frac{b}{1-a-b}$, así,por el lema 1.2 tenemos que x_n es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces $x_n \to z$ para algún $z \in M$.

Demostremos que z es un punto fijo de S y T, para ello hacemos la siguiente estimación,

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, S(z)) = d(z, x_{2n+2}) + d(T(x_{2n+1}), S(z))$$

por lo tanto,

$$d(z, S(z)) \leq d(z, x_{2n+2}) + ad(x_{2n+1}, T(x_{2n+1})) + b[d(x_{2n+2}, S(z)) + d(z, T(x_{2n+1}))]$$

luego,

$$d(z,S(z)) \leq d(z,x_{2n+2})+ad(x_{2n+1},x_{2n+2})+bd(x_{2n+2},z)+bd(z,S(z))+bd(z,x_{2n+2})$$

haciendo $n \to \infty$ tenemos que,

$$d(z,S(z)) \leq +bd(z,S(z))$$

de donde se obtiene que,

$$(1-b)d(z,S(z)) \leq 0$$

como $a+2b<1$ entonces se debe tener que $d(z,S(z)) \leq 0$ luego, $S(z)=z$.

Análogamente se prueba que $T(z)=z$. Finalmente demostremos la unicidad, para ello supongamos que existe $z^* \in M$ tal que $T(z^*)=S(z^*)=z^*$.

Ahora, $d(z,z^*)=d(T(z),S(z^*)) \leq ad(z,T(z))+b[d(z,S(z^*))+d(z^*,T(z))]$ por lo tanto, $d(z,z^*) \leq ad(z,z)+bd(z,z^*)+bd(z^*,z)$ así, $(1-2b)d(z,z^*) \leq 0$, luego, $z=z^*$.

Por ultimo, si $\mathcal{A}=d(y,T(y))$, análogamente se demuestra que S y T tienen un único punto fijo en común. ■

Corolario 2.7
Si tomamos en la condición 2.5, $b=0$ y $\max\{d(x,y),d(x,T(x)),d(y,S(y))\} = d(x,y)$ entonces obtenemos el P.C.B

■

Corolario 2.8
Si tomamos en la condición 2.5, $a=0$ entonces obtenemos las condiciones del teorema 2.3.

■

El siguiente resultado se debe a Ciric-1974, [4]

Teorema 2.6 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a \in [0, \frac{1}{2})$ *tal que*

$$d(T(x), S(y)) \leq a \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,S(y)), \frac{1}{2}[d(x,S(y)) + d(y,T(x))]\} \tag{2.6}$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 2.5

■

Corolario 2.9
Si consideramos en la condición 2.6,
$\max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,S(y)), \frac{1}{2}[d(x,S(y)) + d(y,T(x))]\} = d(x,y)$ *obtenemos el P.C.B*

■

Corolario 2.10
Si tomamos en la condición 2.6,
$\max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,S(y)), \frac{1}{2}[d(x,S(y))+d(y,T(x))]\} = \frac{1}{2}[d(x,S(y))+d(y,T(x))]$ *obtenemos el teorema 2.3 de Chatterjea.*

■

El siguiente teorema fue dado por Iseki-1974, [4]

Teorema 2.7 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $a < 1$, $b < 1$ *y*

$$d(T(S(x)), S(y)) \leq a d(x, S(y)) \tag{2.7}$$

$$d(S(T(x)), T(y)) \leq b d(x, T(y)), \quad \forall x, y \in \mathrm{M} \tag{2.8}$$

entonces

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ arbitrario, definimos x_n una sucesión en M de la siguiente manera $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$

Estimemos,

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) = d(S(x_0), T(S(x_0))) \leq ad(x_0, S(x_0)) = ad(x_0, x_1)$$

por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_0, x_1).$$

Por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) = d(T(x_1), S(T(x_1))) \leq bd(x_1, T(x_1))$$

así,

$$d(x_2, x_3) \leq bd(x_1, x_2)$$

de esta manera,

$$d(x_2, x_3) \leq abd(x_0, x_1)$$

Luego, por inducción tenemos que

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq ad(x_{2n+1}, x_{2n}) \tag{2.9}$$

y

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq bd(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \tag{2.10}$$

Por 2.9 y 2.10 e inducción tenemos para cada $n = 0, 1, 2...$

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq a(ab)^n d(x_0, x_1)$$

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq (ab)^{n+1} d(x_0, x_1).$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq (a + ab) \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n d(x_0, x_1)$$

Luego, x_n es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces $x_n \to z$ para algún $z \in M$.

Veamos que z es punto fijo de T y S.

Estimemos,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},T(z)) = d(z,x_{2n+1}) + d(S(x_{2n}),T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(S(T(x_{2n-1}),T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + bd(x_{2n-1},T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + b[d(x_{2n-1},z) + d(z,T(z))] \leq d(z,x_{2n+1}) + bd(x_{2n-1},z) + bd(z,T(z))$$

por lo tanto,

$$(1-b)d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(x_{2n-1},z)$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ se tiene que $d(z,x_{2n+1}) \to 0$ y $d(x_{2n-1},z) \to 0$ porque $x_n \to z$.

Así,

$$(1-b)d(z,T(z)) \leq 0$$

y como $b < 1$ tenemos que $d(z,T(z)) \leq 0$, luego, $T(z) = z$.
Análogamente se prueba que $S(z) = z$.

Veamos que el punto fijo z de T y S es único,
Sea $z^* \in M$ tal que $z = T(z) = S(z)$ y $z^* = T(z^*) = S(z^*)$
Estimando,

$$d(z,z^*) = d(TS(z),S(z^*)) \leq ad(z,S(z^*))$$

por 2.7, por lo tanto,

$$(1-a)d(z,z^*) \leq 0$$

como $a < 1$ entonces

$$d(z,z^*) \leq 0$$

luego,

$$z = z^*$$

■

A continuación presentamos una condición contractiva racional para dos funciones que fue dada por Khan-1977, [4]

Teorema 2.8 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a \in [0, 1)$ *tal que*

$$d(T(x), S(y)) \leq a \frac{d(x, T(x))d(x, S(y)) + d(y, S(y))d(y, T(x))}{d(x, S(y)) + d(y, T(x))} \tag{2.11}$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_T = F_S = \{z\}$$

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ arbitrario. Definimos x_n una sucesión en M de la siguiente manera $x_{2n+1} = S(x_{2n})$ y $x_{2n+2} = T(x_{2n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$ Estimemos

$$d(x_1, x_2) = d(S(x_0), T(x_1)) \leq a \frac{d(x_1, T(x_1))d(x_1, S(x_0)) + d(x_0, T(x_1))d(x_0, S(x_0))}{d(x_1, S(x_0)) + d(x_0, T(x_1))}$$

por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq a \frac{d(x_1, x_2)d(x_1, x_1) + d(x_0, x_2)d(x_0, x_1)}{d(x_1, x_1) + d(x_0, x_2)}$$

así,

$$d(x_1, x_2) \leq a d(x_0, x_1)$$

Por otro lado,

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), S(x_2)) \leq a \frac{d(x_1, T(x_1))d(x_1, S(x_2)) + d(x_2, T(x_1))d(x_2, S(x_2))}{d(x_1, S(x_2)) + d(x_2, T(x_1))}$$

por lo tanto,

$$d(x_2, x_3) \leq a \frac{d(x_1, x_2)d(x_1, x_3) + d(x_2, x_2)d(x_2, x_3)}{d(x_1, x_3) + d(x_2, x_2)}$$

así,

$$d(x_2, x_3) \leq a d(x_1, x_2)$$

Por el lema 1.2 tenemos que x_n es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces $x_n \to z$ para algún $z \in M$. Veamos que z es punto fijo de T y S.

Estimemos,

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},T(z))$$

por desigualdad triangular, se obtiene

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + d(S(x_{2n}),T(z))$$

$$d(z,T(z)) \leq d(z,x_{2n+1}) + a\frac{d(z,T(z))d(z,S(x_{2n})) + d(x_{2n},T(z))d(x_{2n},S(x_{2n}))}{d(z,S(x_{2n})) + d(x_{2n},T(z))}$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ se tiene que $d(x_{2n+1},z) \to 0$ y $d(x_{2n},x_{2n+1}) \to 0$ porque $x_n \to z$
luego,

$$d(z,T(z)) \leq 0$$

así,

$$T(z) = z.$$

Análogamente se prueba que $S(z) = z$.

Veamos que el punto fijo z de T y S es único
Sea $z^* \in M$ tal que $z = T(z) = S(z)$ y $z^* = T(z^*) = S(z^*)$
Estimando,

$$d(z,z^*) = d(T(z),S(z^*)) \leq a\frac{d(z,T(z))d(z,S(z^*)) + d(z^*,S(z^*))d(z^*,T(z))}{d(z,S(z^*)) + d(z^*,T(z))}$$

Así,

$$d(z,z^*) \leq a\frac{d(z,z)d(z,z^*) + d(z^*,z^*)d(z^*,z)}{d(z,z^*) + d(z^*,z)}$$

luego,

$$d(z,z^*) \leq 0$$

por lo tanto,

$$z = z^*.$$

A continuación se presentan algunas generalizaciones que se obtienen a partir de los teoremas y lemas anteriores.

Teorema 2.9 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $f, g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *con* $a + 2b + 2c < 1$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d(f^n(x), g^m(y)) \leq ad(x,y)+b[d(y, f^n(x))+d(y, g^m(y))]+c[d(x, g^m(y))+d(y, f^n(x))],$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_f = F_g = \{z\}$$

Demostración:
Sustituyendo T y S por f^n y g^m respectivamente en el teorema 4.1 se tienen que $F_{f^n} = F_{g^m} = \{z\}$., luego por el lema 2.2 tenemos que $F_f = F_g = \{z\}$.

■

Teorema 2.10 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $f, g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *con* $a + 2b + 2c < 1$ *tal que*

$$\begin{aligned} d(g(f(x)), f(g(y))) \leq\ & ad(x,y) + b[d(x, g(f(x))) + d(y, f(g(y)))] \\ & + c[d(x, f(g(y))) + d(y, g(f(x)))] \end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_f = F_g = \{z\}.$$

Demostración:
Sustituyendo T y S por $g \circ f$ y $f \circ g$ respectivamente en el teorema 4.1 se tienen que $F_{g \circ f} = F_{f \circ g} = \{z\}$ luego, por el lema 2.3 tenemos que $F_f = F_g = \{z\}$.

■

Teorema 2.11 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo, y* $f, g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dos funciones para las cuales existe* $a \in [0, \frac{1}{2})$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d(f^n(x), g^m(y)) \leq a \max\{d(x,y), d(x, f^n(x)), d(y, g^m(y))\}+\frac{1}{2}[d(x, g^m(y))+d(y, f^n(x))],$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$F_T = F_S = \{z\}.$$

Demostración:

Sustituyendo T y S por f^n y g^m respectivamente en el teorema 2.6 se tienen que $F_{f^n} = F_{g^m} = \{z\}$ luego, por el lema 2.2 tenemos que $F_f = F_g = \{z\}$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Funciones conmutantes

3.1. Introducción

En este capítulo estamos interesados en estudiar otro tipo de condición que pueden tener las funciones y que nos van a permitir garantizar la existencia y unicidad de puntos fijos comunes para tales funciones.

El objetivo fundamental de este capítulo es de analizar la expansión natural del principio de contracción de Banach teorema 1.1 la cual fue dada por G. Jungck [5], así como algunas generalizaciones de este resultado.

Comenzaremos nuestro análisis introduciendo las definiciones de funciones débilmente conmutantes y conmutantes, relaciones entre estas y finalmente la teoría del punto fijo para dos funciones conmutantes.

Definición 3.1 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *son débilmente conmutantes si*

$$d(T(S(x)), S(T(x))) \leq d(T(x), S(x)), \;\; \forall x \in \mathrm{M}.$$

Ejemplo 3.1

Sea $\mathrm{M} = [0, 1]$ *con la métrica euclidiana y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$T(x) = \frac{2x}{x+1}; \quad S(x) = \frac{2}{2x+1}, \quad \forall x \in \mathrm{M}$$

así,

$$T(S(x)) = T(\frac{x}{2x+1}) = \frac{2x}{3x+1}$$

y

$$S(T(x)) = S(\frac{2x}{x+1}) = \frac{2x}{5x+1}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(T(S(x)), S(T(x))) = \frac{2x}{3x+1} - \frac{2x}{5x+1} &= \frac{4x^2}{(3x+1)(5x+1)} \\ &\leq \frac{3x^2 + x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

de esta manera,

$$d(T(S(x)), S(T(x))) \leq d(T(x), S(x)), \;\; \forall x \in \mathrm{M}$$

así, T *y* S *son débilmente conmutantes.*

Definición 3.2 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *conmutan o son conmutantes si*

$$T(S(x)) = S(T(x)), \quad \forall x \in \mathrm{M}.$$

Claramente si dos funciones son conmutantes implican que son débilmente conmutantes, el recíproco no es cierto.

Ejemplo 3.2

Sea $\mathrm{M} = [0, 1]$ *con la métrica euclidiana y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$T(x) = \frac{2x}{x+1}; \quad S(x) = \frac{2}{2x+1}, \quad \forall x \in \mathrm{M}$$

en el ejemplo anterior se vio que T *y* S *son débilmente conmutantes, ahora* T *y* S *no conmutan porque* $T(S(x)) \neq S(T(x)), \;\; \forall x \in \mathrm{M}.$

3.2. Teoría del punto fijo para funciones conmutantes

La siguiente proposición nos muestra como una condición de conmutatividad nos va a permitir obtener la existencia de un punto fijo común para dos funciones.

Proposición 3.1 *Sean* M *un conjunto no-vacio y* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función, entonces* T *tiene un punto fijo si y solo si existe una función constante* $S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *que conmute con* T.

Demostración:
Si existe $z \in M$, $S : M \to M$ tal que $S(x) = z$ y $T(S(x)) = S(T(x))$, $\forall x \in M$ entonces podemos escribir $z = S(T(z)) = T(S(z)) = T(z)$, es decir, z es punto fijo de T.

La demostración de la condición necesaria esta incluida en el resultado principal de este capítulo teorema 3.1.

■

A continuación presentamos el resultado de G.Jungck [5], que generaliza de manera natural el principio de contracción de Banach.

Teorema 3.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función continua entonces* T *tiene un punto fijo si y solo si*

a.- Existe $\alpha \in (0, 1)$ *y* $S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *tal que*

$$d(S(x), S(y)) \leq \alpha d(T(x), T(y)), \ \forall x, y \in \mathrm{M} \tag{3.1}$$

b.- $S(\mathrm{M}) \subseteq T(\mathrm{M})$

además si se cumple la condición 3.1 se tiene que T *y* S *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:

Para la condición necesaria, supongamos que $T(z) = z$ para algún $z \in M$, definimos $S : M \to M$ dada por $S(x) = z \quad \forall x \in M$.

Entonces $S(T(x)) = z$ y $T(S(x)) = T(z) = z$, $\forall x \in M$ por lo tanto, S conmuta con T. Como $S(x) = z = T(z)$, $\forall x \in M$ entonces $S(M) \subseteq T(M)$.

Finalmente para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ tenemos que $\forall x \in M$

$$d(S(x), S(y)) = d(z, z) = 0 \leq \alpha d(T(x), T(y)).$$

Por otra parte, supongamos que existe una función $S : M \to M$ que conmuta con T y satisface las condiciones a, b y veamos que T y S tienen un único punto fijo en común.

Sea $x_0 \in M$ y sea x_1 tal que $T(x_1) = S(x_0)$, en general escogemos x_n tal que

$$T(x_n) = S(x_{n-1}) \tag{1}$$

ya que $S(M) \subseteq T(M)$, luego por 3.1 y (1) se tiene que

$$d(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq \alpha d(T(x_n), d(x_{n-1})), \; \forall x \in M$$

así, por el lema 1.2 existe $t \in M$ tal que $T(x_n) \to t$ pero (1) implica que $S(x_n) \to t$.

Como T es continua, 3.1 implica que S es continua, por lo tanto se tiene que $S(T(x_n)) \to S(t)$ y $T(S(x_n)) \to T(t)$, como T y S conmutan entonces tenemos que $S(T(x_n)) = T(S(x_n))$ $\forall x \in M$, de esta manera $T(t) = S(t)$ y por lo tanto, $T(T(t)) = T(S(t)) = S(S(t))$ por la conmutatividad, así aplicando 3.1 para $x = t$ y $y = S(t)$ tenemos

$$d(S(t), S(S(t))) \leq \alpha d(T(t), T(S(t))) = \alpha d(S(t), S(S(t)))$$

de esta manera, $(1 - \alpha) d(S(t), S(S(t))) \leq 0$, como $\alpha \in (0, 1)$ entonces $S(S(t)) = S(t)$.

Ahora tenemos que $S(t) = S(S(t)) = T(S(t))$, luego, $S(t)$ es un punto fijo de T y S.

Veamos que T y S tienen un único punto fijo en común. Supongamos que $x = T(x) = S(x)$ y $y = T(y) = S(y)$ entonces 3.1 implica que

$$d(x, y) = d(S(x), S(y)) \leq \alpha d(T(x), T(y))$$

por lo tanto, $(1-\alpha)d(x,y) \leq 0$ y como $\alpha \in (0,1)$ entonces $x = y$.

$\blacksquare$

Corolario 3.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones conmutantes tal que* T *es continua,* $S(\mathrm{M}) \subseteq T(\mathrm{M})$ *y existe* $\alpha \in (0,1)$ *y* k *un entero positivo tal que*

$$d(S^k(x), S^k(y)) \leq \alpha d(T(x), T(y)),\ \forall x \in \mathrm{M}$$

entonces S *y* T *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:

Claramente S^k conmuta con T y $S^k(M) \subseteq S(M) \subseteq T(M)$ de esta manera por el teorema 3.1, se tiene que S^k y T tienen un único punto fijo, es decir, existe un único $z \in M$ tal que $z = T(z) = S^k(z)$ pero entonces como T y S conmutan podemos escribir, $S(z) = T(S(z)) = S^k(S(z))$ por lo tanto, $S(z)$ es un punto fijo de T y S^k, luego, por la unicidad del punto fijo de T y S^k se tiene que $z = S(z) = T(z)$.

Note que no requiere que S sea continua

$\blacksquare$

Corolario 3.2 *Si tomamos* $k = 1$ *y* $T(x) = x, \forall x \in \mathrm{M}$ *en el corolario 3.1 obtenemos el Principio de contracción de Banach (P.C.B.)*

$\blacksquare$

Corolario 3.3 *Sea* n *un entero positivo y sea* $k > 1$. *Si* S *es una función continua en un espacio métrico completo* (M, d) *tal que* $d(S^n(x), S^n(y)) \geq kd(x,y)$, $\forall x, y \in \mathrm{M}$, *entonces* S *tiene un punto fijo.*

Demostración:

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{k}$ entonces $\alpha \in (0,1)$ porque $k > 1$ y considerando $T = S^{n+1}$ tenemos que $T(S(x)) = S^{n+1}(S(x)) = S^{n+2}(x) = S(S^{n+1}(x)),\ \forall x \in M$
por lo tanto, T y S conmutan.

Ahora por hipótesis, $d(S^n(x), S^n(y)) \geq kd(x, y)$, $\forall x \in M$, luego, $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(S^n(x), S^n(y))$ porque $T(x), T(y) \in M$. Como S es continua entonces S^n es continua.

Por otro lado $T(M) \subset S^{n+1}(M) \subset S(M)$ luego, por el teorema 3.1, se tiene que S^n y T tienen un único punto fijo, es decir, existe $z \in M$ tal que $S^n(z) = T(z)$ por lo tanto, $S^n(z) = S^{n+1}(z) = S(S^n(z))$ luego, $S^n(z)$ es un punto fijo de S.

■

En la siguiente sección presentamos una generalización del teorema de G. Jungck, [5],[6], previo a esto estudiaremos algunos resultados que nos van a permitir obtener dicha generalización.

3.3. Generalización del teorema de Jungck

Notación 3.3
Dado un espacio métrico (M, d) *y* $\{y_n\}$ *una sucesión en el espacio, denotaremos por* $O(y_k; n)$ *al conjunto de puntos* $\{y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n}\}$ *de la sucesión.*

Comencemos con algunos resultados sobre $\delta(O(y_k; n))$, el diámetro del conjunto $O(y_k; n)$ en los siguientes lemas.

Lema 3.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $\{y_n\} \subset \mathrm{M}$ *una sucesión tal que*

$$d(y_n, y_m) \leq \alpha \max\{d(y_{n-1}, y_{m-1}), d(y_{n-1}, y_n), d(y_{m-1}, y_m), d(y_{n-1}, y_m), \tag{3.2}$$

$$d(y_{m-1}, y_n)\} \quad \forall n, m \geq 1 \text{ y } \alpha \in (0, 1)$$

Supongamos que $\delta(O(y_k; n)) > 0$ *para* $k \geq 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $\delta(O(y_k; n)) = d(y_k, y_i)$ *donde* $k < i \leq k + n$ *y también*

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \alpha\delta(O(y_{k-1}; n + 1)) \tag{3.3}$$

con $k \geq 1$.

Demostración:

Para $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i < j$ tenemos por 3.2 que

$$d(y_i, y_j) \leq \alpha \max\{d(y_{i-1}, y_{j-1}), d(y_{i-1}, y_i), d(y_{j-1}, y_j), d(y_{i-1}, y_j), d(y_{j-1}, y_i)\}$$

luego,

$$d(y_i, y_j) \leq \alpha\delta(O(y_{i-1}; j - i + 1)) \tag{3.4}$$

Ahora, $\delta(O(y_k; n)) = d(y_i, y_j)$ para algunos i, j tal que $k \leq i < j \leq k + n$ ya que es el supremo de un conjunto finito.

Si $i > k$ entonces por 3.4 se tiene que,
$\delta(O(y_k; n)) = d(y_i, y_j) \leq \alpha\delta(O(y_{i-1}; j - i + 1)) \leq \alpha d(y_i, y_j) = \alpha\delta(O(y_k; n))$
con $i - 1 \geq k$ y $j \leq k + n$, por lo tanto se tiene que, $\delta(O(y_k; n)) \leq \alpha\delta(O(y_k; n))$ así,

$$(1 - \alpha)\delta(O(y_k; n)) \leq 0$$

como $\alpha \in (0, 1)$ entonces $\delta(O(y_k; n)) = 0$ contradicción, luego,

$$\delta(O(y_k; n)) = d(y_k, y_j).$$

Por otro lado de 3.4 se tiene, $\delta(O(y_k; n)) = d(y_k, y_j) \leq \alpha\delta(O(y_{k-1}; j - k + 1))$ así,

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \alpha\delta(O(y_{k-1}; j - k + 1)) \leq \alpha\delta(O(y_{k-1}; n + 1))$$

luego,

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \alpha\delta(O(y_{k-1}; n + 1))$$

■

Lema 3.2 *Para $k \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ supongamos que $\delta(O(y_k; n)) > 0$. Entonces $\delta(O(y_k; n)) \leq \dfrac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(y_0, y_1)$.*

Demostración:

Por el lema 3.1 para algún $j \leq l + m$ se tiene que,
$\delta(O(y_l; m)) = d(y_l, y_j) \leq d(y_l, y_{l+1}) + d(y_{l+1}, y_j) \leq d(y_l, y_{l+1}) + \delta(O(y_{l+1}; m - 1))$
de esta manera por 3.3 se tiene $\delta(O(y_l; m)) \leq d(y_l, y_{l+1}) + \alpha\delta(O(y_l; m))$ así,

$$\delta(O(y_l; m)) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(y_l, y_{l+1}) \tag{3.5}$$

por otro lado, repitiendo la aplicación 3.3 tenemos que

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \alpha^k \delta(O(y_0;n+k)) \tag{3.6}$$

ahora tomando $l = 0$ y $m = n + k$ en 3.5 obtenemos que

$$\delta(O(y_0;n+k)) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

así, por 3.6 se tiene que

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \alpha^k \delta(O(y_0;n+k)) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

luego,

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

■

Ahora presentamos el siguiente resultado que nos va a permitir obtener la generalización del teorema de G. Jungck. [5].

Teorema 3.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función continua y* $S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *cualquier función que conmuta con* T *tal que* $S(M) \subset T(M)$ *y supongamos que* T *y* S *satisfacen la siguiente condición*

$$d(S(x), S(y)) \leq \alpha \max\{d(T(x), T(y)), d(T(x), S(x)), d(T(y), S(y)) \tag{3.7}$$

$$d(T(x), S(y)), d(T(y), S(x))\}$$

entonces T *y* S *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:

Observemos que es suficiente con encontrar un punto $y \in M$ tal que $T(y) = S(y)$ porque entonces, por 3.7 tenemos

$$d(S(S(y)), S(y)) \leq \alpha \max\{d(T(S(y)), T(y)), d(T(S(y)), S(S(y))), d(T(y), S(y)),$$
$$d(T(S(y)), S(y)), d(T(y), S(S(y)))\}$$

como T y S conmutan y $T(y) = S(y)$ entonces,

$$d(S(S(y)),S(y)) \leq \alpha \max\{d(S(S(y)),S(y)),d(S(S(y)),S(S(y))),d(S(y),S(y)),$$
$$d(S(S(y)),S(y)),d(S(y),S(S(y)))\}$$

así, $d(S(S(y)),S(y)) \leq \alpha d(S(S(y)),S(y))$ luego,

$$S(S(y)) = S(y).$$

Por otro lado, $T(S(y)) = S(T(y)) = S(S(y)) = S(y)$, en conclusión $S(y)$ es un punto fijo de T y S.

Veamos entonces que existe $y \in M$ tal que $T(y) = S(y)$.

Definimos una sucesión de puntos de la siguiente manera para $x_0 \in M$ arbitrario sea $x_1 \in M$ tal que $S(x_0) = T(x_1)$ lo cual se puede porque $S(M) \subset T(M)$, en general se define para $x_n \in M$ un $x_{n+1} \in M$ tal que $S(x_n) = T(x_{n+1}) = y_n, \quad para$ $n = 0, 1, 2, ...$

Si para algún n y k, $\delta(O(y_k; n)) = 0$ tenemos que $y_k = y_{k+1}$, es decir, $T(x_{k+1}) = S(x_{k+1})$.

Por otra parte si $\delta(O(y_k; n)) > 0$ y dado $\epsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^{n_0}}{(1-\alpha)} d(y_0, y_1) < \epsilon \qquad (*)$$

de esta manera para $m > n \geq n_0$ por (*) y el lema 3.2 tenemos que

$$d(y_m, y_n) \leq \delta(O(y_{n_0}; m - n_0)) \leq \frac{\alpha^{n_0}}{(1-\alpha)} d(y_0, y_1) < \epsilon$$

así,

$$d(y_m, y_n) < \epsilon$$

luego, $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces existe $y \in M$ tal que $y_n \to y$, por la continuidad de T se tiene que $T(y_n) \to T(y)$ y como $y_n = S(x_n)$ entonces $T(y_n) = T(S(x_n)) = S(T(x_n)) = S(y_{n-1})$ por lo tanto se tiene que $S(y_n) \to T(y)$, así usando 3.7 tenemos que

$$d(T(y_{n+1}),S(y)) = d(S(y_n),S(y)) \leq \alpha \max\{d(T(y_n),T(y)),d(T(y_n),S(y_n)),d(T(y),S(y)),$$
$$d(T(y_n),S(y)),d(T(y),S(y_n))\}$$

haciendo $n \to \infty$ tenemos que

$$d(T(y),S(y)) \leq \alpha d(T(y),S(y))$$

luego, $T(y) = S(y)$.

Finalmente veamos la unicidad y para ello supongamos que existen $x, y \in M$ tal que $x = T(x) = S(x)$ y $T(y) = S(y) = y$ usando 3.7 se obtiene que

$$d(x,y) = d(S(x),S(y)) \leq \alpha \,\text{máx}\{d(T(x),T(y)), d(T(x),S(x)), d(T(y),S(y)),$$
$$d(T(x),S(y)), d(T(y),S(x))\}$$

de esta manera como x, y son puntos fijos de S y T tenemos

$$d(x,y) \leq \alpha \,\text{máx}\{d(x,y), d(x,x), d(y,y), d(x,y), d(y,x)\}$$

por lo tanto,

$$d(x,y) \leq \alpha d(x,y)$$

así,

$$(1-\alpha)d(x,y) \leq 0$$

como $\alpha \in (0,1)$ entonces

$$x = y$$

y de esta manera el punto fijo es único.

■

Previo a la generalización del teorema de G. Jungck. tenemos el siguiente resultado [5].

Teorema 3.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo,* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *una función con* T^2 *continua y* $S : T(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ *cualquier función que conmuta con* T *tal que*

$$S(T(M)) \subset T^2(M) \tag{3.8}$$

y supongamos que T *y* S *satisfacen la condición 3.7* $\forall x, y \in T(\mathrm{M})$ *entonces* T *y* S *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:

Sea $x_0 \in T(M)$ un punto arbitrario, por la condición 3.8 podemos construir una sucesión de puntos $\{x_n\}$ en $T(M)$ tal que $T(x_{n+1}) = S(x_n) = y_n$ por lo tanto, $T(y_n) = T(S(x_n)) = S(T(x_n)) = S(y_{n-1}) = z_n$.

Por los lemas 3.1 y 3.2 tenemos que para $k \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(O(z_k; n)) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(z_0, z_1)$$

luego, $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como (M, d) es completo entonces existe $z \in M$ tal que $z_n \to z$, por la continuidad de T^2 se tiene que $T^2(z_n) \to T^2(z)$ además como $S(T(z_n)) = S(T(T^2(x_{n+1}))) = T^2(T(S(x_{n+1}))) = T^2(z_{n+1})$ entonces $\{S(T(z_n))\}$ converge a $T^2(z)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(T^2(z_{n+1}), S(T(z))) &= d(S(T(z_n)), S(T(z))) \\ &\leq \alpha \max\{d(T^2(z_n), T^2(z)), d(T^2(z_n), S(T(z_n))), \\ &\qquad d(T^2(z), S(T(z))), d(T^2(z_n), S(T(z))), d(T^2(z), S(T(z_n)))\} \end{aligned}$$

haciendo $n \to \infty$ tenemos que

$$d(T^2(z), S(T(z))) \leq \alpha d(T^2(z), S(T(z)))$$

luego, $T^2(z) = S(T(z))$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} d(S(S(T(z))), S(T(z))) &\leq \alpha \max\{d(TST(z), T^2(z)), d(TST(z), SST(z)), d(T^2(z), ST(z)), \\ &\qquad d(TST(z), ST(z)), d(T^2(z), SS(z))\} \\ &\qquad = \alpha d(S(S(T(z))), S(T(z))) \end{aligned}$$

de esta forma $d(S(S(T(z))), S(T(z))) \leq \alpha d(S(S(T(z))), S(T(z)))$ de donde se obtiene que

$$(1-\alpha) d(S(S(T(z))), S(T(z))) \leq 0$$

como $\alpha \in (0, 1)$ entonces, $S(S(T(z))) = S(T(z))$, es decir, $S(T(z))$ es un punto fijo de S.

Ahora, $TST(z) = ST^2(z) = SST(z) = ST(z)$ luego, $S(T(z))$ es también un punto fijo de T.

La unicidad se concluye usando 3.7

$\blacksquare$

A continuación presentamos la generalización del teorema de Jungck.

Teorema 3.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo* $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *función tal que* T^2 *es continua y se satisface*

a.- Existe $\alpha \in (0,1)$ *y* $S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *tal que*

$$d(S(x), S(y)) \leq \alpha d(T(x), T(y)), \ \ \forall x, y \in \mathrm{M} \tag{3.9}$$

b.- $S(\mathrm{M}) \subseteq T(\mathrm{M})$

entonces T *y* S *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:

Como $S(M) \subset T(M)$ entonces $S(T(M)) = T(S(M)) \subset T^2(M)$ por lo tanto, se cumple 3.8, es decir, $S(T(M)) \subset T^2(M)$, por la parte $a.$ se tiene que la condición 3.7 se satisface, luego, por el teorema 3.3 se concluye que T y S tienen un único punto fijo en común.

■

El siguiente ejemplo ilustra que el teorema 3.4 es en efecto una generalización del teorema 3.1

Ejemplo 3.3
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *con la métrica usual, definimos* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$T(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq -1 \\ x & si \quad -1 < x < 1 \\ -1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & si \ -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1-x}{2} & si \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \ x \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty) \end{cases}$$

Claramente T es discontinua, pero T^2 dada por

$$T^2(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq -1 \\ x & si \quad -1 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

es continua por lo tanto no es aplicable el teorema 3.1 pero por el teorema 3.4 se concluye que T y S tienen un único punto fijo en común y puede verse que $x = \frac{1}{3}$ es dicho punto.

El siguiente resultado nos muestra en forma más general el teorema anterior 3.4.

Teorema 3.5 *Sea (M, d) un espacio métrico completo, $T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ una función tal que T^m es continua para cualquier m entero positivo.*

Sea $S : T^{m-1}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ cualquier función que conmuta con T tal que $S(T^{m-1}(M)) \subset T^m(M)$ y supongamos que T y S satisfacen la condición 3.7 $\forall x, y \in T^{m-1}(\mathrm{M})$ entonces T y S tienen un único punto fijo en común.

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 3.4 por inducción sobre m.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Funciones Compatibles

4.1. Introducción

En 1968, G. Jungck introdujo la noción funciones conmutantes más generales, llamadas funciones compatibles que generalizan a las funciones débilmente conmutantes y conmutantes. Muchos autores probaron teoremas del punto fijo usando el concepto de funciones compatibles, luego G. Jungck [6], P.P. Mutthy y Y.J. Cho [7] dieron una generalización de funciones compatibles, llamadas funciones compatibles tipo A que bajo ciertas condiciones son equivalentes a las funciones compatibles y probaron un teorema de punto fijo para este tipo de funciones definidas en un espacio métrico.

Extendiendo las funciones de tipo A, H.K, Pathak y M.S. Khan [12], introdujeron el concepto de funciones compatibles tipo B y dieron algunos ejemplos donde se muestra que dos funciones compatibles tipo B no implica que lo sean de tipo A.

En 1988, H.K, Pathak , Y.J. Cho ,M.S. Khan y B. Madharia, introdujeron otra extensión de las funciones compatibles tipo A en espacios normados, llamadas funciones compatibles tipo C.

El objetivo fundamental de este capítulo es de analizar un teorema de punto fijo para funciones compatibles tipo C.

Definición 4.1 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *son compatibles si*

$$\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(T(x_n))) = 0$$

donde $\{x_n\}$ *es una sucesión en* M *tal que* $T(x_n) \to t$ *y* $S(x_n) \to t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$.

Ejemplo 4.1
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *con la métrica euclidiana y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$T(x) = 5x^3; \quad S(x) = 2x^2; \quad \forall x \in \mathrm{M}$$

consideremos $\{x_n\} = 0, \forall x \in \mathbb{N}$ *así tenemos que* $T(x_n) \to 0$ *y* $S(x_n) \to 0$, *además*

$$T(S(x_n)) = T(2(x_n)^3) = 5(2(x_n)^3)^3 = 40(x_n)^9$$

y

$$S(T(x_n)) = S(5(x_n)^3) = 2(5(x_n)^3)^3 = 250(x_n)^9$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |T(S(x_n)) - S(T(x_n))| = \lim_{n\to\infty} |210(x_n)^9| = 0$$

luego, T *y* S *son compatibles.*

Observación:

Claramente dos funciones conmutantes implican que son compatibles, pero el ejemplo anterior nos muestra que el recíproco es falso ya que T y S no son cunmutantes.

4.2. Funciones compatibles tipo A

Definición 4.2 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *son compatibles tipo A si*

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) = 0 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) = 0,$$

donde $\{x_n\}$ *es una sucesión en* M *tal que* $T(x_n) \to t$ *y* $S(x_n) \to t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$.

Ejemplo 4.2
Sea $\mathrm{M} = [0,1]$ *con la métrica euclidiana y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$S(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad y \qquad T(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Sea $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ *una sucesión tal que* $T(x_n) \to t$ *y* $S(x_n) \to t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$, *así, por definición de* T *y* S *se tiene que* $t \in \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Si S *y* T *están definidas en* $[\frac{1}{2}, 1]$ *entonces necesariamente* $t = \frac{1}{2}$, *supongamos que* $x_n \to \frac{1}{2}$ *y que* $x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *entonces* $T(x_n) = 1 - x_n \to \frac{1}{2}$ *de esta manera como* $x_n < \frac{1}{2}$ *entonces* $1 - x_n > \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *por lo tanto,* $S(T(x_n)) = S(1 - x_n) = 1$ *y como* $x_n < \frac{1}{2}$ *entonces* $T(S(x_n)) = T(x_n) = 1 - x_n \to \frac{1}{2}$ *de esta manera*

$$d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) = |S(T(x_n)) - T(T(x_n))| = |1 - T(1 - x_n)| = |1 - 1| \to 0$$

y

$$d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) = |T(S(x_n)) - S(S(x_n))| = |(1 - x_n) - x_n| = |1 - 2x_n| \to 0$$

porque $x_n \to \frac{1}{2}$, *luego,* T *y* S *son compatibles tipo A.*

Observaciones:

1. Que dos funciones T y S sean compatibles tipo A no implican que son compatibles, el ejemplo anterior nos muestra que T y S son compatibles tipo A pero no son compatibles ya que

   $$d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) = |S(T(x_n)) - T(S(x_n))| = |1 - (1 - x_n)| = x_n \to \frac{1}{2}.$$

2. Que dos funciones T y S sean compatibles no implican que son compatibles tipo A.

   En el siguiente ejemplo se muestran dos funciones compatibles que no son compatibles tipo A.

Ejemplo 4.3
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *con la métrica euclidiana y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad y \qquad T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Consideremos la siguiente sucesión $x_n = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *entonces tenemos que* $S(x_n) = \dfrac{1}{n^2} \to t = 0$, $T(x_n) = \dfrac{1}{n^4} \to t = 0$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) = \lim_{n\to\infty} d(n^4, n^4) = 0$$

pero,

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) = \lim_{n\to\infty} d(n^8, n^4) = |n^8 - n^4| = \infty$$

y

$$\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) = \lim_{n\to\infty} d(n^4, n^2) = |n^4 - n^2| = \infty$$

entonces T *y* S *son compatibles pero no son compatibles tipo* A.

En las siguientes proposiciones se demuestra que las definiciones de compatible y compatible tipo A son equivalentes si se le agrega la condición de continuidad a las funciones T y S

Proposición 4.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones continuas.*

Si T *y* S *son compatibles entonces son compatibles tipo* A.

Demostración:
Supongamos que T y S son compatibles, sea $\{x_n\}$ una sucesión en M tal que $T(x_n), S(x_n) \to t$ para algún $t \in M$. Por desigualdad triangular tenemos que

$$d(S(S(x_n), T(S(x_n))) \leq d(S(S(x_n), S(T(x_n))) + d(S(T(x_n), T(S(x_n))) \tag{4.1}$$

Como T y S son compatibles entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(S(T(x_n), T(S(x_n))) = 0$ y como S es continua entonces $S(T(x_n)), S(S(x_n)) \to S(t)$ y por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} d(S(S(x_n), S(T(x_n))) = 0$, luego tomando limite cuando $n \to \infty$ en 4.1 se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty} d(S(S(x_n), T(S(x_n))) \leq 0$ de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} d(S(S(x_n), T(S(x_n))) = 0.$$

Análogamente se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} d(T(T(x_n), S(T(x_n))) = 0$ y así se concluye que T y S son compatibles tipo A.

■

Proposición 4.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones compatibles tipo A.*

Si T o S son continuas entonces son compatibles.

Demostración:
Supongamos que T es continua y sea $\{x_n\}$ una sucesión en M tal que $T(x_n), S(x_n) \to t$ para algún $t \in M$.

Como T es continua entonces $T(S(x_n)) \to T(t)$ y como T y S son compatibles tipo A entonces $d(T(T(x_n), S(T(x_n))) \to 0$, ahora por desigualdad triangular se tiene

$$d(S(T(x_n), T(S(x_n))) \leq d(S(T(x_n), T(T(x_n))) + d(T(T(x_n), T(S(x_n)))$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty} d(S(T(x_n), T(S(x_n))) \leq 0$ de donde se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} d(S(T(x_n), T(S(x_n))) = 0$ y en consecuencia tenemos que T y S son compatibles.

■

La siguiente proposición es una consecuencia directa de la proposiciones 4.1 y 4.2.

Proposición 4.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones continuas, entonces T y S son compatibles si y solo si son compatibles tipo A.*

■

4.3. Funciones compatibles tipo B

Definición 4.3 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *son compatibles tipo B si*

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n)))]$$

y

$$\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) \leq \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), T(t)) + \lim_{n\to\infty} d(T(t), T(T(x_n)))]$$

donde $\{x_n\}$ *es una sucesión en* M *tal que* $T(x_n) \to t$ *y* $S(x_n) \to t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$.

Ejemplo 4.4
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *con la métrica usual y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por* $T(x) = 5x^3$ *y* $S(x) = 2x^3$ *y consideramos cualquier sucesión* $\{x_n\} \in \mathrm{M}$ *tal que* $x_n \to 0$, *se verifica que* T *y* S *compatibles tipo B.*

En las siguientes proposiciones se establecen relaciones entre las funciones compatibles, compatibles tipo A y compatibles tipo B.

Proposición 4.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones continuas.*

Si T *y* S *son compatibles entonces son compatibles tipo B.*

Demostración:
La demostración es obvia de la definición de funciones compatibles.

Proposición 4.5 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones compatibles tipo B.*

Si T *y* S *son continuas entonces son compatibles.*

Demostración:
Sea $\{x_n\}$ una sucesión en M tal que $T(x_n), S(x_n) \to t$ para algún $t \in M$. Como S y T son continuas entonces $TT(x_n) \to T(t)$, $TS(x_n) \to T(t)$, $SS(x_n) \to S(t)$ y $ST(x_n) \to S(t)$.

Ahora por desigualdad triangular se tiene que,
$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) \leq \lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) + \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), T(S(x_n)))$
por lo tanto, tenemos
$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) \leq \lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n)))$, como S y T son compatibles tipo B por hipótesis entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) \leq \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n)))]$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) \leq 0$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(S(x_n))) = 0$$

y en consecuencia S y T son compatibles.

■

Las siguientes proposiciones son una consecuencia directa de la proposiciones 4.4 y 4.5.

Proposición 4.6 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones continuas, entonces* T *y* S *son compatibles si y solo si son compatibles tipo B.*

Proposición 4.7 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones continuas, entonces* T *y* S *son compatibles tipo A si y solo si son compatibles tipo B.*

4.4. Funciones compatibles tipo C

Definición 4.4 *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones, se dice que* T *y* S *son compatibles tipo C si*

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n))) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), T(T(x_n)))]$$

y

$$\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), T(t)) + \lim_{n\to\infty} d(T(t), T(T(x_n))) + \lim_{n\to\infty} d(T(t), S(S(x_n)))]$$

Donde $\{x_n\}$ *es una sucesión en* M *tal que* $T(x_n) \to t$ *y* $S(x_n) \to t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$.

Es claro que funciones compatibles tipo A son compatibles tipo B y tipo C; pero el recíproco no es cierto.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones compatibles tipo C que no son compatibles tipo A ni B.

Ejemplo 4.5
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *con la métrica usual y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *dadas por*

$$S(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 3 & si \quad 1 < x \leq 7 \\ x - 6 & si \quad 7 < x \leq 20 \end{cases} \qquad y \qquad T(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \{1\} \cup (7, 20] \\ \\ 2 & si \quad a < x \leq 7 \end{cases}$$

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión definida por* $x_n = 7 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ *entonces* $S(x_n) = x_n - 6 \to 1 = t$ *y* $T(x_n) = 1 \to 1$, *ahora* $\lim\limits_{n\to\infty} |S(T(x_n)) - T(S(x_n))| = |1 - 2| = 1 \neq 0$ *así,* T *y* S *no son compatibles.*

Por otro lado, $\lim\limits_{n\to\infty} |T(S(x_n) - S(S(x_n))| = |2 - 3| = 1 \neq 0$ *luego* T *y* S *no son compatibles tipo* A.

Ahora,
$\lim_{n\to\infty}|T(S(x_n)-S(T(x_n))|=1$ *y* $\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}|T(S(x_n)-T(t)|+\lim_{n\to\infty}|T(T(x_n)-T(t)|]=\frac{1}{2}$,
pero $1>\frac{1}{2}$, *luego,* T *y* S *no son compatibles tipo B.*

Finalmente tenemos

$$0\leq\frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty}|S(T(x_n)-S(t)|+\lim_{n\to\infty}|S(t)-S(S(x_n))|+\lim_{n\to\infty}|S(t)-T(T(x_n))|\right]=\frac{2}{3}$$

y

$$1\leq\frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty}|T(S(x_n)-T(t)|+\lim_{n\to\infty}|T(t)-T(T(x_n))|+\lim_{n\to\infty}|T(t)-S(S(x_n))|\right]=1$$

así, T *y* S *son compatibles tipo C.*

Proposición 4.8 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $T,S:\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ *funciones continuas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

a.- T *y* S *son compatibles*

b.- T *y* S *son compatibles tipo A*

c.- T *y* S *son compatibles tipo B*

d.- T *y* S *son compatibles tipo C.*

Demostración:
Por la proposición 4.3 tenemos que $a\Rightarrow b$ y obviamente $b\Rightarrow c$

Veamos que $c\Rightarrow d$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en M tal que $T(x_n),S(x_n)\to t$ para algún $t\in M$, por la continuidad de T y S se tiene que $S(T(x_n))\to S(t)$ y $SS((x_n))\to S(t)$, luego, $\lim_{n\to\infty}d(S(T(x_n)),S(t))=\lim_{n\to\infty}d(S(S(x_n)),S(t))=0$, como T y S son compatibles tipo B entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}d(S(T(x_n)),T(T(x_n)))\leq\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}d(S(T(x_n)),S(t)+\lim_{n\to\infty}d(S(t),S(S(x_n)))]$$

así, $\lim_{n\to\infty}d(S(T(x_n)),T(T(x_n)))\leq 0$, luego, $\lim_{n\to\infty}d(S(T(x_n)),T(T(x_n)))=0$

Análogamente se tienen que $\lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), S(S(x_n))) = 0$, luego T y S son compatibles tipo A y por lo tanto obviamente son compatibles tipo C.

Por ultimo veamos que $d \Rightarrow a$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en M tal que $T(x_n), S(x_n) \to t$ para algún $t \in M$, por la continuidad de T y S se tiene lo siguiente:

(1) $S(T(x_n)) \to S(t) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) = 0$

(2) $S(S(x_n)) \to S(t) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(S(S(x_n)), S(t)) = 0$

(3) $T(S(x_n)) \to T(t) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T(S(x_n)), T(t)) = 0$

(4) $T(T(x_n)) \to T(t) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), T(t)) = 0$

Como T y S son compatibles tipo C entonces $\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n)))$
$\leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n))) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), T(T(x_n)))]$
por lo tanto por (1) y por (2) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} d(S(t), T(T(x_n))) \tag{4.2}$$

Por otro lado por desigualdad triangular tenemos

$$d(T(T(x_n)), S(t))) \leq d(T(T(x_n), S(T(t))) + d(S(T(x_n)), S(t))$$

aplicando limite cuando $n \to \infty$ y por (1) y por 4.2 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t)) \leq \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))$$

luego, $\lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t)) = 0$ finalmente

$$d(S(T(x_n)), T(S(x_n)))) \leq d(S(T(x_n), T(T(x_n))) + d(T(T(x_n)), T(S(x_n)))$$

aplicando limite cuando $n \to \infty$ tenemos

$$d(S(T(x_n)), T(S(x_n)))) \leq d(T(t), T(t)) = 0$$

luego,

$$d(S(T(x_n)), T(S(x_n)))) = 0$$

de donde se concluye que T y S son compatibles.

■

Proposición 4.9 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones compatibles tipo C.Supongamos que* $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = t$ *para algún* $t \in \mathrm{M}$. *Entonces tenemos lo siguiente:*

(1) Si S *es continua en* t *entonces* $\lim_{n\to\infty} T(T(x_n)) = S(t)$

(2) Si T *es continua en* t *entonces* $\lim_{n\to\infty} S(S(x_n)) = T(t)$

(3) Si S *y* T *son continuas en* t *entonces* $S(T(t)) = T(S(t))$ *y* $S(t) = T(t)$

Demostración:
Veamos la parte (1)

Como S es continua en t y $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = t$ entonces $\lim_{n\to\infty} S(S(x_n)) = S(t)$ por lo tanto $\lim_{n\to\infty} d(S(S(x_n)), S(t)) = 0$, análogamente se tiene que $\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) = 0$, como S y T son compatibles tipo C entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n))) +$$

$$\lim_{n\to\infty} d(S(t), T(T(x_n)))]$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t)) \tag{4.3}$$

por otro lado,

$$d(T(T(x_n)), S(t))) \leq d(T(T(x_n), S(T(x_n))) + d(S(T(x_n)), S(t))$$

y aplicando limite cuando $n \to \infty$ y por 4.3 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))) \leq \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n), S(T(x_n))) \leq \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))) \leq \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))$$

luego, $\lim_{n\to\infty} d(T(T(x_n)), S(t))) = 0$ y así,

$$\lim_{n\to\infty} T(T(x_n)) = S(t)$$

La parte (2) se demuestra de manera análoga a la parte (1)

Veamos la parte (3)

Como S y T son continuas en t y $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = t$ entonces $\lim_{n\to\infty} T(T(x_n)) = T(t)$, $\lim_{n\to\infty} S(T(x_n)) = S(t)$, $\lim_{n\to\infty} S(S(x_n)) = S(t)$, $\lim_{n\to\infty} T(S(x_n)) = T(t)$ ahora como S y T son compatibles tipo C entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(t)) + \lim_{n\to\infty} d(S(t), S(S(x_n))) +$$

$$\lim_{n\to\infty} d(S(t), T(T(x_n)))]$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) = 0$$

por lo tanto,

$$d(S(t), T(t)) = 0$$

y así, $S(t) = T(t)$.

Por otra parte consideremos $x_n = t$, $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $S(x_n) \to S(t)$ y $T(x_n) \to T(t)$ así, por lo anterior se tiene que $S(x_n), T(x_n) \to T(t)$ y como S y T son compatibles tipo C tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), T(T(x_n))) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(S(T(x_n)), S(T(t))) + \lim_{n\to\infty} d(S(T(t)), S(S(x_n))) + \lim_{n\to\infty} d(S(T(t)), T(T(x_n)))]$$

por lo tanto,

$$d(S(T(t)), T(T(t))) \leq \frac{1}{3}[d(S(T(t)), S(T(t))) + d(S(T(t)), S(S(t))) + d(S(T(t)), T(T(t)))]$$

así, $d(S(T(t)), T(T(t))) \leq \frac{1}{3} d(S(T(t)), T(T(t)))$ por lo tanto, $S(T(t)) = T(T(t))$ ahora, $ST(t) = TT(t) = TS(t)$ luego, $ST(t) = TS(t)$.

■

Notación 4.5
Denotaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones reales continuas $F : \mathbb{R}^6_+ \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(F_1) F es decreciente en la variable t_5 y t_6

(F_2) Existe $h \in (0,1)$ tal que $\forall u, v \geq 0$ con

(F_a): $F(u, v, v, u, u+v, 0) \leq 0$

ó

(F_b): $F(u, v, u, v, 0, u+v) \leq 0$

entonces $u \leq hv$

(F_3) $F(u, u, 0, 0, u, u) > 0$, $\forall u > 0$

Veamos algunos ejemplos de funciones en $\mathcal{F}$

Ejemplo 4.6
$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - k \operatorname{máx}\{t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}(t_5 + t_6)\}$, *donde* $k \in (0,1)$

Ejemplo 4.7
$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^2 - c_1 \operatorname{máx}\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - c_2 \operatorname{máx}\{t_3 t_5, t_4 t_6\} - c_3 t_5 t_6$ *donde* $c_1 > 0, c_2, c_3 \geq 0, c_1 + 2c_2 < 1$ *y* $c_1 + c_3 < 1$

Ejemplo 4.8
$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^2 - t_1(at_2 + bt_3 + ct_4) - dt_5 t_6$, *donde* $a > 0, b, c, d \geq 0, a + b + c < 1$ *y* $a + d < 1$

Ejemplo 4.9
$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^3 - at_1^2 - bt_1 t_3 t_4 - ct_5^2 t_6 - dt_5 t_6^2$, *donde* $a > 0, b, c, d \geq 0, a + b < 1$ *y* $a + b + c < 1$

Ejemplo 4.10
$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^3 - c\frac{t_3^2 t_4^2 + t_5^2 t_6^2}{t_2 + t_3 + t_4 + 1},\ \textit{donde } c \in (0,1)$$

Ejemplo 4.11
$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^2 - at_2^2 - \dfrac{bt_5t_6}{t_3^2 + t_4^2 + 1}$ *donde* $a > 0, b \geq 0$ *y* $a + b < 1$.

4.4.1. Teorema de punto fijo para funciones compatibles tipo C

El siguiente teorema es el resultado principal de este capitulo y fue dado por Hakima G. [13]

Teorema 4.1
Sea (M, d) *un espacio métrico completo y* $T, S, I, J : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones tales que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $S(M) \subset J(M)$ *y* $T(M) \subset I(M)$

(b) Alguna de las funciones S, T, I, J *es continua.*

(c) S *e* I *así como* T *y* J *son compatibles tipo C.*

(d) Se cumple la desigualdad

$$F(d(Sx, Ty), d(Ix, Jy), d(Ix, Sx), d(Jy, Ty), d(Ix, Ty), d(Jy, Sx)) \leq 0$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}$, *donde* $F \in \mathcal{F}$

Entonces S, T, I *y* J *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:
Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario, por la parte (a) podemos definir una sucesión $\{y_n\} \subset M$ de la siguiente manera $y_{2n} = Sx_{2n} = Jx_{2n+1}$ y $y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ix_{2n+2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la condición (d) para $x = x_{2n}$ y $y = x_{2n+1}$ tenemos

$$F(d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Ix_{2n}, Jx_{2n+1}), d(Ix_{2n}, Sx_{2n}), d(Jx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(Ix_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Jx_{2n+1}, Sx_{2n})) \leq 0$$

por definición de la sucesión se tiene,

$F(d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n+1}),$
$d(y_{2n}, y_{2n})) \leq 0$
por lo tanto,

$F(d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n+1}), 0) \leq 0$
como $F \in \mathcal{F}$ entonces por la condición (F_1) tenemos que

$F(d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}),$
$d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1}), 0) \leq 0$
luego, por la condición (F_a) se tiene que $d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq hd(y_{2n-1}, y_{2n})$ donde $h \in (0,1)$ análogamente por (F_1) y (F_b) se tiene $d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq hd(y_{2n-2}, y_{2n-1})$ por lo tanto, por inducción se tiene que

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq h^{2n} d(y_0, y_1), \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, $\{y_n\}$ es una sucesión de cauchy por el lema 1.2 y como (M, d) es un espacio métrico completo entonces $\{y_n\}$ converge para algún $z \in M$ y de esta manera tenemos que $Sx_{2n} \to z$, $Jx_{2n+1} \to z$, $Tx_{2n+1} \to z$, $Ix_{2n+2} \to z$.

Veamos que z es un punto fijo de S, T, I, J
Supongamos por la parte (b) que I es continua así $ISx_{2n} \to Iz$ y como S, I son compatibles tipo C por la parte (c) entonces por la parte (2) de la proposición 4.9 se tiene $SSx_{2n+1} \to Iz$. Ahora usando (d) para $x = Sx_{2n}$ y $y = x_{2n+1}$

$F(d(SSx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(ISx_{2n}, Jx_{2n+1}), d(ISx_{2n}, SSx_{2n}), d(Jx_{2n+1}, Tx_{2n+1}),$
$d(ISx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Jx_{2n+1}, SSx_{2n})) \leq 0$
tomando limite cuando $n \to \infty$ y por la continuidad de F se obtiene

$$F(d(Iz, z), d(Iz, z), d(Iz, Iz), d(z, z), d(Iz, z), d(z, Iz)) \leq 0$$

por lo tanto, $F(d(Iz, z), d(Iz, z), 0, 0, d(Iz, z), d(z, Iz)) \leq 0$, si $d(Iz, z) > 0$ entonces se contradice la condición (F_3) luego, $d(Iz, z) = 0$ así, $Iz = z$.

Ahora aplicando la condición (d) para $x = z$ y $y = x_{2n+1}$ tenemos
$F(d(Sz, Tx_{2n+1}), d(Iz, Jx_{2n+1}), d(Iz, Sz), d(Jx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(Iz, Tx_{2n+1}),$
$d(Jx_{2n+1}, Sz)) \leq 0$ tomando limite cuando $n \to \infty$ y por la continuidad de F se obtiene,

$$F(d(Sz, z), 0, d(z, Sz), 0, 0, d(z, Sz)) \leq 0$$

luego, por (F_b) se tiene $d(z, Sz) \leq h0 = 0$ por lo tanto $Sz = z$, de esta manera $z \in S(M)$ y como $S(M) \subset J(M)$ por la parte (a) entonces existe $w \in M$ tal que $Jw = z$, así aplicando (d) para $x = z$ y $y = w$ tenemos

$$F(d(Sz, Tw), d(Iz, Jw), d(Iz, Sz), d(Jw, Tw), d(Iz, Tw), d(Jw, Sz)) \leq 0$$

por lo tanto, $F(d(z, Tw), 0, 0, d(z, Tw), d(z, Tw), 0) \leq 0$, por (F_a) tenemos que $d(z, Tw) \leq h0 = 0$ por lo tanto, $Tw = z$ así $Tw = z = Jw$ y como J, T son compatibles tipo C por la parte (c) entonces por la demostración de la parte (3) proposición 4.9, se tiene $JTw = TJw$ de esta manera, $Jz = JTw = TJw = Tz$ ahora usando (d) para $x = y = z$ tenemos,

$$F(d(Sz, Tz), d(Iz, Jz), d(Iz, Sz), d(Jz, Tz), d(Iz, Tz), d(Jz, Sz)) \leq 0$$

por lo tanto,

$$F(d(z, Tz), d(z, Tz), 0, 0, d(z, Tz), d(Tz, z)) \leq 0$$

si $d(z, Tz) > 0$ entonces se contradice la condición (F_3) luego, $d(z, Tz) = 0$ por lo tanto, $Tz = z$. y así $Jz = z$, de esta forma hemos probado que z es un punto fijo de S, T, J, I.

Por otro lado,
Si suponemos por la parte (b) que S es continua entonces $SIx_{2n} \to Sz$ y como S, I son compatibles tipo C por la parte (c) entonces por la parte (2) de la proposición 4.9 se tiene $IIx_{2n+1} \to Sz$ ahora usando (d) para $x = Ix_{2n}$ y $y = x_{2n+1}$ tenemos

$$F(d(SIx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(IIx_{2n}, Jx_{2n+1}), d(ISx_{2n}, SIx_{2n}), d(Jx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \\ d(IIx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Jx_{2n+1}, SSIx_{2n})) \leq 0$$

haciendo $n \to \infty$ y por la continuidad de F se obtiene

$$F(d(Sz, z), d(Sz, z), d(Sz, Sz), d(z, z), d(Sz, z), d(z, Sz)) \leq 0$$

por lo tanto, $F(d(Sz, z), d(Sz, z), 0, 0, d(Sz, z), d(z, Sz)) \leq 0$, si $d(Sz, z) > 0$ entonces se contradice la condición (F_3) luego, $d(Sz, z) = 0$ de esta forma $Sz = z$.

Como $S(M) \subset J(M)$ por la parte (a) entonces existe $w \in M$ tal que $Jw = z$, así aplicando (d) para $x = Ix_{2n}$ y $y = w$ tenemos

$$F(d(SIx_{2n}, Tw), d(IIx_{2n}, Jw), d(IIx_{2n}, SIx_{2n}), d(Jw, Tw), d(IIx_{2n}, Tw), \\ d(Jw, SIx_{2n})) \leq 0$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ y por la continuidad de F se obtiene

$$F(d(z,Tw),0,0,d(z,Tw),d(z,Tw),0) \leq 0$$

por (F_a) tenemos que $d(z,Tw) \leq h0 = 0$ luego, $d(z,Tw) = 0$ obteniendo $Tw = z$ y $Tw = z = Jw$, y como J,T son compatibles tipo C por la parte (c) entonces por la parte (3) de la proposición 4.9 se tiene $JTw = TJw$ por lo tanto, $Jz = JTw = TJw = Tz$ ahora usando (d) para $x = x_{2n}$ y $y = z$ tenemos
$F(d(Sx_{2n},Tz),d(Ix_{2n},Jz),d(Ix_{2n},Sx_{2n}),d(Jz,Tz),d(Ix_{2n},Tz),d(Jz,Sx_{2n})) \leq 0$
tomando limite cuando $n \to \infty$ y por la continuidad de F se obtiene

$$F(d(z,Tz),d(z,Tz),0,0,d(z,Tz),d(z,Tz)) \leq 0$$

por (F_3) se tiene que $Tz = z$ y así $Jz = Tz = z$.

Por otra parte como $T(M) \subset I(M)$ entonces existe $r \in M$ tal que $Ir = z$, ahora aplicando (d) para $x = r$ y $y = z$ tenemos

$$F(d(Sr,Tz),d(Ir,Jz),d(Ir,Sr),d(Jz,Tz),d(Ir,Tz),d(Jz,Sr)) \leq 0$$

y por (F_b) se tiene $Sr = z$ por lo tanto, $Sr = z = Ir$ y como I,S son compatibles tipo C se tiene por la parte (3) de la proposición 4.9 que $SIr = ISr$ y así $z = Sz = SIr = ISr = Iz$ de esta manera $Iz = z$.

De esta manera hemos demostrado que z es un punto fijo común de S,T,I,J.

Se obtiene el mismos resultado de manera análoga si suponemos que T o J son continuas en vez de S.

Veamos que z es el único punto fijo en común de S,T,I,J.
Supongamos que $z^* \in M$ es un punto fijo en común de S,T,I,J aplicando la condición (d) para $x = z$ y $y = z^*$ tenemos
$F(d(Sz,Tz^*),d(Iz,Jz^*),d(Iz,Sz),d(Jz^*,Tz^*),d(Iz,Tz^*),d(Jz^*,Sz)) \leq 0$ luego,

$$F(d(z,z^*),d(z,z^*),d(z,z),d(z^*,z^*),d(z,z^*),d(z^*,z)) \leq 0$$

por lo tanto, $F(d(z,z^*),d(z,z^*),0,0,d(z,z^*),d(z^*,z)) \leq 0$ luego, por (F_3) se tiene que $d(z,z^*) = 0$ así, $z = z^*$ y en consecuencia z es el único punto fijo en común de S,T,I,J.

■

Corolario 4.1 *Sean* S, T, I *y* J *como en el teorema 4.1. Si se satisface la desigualdad* $d(Sx, Ty) \leq k \max\{d(Ix, Jy), d(Ix, Sx), d(Jy, Ty), \frac{1}{2}(d(Ix, Ty) + d(Jy, Sx))\}$ *para todo* $x, y \in \mathrm{M}$ *y* $k \in (0, 1)$, *entonces* S, T, I *y* J *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:
Usamos el teorema 4.1 y el ejemplo 4.6

■

Corolario 4.2 *Sean* S, T, I *y* J *como en el teorema 4.1. Si se satisface la desigualdad* $d^2(Sx, Ty) \leq c_1 \max\{d^2(Ix, Jy), d^2(Ix, Sx), d^2(Jy, Ty)\} + c_2 \max\{d(Ix, Sx)$ $d(Ix, Ty), d(Jy, Ty)d(Jy, Tx)\} + c_3 d(Ix, Ty)d(Jy, Sx)$ *para todo* $x, y \in \mathrm{M}$ *y* $c_1 > 0, c_2, c_3 \geq 0, c_1 + 2c_2 < 1$ *y* $c_1 + c_3 < 1$. *entonces* S, T, I *y* J *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:
Usamos el teorema 4.1 y el ejemplo 4.7

■

Corolario 4.3 *Tomando* $I = J = I_{\mathrm{M}}$ *(Identidad en* M*) en el teorema 4.1 y tomando en la condición (b)* S *y* T *continuas concluimos que* S *y* T *tienen un único punto fijo en común.*

■

En el siguiente ejemplo mostramos un soporte de este teorema

Ejemplo 4.12
Sea $\mathrm{M} = [0, \infty)$ *con la métrica usual y definimos* $I, J, S, T : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *por*

$$Ix = x^2 \qquad Sx = \begin{cases} 3 & si \quad x \in [0, 1) \\ x & si \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$Jx = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, 1) \\ x^4 & si \quad x \in [1, \infty) \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 3 & si \quad x \in [0, 1) \\ x^2 & si \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Claramente $S(\mathrm{M}) = [1,\infty) \subset J(\mathrm{M}) = \{0\} \cup [1,\infty)$ *y* $T(\mathrm{M}) = [0,\infty) \subset I(\mathrm{M}) = [0,\infty) = \mathrm{M}$ *y solamente* I *es continua en* 1. *De esta manera sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en* M *definida por* $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} Ix_n = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 1 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

Ahora,

$$0 = \lim_{n\to\infty} |SIx_n - IIx_n| \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} |SIx_n - S(1)| + \lim_{n\to\infty} |S(1) - SSx_n| + \lim_{n\to\infty} |S(1) - IIx_n|] = 0$$

y

$$0 = \lim_{n\to\infty} |ISx_n - SSx_n| \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} |ISx_n - I(1)| + \lim_{n\to\infty} |I(1) - IIx_n| + \lim_{n\to\infty} |I(1) - SSx_n|] = 0$$

de esta manera, I *y* S *son compatibles tipo C.*

Análogamente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} Jx_n = \lim_{n\to\infty} x_n^4 = 1 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 1$$

y también

$$0 = \lim_{n\to\infty} |JTx_n - TTx_n| \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} |JTx_n - J(1)| + \lim_{n\to\infty} |J(1) - JJx_n| + \lim_{n\to\infty} |J(1) - TTx_n|] = 0$$

Y

$$0 = \lim_{n\to\infty} |TJx_n - JJx_n| \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} |TJx_n - T(1)| + \lim_{n\to\infty} |T(1) - TTx_n| + \lim_{n\to\infty} |T(1) - JJx_n|] = 0$$

de esta manera, J *y* T *son compatibles tipo C. Ahora, definimos* $F : \mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}$ *por* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \frac{1}{2}t_2$. *Claramente,* $F \in \mathcal{F}$ *y además tenemos que* $d(Sx, Ty) = |x - y^2| \leq |x - y^2||x + y^2| = |x^2 - y^4| = d(Ix, Jy)$ *para todo* $x, y \geq 1$. *Entonces,* F *satisface la condición (d), de esta manera se satisfacen las hipótesis del teorema 4.1 y el punto* 1 *es el único punto fijo común para las funciones* I, J, S *y* T.

Teorema 4.2 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T, S, I, J : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *funciones. Si la desigualdad (d) del teorema 4.1 se satisface para todo* $x, y \in \mathrm{M}$ *entonces*

$$(F_I \cap F_J) \cap F_S = (F_I \cap F_J) \cap F_T.$$

Demostración:
Sea $x \in (F_I \cap F_J) \cap F_S$, veamos que $x \in (F_I \cap F_J) \cap F_T$ y para ello solo basta ver que $x \in F_T$, es decir, $T(x) = x$.

Como se satisface la condición (d) del teorema 4.1 por hipótesis entonces se tiene

$$F(d(Sx, Tx), d(Ix, Jx), d(Ix, Sx), d(Jx, Tx), d(Ix, Tx), d(Jx, Sx)) \leq 0$$

como $x \in (F_I \cap F_J) \cap F_S$ entonces

$$F(d(x, Tx), d(x, x), d(x, x), d(x, Tx), d(x, Tx), d(x, x)) \leq 0$$

luego,

$$F(d(x, Tx), 0, 0, d(x, Tx), d(x, Tx), 0) \leq 0$$

ahora $F \in \mathcal{F}$ y de esta manera por (F_a) se obtiene que $d(x, T(x)) \leq 0$ así, $T(x) = x$. De esta forma obtenemos que

$$(F_I \cap F_J) \cap F_S \subseteq (F_I \cap F_J) \cap F_T.$$

Análogamente se demuestra que

$$(F_I \cap F_J) \cap F_T \subseteq (F_I \cap F_J) \cap F_S$$

y así concluimos que

$$(F_I \cap F_J) \cap F_S = (F_I \cap F_J) \cap F_T.$$

■

Teorema 4.3
Sea (M, d) *un espacio métrico completo y* $I, J, T_i : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *con* $i \in \mathbb{N}$ *funciones tales que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $T_1(M) \subset J(M)$ *y* $T_2(M) \subset I(M)$

(b) Alguna de las funciones I, J, T_1, T_2 *es continua.*

(c) T_1 *y* I *así como* T_2 *y* J *son compatibles tipo C.*

(d) Se cumple la desigualdad

$$F(d(T_ix, T_{i+1}y), d(Ix, Jy), d(Ix, T_ix), d(Jy, T_{i+1}y), d(Ix, T_{i+1}y), d(Jy, T_ix)) \leq 0$$

$\forall x, y \in \mathrm{M}, \forall i \in \mathbb{N}$ *donde* $F \in \mathcal{F}$

Entonces I, J *y* $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración:
Usamos los teoremas 4.1 y 4.2

■

Bibliografía

[1] Tineo, A. *Topología Espacios Métricos*. Kariña Editores.

[2] Iribarren, I.L., *Topología de Espacios Métricos*. Lymusa-Willey.

[3] Istratescu, V.I., *Fixed point Theory, An Introduction,Mathematics and its Aplications*. 7,D. Reidel Publishing co.

[4] Rus,I.A., *Metrical Fixed Point Theorems*. University of Cluj-Napoca, Departament of Mathematics, Romania.

[5] Jungck, G., *Conmuting mapping and fixed points*.Amer.Math.Monthly, 83, 261-263, (1976).

[6] Jungck, G., *Common fixed poinst for conmuting and compatible maps on compacta*.A.M.S. 103, 3, 977-983, (1988).

[7] Jungck, G., Murthy,P.P., and Cho, Y.J., *Compatible mappings of type (A) and common fixed points*. Math.Japonica, 38, 2, 381-390, (1993).

[8] Jungck, G., *Compatible mappings and common fixed points* . Internat.J.Math. And Math. Sci. 9,4, 771-779, (1986).

[9] Wong, C.S., *Common fixed points of two mappings* . Pacif.J. Math. 48,1, 299-312, (1973).

[10] Fisher, B., *Results on common fexed points*. Math. Japonica, 22, 335-338, (1977).

[11] Lucimar, N.G., *Puntos fijos comunes*. Boletin de Matemáticas,nueva serie, IV,43-47, (1997).

[12] Rhoades, B.E., Sessa, S., Khan, M.S. and Khan, M.D., *Some fixed point theorems for Hardy-Rogers type mappings*. Internat. J.Math. And Math.Sci. 7,1, 75-87, (1984).

[13] Hakima, B., Sarajevo Jour. Math., 1,14, 261-270, (2005).

[14] J. Achari, M.D., *Some results on fixed point theorem of Zamfirescu*. Mathematica. 2, 105-111, (1974).

[15] Ioan A. Rus M.D., *Some fixed point theorem in metric spaces*. 169-172, (1971).

[16] G.E. Hardy and T.D.Rogers M.D., *A Generelization of a fixed point theorem of Reich*. Canad.Math.Bull. 16, 201-206, (1973).