

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GRUPO DE ANÁLISIS FUNCIONAL

EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN PARA EL PLANO
DIGITAL

MARGORYE A. CÁRDENAS S.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
TUTOR: DR. CARLOS UZCÁTEGUI

MÉRIDA - VENEZUELA

2005

Agradecimientos

- En primer lugar quiero agradecer a mi madre, Gladys Serrano por todos sus sacrificios, nunca terminaré de pagarte todo lo que me has dado, te debo todo lo que soy. Mis hermanas Jessica y Wuendy han sido el más grande apoyo en mi vida, gracias por creer siempre en mi y hacerme creer en mi misma, ustedes saben lo que significan en mi vida. Wuendy gracias por estar siempre a mi lado aún en la distancia, darme fuerzas y valor cada vez que creí que no podía más. Jessica gracias por el apoyo incondicional en los últimos meses, espero algún día darte la mitad del amor que me has dado, tu sabes que te adoro, no te imaginas lo orgullosa que estoy de ti. A mi padre Gabriel Cárdenas y mi hermano Gabriel Guillermo gracias por nunca juzgarme y siempre creer en mis capacidades y por tanta comprensión.

A mi abuela, Juana Balaguera, por sus consejos y su amor, a mi tía, Teresa, gracias por ser tan noble y justa, eres la persona más bella que conozco. A mi prima, Nataly, sabes que eres una hermana más para nosotras, estoy segura de que siempre estaremos juntas. Al resto de mi familia gracias por todo el apoyo. A mi novio, Adnen Koteich, no hay palabras para expresarte mi agradecimiento, es tanto lo que te debo, gracias por hacerme feliz, eres una de las personas más importantes en mi vida.

- Quiero agradecer muy especialmente a mi tutor, el profesor Carlos Uzcátegui, por su apoyo desinteresado a lo largo de todos mis estudios, usted ha sido mi mayor motivación, gracias por su tiempo y sabios consejos. A los profesores Jesús Pérez Sánchez y Marcos Lizana por ser excelentes personas y docentes. Los tres me han inspirado a seguir y dar lo mejor de mi, les debo

todo lo que sé. Al profesor Diómedes Bárcenas por ser un amigo de todos sus alumnos, gracias por la confianza y el apoyo.

- A Rubén por demostrarme lo incondicional que puede ser un amigo, si tuviera que enumerar aquí lo que has hecho por mi necesitaría otra hoja, nunca podré pagarte todo lo que has hecho por mi, quiero que sepas que muchas veces me has dejado sin palabras por tú apoyo desinteresado, de verdad gracias por todo, sabes que siempre podrás contar conmigo.

- A Dalia por apoyarme tanto cuando Wuendy se fue, sin ti no lo habria podido superar, tu sabes que te quiero muchisimo, a Paola, por ser tan "pana", estoy muy feliz de tenerte como amiga, Elizabeth gracias por ofrecerme tu ayuda cuando la necesité, eso nunca lo olvidaré. Ustedes son mis amigas para las buenas y las malas. Igualmente quiero agradecer a Begui, por sus oportunos abrazos y por motivarme a mejorar cada día. María Lourdes y Dairube por su amistad, muchas gracias. Finalmente quiero agradecer a Raúl y José por toda la ayuda desinteresada que me han dado, he aprendido mucho de ustedes. Edixon, Chang, Franklin, William gracias muchachos ustedes también son mis amigos.

- A la Universidad de los Andes, a la Facultad de Ciencias y al Departamento de Matemáticas.

- Al CDCHT por el financiamiento parcial de este trabajo con el proyecto

N° C-1300-04-05-F.

- A todas las demás personas que de una u otra manera me ayudaron a llegar hasta aquí. Perdonen si no aparecen en esta lista, pero sepan que en mi mente todos siempre quedaran.

Mil Gracias a todos.

Índice general

Introducción	5
1. Topologías Alexandroff	7
2. La topología digital	18
3. Componentes en el plano digital	29
4. El teorema de la curva de Jordan	35
Bibliografía	39

Introducción

El objetivo de este trabajo es demostrar el teorema de la curva de Jordan para el plano digital. El primer enfoque lo hizo Azriel Rosenfeld en 1970 usando conceptos de teoría de grafos.

Vamos a enunciar el teorema de la curva de Jordan en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si J es una curva cerrada simple, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - J$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Para enunciar la versión de Rosenfeld en el plano digital necesitamos algunas definiciones. Las 4-vecindades de $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ son los cuatro puntos $(x \pm 1, y)$ y $(x, y \pm 1)$; la 8-vecindad son los 4-vecinos y los puntos $(x \pm 1, y \pm 1)$. Si $k = 4$ ó 8 , un k -camino es una sucesión finita P_0, P_1, \dots, P_n en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $P_i - 1$ es un k -vecino de P_i , $1 \leq i \leq n$. Un conjunto S es k -conexo, si cualquier dos puntos en S pueden ser unidos por un k -camino en S . Una k -curva de Jordan es un conjunto finito k -conexo que contiene exactamente dos k -vecinos para cada uno de sus puntos. Una componente es un conjunto maximal conexo.

En el artículo [1] **teorema 3.3** aparece el siguiente resultado.

Una k -curva con al menos cinco puntos separa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en exactamente dos k' -componentes, donde $\{k, k'\} = \{4, 8\}$.

El trabajo de Yung, Kopperman y Meyer en [2] fue darle un enfoque topológico a este teorema. Aquí daremos una explicación detallada de este trabajo. En el capítulo 1 estudiaremos algunas propiedades de las topologías Alexandroff.

Estos espacios topológicos generalizan a los espacios topológicos finitos y tienen una característica muy especial, a cualquiera de ellos se le puede asociar un pre-orden, conocido como

el pre-orden de especialización, denotado por \leq_τ , (ver **teorema 1.6**). Todas las propiedades topológicas de (X, τ) se pueden caracterizar en términos de este pre-orden. Por ejemplo, las funciones continuas de estos espacios topológicos son precisamente las funciones que preservan el pre-orden de especialización (ver **teorema 1.15**), otro hecho interesante es que un espacio Alexandroff (X, τ) es conexo si, y sólo si, (X, \leq_τ) es conexo (ver **teorema 1.21**).

En el capítulo 2 definimos la topología digital, que es simplemente una topología Alexandroff sobre \mathbb{Z} , que denotaremos por τ_d . En esta topología los conexos son precisamente los intervalos de \mathbb{Z} .

El objetivo principal del capítulo 3 es probar el **teorema 3.3**, el cual dice que dado un arco digital en un plano digital es lo mismo contar las componentes del plano menos el arco que contar las componentes del borde menos el arco. Este es un paso previo muy importante en la demostración del teorema de la curva de Jordan.

Finalmente el capítulo 4 consiste en la demostración del teorema de la curva de Jordan.

Topologías Alexandroff

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de las topologías Alexandroff. Estos espacios topológicos tienen una característica muy especial, a cualquiera de ellos se le puede asociar un pre-orden, conocido como el pre-orden de especialización, denotado por \leq_τ , (ver **teorema 1.6**). Todas las propiedades topológicas de (X, τ) se pueden caracterizar en términos de este pre-orden. Por ejemplo, las funciones continuas de estos espacios topológicos son precisamente las funciones que preservan el pre-orden de especialización (ver **teorema 1.15**), otro hecho interesante es que un espacio Alexandroff (X, τ) es conexo si, y sólo si, (X, \leq_τ) es conexo (ver **teorema 1.21**).

Definición 1.1

Una topología sobre X se dice que es Alexandroff si la intersección arbitraria de abiertos es abierto. Denotaremos por $AT(X)$ a la colección de todas las topologías Alexandroff sobre X . Dada una topología τ sobre X , no necesariamente Alexandroff, y $x \in X$, denotaremos por N_x^τ o simplemente por N_x al siguiente conjunto:

$$N_x^\tau = \bigcap \{V \in \tau : x \in V\}.$$

Teorema 1.2

Sea τ una topología sobre X . Los siguientes resultados son equivalentes:

(I) τ es Alexandroff.

(II) Para todo $x \in X$ existe el abierto más pequeño que contiene a x (llamado la vecindad irreducible de x).

(III) Cada N_x^τ , con $x \in X$, es abierto y además $\{N_x^\tau : x \in X\}$ es una base para τ .

(IV) Para todo $A \subset X$ se cumple que:

$$cl(A) = \bigcup_{x \in A} cl(\{x\}).$$

(V) La unión de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

Demostración.

(I) \Rightarrow (II)

Es claro que cada N_x^τ es abierto y es la vecindad irreducible de x .

(II) \Rightarrow (III)

Es claro que N_x^τ es el menor abierto que contiene a x dado por (ii). Mostraremos que $\{N_x^\tau : x \in X\}$ es una base para τ . Sea $x \in X$ y $V \in \tau$ arbitrario tal que $x \in V$. Tenemos que $x \in N_x^\tau$ y $N_x^\tau \subset V$. En consecuencia $\{N_x^\tau : x \in X\}$ es una base para τ .

(III) \Rightarrow (IV)

Mostraremos que para todo $A \subset X$ se cumple que $cl(A) = \bigcup_{x \in A} cl(\{x\})$.

Sea $y \in cl(A)$, entonces $N_y^\tau \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto existe $x \in A$ tal que $x \in N_y^\tau$. Así, $y \in cl(\{x\})$. En consecuencia $y \in \bigcup_{x \in A} cl(\{x\})$.

La otra inclusión es obvia.

(IV) \Rightarrow (V)

Sea $B = \{B_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados. Mostraremos que $\bigcup_{i \in I} B_i$ es cerrado. Por (IV) tenemos que $cl(B) = \bigcup_{x \in B} cl(\{x\}) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in B_i} cl(\{x\}) = \bigcup_{i \in I} cl(B_i)$. Como cada

B_i es cerrado, entonces $\bigcup_{i \in I} cl(B_i) = \bigcup_{i \in I} B_i = B$.

(V) \Rightarrow (I)

Sea $B = \{B_i : i \in I\}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos. Mostraremos que $\bigcap_{i \in I} B_i \in \tau$. Tenemos que $\bigcap_{i \in I} B_i = (\bigcup_{i \in I} B_i^c)^c$. Como B_i es abierto, entonces B_i^c es cerrado. Así, $(\bigcup_{i \in I} B_i^c)^c$ es abierto, pues $\bigcup_{i \in I} B_i^c$ es cerrado por (v).

■

Observación 1.3

Sea τ una topología AT sobre X y $A \subset X$. Es fácil ver que $x \in cl(A)$ si, y sólo si, $N_x^\tau \cap A \neq \emptyset$. Por otra parte, $x \in int(A)$ si, y sólo si, $N_x^\tau \subset A$.

Ejemplo 1.4

Toda topología con un número finito de abiertos es AT, en particular toda topología sobre un conjunto finito es AT

Ahora veremos una manera de asociar una topología a un pre-orden.

Definición 1.5

Sea \leq un pre-orden sobre X , es decir, una relación reflexiva y transitiva. La topología asociada a \leq , denotada por $\Gamma(\leq)$, es la menor topología que contiene a los conjuntos $\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}$ para cada $x \in X$.

Proposición 1.6

La topología $\Gamma(\leq)$ es AT para todo pre-orden \leq sobre X y $N_x^{\Gamma(\leq)} = \uparrow x$.

Demostración.

Mostraremos que $\Gamma(\leq)$ es *AT*. Veamos que el conjunto $\{\uparrow x : x \in X\}$ es una base para $\Gamma(\leq)$.

Es claro que $\uparrow x \in \Gamma(\leq)$ (ver **definición 1.5**). Ahora veamos que todos los conjuntos $\uparrow x$, con $x \in X$, forman una base para $\Gamma(\leq)$. Sabemos que los conjuntos $\uparrow x$ forman una sub-base de $\Gamma(\leq)$, por lo tanto basta intersectar dos elementos de la sub-base y ver que el resultado se puede escribir como uniones arbitrarias de elementos de la sub-base.

Sea $x \in \uparrow y \cap \uparrow z$. Como $x \geq y$ y $x \geq z$, entonces $\uparrow x \subset \uparrow y \cap \uparrow z$.

Por lo tanto:

$$\uparrow y \cap \uparrow z = \bigcup_{x \in \uparrow y \cap \uparrow z} \uparrow x$$

En consecuencia el conjunto $\{\uparrow x : x \in X\}$ es una base para $\Gamma(\leq)$.

Mostraremos que $N_x^{\Gamma(\leq)} = \uparrow x$. Es decir, $\uparrow x$ es la vecindad minimal de x con respecto a $\Gamma(\leq)$.

Sea $x \in N_x^{\Gamma(\leq)}$. Existe $z \in X$ tal que $x \in \uparrow z \subset N_x^{\Gamma(\leq)}$. De modo que $z \leq x$, y en consecuencia $\uparrow x \subset \uparrow z$. Así, $\uparrow x \subset N_x^{\Gamma(\leq)}$.

La otra inclusión es obvia a partir de la definición de $N_x^{\Gamma(\leq)}$.

■

Proposición 1.7

Si $\Gamma(\leq_1) = \Gamma(\leq_2)$, entonces $\leq_1 = \leq_2$

Demostración.

La **proposición 1.6** nos garantiza que $\uparrow_1 x$ y $\uparrow_2 x$ son abiertos. Por lo tanto, $\uparrow_1 x = \uparrow_2 x$. Así, $\uparrow_1 x = N_x^{\Gamma(\leq_1)} = N_x^{\Gamma(\leq_2)} = \uparrow_2 x$ y en consecuencia los órdenes son iguales. ■

Teorema 1.8

Sea τ una topología sobre X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) $\tau \in AT$

(II) Existe un único pre-orden \leq sobre X tal que $\tau = \Gamma(\leq)$.

Demostración.

\implies)

Sea \leq dado por:

$$x \leq y \text{ si, y sólo si, } x \in cl_\tau(\{y\}). \quad (1)$$

Mostraremos que $\Gamma(\leq) = \tau$. Como τ es AT , tenemos que $\{N_x^\tau : x \in X\}$ es una base para la topología τ . Por lo tanto, basta ver que $N_x^\tau = \uparrow x$.

Sea $y \in N_x^\tau$ si, y sólo si, $y \in V$ para todo $V \in \tau$ tal que $x \in V$, entonces $x \in cl_\tau(\{y\})$. Así $x \leq y$. Por lo tanto, $y \in \uparrow x$.

\impliedby)

Es obvio a partir de la **proposición 1.6**.

■

Definición 1.9

El pre-orden \leq dado por (1) se llama el pre-orden de especialización de τ y lo denotaremos por \leq_τ .

Observación 1.10

Note que la $cl(\{x\}) = \downarrow x$, donde $\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\}$.

Recordemos que un espacio topológico es T_0 si dados dos puntos $x, y \in X$ distintos existe un abierto U tal que contiene a sólo uno de los puntos x, y . Se dice que τ es T_1 si dados dos puntos

$x, y \in X$ distintos existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ y $T_{1/2}$ si todo punto es abierto o cerrado.

Proposición 1.11

Si τ una topología AT, entonces:

(I) τ es T_0 si, y sólo si, \leq_τ es antisimétrica (y en consecuencia es un orden).

(II) τ es T_1 si, y sólo si, τ es la topología discreta.

(III) τ es $T_{1/2}$ si, y sólo si, \leq_τ es un orden tal que todo punto es minimal o maximal.

Demostración.

Parte I:

\implies)

Sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$ ó $x \notin V$ y $y \in V$.

Caso I: Si $x \in V$ y $y \notin V$, entonces $y \notin N_x^\tau$, por lo tanto $x \not\leq_\tau y$.

Caso II: Si $x \notin V$ y $y \in V$, entonces $x \notin N_y^\tau$, por lo tanto $x \not\geq_\tau y$.

\impliedby)

Caso I: Si $x \not\leq_\tau y$, entonces $y \notin N_x^\tau$, por lo tanto $N_x^\tau \not\subseteq N_y^\tau$. Así $x \notin N_y^\tau$ y $y \in N_y^\tau$. Basta tomar $V = N_y^\tau$.

Caso II: Si $y \geq_\tau x$, entonces $x \in N_y^\tau$, por lo tanto $N_x^\tau \subset N_y^\tau$. Así $y \notin N_x^\tau$ y $x \in N_x^\tau$. Basta tomar $V = N_x^\tau$. Por lo tanto τ es T_0

Parte II:

\implies)

Sea $A \subset X$, entonces $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, como τ es T_1 cada $\{x\}$ es abierto. Por lo tanto A es abierto.

\impliedby)

Es claro que $\{x\}$ es abierto, pues τ es la topología discreta.

Parte III:

Sea $x \in X$. Como τ es $T_{1/2}$ todo punto es abierto o cerrado.

Supongamos que $\{x\}$ es abierto, como τ es AT , tenemos que:

$$\uparrow x = \{x\} \text{ si, y sólo si, } \{x\} \text{ es maximal.}$$

Supongamos que $\{x\}$ es cerrado, como τ es AT , tenemos que:

$$\downarrow x = \{x\} \text{ si, y sólo si, } \{x\} \text{ es minimal.}$$

■

Sean X y Y espacios topológicos. La topología producto en $X \times Y$ es la topología generada por los conjuntos $U \times V$, donde U es abierto en X y V es abierto en Y .

Proposición 1.12

Sean $(X, \tau), (Y, \rho)$ espacios topológicos AT . Si $(x, y) \in X \times Y$, entonces:

(I) $N_{(x,y)} = N_x \times N_y$. En particular la topología producto en $X \times Y$ es AT .

(II) $cl(\{(x, y)\}) = cl(\{x\}) \times cl(\{y\})$.

Demostración.

Parte I:

Es claro que $N_x \times N_y$ es abierto. Veamos que $N_x \times N_y \subset U \times V$ para todo $U \in \tau$ que contenga a x y para todo $V \in \rho$ que contenga a y . Como los espacios topológicos X, Y son AT , tenemos que $N_x \subset U$ y $N_y \subset V$. Por lo tanto, $N_x \times N_y$ es la vecindad irreducible de (x, y) .

Parte II:

Notemos que $(w, z) \in cl(\{(x, y)\})$ si, y sólo si, $(x, y) \in N_{(w,z)}$. En virtud de la **proposición 1.12** tenemos que $x \in N_w$ y $y \in N_z$. Por lo tanto, $w \leq_\tau x$ y $z \leq_\rho y$. Así $w \in cl(\{x\})$ y $z \in cl(\{y\})$.

■

Proposición 1.13

Sean $(X, \tau), (Y, \rho)$ espacios topológicos AT. El pre-orden de especialización (denotado por \leq) de la topología producto en $X \times Y$ en términos de los pre-órdenes de especialización de X y de Y \leq_τ y \leq_ρ respectivamente, es el siguiente:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ si, y sólo si, } x_1 \leq_\tau x_2 \text{ y } y_1 \leq_\rho y_2.$$

Demostración.

Notemos que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si, y sólo si, $x_2 \in N_{x_1}^\tau$ y $y_2 \in N_{y_1}^\rho$. En consecuencia $x_1 \leq_\tau x_2$ y $y_1 \leq_\rho y_2$.

■

Definición 1.14

Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $x \in X$ definimos el **conjunto adyacencia** de x de la siguiente manera:

$$A(x) = (N_x \cup cl(\{x\})) - \{x\}.$$

Teorema 1.15

Sean (X, τ) y (Y, ρ) dos espacios AT y $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f es continua si, y sólo si, $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho)$ es isotónica, es decir, si $x \leq_\tau z$, entonces $f(x) \leq_\rho f(z)$ para todo $x, z \in X$.

Demostración.

\implies)

Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq_\tau y$. Mostraremos que $f(x) \leq_\rho f(y)$. Como f es continua, entonces $N_x^\tau \subset f^{-1}(N_{f(x)}^\rho)$. Por hipótesis $y \in N_x^\tau$. Así tenemos que $y \in f^{-1}(N_{f(x)}^\rho)$, en conse-

cuencia $f(y) \in N^\rho_{f(x)}$. Por lo tanto, $f(x) \leq_\rho f(z)$.

\Leftarrow)

Basta mostrar que $f^{-1}(N^\rho_{f(x)})$ es abierto para todo $x \in X$. Es decir, para todo $y \in f^{-1}(N^\rho_{f(x)})$ se cumple que $N^\tau_y \subset f^{-1}(N^\rho_{f(x)})$. Sea $y \in f^{-1}(N^\rho_{f(x)})$. Como $f(y) \in N^\rho_{f(x)}$, entonces $f(x) \leq_\rho f(y)$. Tomemos $z \in N^\tau_y$. Como $y \leq_\tau z$, y f es isótonica, entonces $f(y) \leq_\rho f(z)$. Al ser $f(x) \leq_\rho f(y)$, se tiene que $f(x) \leq_\rho f(z)$. Así, $f(z) \in N^\rho_{f(x)}$, y en consecuencia $z \in f^{-1}(N^\rho_{f(x)})$. ■

Corolario 1.16

Sean (X, τ) y (Y, ρ) dos espacios AT y $f : X \rightarrow Y$. Entonces f es un homeomorfismo topológico si, y sólo si, f es un isomorfismo de orden con respecto a los órdenes \leq_τ y \leq_ρ .

Definición 1.17

Dada una relación binaria $E \subset X \times X$ diremos que un conjunto finito

$$P = \{(x_i, x_{i+1}) : 1 \leq i < n\} \subset E$$

es un **E-camino** de x a y , si $x_1 = x$ y $x_n = y$.

Decimos que x está relacionado con y , denotándolo $x \sim y$, si, y sólo si, existe un E-camino de x a y ó de y a x .

De aquí en adelante cuando trabajemos con un pre-orden llamaremos a los E-caminos simplemente caminos.

La siguiente proposición es obvia.

Proposición 1.18

La relación \sim es de equivalencia.

Definición 1.19

Dado un pre-orden \leq sobre X , diremos que \leq es un **pre-orden conexo** si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un camino de x a y con respecto a esta relación:

$$E = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : y \leq x\}.$$

Teorema 1.20

Sea τ una topología AT sobre X . Los siguientes resultados son equivalentes:

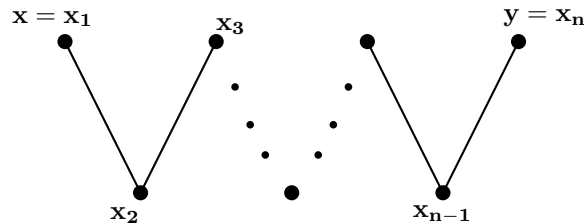
- (i) (X, τ) es conexo.
- (ii) La relación \leq_τ es un pre-orden conexo.

Demostración.

\Leftarrow)

Supongamos que (X, τ) no es conexo. Sean U y V abiertos disjuntos no vacíos cuya unión es todo X . Sea $x \in U$ y $y \in V$. Por hipótesis existe un camino de x a y .

Hay varios casos que considerar. Solo analizaremos el caso indicado a continuación. Supongamos que el camino es el siguiente:



Como V es abierto y $V^c = U$, entonces U es cerrado. Como $x \in U$ y $x_2 \leq_\tau x$, entonces $x_2 \in U$. U es abierto por hipótesis y $x_3 \leq_\tau x_2$, entonces $x_3 \in U$. Por otro lado $x_4 \leq_\tau x_3$, y al ser U cerrado se tiene que $x_4 \in U$. Siguiendo este procedimiento tenemos que $x_{n-1} \in U$. Como

$y = x_n \in U$ y U es abierto, entonces $y \in U$. Contradicción, pues $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

\implies)

Sea $x \in X$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\Theta_x = \{z \in X : \text{existe un camino de } z \text{ a } x\}.$$

Mostraremos que Θ_x es abierto y cerrado.

Θ_x es abierto: Sea $p \in \Theta_x$. Por definición existe un camino de p a x . Mostraremos que $N_p \subset \Theta_x$. Sea $q \in N_p$. Afirmamos que existe un camino de q a x . En efecto, considere el camino de p a x unido con el par (q, p) .

Θ_x es cerrado: Sea $p \in \Theta_x$. Existe un camino de p a x . Mostraremos que $cl\{p\} \subset \Theta_x$. Sea $q \in cl\{p\}$. Afirmamos que existe un camino de q a x . En efecto, considere el camino de p a x unido con el par (q, p) .

Como (X, τ) es conexo, entonces $\Theta_x = X$, pues $x \in \Theta_x$. Así, (X, τ) es conexo porque para todo $z, y \in X$ existe un camino de z a y . Debido a que existe un camino de z a x y otro de x a y .

■

De la **definición de adyacencia 1.14** notemos que, $y \in A(x)$ si, y sólo si, $\{x, y\}$ es \leq_τ conexo. Así del **teorema 1.20** se obtiene inmediatamente el siguiente resultado que será usado en el estudio de la topología digital.

Corolario 1.21

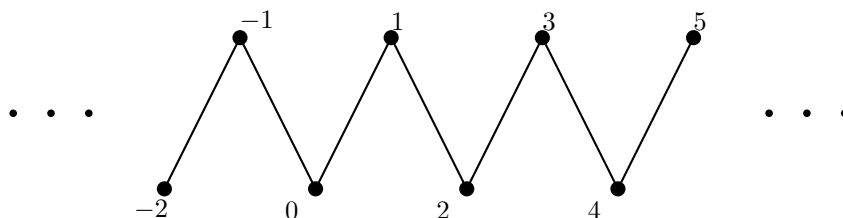
Sea X un espacio topológico AT y $x, y \in X$. Se tiene que $y \in A(x)$ si, y sólo si, $\{x, y\}$ es conexo.

La topología digital

Para construir el plano digital vamos a definir una topología AT sobre \mathbb{Z} , conocida como la topología digital, la denotaremos por τ_d . Esta es la única topología en la que los conexos son precisamente los intervalos de \mathbb{Z} . Un resultado importante de este capítulo por su constante uso a lo largo de este trabajo es la **proposición 2.15**, donde caracterizamos los arcos digitales a partir del conjunto adyacencia de un punto en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ver **definición 1.14**).

Definición 2.1

El siguiente pre-orden dado por $2k \leq 2k + 1$ & $2k + 2 \leq 2k + 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ es conocido como el **orden digital** y lo denotaremos por \leq_d .



Definición 2.2

La **topología digital** es $\Gamma(\leq_d)$, la denotaremos por τ_d (ver la **definición 1.5**).

El pre-orden de especialización de esta topología es \leq_d (ver **definición 1.9**). De la **proposición 1.6** y del **teorema 1.2** tenemos que las vecindades minimales de τ_d están dadas por $N_x^{\tau_d} = \{y \in \mathbb{Z} : x \leq_d y\}$ y ellas forman una base para τ_d .

Teorema 2.3

Los conexos de (\mathbb{Z}, τ_d) son exactamente los intervalos finitos de \mathbb{Z} .

Demostración.

\implies)

Sea $C \subset \mathbb{Z}$ conexo. Supongamos que C no es un intervalo, entonces existen $x, y \in C$ tal que $x \leq z \leq y$ y $z \notin C$. Mostraremos que $(-\infty, z) \cap C$ es abierto en C . Si z es par, entonces $(-\infty, z) = \bigcup_{x < z} \uparrow x$. Por lo tanto, $(-\infty, z) \cap C$ es abierto en C . Si z es impar, entonces $(-\infty, z] \cap C = (-\infty, z) \cap C$, debido a que $z \notin C$. Análogamente se muestra que $(z, +\infty) \cap C$ es abierto. En consecuencia $C \subset ((z, +\infty) \cap C) \cup ((-\infty, z) \cap C)$. Por lo tanto, C no es conexo, esta contradicción surge de suponer que C no es un intervalo.

\impliedby)

Sea D un intervalo finito de \mathbb{Z} , es claro que (D, \leq_d) es un pre-orden conexo (ver **definición 1.19** y **definición 2.1**). Así, en virtud de la **proposición 1.20** tenemos que (D, τ_d) es conexo. ■

Teorema 2.4

Sea X un espacio topológico conexo y $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ una función continua. Si $m, n \in f(X)$ con $n \leq m$ y $n < p < m$, entonces $p \in f(X)$.

Demostración.

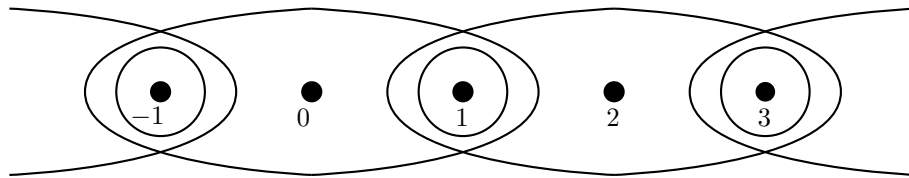
Inmediata a partir de la **proposición 2.3**. ■

En un sentido la topología digital está unívocamente determinada. Como la recta real, este espacio satisface la siguiente condición, la cual justifica que sea llamada la recta digital.

Definición 2.5

Un espacio topológico se dice que es un espacio ordenado conexo (COTS) si es conexo y además satisface que: para cualquier x_1, x_2, x_3 distintos en X , existe un i tal que x_j y x_k caen en distintas componentes de $X - \{x_i\}$, donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Se muestra (ver [3] **teorema 2.7**) que cada COTS sobre X induce un orden total $<$ en X tal que si x no es un punto extremo, las componentes de $X - \{x\}$ son $\{y : y > x\}$ y $\{y : y < x\}$. Este orden es único salvo inversiones. En el caso de la recta real y la recta digital este orden es el orden usual. La topología digital es única en el sentido indicado en la siguiente proposición.



Proposición 2.6

Todo COTS localmente finito (es decir que todo punto tiene una vecindad finita con clausura finita) con al menos tres puntos es homeomorfo a un intervalo de \mathbb{Z} .

La demostración de la proposición 2.6 está en [2] (ver **proposición 3.2**).

Los intervalos de \mathbb{Z} jugarán el papel de los intervalos de \mathbb{R} . Recordemos la definición de **camino** en un espacio topológico, es el rango de una función continua con dominio un intervalo compacto de \mathbb{R} .

Definición 2.7

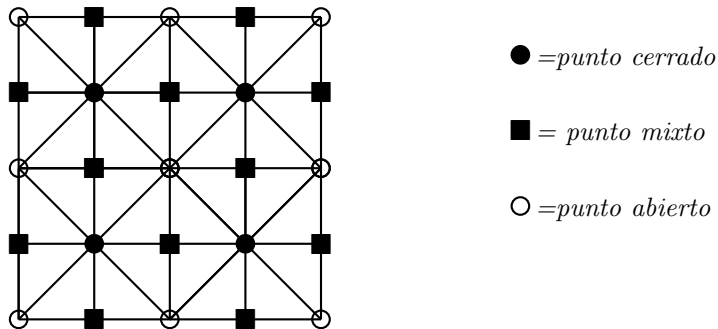
Un **camino digital** en un espacio topológico X es el rango de una función continua con dominio un intervalo finito de \mathbb{Z} .

Definición 2.8

Un **arco digital** en un espacio topológico X es un subconjunto homeomorfo a un intervalo finito de \mathbb{Z} .

Definición 2.9

Un espacio $X \times Y$ con la topología producto, donde X y Y son intervalos finitos de \mathbb{Z} con $|X| \geq 3$ y $|Y| \geq 3$, lo llamaremos **plano digital finito**. A lo largo de este trabajo nos referiremos a los planos digitales finitos simplemente como planos digitales.



Observación 2.10

$\{(2n+1, 2m+1)\}$ es abierto en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\{(2n, 2m)\}$ es cerrado en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Esos se llaman puntos **puros**, los puntos **mixtos** son de la forma $\{(2n, 2m+1)\}$ ó $\{(2n+1, 2m)\}$.

Lema 2.11

Sea (x, y) en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El conjunto adyacencia $A(x, y)$ de (x, y) (ver **proposición 1.14**) es el siguiente conjunto:

Si (x, y) es puro, entonces

$$A(x, y) = \{x - 1, x, x + 1\} \times \{y - 1, y, y + 1\} - \{(x, y)\}.$$

Si (x, y) es mixto, entonces

$$A(x, y) = (\{x - 1, x, x + 1\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y - 1, y, y + 1\}) - \{(x, y)\}.$$

Demostración.

Recordemos que $N_x = \{x\}$ si $\{x\}$ es impar y $N_x = \{x - 1, x, x + 1\}$ si $\{x\}$ es un par. Note que $cl\{x\} = \{x\}$ si $\{x\}$ es par y $cl\{x\} = \{x - 1, x, x + 1\}$ si $\{x\}$ es impar. La **proposición 1.12** nos asegura que la vecindad minimal de (x, y) es $N_x \times N_y$. En consecuencia $cl\{(x, y)\} = cl\{x\} \times cl\{y\}$.

Tenemos que $A(x, y) \cup \{(x, y)\} = \{x - 1, x, x + 1\} \times \{y - 1, y, y + 1\}$ si x, y son impares o si x, y son pares.

Si $\{x\}$ es impar y $\{y\}$ es par, entonces $A(x, y) \cup \{(x, y)\} = (\{x - 1, x, x + 1\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y - 1, y, y + 1\})$. El resultado es análogo si $\{x\}$ es par y $\{y\}$ es impar.

■

Ejemplos 2.12

La adyacencia de (x, y) en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se indica a continuación.



○ = punto puro

■ = punto mixto

Observación 2.13

Sea $X \times Y$ un plano digital finito y $(x, y) \in X \times Y$. El conjunto adyacencia de (x, y) en $X \times Y$ está dado por $A(x, y) \cap X \times Y$, usaremos $A(x, y)$ para denotar el conjunto adyacencia de

(x, y) en $X \times Y$, el contexto lo dejará claro.

Definición 2.14

El **borde** de $X \times Y$, denotado por $B(X \times Y)$, es el siguiente conjunto:

$$\{(x, y) : x \text{ ó } y \text{ es un punto extremo}\}.$$

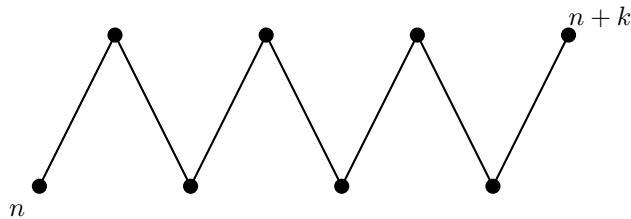
Proposición 2.15

Sea C un espacio finito conexo que contiene dos puntos distintos x y z . C es un arco digital con extremos x y z si, y sólo si, C es T_0 $|A(x)| = |A(z)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para cualquier $w \in C - \{x, z\}$.

Demostración.

\implies)

Note que todos los intervalos finitos de \mathbb{Z} con la topología digital cumplen la proposición.



Sea f un homeomorfismo topológico de C en un intervalo finito de \mathbb{Z} . Basta ver que $|A(x)| = |A(f(x))|$. Recordemos que $A(x) = (N_x \cup cl(\{x\})) - \{x\}$, $A(f(x)) = (N_{f(x)} \cup cl(\{f(x)\})) - \{f(x)\}$ (ver **definición 1.14**). Como f es un homeomorfismo topológico, tenemos que $|A(x)| = |A(f(x))|$.

\impliedby)

Vamos a hacer esta demostración por inducción en la cardinalidad de C . Si $n = 2$, tenemos que $x \in A(y)$, en consecuencia $x \leq y$ y por ser T_0 , tenemos que $y \not\leq x$. Es claro que $C = \{x, y\}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \cap \mathbb{Z}$. Supongamos que es cierto para $n = k$. Mostraremos que es cierto para $n = k + 1$. Suponga que $|C| = k + 1$. Sean $x, y \in C$ tales que $|A(x)| = |A(y)| = 1$.

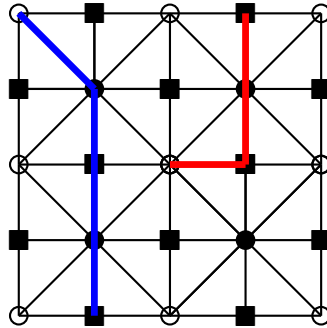
Veamos que $x \notin A(y)$. En efecto, pues $|A(y)| = 1$ y $|A(x)| = 1$. Si $x \in A(y)$ tendríamos que $\{x, y\}$ sería una componente de C . Esto es una contradicción pues C es conexo y $|C| \geq 3$.

Sea $z \in A(y)$, es claro que $x \neq y$. Sabemos que $|A(z) \cap C| = 2$. Si $D = C - \{y\}$, entonces $|A(z) \cap D| = 1$. Por hipótesis inductiva tenemos que D es homeomorfo a un intervalo finito de \mathbb{Z} . Sea $f : \{n, \dots, n + k - 1\} \rightarrow D$ un homeomorfismo. Vamos a extender esta función $g : \{n, \dots, n + k, n + k\} \rightarrow C$ donde $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \{n, \dots, n + k - 1\}$ y $g(n + k) = y$. Es claro que g es un homeomorfismo, por lo tanto C es un arco.

■

Ejemplos 2.16

En el siguiente plano digital se encontrará dos gráficos. El azul es ejemplo de arco y el rojo no lo es.



Definición 2.17

J es una **curva digital de Jordan** si, y sólo si, J es finito, conexo con $|J| \geq 4$ y $J - \{j\}$ es un arco digital para cada $j \in J$. A lo largo de este trabajo nos referiremos a las curvas digitales

de Jordan simplemente como curvas de Jordan.

Proposición 2.18

J es una curva de Jordan si, y sólo si, J es finito, conexo con $|J| \geq 4$ y $|A(j) \cap J| = 2$ para cada $j \in J$.

Demostración.

\implies)

Sea $j \in J$. Mostraremos que $|A(j) \cap J| = 2$. Es claro que $J - \{j\}$ es un arco. Sean j^-, j^+ los extremos de $J - \{j\}$. La **proposición 2.15** nos garantiza que $|A(j^-) \cap (J - \{j\})| = 1$ y $|A(j^+) \cap (J - \{j\})| = 1$. Sea $v \in A(j^-) \cap (J - \{j\})$. Del **corolario 1.15** tenemos que $\{v, j^-\}$ es conexo. Mostraremos que $\{j, j^-\}$ es conexo.

Sabemos que $J - \{v\}$ es un arco. Mostraremos que $|A(j^-) \cap (J - \{v\})| = 1$. Supongamos que no. Entonces j^- no es extremo de $J - \{v\}$, por lo tanto, $|A(j^-) \cap (J - \{v\})| = 2$. Sean $x, y \in A(j^-) \cap (J - \{v\})$. Sea $z \in J - \{v, x, y\}$. Es claro que $J - \{z\}$ es un arco. Notemos que $|A(j^-) \cap (J - \{z\})| \geq 3$ lo cual es imposible. Por lo tanto, $|A(j^-) \cap (J - \{v\})| = 1$. Sea $u \in A(j^-) \cap (J - \{v\})$. Mostraremos que $u = j$. Supongamos que no, entonces $u \in A(j^-) \cap (J - \{j\})$. Recordemos que $|A(j^-) \cap (J - \{j\})| = 1$. Por lo tanto, $u = v$ lo cual es imposible. En consecuencia $u = j$. Así $j \in A(j^-)$. Por lo tanto, $\{j, j^-\}$ es conexo. La prueba para $\{j, j^+\}$ es análoga. Sea $i \in J - \{j^-, j, j^+\}$. El conjunto $J - \{i\}$ es un arco tal que $|A(j) \cap J| = 2$. Veamos que $\{i, j\}$ no es conexo. Supongamos que sí, entonces tomemos $w \in J - \{i, j^-, j^+\}$. Así tenemos que $|A(j) \cap (J - \{w\})| \geq 3$, lo cual es imposible. En consecuencia $|A(j) \cap J| = 2$.

\impliedby)

Sea $j \in J$. Tenemos que $|A(j) \cap J| = 2$. Sean $x, y \in A(j) \cap J$. Mostraremos que $J - \{j\}$ es un arco con extremos x, y . Es claro que $x \in A(j)$, en consecuencia $j \in A(x)$ y por lo tanto $|A(x) \cap (J - \{j\})| = 1$. Así tenemos que x es un extremo del arco $J - \{j\}$. La demostración es análoga para y . Finalmente por la **proposición 2.15** $J - \{j\}$ es un arco con extremos x, y .

Observación 2.20

Una consecuencia inmediata de la **proposición 2.15** y la **proposición 2.18** es que los arcos digitales y las curvas de Jordan no pueden "dar la vuelta" en un punto mixto.

Lema 2.21

Sea $X \times Y$ un plano digital y C un arco en este plano. Si $f \notin B(X \times Y)$ y f es un extremo de C , entonces $A(f) - C$ es un arco.

Demostración.

Como f es extremo de C , entonces $|A(f) \cap C| = 1$. Sea $f^- \in A(f) \cap C$. Recordemos que $A(f)$ es una curva de Jordan (ver **ejemplos 2.19**). Por lo tanto, $A(f) - \{f^-\}$ es un arco. Note que $A(f) - \{f^-\} = A(f) - C$. En consecuencia $A(f) - C$ es un arco.

■

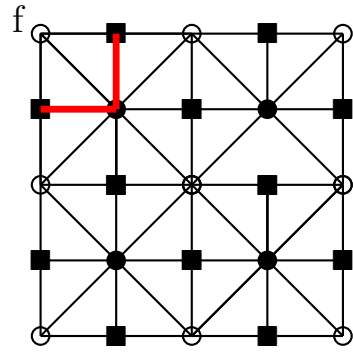
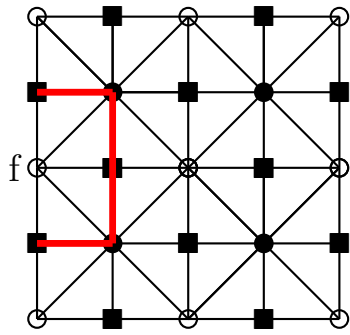
Lema 2.22

Si $f \in B(X \times Y)$, entonces $A(f) \cap (X \times Y)$ es un arco.

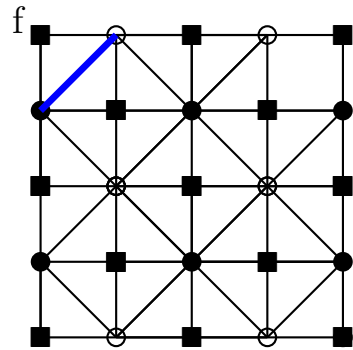
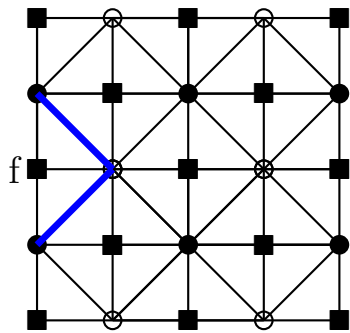
Demostración.

La demostración de este lema es bastante sencilla, en consecuencia sólo daremos los gráficos de los casos.

Caso I: f es puro



Caso II: f es mixto.



■

Capítulo 3

Componentes en el plano digital

El objetivo principal de este capítulo es probar el **teorema 3.3**, el cual dice que dado un arco digital en un plano digital es lo mismo contar las componentes del plano menos el arco que contar las componentes del borde menos el arco. Este es un paso previo muy importante en la demostración del teorema de la curva de Jordan.

El lector notará la importancia de la caracterización de arco digital (**proposición 2.15**) en casi todas las demostraciones, así como la cantidad de detalles que hay que analizar en cada demostración.

Es importante dejar claro que si el lector asume como cierto el **teorema 3.3** puede pasar directamente a la demostración del **teorema de la curva de Jordan**.

Proposición 3.1

Sea $X \times Y$ un plano digital y $B(X \times Y)$ su borde. Si C es un arco en $X \times Y$, entonces todas las componentes de $X \times Y - C$ tocan a $B(X \times Y) - C$.

Demostración.

Supongamos, por el absurdo, que C es un contraejemplo de longitud mínima para la afirmación. Entonces existe un punto p tal que la componente de p en $X \times Y - C$ no toca a $B(X \times Y) - C$.

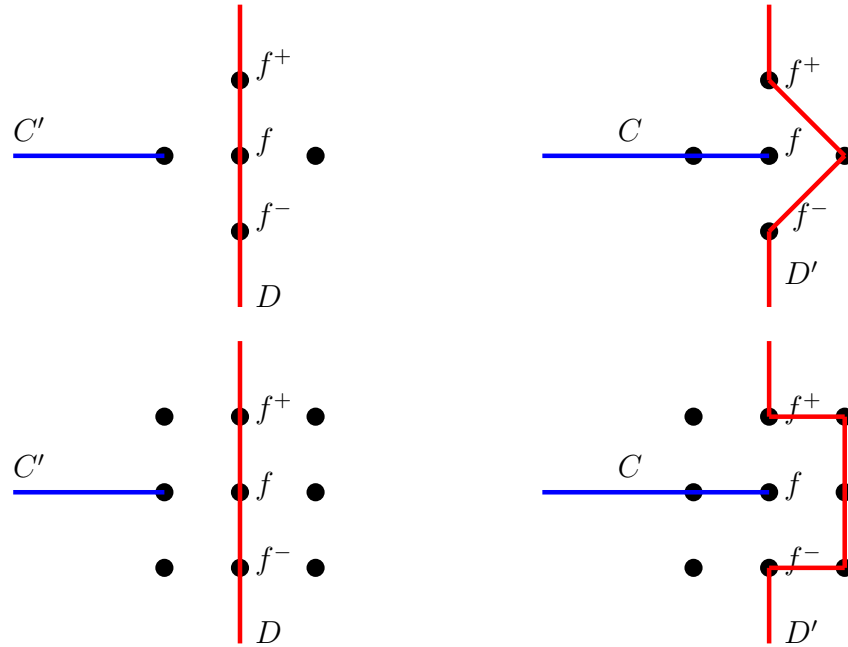
Sea f un extremo de C . Consideremos $C' = C - \{f\}$. Este es un arco de longitud menor. Así la componente de p en $X \times Y - C'$ toca a $B(X \times Y) - C$. Por lo tanto, existe un arco $D \subset X \times Y - C$ de p a j , para algún $j \in B(X \times Y) - C$. Veamos que $f \in D$. En efecto si $f \notin D$ tenemos que $D \subset X \times Y - C$ contradiciendo la elección de C .

Vamos a construir un arco $D' \subset X \times Y - C$ que conecte p con j , contradiciendo de esta manera que p y j estén en distintas componentes de $X \times Y - C$. Vamos a construir este arco a partir de $D - \{f\}$ usando $A(f)$.

Caso I: $f \notin B(X \times Y)$. Mostraremos que f no es extremo de D . Basta ver que $f \neq j$ y $f \neq p$. Como $f \notin B(X \times Y)$, entonces $f \neq j$, además $f \in C$ y $p \in X \times Y - C$ lo que trae como consecuencia que $f \neq p$. El **lema 2.15** nos dice lo siguiente $|A(f) \cap D| = 2$. Llamaremos a estos puntos f^-, f^+ . El **lema 2.21** nos asegura que $A(f) - C = L$ es un arco. Notemos que $f^+ \in [f^-, j] \cap L$ y $f^- \in [j, f^+] \cap L$.

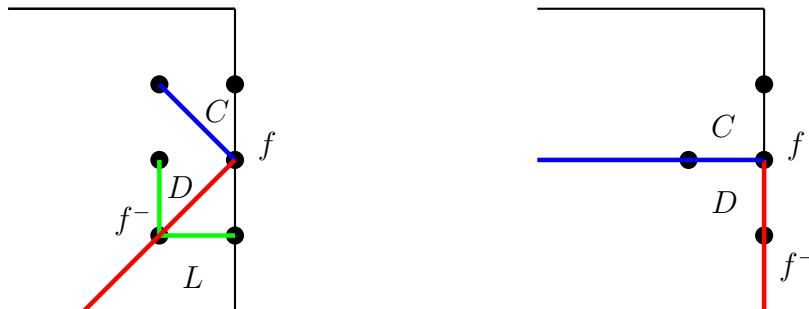
Así, $[p, f^-] \cup L \cup [f^+, j]$ es conexo, por lo tanto existe un camino D' de p a j .

Ahora veamos los gráficos de la construcción de D' en los casos en que f es un punto puro y f es un punto mixto. Tenemos que $A(f) \subset X \times Y$, pues $f \notin B(X \times Y)$.



Caso II: $f \in B(X \times Y)$. En virtud del **lema 2.22** $A(f) \cap X \times Y$ es un arco. Veamos que f es

un punto extremo de D . En efecto, D es un camino de p a $B(X \times Y)$. El **lema 2.15** nos dice que $|A(f) \cap D| = 1$. Sea $f^- \in A(f) \cap D$. Notemos que $f^- \notin C$, pues $D \cap C = \{f\}$. Consideremos $X \times Y \cap A(f) - C$. Sea L la componente conexa de este conjunto que contiene a f^- . El conjunto $[p, f^-] \cup L$ es conexo, contiene a p y toca el borde. Por lo tanto, existe un camino D' de p a un punto del borde.



Proposición 3.2

Si D es un arco en $X \times Y$ que toca más de una componente de $B(X \times Y) - C$, entonces D toca a C .

Demostración.

Supongamos que esta proposición no es cierta. Sean X, Y un contraejemplo donde X, Y son de tamaño minimal. En estas condiciones podemos escoger C, D arcos en $X \times Y$ tales que el arco D toca más de una componente de $B(X \times Y) - C$, D no toca a C y C, D tocan a $B(X \times Y)$ únicamente en los extremos. El caso $|X| = |Y| = 3$ es fácil de verificar. Supongamos que $|Y| > 3$.

Sea y el punto inicial de Y . Consideremos $Y^* = Y - \{y\}$, $X \times Y^*$, $C^* = C \cap X \times Y^*$ y $D^* = D \cap X \times Y^*$. Es claro que ellos no son un contraejemplo. Como solo los puntos extremos de C y D pueden estar en $X \times \{y\}$, C^* y D^* son arcos.

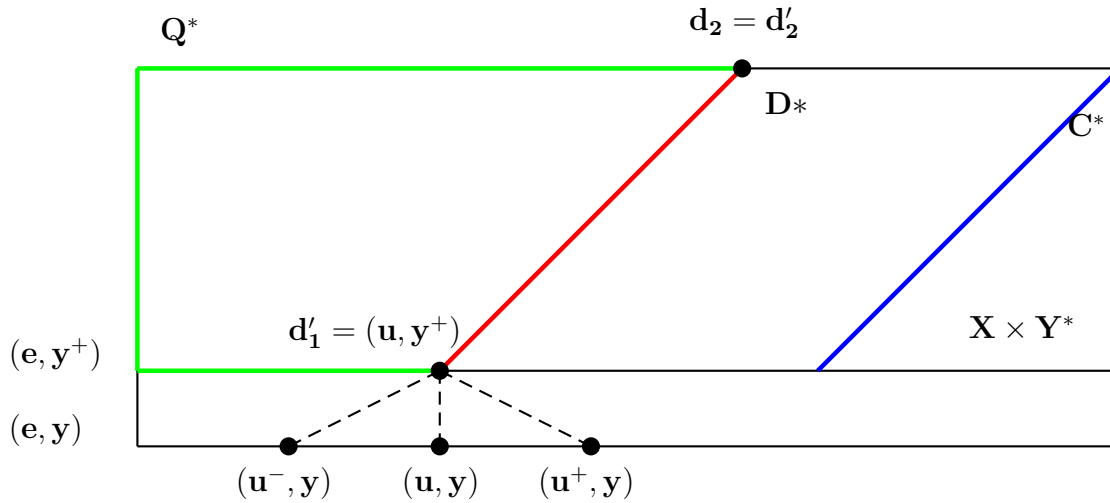
Sean c_1, c_2 y d_1, d_2 los puntos extremos de C y D respectivamente, y sean además $c'_1, c'_2 \in C^*$ y $d'_1, d'_2 \in D^*$ sus puntos extremos. Es claro que $\{d_1, d'_1\}, \{c_1, c'_1\}, \{c_2, c'_2\}, \{d_2, d'_2\}$, son conexos. Por hipótesis D toca más de una componente del $B(X \times Y) - C$, si suponemos que D^* toca

más de una componente de $B(X \times Y^*) - C^*$, entonces C^* debe tocar a D^* . Así, D toca a C y esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, debemos suponer que D^* esta en una componente de $B(X \times Y^*) - C^*$. Luego existe un camino Q^* en $B(X \times Y^*) - C^*$ que une a d'_1 y d'_2 .

Quisiéramos reemplazar Q^* por un camino Q en $B(X \times Y) - C$ que una a d_1 con d_2 para tener una contradicción.

Hay cuatro casos, dependiendo de dónde caigan d_1 con d_2 . Vamos dar los detalles de un caso. Los otros casos son similares.

Caso I: $d_1 \in X \times \{y\}$, $d_2 \notin X \times \{y\}$. Si $d'_1 = (u, y^+)$, entonces $d_1 = (v, y)$ donde $v \in \{u^-, u, u^+\}$. Es claro que $\{(x, y^+) : x \leq u\} \subset Q^*$ o $\{(x, y^+) : x \geq u\} \subset Q^*$, pues Q^* es un camino en $B(X \times Y^*) - C^*$. Supongamos que se cumple la primera. Construiremos Q a partir de Q^* de la manera obvia, como lo sugiere el diagrama de abajo. Sea $e = \min(X)$. Definamos $Q =: (Q^* - \{(x, y^+) : e < x \leq u\}) \cup \{(x, y) : x \leq v\}$. Note que Q es un camino en $B(X \times Y) - C$ que une a d_1 y d_2 .



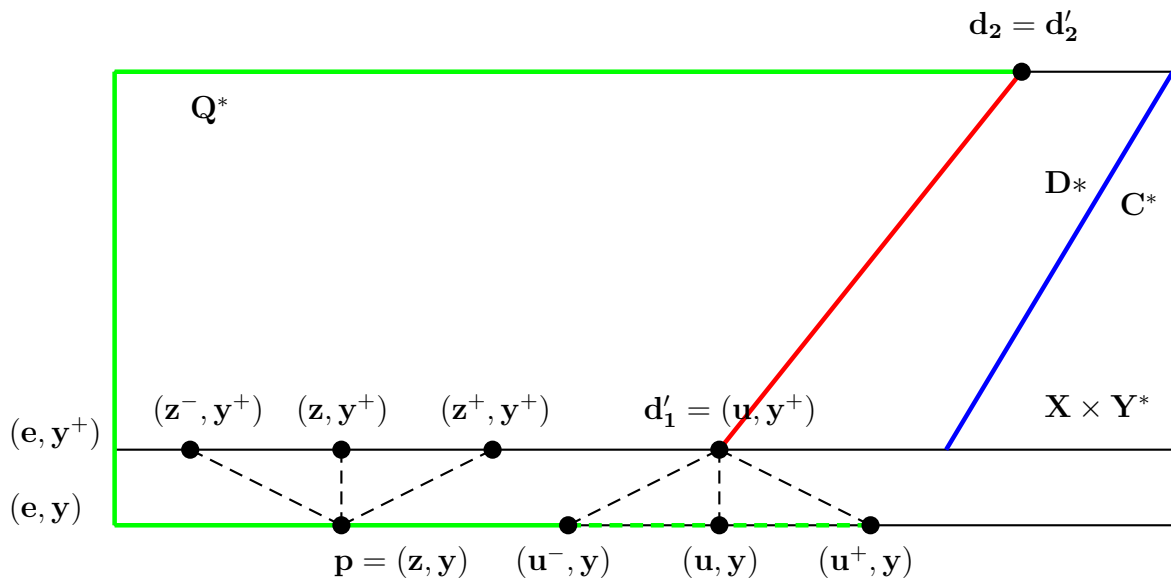
Mostremos que $Q \cap C$ es vacío. Supongamos que no, entonces existe $p \in Q \cap C$. Como $Q^* \cap C^*$ es vacío, entonces $p \in Q - Q^*$; así p es de la forma $p = (z, y)$, donde $z < v$.

Notemos que $p \in B(X \times Y) - C$ y $p \in C$. Por lo tanto p es extremo de C . Sea q el punto

en C adyacente a p . Tenemos que $q = (w, y^+)$, donde $w \in \{z^+, z, z^-\}$. Para terminar la prueba basta ver que $q \in Q^*$, pues así se contradice que $Q^* \cap C = \emptyset$. Sin embargo, solo se necesita mostrar que $w \leq u$.

Si $v \in \{u^-, u^+\}$, entonces $z < u$, pues $D \cap C = \emptyset$ y $w \leq z^+ \leq u$. En el caso $v = u^+$, notemos que d_1 es puro (ya que $d_1 = (u^+, y)$ es conexo con $d'_2 = (u, y^+)$), por lo que tenemos dos posibilidades:

- (i) Si $z \leq u$, entonces $w \leq z^+ \leq u$.
- (ii) Si $z = u$, entonces $p = (u, y)$ es mixto, así $q = d'_1$ y $w = u$.



Teorema 3.3

Si C es un arco en un plano digital $X \times Y$, entonces $B(X \times Y) - C$ y $X \times Y - C$ tienen el mismo número de componentes.

Demostración.

Sea \mathcal{V} el conjunto de todas las componentes de $B(X \times Y) - C$ y sea \mathcal{W} el conjunto de todas las componentes de $X \times Y - C$. Consideremos la siguiente función $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, donde $\Phi(W)$ es la componente conexo de W en $X \times Y - C$. Mostraremos que Φ es una biyección.

(i) Veamos que Φ es inyectiva.

Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ componentes distintas. Mostraremos que no existe un arco que conecte a V_1 con V_2 en $X \times Y - C$. Esto es equivalente a ver que: Si D es un arco en $X \times Y$ que toca más de una componente de $B(X \times Y) - C$, entonces D toca a C . Esto es exactamente el contenido de la **proposición 3.2**.

(ii) Veamos que Φ es sobreyectiva.

Basta mostrar que toda componente conexa W de $X \times Y - C$ toca a $B(X \times Y) - C$. Esto es exactamente el contenido de la **proposición 3.1**.

■

El teorema de la curva de Jordan

Finalmente llegamos a la demostración del teorema de la curva de Jordan, que es el objetivo principal de este trabajo, el cual fue enunciado en la introducción. Antes de dar la demostración de este teorema vamos a probar un lema que necesitaremos en la demostración.

Lema 4.1

Si J es una curva de Jordan en un plano digital $X \times Y$ y J no toca el borde, entonces para todo $j \in J$, $A(j) - J$ tiene exactamente dos componentes.

Demostración.

El **lema 2.18** nos asegura que $|A(j) \cap J| = 2$. Sean $p, q \in A(j) \cap J$. Tenemos que $A(j) - J = A(j) - \{p, q\}$. Recordemos que $A(j)$ es una curva de Jordan (ver **ejemplos 2.19**). De la definición de curva de Jordan tenemos que $A(j) - \{p\}$ es un arco en el cual q no es un punto extremo. Por lo tanto, q separa $A(j) - \{p\}$ en dos componentes.

■

Teorema 4.2

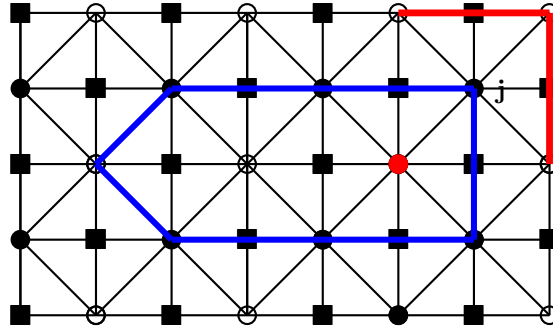
Si J es una curva de Jordan en un plano digital $X \times Y$ y J no toca el borde, entonces

$X \times Y - J$ tiene exactamente dos componentes.

Demostración.

Sea J una curva de Jordan en $X \times Y$ que no toca el borde. Mostraremos que $X \times Y - J$ tiene a lo sumo dos componentes. Sea $j \in J$. Consideremos $C = J - \{j\}$. Es claro que C es un arco que no toca el borde. El **teorema 3.3** nos asegura que $X \times Y - C$ tiene una sola componente, pues $B(X \times Y) - C$ tiene una sola componente. En consecuencia $X \times Y - C$ es conexo.

Así, cualquier punto de $x \in X \times Y - C$ puede ser unido a j por un arco D en $X \times Y - C$. Es claro que D debe tocar a $A(j) - J$. En consecuencia cualquier punto de $X \times Y - J$ puede ser unido a $A(j) - J$ por un arco en $X \times Y - J$. En virtud del **lema 4.1** tenemos que $A(j) - J$ tiene dos componentes, por lo tanto $X \times Y - J$ tiene a lo sumo dos componentes.

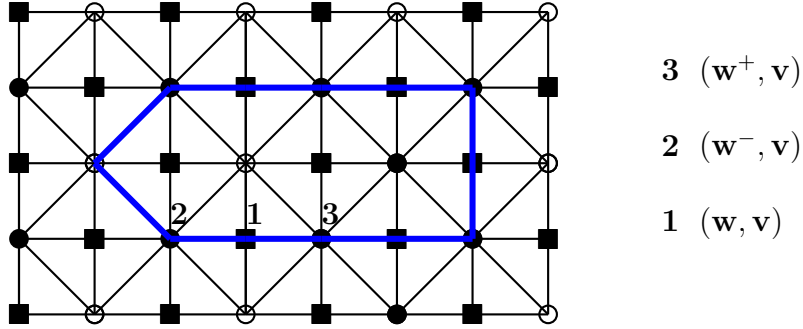


Mostraremos que $X \times Y - J$ tiene al menos dos componentes. El primer paso es encontrar un punto "dentro" de J . Sea $v = \min\{y \in Y : (x, y) \in J\}$. El punto "dentro" de J será de la forma (w, v^+) , donde $(w, v) \in J$. Consideremos $Y^* = Y - \{x \in Y : x < v\}$, donde \leq es el orden natural de \mathbb{Z} . Note que estamos "moviendo" el borde inferior hasta que este toque a J .

Veamos que $X \times Y^* - J$ tiene al menos dos componentes.

Hay dos casos:

Caso I: Supongamos que existe un punto mixto en J cuya coordenada Y es v . Sea (w, v) ese punto. Consideremos $C = J - \{(w, v)\}$. Recordemos que una curva de Jordan no puede "dar la vuelta" en un punto mixto (ver **observación 2.20**), por lo tanto $(w^-, v), (w^+, v) \in J$. En consecuencia C es un arco con extremos $(w^-, v), (w^+, v)$. Es claro que $C \subset J$.



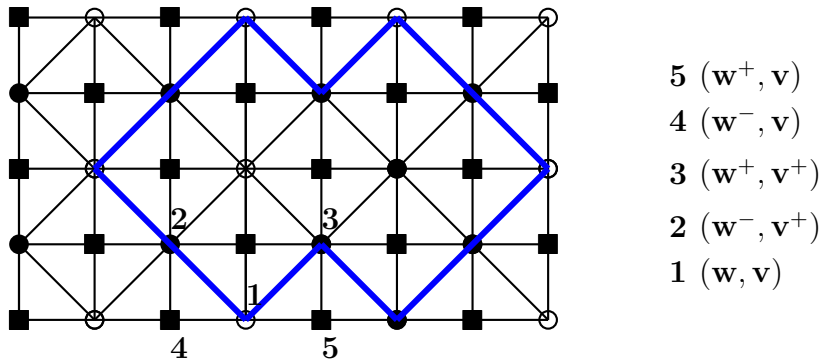
Note que C es un arco de (w^-, v) a (w^+, v) en $X \times Y^*$ y (w, v) es un punto aislado en $B(X \times Y^*) - C$.

La **proposición 3.2** nos garantiza que ningún punto f de $B(X \times Y^*) - C - \{(w, v)\}$ puede ser unido a (w, v) por un arco en $X \times Y^* - C$. En consecuencia f no puede ser unido a (w, v^+) por un arco en $X \times Y^* - C$. Es decir, $B(X \times Y^*) - C$ tiene al menos dos componentes. Así, por el **teorema 3.3** $X \times Y^* - C$ tiene al menos dos componentes.

A partir de la afirmación anterior mostraremos que $X \times Y^* - J$ tiene al menos dos componentes.

Como $f \in B(X \times Y^*) - J$, entonces no hay nada que demostrar. Por lo tanto, $X \times Y^* - J$ tiene al menos dos componentes.

Caso II: Supongamos que no existe un punto mixto en J cuya coordenada Y es v . Sea (w, v) un punto puro de J . Es claro que $(w^-, v), (w^+, v) \notin J$. De la minimalidad de v y el hecho de que $|A(w, v) \cap J| = 2$ (ver **lema 2.18**), deducimos que $(w^-, v^+), (w^+, v^+) \in J$. Notemos que $J - \{(w, v)\} \cup \{(w^-, v^+), (w^+, v^+)\}$ es conexo. Sea C un arco en este conjunto con extremos $(w^-, v^+), (w^+, v^+)$.



Como en el **caso I**, tenemos que C es un arco de (w^-, v) a (w^+, v) en $X \times Y^*$ y (w, v) es un punto aislado en $B(X \times Y^*) - C$.

Así por la **proposición 3.2** y por el **teorema 3.3**, tenemos que $X \times Y^* - C$ tiene al menos dos componentes.

Mostraremos que $X \times Y^* - J$ tiene al menos dos componentes.

Supongamos que existe un arco en $X \times Y^* - J$ que conecta a f con (w, v^+) , entonces este arco debe pasar por alguno de los puntos de $C - J = \{(w^-, v), (w^+, v)\}$. Para mostrar que esto no es posible basta observar el conjunto adyacencia de (w^-, v) en $X \times Y^*$. Notemos que $A(w^-, v) = \{(w^{--}, v), (w, v), (w^-, v^+)\}$, donde $(w, v), (w^-, v^+) \in J$ y (w^{--}, v) está en J o en $B(X \times Y^*) - C - \{(w, v)\}$. Para (w^+, v) es análogo.

Por lo tanto, $X \times Y^* - J$ tiene al menos dos componentes.

Para mostrar que $X \times Y - J$ tiene al menos dos componentes, supongamos que existe un arco D en $X \times Y - J$ de un punto $(z, y) \in X \times (Y - Y^*)$ a (w, v^+) . Es claro que D es conexo. En consecuencia la proyección Π_2 de D en Y es conexa, como los únicos conexos de la recta digital son los intervalos y $y \leq v \leq v^+$, tenemos que el arco D debe tocar a $X \times \{v\} - J$. Esto nos lleva a una contradicción pues un subarco de D está en $X \times Y^* - J$ y conecta puntos de $B(X \times Y^*) - J$ con (w, v^+) . Para obtener un subarco basta borrar de D todos los puntos hasta el "último" en $X \times (Y - Y^*)$. Por lo tanto, $X \times Y - J$ tiene al menos dos componentes. ■

Bibliografía

- [1] Azriel Rosenfeld, *Digital Topology*, American Mathematical Monthly, 86(8) 621-630-(1979)
- [2] T. Yung, R. Kopperman y P. Meyer, *A Topological approach to digital topology*, American Mathematical Monthly, 98(10) 901-917,(1991)
- [3] E. Khalismsky, R. Kopperman y P. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its applications, 36(1990),1-17.