Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas.

Grupo de Ecuaciones Diferenciales.

Sistemas expansivos sobre espacios compactos.

Yesenia Maria Uribe Mapayo.

Trabajo Especial De Grado

para optar al titulo de

Licenciada en Matemáticas.

Tutor: Dr. Luis Bladismir Ruiz.

Mérida

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Dada cualquier función continua sobre un espacio métrico M, a los sistemas dinámicos le concierne estudiar el comportamiento asintótico de las iteradas de dicha función. Es así, como durante los últimos años se viene estudiando el caso en que estos sistemas poseen órbitas densas, es decir, órbitas que recorren todo nuestro espacio de fase. Luego se torna interesante aquellos sistemas dinámicos en los cuales podemos encontrar abundantes órbitas periódicas y órbitas densas, lo que hace muy interesante el comportamiento de dicha función.
Un sistema dinámico que cumple con las características antes mencionadas es la función desplazamiento sobre el espacio de n símbolos, conocida como ***el shift***. Por otro lado, no siempre es posible predecir o saber que sucederá con las órbitas de un sistema dinámico, es aquí cuando surgen los sistemas dinámicos expansivos, como una condición para obtener una predicción del comportamiento de una gran parte de las órbitas, este tipo de sistema lo que nos dice es que, para algún $\varepsilon > 0$, dos órbitas diferentes nunca se acompañan a distancia ε a lo largo de su trayectoria o lo que es equivalente a decir que, si siempre dos órbitas se acompañan a distancia ε a lo largo de su trayectoria, entonces son iguales.

En este trabajo nos enfocamos en el estudio de los sistemas dinámicos expansivos sobre espacios compactos, lo interesante que verifican estos sistemas es esa propiedad dinámica de poder distinguir sus puntos tanto en el pasado como en el futuro. Entonces, nuestro objetivo principal es encontrar un criterio que nos permita describir el comportamiento asintótico para la gran mayoría de las órbitas del espacio de fase de un homeomorfismo expansivo, es decir, ya que la función desplazamiento sobre el espacio de símbolos finitos, es expansiva y con una dinámica rica y bien conocida, mostramos que familias de este tipo poseen una relación biunívoca con los homeomorfismos expansivos bajo ciertas condiciones en el espacio de fase, tal relación es vía conjugación topológica.

En general, el trabajo queda dividido de la siguiente manera: en el capítulo 1 se desarrollan los preliminares teóricos necesarios para abordar adecuadamente el estudio de los sistemas dinámicos discretos. Además, se presentan ejemplos sencillos donde se muestra el comportamiento de las órbitas de la función cuadrática $f(x) = x^2$ y el comportamiento de la familia de $T_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$ para $\lambda > 0$, para hacer más didáctica los conceptos desarrollados. Así mismo se presentan la propiedades dinámicas que nos brinda la conjugación topológica. En el capítulo 2 se explica a detalle las propiedades topológicas del espacio de símbolos sobre el cuál definimos el shift, así como también se explica la dinámica del shift bilateral y se definen los sistemas expansivos. En el último capítulo, se expone el teorema principal de nuestro trabajo, llamado teorema de expansividad, el cuál nos muestra bajo que condiciones se tiene una conjugación entre los homeomorfismos expansivos y un subshift de tipo finito. Por último se presenta una proposición donde se debilita una de las hipótesis del teorema de expansividad con la cuál se concluye que, los sistemas expansivos sobre espacios compactos tienen al menos la dinámica del shift, es decir, que podemos asegurar que los sistemas expansivos sobre espacios compactos tienen abundantes órbitas periódicas, órbitas densas, el conjunto de puntos periódicos es denso y además, el conjunto de puntos cuya órbita es densa, es denso.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Durante los últimos años se viene estudiando las aplicaciones transitivas, esto es, órbitas densas en el espacio de fase, ya que este tipo de aplicaciones muestran una riqueza en el comportamiento de su dinámica. En muchos casos la técnica de mostrar que ciertas clases de endomorfismos son transitivos es pasando a través de conjugaciones con la dinámica simbólica como lo son los shifts y subshifts de tipo finito. Gran parte de estos endomorfismos terminan siendo expansivos.
En este capítulo se expondran los preliminares necesarios para abordar el estudio de los sistemas expansivos sobre espacios compactos, para entender dichos sistemas es necesario entender la importancia de tener órbitas transitivas en un sistema dinámico y las condiciones necesarias que se necesitan para poder relacionar la dinámica de dos sistemas aparentemente diferentes. El estudio de los sistemas dinámicos matemáticamente se puede definir como el estudio de iteraciones de funciones donde las iteradas de dicha función pueden ir o no cambiando, además estudia el comportamiento asintótico de dichas iteraciones.

1.1. Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos

Definición 1.1 *Sea X espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Diremos que f es un homeomorfismo si f es biyectiva, continua y su inversa es una función continua.*

Definición 1.2 *Sea M un espacio métrico, un sistema dinámico discreto es una aplicación $\phi : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua en M tal que:*
$\phi(0, x) = x, \forall\, x \in M.$
$\phi(n, \phi(m, x)) = \phi(n + m, x), \forall x \in M$ *y* $\forall n, m \in \mathbb{Z}.$

Observación 1.1 *Si definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ la aplicación $\phi_n : M \to M$ por $\phi_n(x) = \phi(n, x)$, tenemos que $\phi_n \circ \phi_m = \phi_{n+m}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.1 *$f = \phi_1$ es un homeomorfismo (su inversa es $f^{-1} = \phi_{-1}$) y se cumple que $f^n = \phi_n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.*

Prueba: *Vamos a probar que f es continua biyectiva y f^{-1} es continua.*

- *Inyectividad de f : Sean $x, y \in M$, como $f(x) = \phi_1(x)$ y $f(y) = \phi_1(y)$ entonces, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) = \phi_1(y) &\Leftrightarrow \phi(1,x) = \phi(1,y)\\
&\Leftrightarrow \phi(-1,\phi(1,x)) = \phi(-1,\phi(1,y))\\
&\Leftrightarrow \phi(-1+1,x) = \phi(-1+1,y)\\
&\Leftrightarrow \phi(0,x) = \phi(0,y)\\
&\Leftrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

  Así f es inyectiva.

- *Sobreyectividad de f: Sea $y \in M$, luego*

$$\begin{aligned}
\phi(0,x) &= \phi(-1,y)\\
\phi(-1+1,x) &= \phi(-1,y)\\
\phi(-1,\phi(1,x)) &= \phi(-1,y) \text{ y luego por inyectividad se tiene que}\\
\phi(1,x) &= y\\
f(x) &= y
\end{aligned}$$

  Por lo tanto f es sobreyectiva.

- *f es continua pues ϕ_1 lo es.*

- *Afirmamos que $f^{-1} = \phi_{-1}$ en efecto,*

$$\begin{aligned}
f(\phi_{-1}(x)) &= f(\phi(-1,x)) = \phi(1,\phi(-1,x)) = \phi(0,x) = x\\
\phi_{-1}(f(x)) &= \phi_{-1}(\phi_1(x)) = \phi(-1,\phi(1,x)) = \phi(0,x) = x
\end{aligned}$$

  Por lo tanto $f^{-1} = \phi_{-1}$

  Por último f^{-1} es continua pues ϕ_{-1} lo es.

Observemos que $f^n(x) = f^{n-1}(f(x)) = f^{n-1}(\phi(1,x)) = f^{n-2}(f(\phi(1,x))) = \ldots = f(\phi(n-1,x)) = \phi(n,x)$ así recursivamente $f^n = \phi_n$. ■

Entonces podemos decir que un sistema dinámico discreto está generado por un homeomorfismo

$$f : M \to M.$$

En muchos casos para nosotros un sistema dinámico será una aplicación $f : M \to M$ continua.

Definición 1.3 *Sea $p \in M$, la órbita positiva de p respecto f es el conjunto*

$$\mathcal{O}_f^+(p) = \{p, f(p), f^2(p), f^3(p), \ldots, f^n(p), \ldots\}.$$

Si f es un homeomorfismo, la órbita negativa de $p \in M$ respecto a f es el conjunto

$$\mathcal{O}_f^-(p) = \{p, f^{-1}(p), \ldots, f^{-n}(p), \ldots\}.$$

Observemos que el comportamiento que pueda tener la órbita de un punto $p \in M$ depende del espacio de fase M.

Ejemplo 1.1 *Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$. Sea $g : S^1 \to S^1$,una función continua y $p \in S^1$, entonces la órbita de p es $\mathcal{O}_g^+(p) = \{p, g(p), \ldots, g^n(p), \ldots\}$, $g^n(p) \in S^1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como S^1 es compacto existe $n_k \to \infty$ tal que $g^{n_k}(p) = q$ para algún $q \in S^1$. Es decir, la órbita de cualquier punto posee puntos de acumulación.*

Definición 1.4

- *Un punto $p \in M$ es fijo si cumple que $f(p)=p$, el conjunto de todos los puntos fijos lo denotamos por $Fix(f)$.*
- *Un punto $q \in M$ es periódico si existe k entero positivo tal que $f^k(q)=q$.* *Si $k= \min\,\{n : f^n(q) = q\}$, k es llamado período y en este caso q es periódico de período k. El conjunto de todos los puntos periódicos lo denotamos por $Per(f)$.*

Definición 1.5

- *Un punto $q \in M$ es positivamente asintótico a p si $d(f^n(q), f^n(p)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. En el caso que p es periódico de período k, se tiene que $d(f^{nk}(q), p) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.*
- *Si f es invertible, dado $p \in M$, q es negativamente asintótico a p si $d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Si p es periódico de período k entonces $d(f^{-nk}(q), p) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.*

Definición 1.6

- *Dado $p \in M$ el conjunto $W^s(p) = \{q \in M : q$ es positivamente asintótico a $p\}$ es llamado **conjunto estable** de p respecto a f.*
- *El conjunto $W^u(p) = \{q \in M : q$ es negativamente asintótico a $p\}$ es llamado **conjunto inestable** de p respecto f.*

Ejemplo 1.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ (ver figura 1.1), f es continua y sobreyectiva, sus puntos fijos son todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $x^2 = x$, luego, se sigue que $Fix(f) = \{0, 1\}$. Continuando con el conjunto $Fix(f)$ veamos si existen puntos periódicos de período 2.*
Denotemos por $Per(2,f)$ como el conjunto de los puntos periódicos de período 2 y queremos ver que este conjunto es vacío, para ello, supongamos que existe $x \in Per(2,f)$ entonces,

$$\begin{aligned} f^2(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^4 = x \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \end{aligned}$$

De donde se sigue que $x = 0$ ó $x = 1$ por lo tanto, $Per(2, f) = \emptyset$ es decir, no existen puntos periódicos de período 2.

Observe que como f no es invertible entonces, sólo podemos estudiar los conjuntos estables para cada uno de los puntos fijos. Afirmamos que $W^s(0) = (-1, 1)$, en efecto, sea $p \in (-1, 1)$ entonces, $|p| < 1$ y $f^n(p) = p^{2^n}$ luego, $f^n(p) = p^{2^n} \to 0$ cuando $n \to +\infty$ por lo tanto, $d(f^n(p), 0) \to 0$ cuando $n \to +\infty$, es decir, $p \in W^s(0)$.
Ahora veamos la otra contención, sea $p \in W^s(0)$ si suponemos que $p \notin (-1, 1)$ entonces, $|p| \geq 1$ y $f^n(p) = p^{2^n} \nrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$ y esto es una contradicción, por lo tanto $p \in (-1, 1)$. Es decir, hemos probado que $W^s(0) = (-1, 1)$.

Por otro lado es claro que $W^s(1) = \{1, -1\}$.

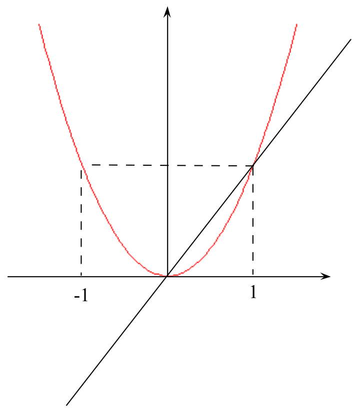


Figura 1.1: Gráfica de $f(x) = x^2$

Ahora si restringimos la función anterior de tal manera que sea invertible entonces, los puntos fijos son $Fix(x) = \{0, 1\}$ *, observe que* $W^u(0) = \{0\}$ *y afirmamos que* $W^u(1) = (0, +\infty)$*, para ver esto último observe que* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$*,* $f^{-2}(x) = \sqrt[4]{x}$ *y así sucesivamente se tiene que* $f^{-n}(x) = \sqrt[2^n]{x}$ *luego* $f^{-n}(x) \to 1$ *cuando* $n \to +\infty$ *lo que implica que* $d(f^{-n}(x), 1) \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$ *es decir,* $W^u(1) = (0, +\infty)$.

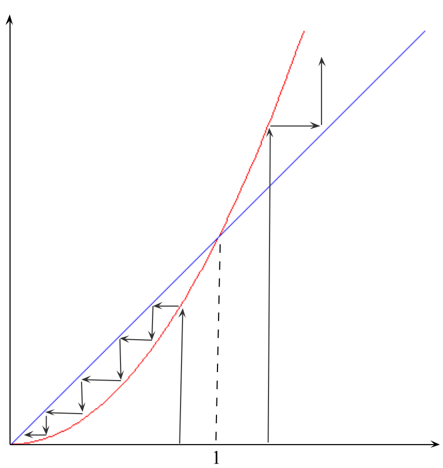


Figura 1.2: Gráfica de x^2

Definición 1.7 *Un subconjunto $A \subseteq M$ es positivamente invariante si $f(A) \subseteq A$. Si f es invertible se dice que es negativamente invariante si $f^{-1}(A) \subseteq A$.*

Proposición 1.2 *Sea $f : M \to M$ continua entonces, el conjunto de puntos periódicos de f es positivamente invariante.*

Prueba: Vamos a probar que $f(Per(f)) \subset Per(f)$. Sea $q \in f(Per(f))$ entonces, existe $p \in Per(f)$ tal que, $f(p) = q$. Supongamos que p es periódico de período $k > 0$ es decir, $f^k(p) = p$. Luego, $f^k(f(p)) = f^k(q)$ de donde se tiene que $f^k(q) = f^{k+1}(p) = f(p) = q$ por lo tanto $q \in Per(f)$. ■

Definición 1.8

- *Sea $q \in M$ el conjunto ω- **límite** de q respecto a f es el conjunto*

$$\omega_f(q) = \{z \in M : \exists\, n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(q) \to z\}.$$

- *Si f es un homeomorfismo, dado $p \in M$ definimos el conjunto α-**límite** de p respecto f como*

$$\alpha(p) = \{q \in M : \exists\, n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{-n_k}(p) \to q\}.$$

Definición 1.9 *Sea $f : M \to M$ continua, un punto $x \in M$ es recurrente si $x \in \omega_f(x)$.*

Definición 1.10 *Un punto $p \in M$ es **no errante** si para todo entorno U de p, existe $N > 0$ tal que $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos no errantes lo denotamos por $\Omega(f)$.*

Ejemplo 1.3 *Sea $T_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$, estudiemos la dinámica de T_λ para $\lambda > 0$. Ver figura 1.3.*
Los puntos fijos de T_λ son todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $T_\lambda(x) = x$, es decir

$$\begin{aligned} x^3 - \lambda x &= x \\ x^3 - \lambda x - x &= 0 \\ x(x^2 - \lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Luego se sigue que $Fix(T_\lambda) = \{0, \pm\sqrt{\lambda+1}\}$. Para simplificar un poco la notación denotemos por $[-p,p] = \left[-\sqrt{\lambda+1}, \sqrt{\lambda+1}\right]$. Si un punto x está en el intervalo (-p,p) entonces su órbita tiende a cero, (ver figura 1.3).
Por otro lado si un punto x no pertenece al intervalo (-p,p), entonces $f(x) > x$ y f es creciente para $x > p$ luego $f^2(x) > f(x) > x$ así,

$$f^n(x) > f^{n-1}(x) > \ldots > f(x) > x$$

entonces $\{f^n(x)\}$ es una sucesión creciente, si $f^n(x)$ converge a algún $x_o > f(x)$, entonces $f^{n+1}(x) \to f(x_o) > f(x)$ luego por unicidad del límite $f(x_o) = x_o \geq f(x) > p$ y esto es una contradicción. Por otro lado si, $x < -p$, entonces $f(x) < x$ y f es decreciente para $x < -p$, se tiene $f^2(x) > f(x)$ y $f^3(x) < f(x)$ así,

$$f^{2k-1}(x) \ldots f^3(x) < f(x) < x < f^2(x) < \ldots < f^{2k}(x)$$

luego, si n es par, entonces $\{f^n(x)\}$ es una sucesión creciente, luego si suponemos que, $f^n(x) \to x_o < f(x)$ se tiene que, $f^{n+1}(x) \to f(x_o) > f^2(x)$ y como $f^2(x) > f(x) > x_o$ entonces, $f(x_o) = x_o \leq f(x) < -p$ y esto es una contradicción. El caso si n es impar es análogo.

Entonces concluimos que, para cada $x \in (-p,p)$ x es asintótico a cero, es decir, $W^s(0) = (-p,p)$. Ahora, es claro que $W^s(\pm\sqrt{\lambda+1}) = \{\pm\sqrt{\lambda+1}\}$. En la gráfica se muestra la dinámica de T_λ para $\lambda > 0$

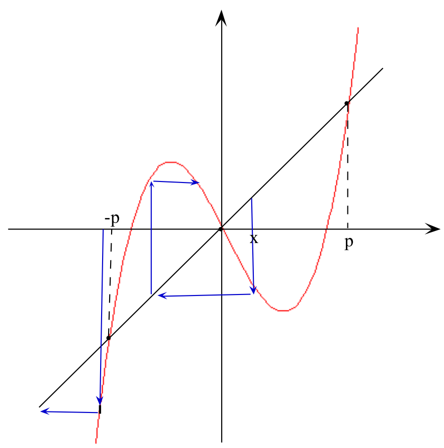


Figura 1.3: Gráfica de $T_\lambda(x)$

Proposición 1.3 *$f : M \to M$ entonces se cumple que:*

1. *El conjunto ω-**límite** es positivamente invariante.*

2. *Si $A \subset M$ es cerrado y positivamente invariante, entonces $\forall\ p \in A$, $\omega_f(p) \subset A$.*

3. *Si A es compacto , $\omega_f(q) \neq \emptyset$, $\forall\ q \in A$.*

4. *$\omega_f(x)$ es cerrado, $\forall\ x \in M$.*

Demostración:

1. Veamos que $f(\omega(p)) \subset \omega(p)\ \forall\ p \in M$.
   Sea $q \in f(\omega(p))$ entonces, $\exists\ x \in \omega(p)$ tal que $q = f(x)$, como $x \in \omega(p)$ entonces, $\exists\ n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(p) \to x$. Sea $m_k = n_k+1$,(observe que $m_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$) entonces $f^{m_k}(p) = f^{n_k+1}(p) = f(f^{n_k}(p)) \to f(x)$ cuando $f^{n_k}(p) \to x$, es decir existe una sucesión m_k convergiendo a $+\infty$ cuando k tiende a $+\infty$ talque $f^{m_k}(p) \to f(x) = q$, por lo tanto $q \in \omega(p)$.

2. Sea $q \in \omega_f(p) \Rightarrow \exists n_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(p) \to q$. Como A es positivamente invariante entonces, $f^n(p) \in$ A $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y como A es cerrado $q \in A$.

3. Supongamos que $A \subset M$ es compacto entonces, toda sucesión $x_n \in A$ posee una subsucesión convergente en A. Si suponemos que existe $x \in A$ tal que $\omega_f(x) = \emptyset$ entonces, $f^{n_k}(x) \nrightarrow z$, $\forall\ n_k \to +\infty$ y $\forall\ z \in A$, y esto es una contradicción con la compacidad de A.

4. Para ver que $\omega_f(x)$ es cerrado, tenemos que probar que si P_n es una sucesión tal que $P_n \to p$ y $P_n \in \omega_f(x)$, entonces $p \in \omega_f(x)$.

   Entonces, supongamos que existe $P_n \in \omega_f(x)$ tal que$P_n \to p$. Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Para ε_1 $\exists$ $P_{n_1} \in B(p, \varepsilon_1)$ también existe $m_{k(n_1)} = \alpha_1 > 1$ tal que $f^{\alpha_1}(x) \in B(p, \varepsilon_1)$.
   Para ε_2 $\exists$ $P_{n_2} \in B(p, \varepsilon_2)$ también existe $m_{k(n_2)} = \alpha_2$ tal que $f^{\alpha_2}(x) \in B(p, \varepsilon_2)$ y tomamos $m_{k(n_2)} > \alpha_1$ así, $\alpha_2 > \alpha_1$. Así, inductivamente, para ε_m $\exists$ $P_{n_m} \in B(p, \varepsilon_m)$ y también existe $m_{k(n_m)} = \alpha_{m-1}$ tal que $f^{\alpha_m}(x) \in B(p, \varepsilon_m)$.
   Así, la sucesión $f^{\alpha_m}(x) \to p$ cuando $m \to +\infty$ y $\alpha_m \to +\infty$, por lo tanto, $p \in \omega_f(x)$.

■

Observación 1.2 *Del item 3 observe que, el hecho de considerar en muchos casos el espacio de fase compacto es para garantizar la existencia de la dinámica en ese espacio.*

Definición 1.11 *Dado un espacio métrico M, un conjunto $\mathcal{R}$ se llama residual si es intersección numerable de conjuntos abiertos y densos.*

1.2. Transitividad y Conjugación Topológica

En esta sección M denota un espacio métrico y $f : M \to M$ continua.

Definición 1.12 *f es transitiva para un conjunto $A \subset M$ cerrado y positivamente invariante si $\exists$ $p \in A$ tal que su órbita $\mathcal{O}_f(p) = \{f^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en A, es decir, que para todo punto $q \in A$ existe una sucesión $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(p) \to q$. La definición es equivalente a $\omega_f(p) = A$.*

Aquí denotamos $\omega_f(p)$ por $\omega(p)$.
La transitividad es una propiedad puramente topológica que tiene consecuencias bastante impresionantes. Un teorema que muestra equivalencias es el siguiente.

Teorema 1.1 *Sea X un espacio métrico separable de Baire y $T : X \to X$ continua. Las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *T es transitivo.*
2. *La propiedad $\omega(x) = X$ vale para un conjunto residual de puntos $x \in X$.*
3. *Para todo $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ es denso en X.*

Demostración:

- $(1 \Rightarrow 3)$ Supongamos que T es transitivo, queremos probar que, para todo $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ es denso en X. Para simplificar la notación denotemos

$B = \bigcup\limits_{n\geq 0} T^{-n}(U)$ entonces, queremos probar que, dado V entorno de y cualquiera en X, $V \cap B \neq \emptyset$.
Sea $U \subset X$ abierto, $y \in X$ y V un entorno de y. Como T es transitivo, existe $x \in X$ tal que $\omega(x) = X$ (es decir la órbita de x es densa) así $y \in \omega(x)$ y existe $n > 0$ tal que $T^n(x) \in V$.

Como $\omega(x) = X$ entonces, existen $m_k \to +\infty$ y $\overline{k}$ tal que $m_k > n \ \forall\ k \geq \overline{k}$, y $T^{m_k}(x) \in U$ y $T^n(x) \in V$, luego se sigue que

$$T^n(x) \in T^{-(m_k - n)}(T^{m_k}(x)) \subset T^{-(m_k-n)}(U)$$

luego como $T^n(x) \in T^{-(m_k-n)}(U), \forall\ k \geq \overline{k}$ y como $T^n(x) \in V$ entonces $V \cap T^{-(m_k-n)} \neq \emptyset$, $\forall\ k \geq \overline{k}$ es decir, $V \cap B \neq \emptyset$ en conclusión, B es denso en X.

- $(3 \Rightarrow 2)$ X es separable entonces, existe $\{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ una base numerable de abiertos de X. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$, como T es continua $T^{-i}(U_n)$ es abierto $\forall\ i$, se sigue de la hipótesis que, el conjunto

  $$S_{i.n} = \bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(T^{-i}(U_n)) = \bigcup_{j\geq 0} T^{-(j+i)}(U_n) = \bigcup_{j \geq i} T^{-j}(U_n)$$

  es abierto y denso.
  Sea $S_n = \bigcap\limits_{i\geq 0} S_{i.n}$ entonces S_n es residual para todo n. Luego tomando $S = \bigcap\limits_{n} S_n$ se tiene que, es residual, ya que intersección numerable de residuales es residual.
  Afirmamos que si $x \in S$, implica que $\omega(x) = X$ (es decir la órbita de x es densa) es decir, que si $x \in S$, entonces para todo abierto U se tiene que $T^m(x) \in U$ para infinitos valores de $m > 0$. Como U contiene algún U_n de la base es suficiente probarlo para un elemento de la base, es decir, $U_n \subset U$.
  Pero $x \in S$ implica $x \in S_n$, o sea, $x \in \bigcap\limits_{i\geq 0} S_{i.n}$ y esto es

  $$x \in \bigcap_{i\geq 0} \bigcup_{j\geq i} T^{-j}(U_n)$$

  de donde se tiene que $x \in \bigcup\limits_{j\geq i} T^{-j}(U_n)$, $\forall\ i \geq 0$ y así $x \in T^{-m}(U_n)$ para infinitos valores de m, y para estos valores $T^m(x) \in U_n \subset U$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Como X es de Baire supongamos que existe un residual de puntos $x \in X$ tal que $\omega(x) = X$, de aquí es claro que T es transitivo.

$\blacksquare$

Ahora introduciremos el concepto de conjugación topológica el cual nos permitirá pasar información de un sistema dinámico a otro.
Sean M, N espacios métricos y $f : M \to M$, $g : N \to N$ funciones continuas.

Definición 1.13 *f es topológicamente conjugada a g si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Si f y g son dos funciones continuas. Denotaremos por $f \sim g$ si f y g son topológicamente conjugados.

Proposición 1.4 *La conjugación topológica es una relación de equivalencia.*

Demostración:

- Reflexividad: $f \sim f$
  Sea $f : M \to M$, el homeomorfismo que conjuga a f consigo mismo es la identidad, es decir, $I : M \to M$ tal que $I(x) = x$ entonces se tiene que $f \circ I = I \circ f$ por lo tanto $f \sim f$.

- Simetría: Si $f \sim g$ entonces $g \sim f$. Sea h homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$, h^{-1} es homeomorfismo y además tenemos que

$$h \circ f \circ h^{-1} = g \circ h \circ h^{-1}$$

$$h \circ f \circ h^{-1} = g$$
$$h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$$

  por lo tanto $g \sim f$.

- Transitividad: Supongamos que $f \sim g$ y $g \sim f^*$, y sean h, h^* homeomorfismos tales que;

$$h \circ f = g \circ h \tag{1.1}$$
$$h^* \circ g = f^* \circ h^* \tag{1.2}$$

  en (1.1) componemos con h^*, así tenemos

$$h^* \circ h \circ f = h^* \circ g \circ h \tag{1.3}$$

  luego usando (1.2) se tiene

$$h^* \circ h \circ f = f^* \circ h^* \circ h \tag{1.4}$$

  y como $h^* \circ h$ es homeomorfismo se concluye que $f \sim f^*$.

■

Definición 1.14 *f y g son semi-conjugadas si existe una función continua y sobreyectiva $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Observación 1.3 *La semi-conjugación no es una relación de equivalencia pues no se cumple la simetría.*

Proposición 1.5 *Sean $f : M \to M$, $g : N \to N$ funciones continuas conjugadas por un homeomorfismo $h : M \to N$. Sea $A \subset M$ cerrado e invariante por f entonces, f es transitiva en A si, y sólo si, g es transitiva en $h(A)$.*

Demostración: Sea $x \in A$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = A$ mostraremos que $\overline{\mathcal{O}_g^+(h(x))} = h(A)$. Observemos que $h(A)$ es cerrado pues h es continua y A es cerrado, además $h(A)$ es invariante por g pues $f(A) \subset A$ así $h(f(A)) \subset h(A)$ y como $f \sim g$ se sigue que $g(h(A)) = h(f(A)) \subset h(A)$.

Sea $q \in h(A)$ $\exists$ $h^{-1}(q) \in A$ pues h es homeomorfismo. Como $\mathcal{O}_f^+(x)$ es densa en A entonces, existe una sucesión $n_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to h^{-1}(q)$ luego $h(f^{n_k}(x)) \to q$ (por la continuidad de h) y como $f \sim g$ entonces se tiene $g^{n_k}(h(x)) \to q$ es decir g tiene una orbita densa en $h(A)$.
El recíproco es análogo pues $\sim$ es simétrica. ∎

Proposición 1.6 *Sean $f : M \to M$, $g : N \to N$ funciones continuas conjugados por un homeomorfismo $h : M \to N$. Entonces: p es periódico por f si, y sólo si, h(p) es periódico por g.*

Demostración: Supongamos que $f^k(p) = p$ para algún k. Primero veamos que $h \circ f^k = g^k \circ h$, en efecto, por inducción sobre k tenemos,para $k = 1$ es claro pues $f \sim g$,supongamos que se cumple para algún k, así $h \circ f^k = g^k \circ h$, luego $h \circ f^{k+1} = h \circ f^k \circ f = g^k \circ h \circ f = g^k \circ g \circ h = g^{k+1} \circ h$. Entonces tenemos que $h(p) = h(f^k(p)) = g^k(h(p))$ así $h(p)$ es periódico de período k por g.
Para ver el recíproco observemos que $h^{-1} \circ g = g \circ h^{-1}$ entonces si $g^k(h(p)) = h(p)$ para algún k, luego $h(f^k(p)) = h(p)$ y como h es inyectiva entonces $f^k(p) = p$, así p es periódico por f. ∎

Proposición 1.7 *Sean $f : M \to M$, $g : N \to N$ funciones continuas conjugadas por un homeomorfismo $h : M \to N$. Entonces, p es no errante para f si, y sólo si, h(p) es no errante para g.*

Demostración: Sea $p \in M$ un punto no errante para f y consideremos U entorno de p y $N > 0$, luego $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ así, $f^N(p) \in U$ y por lo tanto $h(f^N(p)) \in h(U)$ entonces, como $f \sim g$ se sigue que $h(f^N(p)) = g^N(h(p)) \in h(U)$ así, $g^N(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$ es decir, $h(p)$ es no errante para g. El recíproco es análogo. ∎

1.3. Conjuntos totalmente disconexos

En esta sección estudiamos los conjuntos totalmente disconexos pues estos son un punto clave a la hora de estudiar los sistemas expansivos y la relación que tienen con la dinámica simbólica, que serán estudiados en el capítulo 2.

Definición 1.15 *Un espacio topológico X se dice disconexo si existen subconjuntos A y B no vacíos, abiertos tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Definición 1.16 *Un espacio topológico es conexo si no es disconexo.*

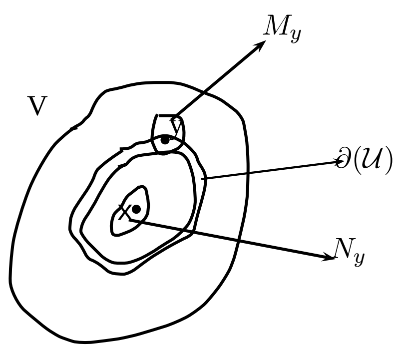
Definición 1.17 *X espacio topológico, $S \subset X$ es* ***totalmente disconexo*** *si los únicos conjuntos conexos son los conjuntos formados por un sólo punto, conocidos también como los singletones.*

Definición 1.18 *Dado un espacio métrico M se llama componente conexa, a cada uno de los conjuntos maximales conexos de M.*

En el capítulo 3 necesitaremos el siguiente resultado.

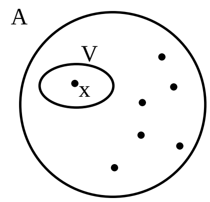
Teorema 1.2 *Sea X espacio topológico, $S \subset X$ compacto, S es totalmente disconexo si, y sólo si, cada punto posee una base de entornos abiertos ó cerrados.*

Demostración: Supongamos que S es totalmente disconexo.
Tenemos que probar: $\forall\ x \in S$ y $\forall\ V$ entorno de x existe $W \subset V$ entorno abierto ó cerrado de x.
Vamos a construir una base de la siguiente manera:
Sea $x \in S$ y V entorno de x, consideremos un entorno $\mathcal{U} \subset V$ tal que toda la frontera de $\mathcal{U}$ está contenida en V , es decir $\partial(\mathcal{U}) \subset V$.
Observe que $\partial(\mathcal{U})$ es compacto y como S es totalmente disconexo entonces $\partial(\mathcal{U})$ no puede ser conexo.
Luego $\forall\ y \in \partial(\mathcal{U})$ existen conjuntos M_y y N_y abiertos ó cerrados disjuntos tales que $y \in M_y$ y $x \in N_y$ como se muestra en la figura.



Luego como los M_y cubren $\partial(\mathcal{U})$ $\forall\ y \in \partial(\mathcal{U})$ esto es $\bigcup\limits_{y\in\partial(\mathcal{U})} M_y \supset \partial(\mathcal{U})$, entonces tomamos un subcubrimiento finito de estos conjuntos y para estos, existen una cantidad finita de conjuntos N_y (entornos de x). Nuestro próximo paso es considerar la intersección de todos los entornos N_y donde esta intersección es abierta y cerrada pues los N_y lo son.
Este procedimiento lo hacemos para cualquier entorno arbitrario de x, entonces formalmente decimos que:

Para cada V entorno de x existe $\{N_i^{(V)}\}_{i=1}^{k}$ una familia finita de abiertos y cerrados contenidos en V talque $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i^{(V)}$. Denotemos a esta intersección así $N^{(V)} = \bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i^{(V)}$,observe que $N^{(V)}$ es abierta y cerrada.
Sea $\mathcal{P}$ la familia de todos los entornos $N^{(V)}$, luego $\bigcup\limits_{N^{(V)}\in\mathcal{P}} N^{(V)}$ es una base de x.
Recíprocamente supongamos que todo $x \in S$ posee una base de entornos abiertos y cerrados. Razonando por el absurdo supongamos que existe $A \subset S$ conexo tal que el cardinal de A es mayor que uno, es decir, $|A| > 1$. Sean $x, y \in A$ y V entorno de x tal que $y \notin V$.



Por hipótesis existe $U \subset V$ un entorno abierto y cerrado de x, así se tiene que $A = U \cup (A \backslash U)$, observe que $A \backslash U$ es abierto pues U es cerrado y además $U \cap (A \backslash U) = \emptyset$. Pero esto es una contradicción pues A es conexo, por lo tanto, no puede existir otra componente conexa que no sean los singletones. ■

Ejemplo 1.4 *$\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo, por lo tanto posee una base de entornos abiertos ó cerrados.*

Proposición 1.8 *Sean X, Y dos espacios métricos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre ellos. X es totalmente disconexo si, y sólo si, Y también lo es.*

Demostración: Supongamos que X es totalmente disconexo, es decir, las únicas componentes conexas son los conjuntos unitarios. Sea V un conexo cualquiera de Y entonces como f es continua $f^{-1}(V)$ es conexo en X, luego $f^{-1}(V)$ es un punto y así $V = f(f^{-1}(V))$ es un punto, por lo tanto, Y es totalmente disconexo. El recíproco es análogo, suponga que U es un conexo cualquiera de X, como f^{-1} es continua $f(U)$ es conexo en Y luego, $f(U)$ es un punto y así $U = f(f^{-1}(U))$ es un punto por lo tanto, X es totalmente disconexo. ■

Definición 1.19 *Si X es un espacio topológico se dice que X es metrizable si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X. Un espacio métrico X es un espacio metrizable junto a una distancia específica d que da la topología de X.*

Proposición 1.9 *Sean $(X, M)(Y, N)$ espacios topológicos y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es metrizable entonces Y es metrizable.*

Demostración: Sea d una métrica que genera la topología M, definimos $d^* : Y \times Y \to \mathbb{R}$ como

$$d^*(y_1, y_2) := d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2))$$

Afirmamos que d^* es una métrica. En efecto ;
Sean y_1, y_2 y $y_3 \in Y$

- $d^*(y_1, y_2) > 0$ pues $d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) > 0$.
  Por otro lado

$$\begin{aligned} d^*(y_1, y_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad h^{-1}(y_1) = h^{-1}(y_2) \\ &\Leftrightarrow \quad h \circ h^{-1}(y_1) = h \circ h^{-1}(y_2) \\ &\Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \end{aligned}$$

- Simetría:

$$d^*(y_1, y_2) = d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) = d(h^{-1}(y_2), h^{-1}(y_1)) = d^*(y_2, y_1)$$

- Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d^*(y_1, y_2) &= d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) \\ &\leq d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_3)) + d(h^{-1}(y_3), h^{-1}(y_2)) \\ &\leq d^*(y_1, y_3) + d(y_3, y_2) \end{aligned}$$

Ahora veamos que d^* genera en Y los mismos abiertos que genera d en X.
Sea $V \in N$ y $y_o \in V$, luego como h es un homeomorfismo, existe $h^{-1}(y_o) \in h^{-1}(V)$ y $h^{-1}(V) \in M$. Como X es metrizable entonces existe una bola respecto a la métrica d de centro $h^{-1}(y_o)$ y radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(h^{-1}(y_o), \varepsilon) \subset h^{-1}(V)$. Afirmamos que existe una bola $B_{d^*}(y_o, \varepsilon) \subset V$.
Para ver esto último, tomemos $w \in B_{d^*}(y_o, \varepsilon)$, entonces $d^*(y_o, w) < \varepsilon$, luego $d(h^{-1}(y_o), h^{-1}(w)) < \varepsilon$ y por lo tanto $h^{-1}(w) \in B_d(h^{-1}(y_o), \varepsilon) \subset h^{-1}(V)$ lo que implica $w \in V$.

■

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DINÁMICOS EXPANSIVOS

El shift, mejor conocido como la función desplazamiento, es una clase de función bien estudiada en sistemas dinámicos pues en su dinámica encontramos abundantes órbitas periódicas y órbitas transitivas. La importancia de los shifts radica en que nos ayuda a tener información de la dinámica de otros homeomorfismos pues no siempre es fácil saber cuando existen o no órbitas transitivas.

2.1. Espacio de n Símbolos:

En esta sección vamos a definir el espacio $B(n)$ sobre el cual estudiaremos el shift y su relación con los sistemas expansivos. $B(n)$ también es denotado por $\{1, \ldots, n\}^{\mathbb{Z}}$ pero aquí por facilidad en la notación usaremos $B(n)$.

Sea $X = \{1, \ldots, n\}$ un espacio finito de n símbolos, definimos $B(n)$ como, $B(n) = \{(\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ donde $\theta_i \in X\}$. Definimos una distancia sobre $B(n)$ de la siguiente manera, sean $\alpha, \beta \in B(n)$

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{4^{|k|}}$$

donde

$$\delta(\alpha_k, \beta_k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{Si } \alpha_k = \beta_k \\ 1, & \text{Si } \alpha_k \neq \beta_k \end{array} \right\}$$

Observemos que

$$d(\alpha, \beta) \leq \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{4^{|k|}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{4^{k}}$$

de donde se sigue que

$$d(\alpha, \beta) \leq \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{4^{|k|}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{k}} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{k}}$$

como es bien conocido

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}$$

es finita entonces, $d(\alpha, \beta)$ está bien definida.

En la definición de d colocamos 4 en el denominador porque más adelante definiremos lo que es un cilindro y necesitaremos que estos cilindros sean abiertos. En general definamos la siguiente distancia para $B(n)$.

Sea $\lambda > 1$,α y $\beta \in B(n)$ definimos

$$d_\lambda(\alpha, \beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{\lambda^{|k|}}$$

donde

$$\delta(\alpha_k, \beta_k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{Si } \alpha_k = \beta_k \\ 1, & \text{Si } \alpha_k \neq \beta_k \end{array} \right\}$$

Teorema 2.1 *Sean $\alpha, \beta \in B(n)$ y $\lambda > 1$. Las siguientes proposiciones son ciertas:*

1. *d_λ es una métrica en $B(n)$.*

2. *Dadas $\alpha, \beta \in B(n)$ y $\lambda > 3$ se tiene que $d_\lambda(\alpha, \beta) \leq 2 \cdot \lambda^{-N} \cdot (\lambda - 1)^{-1}$ si, y sólo si, $\alpha_i = \beta_i$ para todo $|i| \leq N$.*

3. *B(n) es compacto y totalmente disconexo.*

Demostración:

1. Sean α , β y $\theta \in B(n)$, $d_\lambda(\alpha, \beta) \geq 0$ por la definición de $\delta(\cdot)$. Luego $d_\lambda(\alpha, \beta) = 0$ si, y sólo si, $\delta(\alpha_k, \beta_k) = 0, \forall\ k \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $\alpha_k = \beta_k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $\alpha = \beta$
   Para ver la simetría observemos que,

   $$d_\lambda(\alpha, \beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{\lambda^{|k|}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\beta_k, \alpha_k)}{\lambda^{|k|}} = d_\lambda(\beta, \alpha).$$

   Para ver la desigualdad triangular observemos que $\forall$ α,β y $\theta \in B(n)$ tenemos que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ $\delta(\alpha_k, \beta_k) \leq \delta(\alpha_k, \theta_k) + \delta(\theta_k, \beta_k)$,luego

   $$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\alpha_k, \beta_k)}{\lambda^{|k|}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\alpha_k, \theta_k)}{\lambda^{|k|}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\theta_k, \beta_k)}{\lambda^{|k|}}$$

   así, se tiene que $d_\lambda(\alpha, \beta) \leq d_\lambda(\alpha, \theta) + d_\lambda(\theta, \beta)$.
   Por lo tanto d_λ es una métrica en *B(n)*.

2. Sean $\alpha, \beta \in B(n)$ y $\lambda > 3$, supongamos que $\alpha_k = \beta_k$ para todo $|k| \leq N$.

$$
\begin{aligned}
d_\lambda(\alpha,\beta) &= \sum_{|k|>N} \frac{\delta(\alpha_k,\beta_k)}{\lambda^k} \\
&\leq 2\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} = 2\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda^k}\right) \\
&\leq 2\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda^k}\right) \\
&= 2\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{1-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{\lambda}}\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{\lambda^N(\lambda-1)}
\end{aligned}
$$

Así $d_\lambda(\alpha,\beta) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}$

Recíprocamente supongamos que $d_\lambda(\alpha,\beta) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}$ entonces veamos que $\alpha_k = \beta_k \ \forall |k| \leq N$.

Supongamos que existe $|j| \leq N$ tal que $\alpha_j \neq \beta_j$, entonces $d_\lambda(\alpha,\beta) > \frac{1}{\lambda^{|j|}} \geq \frac{1}{\lambda^N}$. Como $\lambda > 3$, entonces $\frac{2}{(\lambda-1)} < 1$ así se tiene que

$$
d_\lambda(\alpha,\beta) > \frac{1}{\lambda^{|j|}} \geq \frac{1}{\lambda^N} > \frac{2}{\lambda^N(\lambda-1)}.
$$

Por lo tanto si $d_\lambda(\alpha,\beta) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}$, se tiene que $\alpha_k = \beta_k \ \forall \ |k| \leq N$.

3. Usando el Teorema de Tychonoff se tiene que, $B(n)$ es compacto pues es producto de espacios compactos. Para ver que $B(n)$ es totalmente disconexo observemos que fijado $t \in B(n)$ y $\lambda > 3$ las bolas

$$
\left\{s \in B(n) : d_\lambda(s,t) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}\right\}
$$

son cerradas, por otro lado dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ talque

$$
2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1} < \varepsilon < 2\cdot\lambda^{-N+1}\cdot(\lambda-1)^{-1}
$$

es decir para este N las bolas de radio $2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}$ están contenidas en una de radio ε y además $s_i = t_i \ \forall \ |i| \leq N$ y por lo tanto $d_\lambda(s,t) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1} < \varepsilon$ es decir estas bolas son abiertas.

Como las bolas forman una base para la topología de $B(n)$ entonces $B(n)$ posee una base de bolas que son abiertas y cerradas, por lo tanto $B(n)$ es totalmente disconexo. ■

Observación 2.1 *Del item (2) hemos probado que dado $t \in B(n)$ y $\lambda > 3$*

$$
\{s \in B(n) : s_i = t_i \forall \ |i| \leq N\} = \left\{s \in B(n) : d_\lambda(s,t) \leq 2\cdot\lambda^{-N}\cdot(\lambda-1)^{-1}\right\}.
$$

Definición 2.1 *Sea $t \in B(n)$ y $N \geq 0$, el conjunto $\{s \in B(n) : s_i = t_i, \forall\ |i| \leq N\}$ es llamado cilíndro.*

2.2. El Shift bilateral:

Definición 2.2 *El shift es la transformación $\sigma : B(n) \to B(n)$ definida por $\sigma(\alpha) = \beta$ donde $\beta_j = \alpha_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$.*

Lo podemos ver mejor si resaltamos con una $*$ la posición cero, esto es, si $\alpha \in B(n)$, entonces es de la forma $\alpha = (\ldots \alpha_{-N} \ldots \overset{*}{\alpha_0}\ \alpha_1 \ldots)$ luego $\sigma(\alpha) = (\ldots \alpha_{-N-1} \ldots \alpha_0\ \overset{*}{\alpha_1} \ldots)$, a este tipo de shift se le conoce como ***shift bilateral***.

- Puntos fijos de σ:
  $\alpha = (\ldots 111 \ldots 111 \ldots)$ es decir $\alpha_i = 1, \forall\ i \in \mathbb{Z}$.
  $\beta = (\ldots 222 \ldots 222 \ldots)$ esto es $\beta_i = 2, \forall\ i \in \mathbb{Z}$.
  Así sucesivamente los puntos fijos de σ son todos los de la forma $\alpha = (\ldots kkkkkk \ldots kkkkk \ldots)$ esto es $\alpha_i = k$, $\forall\ i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$, observemos que $\sigma(\alpha) = \alpha$.

- Puntos periódicos de σ:

  Un punto periódico de período k es de la forma: fijemos $\alpha_j \in \{1, \ldots, n\}$ $1 \leq j \leq k$

$$\alpha = (\ldots \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\ \overset{*}{\alpha_1} \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k \ldots)$$

  en particular un punto periódico de período 3 es de la forma

$$\alpha = (\ldots \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ \overset{*}{\alpha_0}\ \alpha_1\alpha_2\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots)$$

Proposición 2.1 *Sea $\sigma : B(n) \to B(n)$ el shift. Las siguientes proposiciones son ciertas:*

1. *σ es continuo.*
2. *El conjunto $Per(\sigma)$ es denso en $B(n)$.*
3. *Existe $\alpha \in B(n)$ tal que su órbita es densa en $B(n)$, es decir, σ es transitivo.*

Prueba:

1. Tenemos que probar que, dada $\alpha \in B(n)$ y $\varepsilon > 0$ si $\beta \in B(n)$ satisface $d(\alpha, \beta) < \delta$, entonces $d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) < \varepsilon$.
   Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N > 0$ talque $\frac{2}{3} \cdot 4^{-N} < \varepsilon < \frac{2}{3} \cdot 4^{-N+1}$ y tomemos $\delta = \frac{2}{3} \cdot 4^{-(N+1)}$.

   Sea $\beta \in B(n)$ talque $d(\alpha, \beta) < \delta$ entonces por el teorema 2.1 parte (2) se tiene que $\alpha_i = \beta_i\ \forall\ |i| \leq N + 1$. De donde se tiene que $d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) < \frac{2}{3} \cdot 4^{-N} < \varepsilon\ \forall$ $|i| \leq N$, es decir, σ es continuo.

2. Sea $\beta \in B(n)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, $\exists\ N > 0$ talque $\frac{2}{3} \cdot 4^{-N} < \varepsilon$. Vamos a construir una órbita periódica de perído $2N+1$ de la siguiente manera, sea $\alpha \in Per(\sigma)$ tal que $\alpha = (\beta_{-N} \dots \beta_{-1}\beta_0\beta_1 \dots \beta_N, \overset{*}{\beta}_{-N} \dots \beta_{-1}\beta_0\beta_1 \dots \beta_N, \beta_{-N} \dots \beta_{-1}\beta_0\beta_1 \dots \beta_N)$, es decir $\alpha_i = \beta_i\ \forall\ |i| \leq N$ luego por el teorema 2.1 parte (2) tenemos que, $d(\alpha_N, \beta) \leq \frac{2}{3} \cdot 4^{-N}$ de donde se sigue que $d(\alpha_N, \beta) < \varepsilon$, que es lo que se quería probar.

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos todos los bloques de longitud k, por ejemplo para $k = 1$ todos los posibles bloques de longitud 1 son de la forma: $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \dots n$ (recordemos que nuestro espacio es un espacio de n símbolos), luego para $k = 2$ los bloques de longitud 2 son : 11 22 33 12 23 13 14 34 56 ..., entonces sea α la sucesión que tiene todos los bloques finitos de longitud k, esto es,

$$\alpha = (\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \dots}_{\text{bloque de longitud 1}}, \underbrace{11\ 12\ 13\ \dots\ 22\ 23\ 34 \dots}_{\text{bloque de longitud 2}}, \underbrace{111\ 222\ 123\ 345 \dots}_{\text{bloque de longitud 3}}, \ \dots)$$

Afirmamos que la órbita de α es densa en $B(n)$. En efecto, sea $\beta \in B(n)$, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ N > 0$ tal que $\frac{2}{3} \cdot 4^{-N} < \varepsilon < \frac{2}{3} \cdot 4^{-N+1}$ y $\beta = (\dots \beta_{-N} \dots \beta_0 \dots \beta_N \dots)$ entonces iteramos α hasta encontrar el bloque de longitud $2N+1$ en β esto es el bloque $(\beta_{-N} \dots \beta_0 \dots \beta_N)$, digamos que iteramos M veces, así

$$d(\beta, \sigma^M(\alpha)) \leq \frac{2}{3} \cdot 4^{-N} < \varepsilon$$

entonces $d(\beta, \sigma^M(\alpha)) < \varepsilon$,es decir, la órbita de α es densa en $B(n)$. ■

Definición 2.3 *Un subconjunto $\Lambda \subset B(n)$ es un subshift si es cerrado y positivamente invariante bajo σ, esto es, $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$. Por abuso del lenguaje se dice que Λ es transitivo si $\sigma|_\Lambda$ es transitivo.*

2.3. Homeomorfismos Expansivos

En esta sección estudiaremos una clase de homeomorfismos que nos permitirá dar una caracterización intrínseca de los subshifts.

Definición 2.4 *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ un homeomorfismo, decimos que f es expansiva si para todo $r > 0$ y $\forall\ x, y \in X\ x \neq y$,$\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$.*
Esta definición es equivalente a decir que f es expansiva si $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que si x , $y \in X$ y $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ entonces, $x = y$.

Definición 2.5 *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ un homeomorfismo, se dice que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales si $\exists\ r > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ y $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $y \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ y $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$.*

La expansividad significa que para cierto $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, dos órbitas diferentes nunca se acompañan, esta definición no debe confundirse con la definición de tener sensibilidad a las condiciones iniciales.

Observación 2.2 *Recordemos que un espacio métrico es perfecto si todos sus puntos, son puntos de acumulación.*

Proposición 2.2 *Sea X un espacio métrico perfecto y $f : X \to X$ un homeomorfismo, si f es expansivo, entonces f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Demostración: Supongamos que f es expansiva y X es perfecto.

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como X es perfecto x es punto de acumulación por lo tanto existe $y \in B(x, \varepsilon) \cap X$ (es decir existe una bola de centro x y radio ε que intersecta a X), luego usando la hipótesis de ser f expansiva se tiene que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$, es decir f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

La expansividad también es una propiedad que se preserva a través de conjugaciones, para ver esto proponemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3 *Sean X, Y espacios métricos compactos. Suponga que $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas por un homeomorfismo h. Entonces, g es expansiva si, y sólo si f es expansiva.*

Demostración:
Supongamos que g es expansiva, es decir, existe $r > 0$ tal que $\forall\ x, y \in Y\ \exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(g^k(x), g^k(y)) \geq r$.
Sea $r > 0$ la constante de expansividad de g, y $h : X \to Y$ un homeomorfismo que conjuga a f con g. Por la compacidad de X y Y se tiene que h es uniformemente continua. Por lo tanto, para $r > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ en X, entonces $d(h(x), h(y)) \leq r$ en Y. En consecuencia, si $d(h(x), h(y)) \geq r$ en Y, entonces $d(x, y) \geq \delta$ en X.
Si denotamos los puntos de forma diferente tenemos que, si $d(x, y) \geq r$ en Y, entonces $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \geq \delta$ en X.

Ahora veamos que f es expansiva. Sean $x, p \in X$ entonces, existen $h(x)$ y $h(p)$ en Y, las denotamos por $h(x) = y$, $h(p) = q$. Como g es expansiva entonces $\exists\ k > 0$ tal que $d(g^k(y), g^k(q)) \geq r$ y así usando la continuidad se sigue que $d(h^{-1}(g^k(y)), h^{-1}(g^k(q))) \leq \delta$ pero observemos que

$$h^{-1}(g^k(y)) = f^k(h^{-1}(y)) = f^k(x)$$

$$h^{-1}(g^k(q)) = f^k(h^{-1}(q)) = f^k(p)$$

entonces tenemos que $d(f^k(x), f^k(p)) \geq \delta$.
En conclusión hemos probado que, $\exists\ \delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, p \in X\ \exists\ k > 0$ tal que $d(f^k(x), f^k(p)) \geq \delta$, es decir, que f es expansiva con constante de expansividad δ.

Proposición 2.4 *El shift bilateral es expansivo.*

Prueba: Sea $r = 1$ y $\alpha \neq \beta \in B(n)$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_k \neq \beta_k$, la iterada k-ésima por σ lo que hace es ubicarnos en la posición cero, lo que implica que $d(\sigma^k(\alpha), \sigma^k(\beta)) \geq 1$.

Hasta ahora lo que hemos hecho es estudiar los homeomorfismos expansivos. A continuación veamos porque la definición de expansividad y la de ser sensible a las condiciones iniciales tienen gran importancia.
Observemos que los sistemas expansivos de cierta forma son bastante predecibles, es decir, podemos tener conocimiento del comportamiento de sus órbitas. En la teoría general de sistemas dinámicos surge un concepto en el cual estas dos definiciones están bastante vinculadas, esta es la definición de caos.

Definición 2.6 *Sea V un conjunto. $f : V \to V$ se dice que es caótica si*

1. *f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.*
2. *f es transitiva.*
3. *El conjunto de puntos periódicos es denso en V.*

Observemos de la proposición 2.2 se tiene que si f está definida sobre un espacio métrico perfecto y cumple que f es expansiva y cumple los items 2 y 3 entonces f es caótica.

Observación 2.3 *En el transcurso del trabajo hemos hecho énfasis en los conjuntos que son totalmente disconexos, esto es debido a que en el capítulo 3 expondremos un resultado en el cuál bajo ciertas condiciones vamos a tener una conjugación entre un subshift de tipo finito y un homeomorfismo expansivo, como los que estudiamos en la sección anterior.*

Ahora, ¿por qué es tan importante esta hipótesis?, bueno más adelante daremos varios ejemplos de homeomorfismos que no son transitivos. Pero primero recordemos que :

Proposición 2.5 *Todo homeomorfismo f de $\mathbb{R}$ es monótonamente creciente (estricto) o monótonamente decreciente (estricto).*

Prueba: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo, por definición f es inyectiva y continua.
Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, hay dos alternativas $f(x) < f(y)$ ó $f(x) > f(y)$ (por la inyectividad de f).
Supongamos que $f(x) < f(y)$ y mostremos que f es estrictamente creciente. Sean $c, d \in \mathbb{R}$ arbitrarios y supongamos sin pérdida de generalidad que $c < d$ entonces mostraremos que $f(c) < f(d)$.

Para esto consideremos $r = min\{x, c\}$ y $j = max\{y, d\}$ así $x, y, c, d \in [r, j]$. Afirmamos que f es creciente en $[r, j]$; en efecto, hay dos posibles casos $f(r) < f(j)$ ó $f(r) > f(j)$, igualmente veamos que si $f(r) < f(j)$, f es estrictamente creciente. Sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $r < z < j$ entonces $f(r) < f(z) < f(j)$ si esto no fuese así, existiría $z \in [r, j]$ tal que $f(z) < f(r) < f(j)$ ó $f(r) < f(j) < f(z)$; en la primera alternativa tenemos que $\exists\, p \in [r, z]$ tal que $f(p) = f(j)$, lo cual es una contradicción pues $p \neq j$. Así, hemos probado que f es creciente en $[r, j]$. Retomando la demostración tenemos que, como $f(x) < f(y)$ entonces f es estrictamente creciente en $[r, j]$ en consecuencia $f(c) < f(d)$ así f es monótona creciente (estricta).

Análogamente se prueba que si $f(c) > f(d)$ entonces, f es monótona decreciente (estricta).

Ejemplo 2.1 *Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ un homeomorfismo, entonces veamos que f no puede ser transitiva.*
Para ver esto supongamos que f es transitiva, es decir, $\exists\, x \in [a, b]$ tal que la órbita de x es densa en $[a, b]$.

- *Supongamos que f es estrictamente creciente, así $f(x) \neq x$, entonces hay que probar que $f(x) > x$ ó $f(x) < x$.*
  Si $f(x) > x$ tenemos que como la función f es creciente entonces f^n es una sucesión creciente. Como $\mathcal{O}^+(x)$ es densa, entonces para $y \in [a, b]$ con $y < x$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(x) - y| < \frac{|y-x|}{2}$ y así $f^k(x) < x$ pero esto contradice el hecho que f^n sea una sucesión creciente.
  Si suponemos que $f(x) < x$ el razonamiento es análogo.

- *Ahora supongamos que f es estrictamenente decreciente. Como $x \neq f(x)$ tenemos que $f(x) > x$ ó $f(x) < x$.*
  Si $f(x) > x$ entonces $f^3(x) > f(x)$ y $f^2(x) < x$ luego $f^{2m}(x) < \ldots < f^2(x) < x$ y $x < f(x) < f^3(x) < \ldots f^{2m-1}(x)$ por lo tanto $f^{2n}(x)$ es una sucesión decreciente y $f^{2n+1}(x)$ es creciente.
  Sea $y \in [a, b]$ tal que $k \in (f^{2(k+1)}(x), f^{2k}(x))$, como $\mathcal{O}^+(x)$ es densa $\exists\, j$ tal que $|f^j(x) - y| < \frac{f^{2(k+1)}(x) - f^{2k}(x)}{2}$, pero si j es par es una contradicción y si j es impar entonces $f^j(x) > x > f^{2k}(x)$.

  Si $f(x) < x$ el razonamiento es análogo al anterior.

Es decir, que no podemos tener transitividad en este tipo de aplicaciones, entonces si queremos encontrar una conjugación a un subshift de tipo finito que sea transitivo tenemos que quitar la conexidad.

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE EXPANSIVIDAD

En este capítulo presentamos el teorema principal de nuestro trabajo, recordemos que nuestro objetivo es encontrar una clase de homeomorfismos que nos den una caracterización intrínseca con la dinámica simbólica. En otras palabras queremos encontrar bajo que condiciones podemos tener una conjugación entre un homeomorfismo expansivo y un subshift de tipo finito, para ello es necesario imponer la condición de que nuestro espacio topológico sea totalmente disconexo. Pues en el capítulo 2 estudiamos que al fallar esta condición, entonces no tenemos órbitas densas.

Teorema 3.1 *Un homeomorfismo T de un espacio topológico X es topológicamente equivalente a un subshift si, y sólo si, X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y T es expansivo.*

Demostración: Suficiencia:
Supongamos que X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y $T : X \to X$ es expansivo con constante de expansividad $\varepsilon > 0$.

Afirmación 3.1 *Existe un cubrimiento $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ finito de X por conjuntos abiertos ó cerrados dos a dos disjuntos con diámetro menor o igual a ε.*

Prueba: Como X es totalmente disconexo, por el teorema 1.2, cada punto posee una base de entornos abiertos ó cerrados, tomemos para cada $x \in X$, un entorno V_x abierto ó cerrado tal que su diámetro sea menor o igual a ε así, $\bigcup_{x\in X} V_x = X$.

Por la compacidad de X existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = X$$

.

Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= V_{x_1}\\ \mathcal{U}_2 &= V_{x_2} - V_1\\ \mathcal{U}_3 &= V_{x_3} - (V_2 \cup V_1)\\ \mathcal{U}_4 &= V_{x_4} - (V_{x_3} \cup V_{x_2} \cup V_{x_1}),\end{aligned}$$

así inductivamente

$$\mathcal{U}_j = V_{x_j} - \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i.$$

Observación 3.1 *Por la forma como se vienen definiendo los conjuntos observe que*

$$\bigcup_{i=1}^{j-1} V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_i.$$

En efecto, usando recurrencia sobre i tenemos, para $i = 1$ es claro pues $\mathcal{U}_1 = V_{x_1}$, supongamos que el resultado es cierto para algún $n > k \geq 1$ esto es

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$$

y veamos que se satisface para $k+1$, en efecto

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \cup \mathcal{U}_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \cup \left(V_{x_{k+1}} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \right)^c \right) = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \cup V_{x_{k+1}}$$

Así

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{k+1} V_{x_i}.$$

Luego de la observación anterior concluimos que $\mathcal{U}_j = V_{x_j} - \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_i$.
Por la forma como se definieron los $\mathcal{U}_n$ estos son dos a dos disjuntos y son abiertos ó cerrados pues los V_x lo son.
Ahora como los V_x tienen diámetro menor o igual a ε y los $\mathcal{U}_j \subset V_{x_j}$ entonces los $\mathcal{U}_j$ también tienen diámetro menor o igual a ε. ■

Queremos encontrar una conjugación a un subshift de tipo finito para ello consideremos el siguiente conjunto,

$$\Lambda = \{\theta \in B(n) : \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)}) \neq \emptyset\}$$

Λ es el conjunto de todas las sucesiones θ en $B(n)$ tales que para todo $m \in \mathbb{Z}$ la iterada $T^m(x)$ cae en un entorno $\mathcal{U}_{\theta(m)}$, donde, $\mathcal{U}_{\theta(m)}$ es uno de los conjuntos abiertos ó cerrados del cubrimiento de la afirmación 3.1 con $\theta(m) \in \{1, \dots, n\}, \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

En el capítulo 2 denotamos a las sucesiones en $B(n)$ de la forma $\alpha = (\dots \alpha_o \alpha_1 \dots)$ donde $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$ $\forall\, i \in \mathbb{Z}$ ahora de aquí en adelante denotaremos $\alpha(i) = \alpha_i$.

Afirmación 3.2 $\Lambda \subset B(n)$ *es un subshift, esto es;*

1. Λ *es cerrado.*
2. Λ *es positivamente invariante bajo el shift* $\sigma : B(n) \to B(n)$.

Prueba:

1. Note que $\Lambda^c = \{\theta \in B(n) : \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)}) = \emptyset\}$. Veamos que Λ^c es abierto.

   Observemos que si $\theta \in \Lambda^c$ entonces;

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) = \emptyset \tag{3.1}$$

   Denotemos por $K_N = \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$. Como los $\mathcal{U}_{\theta(m)}$ son cerrados y T es un homeomorfismo se tiene que $T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$ es cerrado $\forall\ |m| \leq N$, así los K_N son cerrados, entonces de (3.1) concluimos que $K_{N_o} = \emptyset$ para algún $N_o > 0$.

   Por otra parte consideremos el cilíndro $C(0, \theta(-N_o), \dots, \theta(N_o))$ y veamos

$$C(0, \theta(-N_o), \dots, \theta(N_o)) \subset \Lambda^c$$

   Recordemos que el cilíndro es un conjunto abierto y de la forma

$$C(0, \theta(-N_o), \dots, \theta(N_0)) = \{\alpha \in B(n) : \alpha(i) = \theta(i)\ \forall\ |i| \leq N_o\}$$

   Sea $\alpha \in C(0, \theta(-N_o), \dots, \theta(N_o))$, entonces $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) \subset \bigcap_{|m|\leq N_o} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right)$ pero $\alpha(m) = \beta(m)\ \forall\ |m| \leq N_o$ así

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) \subset \bigcap_{|m|\leq N_o} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) = \bigcap_{|m|\leq N_o} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) = \emptyset$$

   pues $\theta \in \Lambda^c$, por lo tanto concluimos que $\alpha \in \Lambda^c$, que es lo que se quería probar. En conclusión tenemos que Λ^c es abierto.

2. Sea $\sigma : B(n) \to B(n)$, veamos que $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.
   En efecto, sea $\theta \in \sigma(\Lambda)$, entonces $\exists\ \alpha \in \Lambda$ tal que $\sigma(\alpha) = \theta$, donde $\theta(n) = \alpha(n+1)$.

   Como $\alpha \in \Lambda$ entonces $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) \neq \emptyset$, de donde se sigue que

$$T\left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right)\right) \neq \emptyset$$

   , luego

$$T\left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right)\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m+1}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m+1)}\right) \neq \emptyset$$

   y como $\theta(m) = \alpha(m+1)$ entonces, sustituyendo en la ecuación de arriba $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) \neq \emptyset$. Así $\theta \in \Lambda$. ■

Ahora definimos $h : \Lambda \to X$ como,

$$h(\theta) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$$

.

Para ver que h está bien definida veamos que el conjunto de la derecha es un punto.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que existen $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$, entonces $T^m(x_i) \in \mathcal{U}_{\theta(m)}$ para $i = 1, 2$ y $\forall\ m \in \mathbb{Z}$.
Como los $\mathcal{U}_{\theta(m)}$ tienen diámetro menor o igual a ε se sigue que $d(T^m(x_1), T^m(x_2)) \leq \varepsilon$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$ y así $x_1 = x_2$, pues T es expansivo con constante de expansividad ε.

Afirmación 3.3 *h es un homeomorfismo.*

Prueba:

- h es sobreyectiva: Sea $x \in X$, como los $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ cubren a X (de la afirmación 3.1) entonces, definamos la siguiente sucesión $\theta \in B(n)$ tal que, $T^m(x) \in \mathcal{U}_j$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ y ahora definimos $\theta(m) = j$ así, $x \in T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)})$ luego $x \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)})$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ y $\theta(m) \in \{1, \ldots, n\}$, como el conjunto $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)})$ contiene un único punto entonces $x = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)})$, lo que implica que $h(\theta) = x$, es decir, h es sobreyectiva.

- h es continua: Sea $\theta \in \Lambda$, y V un entorno abierto de $h(\theta) = x$, escribiendo

$$x = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$$

se tiene que para algún N

$$\bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) \subset V$$

entonces mostremos que existe U abierto de θ tal que $h(U) \subset V$, es decir, hay que verificar que

$$C(0, \theta(-N), \ldots, \theta(N)) \cap \Lambda \subset h^{-1}(V)$$

pues recordemos que los cilíndros forman una base para la topología de $B(n)$, entonces un abierto en Λ es de la forma $M \cap \Lambda$ donde M es un cilíndro de $B(n)$. Sea $\alpha \in C(0, \theta(-N), \ldots, \theta(N)) \cap \Lambda$ luego

$$h(\alpha) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\alpha(m)}) \subset \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right)$$

y como $\alpha(m) = \theta(m)\ \forall\ |m| \leq N$ entonces

$$h(\alpha) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\alpha(m)}) \subset \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\alpha(m)}\right) = \bigcap_{|m|\leq N} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) \subset V.$$

- h es inyectiva: Sean $\theta_1, \theta_2 \in B(n)$, supongamos que $h(\theta_1) = h(\theta_2)$, así,

$$h(\theta_1) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta_1}\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta_2}\right)$$

  si $x = h(\theta_1)$, entonces $T^m(x) \in \mathcal{U}_{\theta_1(m)}$ y $T^m(x) \in \mathcal{U}_{\theta_2(m)}$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$ ya que los $\mathcal{U}_j$ son dos a dos disjuntos $\mathcal{U}_{\theta_1(m)} = \mathcal{U}_{\theta_2(m)}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ así, se tiene que $\theta_1(m) = \theta_2(m)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, es decir, h es inyectiva.

- Como X es compacto y h es biyectiva y continua, entonces h^{-1} es continua.

Ahora como h es un homeomorfismo sólo falta ver que $h \circ \sigma(\theta) = T \circ h(\theta)\ \forall\ \theta \in \Lambda$, para ello sea $\theta\ \in \Lambda$

$$T(h(\theta)) = T(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m+1}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m+1)}\right) = h \circ \sigma(\theta).$$

Entonces, de las afirmaciones 3.1, 3.2 y 3.3 concluimos la demostración de la suficiencia del teorema.

Veamos la otra implicación: (Necesidad)
Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo y $\Lambda \subset B(n)$ un subshift y supongamos que existe $h : \Lambda \to X$ un homeomorfismo tal que $h \circ \sigma = T \circ h$.

Como $B(n)$ es un espacio métrico entonces usando la proposición 1.9 se tiene que X es un espacio métrico, por otro lado como Λ es cerrado y $B(n)$ es compacto, entonces Λ es compacto, así $h(\Lambda)$ es compacto pues h es continuo. Por otro lado usando la proposición 1.8 se tiene que X es totalmente disconexo pues $B(n)$ también lo es.
Para terminar sólo falta ver que T es expansivo, para ver esto observe que, de la proposición 2.4 se tiene que el shift es expansivo luego como existe una conjugación entre Λ y T y además σ es expansivo, se sigue de la proposición 2.3 que T es expansivo. ∎

En conclusión lo que nos está ayudando a pasar información de un sistema a otro es el hecho de ser totalmente disconexo. Observemos que con este resultado hemos ganado bastante dinámica para T pues con el simple hecho de T estar definido sobre un espacio métrico compacto totalmente disconexo y ser expansivo ya podemos asegurar que T es conjugado a un subshift de tipo finito. La pregunta natural que surge es ¿cuál es ese subshift?.

En la prueba del teorema anterior observemos que el hecho de ser X totalmente disconexo sólo lo usamos para ver que h era inyectiva, entonces si debilitamos la hipótesis de ser totalmente disconexo podemos adaptar la prueba del teorema anterior para probar la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Dado un homeomorfismo expansivo T de un espacio métrico compacto X existe un subshift Λ y una aplicación continua y sobreyectiva $h : \Lambda \to X$ tal que $h \circ \sigma = T \circ h$.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio métrico compacto y T es expansivo con constante de expansividad ε.

Afirmación 3.4 *Sea $\varepsilon > 0$, existe un cubrimiento $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ finito de X por conjuntos cerrados con diámetro menor o igual a ε.*

Prueba: Por la compacidad de X consideremos un cubrimiento por conjuntos cerrados tales que $\bigcup_{x \in X} U_x = X$ y los U_x con diámetro menor o igual a ε, donde los U_x no necesariamente son disjuntos, luego tomemos un subcubrimiento finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$

■

Análogo a la prueba del teorema anterior consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{\theta \in B(n) : \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} T^{-m}(\mathcal{U}_{\theta(m)}) \neq \emptyset\}$$

Afirmación 3.5 $\Lambda \subset B(n)$ *es un subshift, esto es;*

1. Λ *es cerrado.*
2. Λ *es positivamente invariante bajo el shift* $\sigma : B(n) \to B(n)$.

Prueba: Es la misma que la realizada en la afirmación 3.2.

Ahora definimos $h : \Lambda \to X$ como,

$$h(\theta) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} T^{-m}\left(\mathcal{U}_{\theta(m)}\right)$$

usando el mismo razonamiento que en el teorema 3.1 se tiene que el conjunto de la derecha es distinto de vacío y contiene un único punto. ■

Afirmación 3.6 *h es continua y sobreyectiva.*

Prueba: Ver afirmación 3.3, las pruebas son las mismas.

Observe que h no es inyectiva pues los conjuntos del cubrimiento de la afirmación 3.4 no son necesariamente disjuntos entonces pueden existir dos puntos distintos con la misma imagen. Por último para ver que $h \circ \sigma(\theta) = T \circ h(\theta)\ \forall\ \theta \in \Lambda$, se hace igual a lo hecho en la prueba del teorema anterior.

Luego de las afirmaciones 3.4, 3.5 y 3.6 concluimos la prueba de la proposición 3.1. ■

Con la proposición anterior lo que concluimos es que al quitar la hipótesis de ser X totalmente disconexo entonces logramos encontrar una semiconjugación entre un homeomorfismo expansivo T y un subshift Λ. Entonces, concluimos que T tiene al menos la dinámica de σ, es decir, T tiene órbitas periódicas y es transitivo. Para estar seguro que la semiconjugación hace que T sea transitivo observe lo siguiente:

Sea $\theta \in \Lambda$ y $\{\sigma^n(\theta)\}$ densa en Λ, entonces $\{T^n(h(\theta))\}$ es densa en X. Para ver esto, sea $y \in X$, $\exists\ \theta_o \in \Lambda$ tal que $h(\theta_o) = y$, como $\{\sigma^n(\theta)\}$ es densa en Λ, entonces $\exists\ n_k \to +\infty$ tal que $\sigma^{n_k}(\theta) \to \theta_o$, luego por la continuidad de h se sigue que $h(\sigma^{n_k}(\theta)) \to h(\theta_o) = y$, además como se tiene que $h \circ \sigma^{n_k}(\theta) = T^{n_k}(h(\theta))$, se concluye que $T^{n_k}(h(\theta)) \to h(\theta) = y$, por lo tanto, $\{T^n(h(\theta))\}$ es densa en X.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Robinson, C. Dynamical Systems. CRC Press (2000).

[2] Mañé, R. Teoría Ergódica. Proyecto Euclides. 1983.

[3] Devaney, R. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Second Edition. 1989.