Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Protocolos de Repartición Equitativa

Br. María Victoria León Sánchez

Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida, Junio 2010

Agradecimientos

A la Universidad de Los Andes por abrirme las puertas y así brindarme la oportunidad de formarme como hombre útil en la sociedad.

A la comunidad de la Facultad de Ciencias, por su esplendoroso y único ambiente propicio para estudiar.

Al profesor Ramón Pino quién ha sido, desde mis inicios de la carrera, ejemplo de trabajo y constancia. Sus buenos consejos y sobre todo el aprendizaje que me otorgó durante la realización de este trabajo, influyeron definitivamente en mi formación académica.

A la profesora Olga Porras por la dedicación y revisión necesarios para la presentación de este trabajo.

A mis padres: Margarita y Tony por estar atentos y pendientes de mi durante mis estudios.

A mis hermanos: Clarimar, Antonio, Mariangel y María José, este logro a ustedes también les pertenece.

A José Luis Burgos, por ser la persona que me ha ayudado en todos los ámbitos y ser el ímpetu que me impulsa a seguir luchando por logros como estos.

Al Ingeniero Jean Carlos Rodríguez y al Profesor José Soto por brindarme su confianza y apoyo durante la carrera. Ustedes son parte de este éxito.

A Cándida, Carol, Yesenia, Diana, Maritza, Gabriel "el chino", Engels, Roberto, Yunior, Miguel y Julio por ser grandes amigos y disfrutar de buenos momentos de estudios.

Resumen

En este trabajo estudiamos protocolos de repartición equitativa de un bien divisible entre un número finito de agentes. Estos protocolos son procedimientos que mediante un número finito de pasos logran la repartición de un bien. Dos tipos de protocolos son estudiados: los llamados protocolos proporcionales, en los que a cada agente que interviene en la repartición le toca al menos $\frac{1}{n}$ de la porción total del bien, donde n es el número de agentes. Los otros protocolos estudiados, bastante más complejos, se llaman protocolos de satisfacción total (o libres de envidia). El fin que se persigue en estos protocolos es que cada agente tenga una porción del bien que él considere maximal, es decir cada agente considerará que no hay otros agentes que tengan una porción más grande que la que él posee.

Índice general

Introducción

El problema que estudiamos en esta monografía es el de la repartición de un bien divisible entre un número finito de individuos. El caso típico, que además será nuestro paradigma, es el de la repartición de una torta, la cual por supuesto suponemos que se puede dividir. Debemos hacer notar, sin embargo, que este es un problema importante en Ciencias Sociales, en particular en Economía o en Geopolítica, pues bien puede tratarse de un terreno o un territorio marítimo, etc y los agentes pudieran ser países, por ejemplo.

Los métodos que se estudian, llamados protocolos en la literatura, tienen la característica de hacer intervenir solamente a los agentes envueltos en la repartición. Esto aunado a que cada agente tiene una medida individual hace que el problema sea realmente interesante.[Lo de la medida individual es que un mismo pedazo de la torta, a un agente le puede parecer que mide un tercio y a otro que mide la mitad.]

Estudiaremos entonces protocolos de repartición *equitativa* de un bien divisible para 2 o más personas. La palabra equitativa tendrá dos significados que aclararemos un poco más adelante.

Un protocolo de repartición es aquel procedimiento interactivo formado por reglas y estrategias que genera una repartición de un bien divisible entre número finito de participantes. Insistimos en el hecho de que no se involucran agentes externos ya que los únicos que deciden si una regla se ha cumplido o no son los mismos participantes. Insistimos también en que cada uno de los agentes posee una medida aditiva individual la cual será la valoración que cada uno dará a las diferentes piezas de la repartición.

Dos son los significados de la palabra equitativo en este contexto. El primero significa proporcionalidad. Es decir, si hay n agentes cada uno debe tener al menos $\frac{1}{n}$ del todo, según su medida individual. El otro significado significa que no hay envidia, en el sentido de que cada agente posee una pieza que tiene medida maximal según su propia medida, esto es, que si él mide todas las piezas repartidas la medida de su pieza es el máximo de esos valores (pudiendo haber otras que alcancen ese máximo, pero nunca un valor más grande). Los protocolos que satisfacen esta propiedad se llaman de satisfacción total (o libres de envidia).

Este trabajo está organizado en tres capítulos. El primero está dedicado al estudio de los protocolos más sencillos. Algunos de ellos son muy antiguos. Allí incluiremos algunos protocolos que se llaman protocolos con movimientos de cuchillos.

El segundo capítulo está dedicado a la presentación de dos protocolos de satisfacción total para 4 personas. El primero requiere de un gran número de cortes, por lo que se hace difícil su realización práctica. El segundo protocolo de satisfacción total para cuatro personas que presentamos, emplea la técnica de movimientos de cuchillos y sólo requiere de once cortes para su ejecución.

Finalmente, en el tercer capítulo se presenta una solución al problema de existencia del protocolo de satisfacción total para un número arbitrario de personas. Este es una generalización del primer protocolo considerado en el capítulo 2. La prueba constructiva de la existencia de este protocolo para $n \geq 5$ es nuestra.

Capítulo 1

Protocolos más Básicos

Partimos de una situación en la cual se quiere repartir un bien entre un número conocido de personas de tal manera que todos estén satisfechos con la repartición. En este capítulo presentaremos los procedimientos más básicos usados para repartir de forma equitativa un bien entre un número dado de personas.

En correspondencia con los creadores de algunos procedimientos utilizaremos una torta en representación del bien y llamaremos jugadores a las personas que obtendrán una parte del bien.

Supongamos que queremos repartir una torta entre n jugadores. Diremos que una asignación de la torta es proporcional si cada jugador recibe una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{n}$ (según la medida de cada uno), y se dice que es de satisfacción total si cada jugador recibe una pieza que no intercambiaría con la pieza de otro jugador (porque él piensa que su pieza es la más grande de todas o de tamaño igual a la más grande).

Los procedimientos encontrados para obtener este tipo de asignaciones son llamados protocolos. Un *protocolo* es un procedimiento interactivo formado por reglas y estrategias. Las *reglas* incorporan las normas que han de seguirse en los procedimientos y son ejecutadas por los mismos jugadores, quienes podrán decidir si una norma se ha cumplido o no sin saber la valoración que los otros jugadores han dado a las diferentes piezas de la torta. Las *estrategias* son los asesoramientos dados a los jugadores sobre las decisiones que deben tomar, en conformidad con las normas, mediante el uso de su información privada acerca de cuánto valoran las diferentes piezas de la torta. Por conveniencia las estrategias serán colocadas entre paréntesis y con letra cursiva.

Se dice que un protocolo es *proporcional* si cada jugador posee una estrategia que le garantiza como mínimo $\frac{1}{n}$ de la torta (según su medida) independientemente de las estrategias de los otros jugadores; y diremos que un protocolo es de *satisfacción total* si cada jugador posee una estrategia que le garantiza la pieza más grande de la repartición o por lo menos una de tamaño igual a la más grande. Todo protocolo de satisfacción total es también proporcional, sin embargo no todo protocolo proporcional es de satisfacción total, la proporcionalidad no garantiza la pieza más grande a los jugadores. Más adelante daremos argumentos y un ejemplo de esta situación.

Los jugadores darán una valoración a cada pieza según una medida aditiva individual. Dada una partición de la torta en k piezas $P_1, P_2, ..., P_k$ el Jugador 1 piensa que la pieza P_j es de tamaño $\mu_1(P_j)$, de forma general el Jugador i piensa que la pieza P_j es de tamaño $\mu_i(P_j)$ y la torta que denotaremos como T será de tamaño $\mu_i(T) = 1$ para todo i.

§ 1.1. Protocolo Cortar y Elegir

Cuenta un relato del antiguo testamento que dos mujeres embarazadas vivían en una misma casa, las dos dieron a luz a sus bebés con una diferencia de tres días. Una noche, a pocos días del alumbramiento, uno de los bebés muere por causas desconocidas, la madre al percatarse de ello intercambia los bebés mientras que la otra mujer duerme. Al levantarse para dar pecho a su hijo se da cuenta que el bebé que estaba entre sus brazos estaba muerto y que no era su hijo. Luego de muchas disputas y sin encontrar solución estas deciden buscar justicia ante el Rey.

Cuentan lo ocurrido al Rey Salomón; afirmando ambas que su hijo era el que estaba vivo. El Rey decide llamar a uno de sus guardia y le ordena dividir el niño en 2. Desesperada la verdadera madre le ruega al rey que no le haga daño al niño y pide que se lo entreguen a la otra mujer renunciando a su derecho de madre, mientras que la otra mujer pide al rey que lo divida. El rey al escuchar a las mujeres ordena a su guardia entregar el niño a la primera mujer "Entregad a aquella el niño vivo, y no lo matéis; ella es su madre".

La solución propuesta por Salomón es una de las primeras nociones explícitas de repartición equitativa (con derechos) que haya sido registrada. Es claro que el Rey no quería dañar al niño sino desenmascarar a la mujer impostora. Para ello él considera la siguiente estrategia: la verdadera madre tendrá como prioridad salvar la vida de su hijo aunque ello le cueste la separación entre ambos mientras que la mujer impostora despreciará el hecho de salvar al bebé. De esta forma el Rey Salomón descarta la mujer impostora y entrega el bebé a la verdadera madre.

Aunque para Salomón fue exitosa esta estrategia en otros casos no lo sería. Por ejemplo, es posible que la mujer mentirosa también ruegue para que el niño no sea lastimado.

En un relato mucho más antiguo se tiene algo muy cercano al *Protocolo Cortar y Elegir*. Cuenta la leyenda que hace más de 2800 años los dioses griegos Zeus y Prometeo querían dividir un cúmulo de carne para los dos. Prometeo armó dos pilas de carne y Zeus seleccionó una de ellas.

Protocolo Cortar y Elegir

Paso1 Jugador 1 corta la torta en dos piezas (*del mismo tamaño*).

Paso2 Jugador 2 elige una de las piezas (*de tamaño mayor o igual a* $\frac{1}{2}$).

Paso3 Jugador 1 toma la pieza restante.

Este protocolo garantiza una asignación proporcional y de satisfacción total de la torta si los jugadores siguen sus estrategias. Supongamos que el Jugador 1 corta la torta en dos piezas de tamaños diferentes, luego el Jugador 2 elige la pieza más grande de la división y deja al Jugador 1 la pieza más pequeña. En este caso el Jugador 1 pierde ya que recibe una pieza no deseada al no seguir las estrategias asignadas por el protocolo.

Proposición 1.1 *Todo protocolo de Satisfacción Total es también Proporcional para cualquier n.*

Prueba. Consideremos un protocolo de satisfacción total donde participan n jugadores y cuya asignación final de la torta es $P_1, P_2, ..., P_n$ donde P_i es la pieza asignada del Jugador i. Bastaría probar que para cada i se cumple que $\mu_i(P_i) \geq \frac{1}{n}$.

Supongamos que existe un Jugador k que piensa que $\mu_k(P_k) < \frac{1}{n}$.

Dado que la asignación del pastel es de satisfacción total el Jugador k piensa que $\mu_k(P_j) \leq \mu_k(P_k)$ para cada $1 \leq j \leq n$. Luego

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_k(P_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_k(P_k)$$
$$\mu_k(T) \leq n.\mu_k(P_k)$$
$$\mu_k(T) < n.\frac{1}{n}$$
$$\mu_k(T) < 1$$

Pero esto es una contradicción. Por lo tanto $\mu_i(P_i) \geq \frac{1}{n}$ se cumple para todo i, así todo protocolo de satisfacción total es también proporcional. ■

Proposición 1.2 *Si $n = 2$ entonces la proporcionalidad implica la propiedad de satisfacción total.*

Prueba. Si cada jugador piensa que posee al menos la mitad de la torta, automáticamente pensará que el otro jugador no podrá tener una pieza más grande que la de suya. ■

Una aplicación del protocolo *Cortar y Elegir* es la siguiente. La Convención sobre el Derecho del Mar, que entró en vigencia en 1994, incorpora un plan para proteger los intereses de los países en desarrollo cuando una nación altamente industrializada desea explotar una parte de las aguas subyacentes de los fondos marinos internacionales. El país que desea explotar dividiría la zona en dos partes. Una agencia independiente que representa a los países en desarrollo elige una de las dos zonas y las reserva para uso futuro.

§ 1.2. Protocolos proporcionales para 3 personas

§ 1.2.1. Protocolo de Steinhaus

Cerca del año 1943 el matemático Polaco Hugo Steinhaus [**6**] descubrió una extensión del protocolo *Cortar y Elegir* que daba como resultado una asignación proporcional para tres personas.

Protocolo de Steinhaus

Paso 1 Jugador 1 corta la torta en tres piezas (*del mismo tamaño*).

Paso 2 Jugador 2 puede elegir pasar (*lo cual hace si dos o más piezas poseen tamaño de por lo menos* $\frac{1}{3}$ *de la torta*) o etiqueta dos piezas como malas (*si estas son de tamaño menor estricto a* $\frac{1}{3}$).

Paso 3 Si el Jugador 2 pasa en el Paso 2, entonces los jugadores proceden a elegir una pieza en el siguiente orden: Jugador 3, Jugador 2 y Jugador 1.

En este caso, cada jugador obtiene una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$ según su medida. El Jugador 3 porque elige de primero, el Jugador 2 porque asegura en el Paso 2 una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$ y el Jugador 1 porque hace todas las piezas de tamaño $\frac{1}{3}$.

Paso 4 Si el Jugador 2 no pasa en el Paso 2, entonces el Jugador 3 tendrá las mismas dos opciones que el Jugador 2 en el Paso 2, ignorando las etiquetas del Jugador 2.

Paso 5 Si el Jugador 3 pasa en el Paso 4, entonces los jugadores proceden a elegir en el siguiente orden: Jugador 2, Jugador 3 y Jugador 1.

En este caso, cada jugador obtiene una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$ según su medida. El Jugador 2 porque elige de primero, el Jugador 3 porque asegura en el Paso 4 una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$ (según su medida) y el Jugador 1 porque hace todas las piezas de tamaño $\frac{1}{3}$.

Paso6 Si el Jugador 3 no pasa en el Paso 4, entonces el Jugador 1 debe tomar una pieza que el Jugador 2 y el Jugador 3 etiquetaron como mala (*note que en este caso al menos una pieza es etiquetada por los jugadores 2 y 3*). Las otras dos piezas son unificadas.

Paso7 El Jugador 2 y el Jugador 3 realizan el protocolo *Cortar y Elegir* con la nueva pieza.
En este último caso cada jugador obtiene una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$. El Jugador 1 porque toma la pieza etiquetada como mala y según su medida es de tamaño $\frac{1}{3}$. Los jugadores 2 y 3 porque realizan el protocolo *Cortar y Elegir* con la parte restante de la torta la cual posee tamaño mayor estricto que $\frac{2}{3}$, y es por ello que cada una de las piezas finales posee tamaño mayor estricto que $\frac{1}{3}$.

Observación 1 *Este protocolo no es de satisfacción total.*

Considérese el caso en donde los Jugadores 2 y 3 etiquetan cada uno dos piezas como malas y donde el Jugador 1 toma una de éstas (etiquetada por ambos jugadores). Lo siguiente de acuerdo al protocolo es que los jugadores 2 y 3 emplean el protocolo *Cortar y Elegir* con la parte restante de la torta, luego no existe seguridad de que todos los jugadores estén totalmente satisfechos ya que el Jugador 1 pudiese estar en desacuerdo al pensar que una de las piezas resultantes del protocolo *Cortar y Elegir* es más grande que la asignada a este. Es por ello que el protocolo propuesto por Steinhaus no es de satisfacción total.

§ 1.2.2. Protocolo de Fink

En 1964 Fink [**5**] descubrió una manera de repartir proporcionalmente una torta entre tres o más jugadores de una forma muy diferente al protocolo propuesto por Steinhaus.

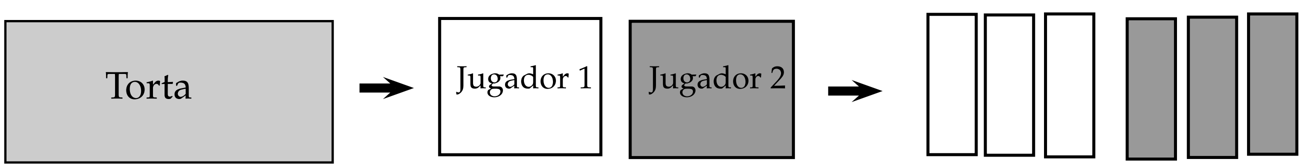
Protocolo de Fink

Paso1 Jugador 1 corta la torta en dos piezas (*del mismo tamaño*).

Paso2 Jugador 2 elige una pieza (*la más grande*) y da al Jugador 1 la pieza restante.

Paso3 Jugador 1 y Jugador 2 trisecan la pieza que tienen cada uno.

Paso4 El Jugador 3 selecciona una pieza de cada trisección (*las más grande*) y los jugadores 1 y 2 toman las piezas restantes.



El siguiente lema es necesario para comprobar que el protocolo de Fink es proporcional.

Lema 1.1 *Si T se divide en n pedazos al menos uno es de tamaño mayor o igual a* $\frac{1}{n}$.

Prueba. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ las piezas resultantes de la división de T y supongamos que $\mu(A_i) < \frac{1}{n}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$\mu(T) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) < n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

pero esto es una contradicción. Por lo tanto existe al menos un A_i cuyo tamaño es mayor o igual a $\frac{1}{n}$. ■

Faltaría mostrar que el protocolo de Fink es proporcional. Denotemos por A y B las piezas resultantes en el Paso1. Sin pérdida de generalidad supongamos que es B la pieza elegida por el Jugador 2 en el Paso2.

$$\mu_1(A) = \mu_1(B) = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mu_2(B) \geq \mu_2(A)$$

Denotemos por $\{A_1, A_2, A_3\}$ y $\{B_1, B_2, B_3\}$ las piezas resultantes de las trisecciones realizadas en el Paso3 y supongamos sin pérdida de generalidad que las piezas elegidas por el Jugador 3 en el Paso4 son A_1 y B_2. Entonces

$$\mu_1(A_1) = \mu_1(A_2) = \mu_1(A_3) = \frac{\mu_1(A)}{3} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$
$$\mu_2(B_1) = \mu_2(B_2) = \mu_2(B_3) = \frac{\mu_2(B)}{3} \geq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$

Comprobemos que las piezas A_1 y B_2 son para el Jugador 3 de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{6}$. Supongamos que no es cierto, entonces como el Jugador 3 piensa que A_1 es la pieza más grande del conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ y B_2 es la pieza más grande del conjunto $\{B_1, B_2, B_3\}$ se tiene que las piezas A_2, A_3, B_1 y B_3 son de tamaño menor estricto que $\frac{1}{6}$, pero esto es una contradicción con el Lema1.1. Por lo tanto cada jugador obtiene dos piezas de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{6}$ de la torta y así una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$ según la medida de cada uno.

Observación 2 *Este protocolo no es de satisfacción total.*

Consideremos el ejemplo mostrado anteriormente, es posible que el Jugador 1 piense que

$$\mu_1(B_2) > \mu_1(A_2) \qquad \text{o} \qquad \mu_1(B_2) > \mu_1(A_3)$$

por lo tanto, este pensaría que el Jugador 3 obtiene una pieza más grande que la de él, así el protocolo no es proporcional. Una característica del protocolo de Fink es que este se puede generalizar para $n+1$ personas siempre y cuando se tenga algún protocolo proporcional para n personas.

Lema 1.2 *Si para n personas existe un protocolo proporcional, entonces para $n+1$ personas el protocolo de Fink se puede generalizar.*

Prueba. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ las piezas asignadas con el protocolo proporcional a n de los $n+1$ jugadores. Cada jugador dividirá su pieza en $n+1$ pedazos de igual tamaño según su medida, el jugador que no participa en el protocolo proporcional tomará una pieza de cada jugador y dejará a estos las piezas restantes.

Mostremos que la asignación final es proporcional.

Cualquier jugador que participa en el protocolo proporcional para n personas obtiene una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{n}$ (según su medida). Al dividirla en $n+1$ piezas y ceder una al otro jugador, este queda con n piezas de tamaño $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$ cada una y al unificarlas obtiene una pieza final de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{n+1}$.

Consideremos el jugador que no participa en el protocolo proporcional para n personas. Este obtiene n piezas, digamos $P_1, P_2, ..., P_n$, donde $\mu(P_i) \geq \frac{\mu(A_i)}{n+1}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Luego

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} P_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto, el jugador en cuestión obtiene una parte de la torta de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{n+1}$. Así, el protocolo de Fink generalizado también es proporcional. ■

§ 1.3. Protocolo “El último que recorta toma la parte recortada”

Steinhaus, al haber creado un protocolo proporcional para tres personas, se preguntó si podría generalizarse para cuatro, cinco o un número arbitrario de personas. Esta pregunta fue respondida por sus colegas Polacos Stefan Banach y Bronislaw Knaster cerca del año 1944 (Ver [**8**] y [**9**]) quienes crearon un protocolo proporcional para n de personas y le dieron el nombre “El último que recorta toma la parte recortada”.

Protocolo El último que recorta toma la parte recortada

Paso1 Jugador 1 corta una pieza P_1 de la torta (*de tamaño* $\frac{1}{n}$).

Paso2 Jugador 2 puede elegir pasar (*lo cual hace si* P_1 *posee tamaño menor o igual a* $\frac{1}{n}$) o recorta P_1 (*y crea una nueva pieza de tamaño exactamente* $\frac{1}{n}$ *según su medida*). La nueva pieza (P_1 *recortada o* P_1) será renombrada P_2 y el recorte, si lo hubo, será dejado a un lado.

Paso3 Para $3 \leq i \leq n$, Jugador i toma la pieza P_{i-1} y procede exactamente como lo hizo el Jugador 2 en el Paso2, resultando una pieza llamada P_i.

Nota: Para $1 \leq i \leq n$, el Jugador i piensa que P_i es de tamaño menor o igual a $\frac{1}{n}$.

Paso4 La pieza P_n será asignada al último jugador que recortó.

Paso5 Los recortes serán unificados y los Pasos 1-4 se repetirán con el resto de la torta y los $n-1$ jugadores restantes.

Nota: Los Jugadores en esta segunda etapa piensan que la parte restante del pastel es de tamaño mayor o igual a $\frac{n-1}{n}$.

Paso6 El Paso5 es iterado hasta que sólo queden 2 Jugadores. Estos últimos realizarán el Protocolo *Cortar y Elegir*.

Verifiquemos que cada jugador obtiene una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{n}$ según la medida de cada uno.

Los primeros $n-2$ jugadores que obtienen una pieza de la repartición aseguran que el tamaño de su pieza es exactamente $\frac{1}{n}$, dado que cada uno recortó su pieza. Por otro lado los últimos dos jugadores en elegir piensan que las piezas ya asignadas son de tamaño menor o igual a $\frac{1}{n}$ cada una, por ello piensan que la parte restante de la torta es de tamaño mayor o igual a

$$1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n}$$

Luego, al realizar el protocolo *Cortar y Elegir* con el resto de la torta ellos aseguran, cada uno, una pieza de tamaño mayor igual a $\frac{1}{n}$, así este protocolo es proporcional.

Por último notemos que este protocolo no es de satisfacción total. Consideremos el caso donde el Jugador 1 obtiene la pieza X_1 y seguidamente el Jugador 2 obtiene la pieza X_2, dado que el Jugador 1 no participa en la asignación de X_2, él puede pensar que $\mu_1(X_1) < \mu_1(X_2)$.

§ 1.4. Protocolo de Selfridge y Conway

Creado por John L. Selfridge en el año 1960 y de forma independiente por John H. Conway en el año 1993, es el primer protocolo de satisfacción total que se elabora para tres personas. Aunque Selfridge y Conway no publicaron sus resultados, este protocolo fue ampliamente difundido por Richard K. Guy y otros.

Protocolo de Selfridge y Conway

Paso1 Jugador 1 corta la torta en tres piezas (*del mismo tamaño*).

Paso2 Jugador 2 puede elegir pasar (*lo cual hace si por lo menos dos de las piezas más grandes tienen el mismo tamaño*) o recorta una de las tres (*la más grande y crea una pieza de igual tamaño a la segunda más grande*).

Si el Jugador 2 recorta llamaremos L a la parte restante del recorte y lo dejaremos a un lado.

Paso3 Los Jugadores proceden a elegir una pieza (*la más grande según su medida*) en el siguiente orden: Jugador 3, Jugador 2 y Jugador 1. Si el Jugador 2 no pasa en el Paso2, este deberá tomar la pieza recortada si el Jugador 3 no lo hizo. Llamemos X_i la pieza elegida por el Jugador i, con $i = 1, 2, 3$.

En este caso, obtenemos una partición de la torta $\{X_1, X_2, X_3, L\}$ donde $\{X_1, X_2, X_3\}$ es una asignación de Satisfacción Total. El Jugador 3, como elige de primero, toma la pieza más grande (según su medida). El Jugador 2 posee una estrategia que le garantiza una pieza de tamaño igual a la más grande y el Jugador 1 como hace las primeras piezas del mismo tamaño asegura una de tamaño $\frac{1}{3}$ (a él no le toca la pieza recortada, si la hay).

Paso4 Si el Jugador 2 no recorta, se habrá asignado toda la torta, donde la asignación es de Satisfacción Total. De otra forma el Jugador 3 o el Jugador 2 elige la pieza recortada y el otro la no recortada. En este caso, el jugador que reciba la pieza no recortada dividirá L en 3 partes (*del mismo tamaño*) y llamaremos a este Cortador y al otro No-cortador.

Nota: El Jugador 1 tendrá una ventaja irrevocable sobre el No-cortador. Llamemos X_c la pieza elegida por el No-cortador. Para el Jugador 1, se tiene

$$\mu_1(X_1) = \mu_1(X_c) + \mu_1(L) \quad \text{donde} \quad \mu_1(L) > 0$$

Por lo tanto, al hacerse cualquier repartición de la pieza L, el Jugador 1 pensará que su parte total de la torta será mucho mayor que la del No-cortador.

Paso5 Los Jugadores proceden a elegir una pieza de L, en el siguiente orden: No-cortador, Jugador 1 y Cortador. Llamemos L_i a la pieza elegida por el Jugador i.

Luego, la asignación de la pieza L es de Satisfacción Total. Para el No-cortador, porque elige de primero; el Jugador 1, porque tiene una ventaja irrevocable sobre el No-cortador y el Cortador, porque hace todas las piezas de tamaño $\frac{1}{3}$ de L.

Finalmente, cada jugador obtiene dos piezas asignadas con la propiedad de satisfacción total, así la unión de estas , que es la parte de la torta que le corresponde a cada jugador, es asignada con dicha propiedad.

Lema 1.3 *Si T se divide en k pedazos y cada uno de ellos se usa para efectuar una repartición de satisfacción total entre n jugadores entonces la repartición final de T es de satisfacción total.*

Prueba. Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ las k piezas obtenidas de la división de T y supongamos que n jugadores realizan una repartición de satisfacción total con estas k piezas. Denotemos por A_i^j la pieza asignada al jugador j de la pieza original A_i y $\bigcup_{i=1}^k A_i^j$ la parte total de la torta que le corresponde al Jugador j.

Mostremos que la asignación final de la torta es de satisfacción total.
Consideremos el Jugador s, este jugador piensa que $\mu_s(A_i^s) \geq \mu_s(A_i^r)$ para todo r. Luego

$$\mu_s(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^s) = \sum_{i=1}^{k} \mu_s(A_i^s) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_s(A_i^r) = \mu_s(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^r)$$

Por lo tanto cada jugador piensa que la parte total de la torta que le corresponde es el más grande de todos, según su propia medida. ■

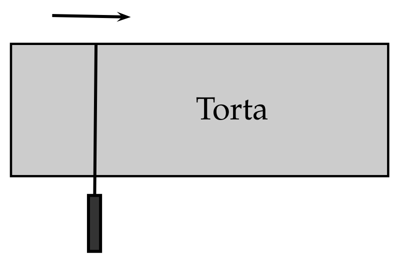
§ 1.5. Protocolos con movimientos de cuchillos

§ 1.5.1. Protocolo de Dubins-Spanier para 2 personas

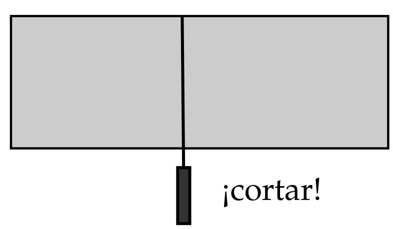
Es la versión con movimientos de cuchillos del protocolo *Cortar y Elegir*. Creado por los matemáticos Lester Dubins y Edwin Spanier cerca del año 1961 [**4**], fué el primer ejemplo de un procedimiento con movimiento de cuchillo registrado.

Protocolo Dubins-Spanier

Un réferi mueve lentamente un cuchillo a través de una torta desde el borde izquierdo hasta el borde derecho.



En cualquier momento un jugador manda a cortar (*cuando crea que el cuchillo ha llegado a la mitad de la torta*).



El jugador que manda a cortar recibe la pieza que está al lado izquierdo del cuchillo mientras que el otro recibe la parte restante.

Este procedimiento es de Satisfacción Total. El jugador que manda a cortar recibe una pieza que según su medida es $\frac{1}{2}$ de la torta mientras que el otro jugador recibe una pieza (la parte restante de la torta) la cual para él es por lo menos tan grande como la pieza del otro jugador.

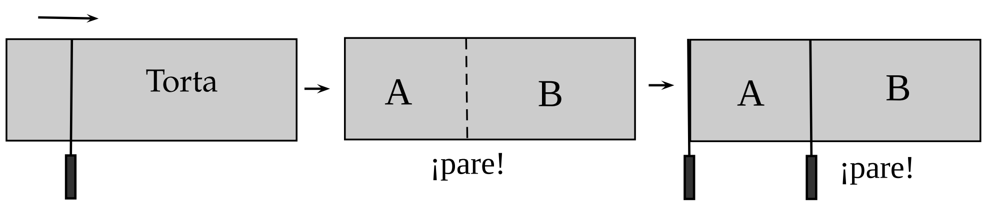
§ 1.5.2. Protocolo de Austin para 2 personas

Es una versión modificada del protocolo *Cortar y Elegir*. Esta modificación creada por Austin en el año 1982 [**1**] produce una división de la torta que garantiza a cada uno de los jugadores una pieza de tamaño $\frac{1}{2}$.

Protocolo de Austin

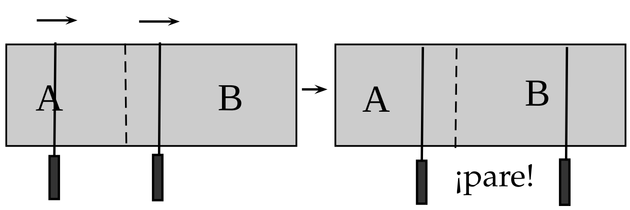
Un cuchillo se mueve lentamente a través de una torta desde el borde izquierdo hasta el derecho, como en *Dubins-Spanier*.

En algún momento un jugador (*supongamos el Jugador 1*) dice pare (*cuando crea que el cuchillo ha llegado a la mitad de la torta*). Allí se hace una marca. En este momento se coloca un segundo cuchillo en el borde izquierdo de la torta y llamaremos A la pieza del lado izquierdo de la marca y B la parte restante de la torta.



El Jugador 1 mueve ambos cuchillos paralelamente (*de forma que la pieza entre los dos cuchillos sea de tamaño* $\frac{1}{2}$ *de la torta, para él*). Los mueve con la condición de que el cuchillo de la izquierda no sobrepase la marca a menos que el cuchillo de la derecha llegue al borde derecho de la torta.

En algún momento el Jugador 2 dice pare (*cuando piense que la parte que está entre ambos cuchillos sea* $\frac{1}{2}$ *de la torta*). En este preciso momento se corta la torta donde las piezas resultantes serán asignadas al azar.



Una característica importante de este protocolo es que ambos jugadores están de acuerdo que las piezas resultantes tienen el mismo tamaño y por eso son intercambiables.

Como el Jugador 1 hace los movimientos de cuchillo éste asegura dos piezas del mismo tamaño según su medida.

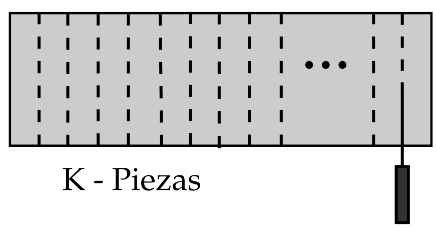
Por otro lado, cuando se hace la marca, el Jugador 2 puede pensar que $\mu_2(A) \leq \frac{1}{2}$ y $\mu_2(B) \geq \frac{1}{2}$. Luego cuando el Jugador 1 realiza el movimiento de cuchillos el Jugador 2 observa que estos cuchillos se separan, es decir, no van a mantener la distancia pues la condición es que si el cuchillo de la derecha llega al extremo derecho de la torta, el de la izquierda deberá llegar a la marca, dando la oportunidad al Jugador 2 de hallar una pieza de tamaño exacto a $\frac{1}{2}$ entre estos cuchillos. Notemos además que el Jugador 2 no permitirá que el cuchillo de la derecha llegue al extremo derecho de la torta ni que el izquierdo llegue a la marca puesto que las piezas resultantes son asignadas al azar y en este caso es posible que al Jugador 2 le toque la pieza A la cual según su medida es más pequeña que la pieza B.

§ 1.5.3. Acuerdo de una pieza de tamaño $\frac{1}{k}$ de Austin

Austin notó [**1**] que una simple extensión de su protocolo produce uno nuevo en donde los jugadores se ponen de acuerdo sobre el tamaño de una pieza.

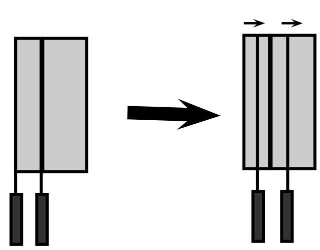
Acuerdo de Austin

El Jugador 1 hace k-1 marcas paralelas sobre la torta (*de forma que las k piezas determinadas sean de tamaño $\frac{1}{k}$ cada una*).



Si el Jugador 2 piensa que alguna de las piezas marcadas tiene tamaño $\frac{1}{\mathrm{k}}$, entonces se termina el protocolo. De otra forma para él existe una pieza de tamaño menor y mayor a $\frac{1}{\mathrm{k}}$, se recorta estas dos y se ordenan colocando de primera la menor y de segunda la mayor.

El Jugador 1 toma dos cuchillos y los coloca en el borde izquierdo y derecho de la primera pieza (*piensa que la distancia entre ambos cuchillos es $\frac{1}{k}$ de la torta*) y los mueve de la misma forma que el protocolo anterior.

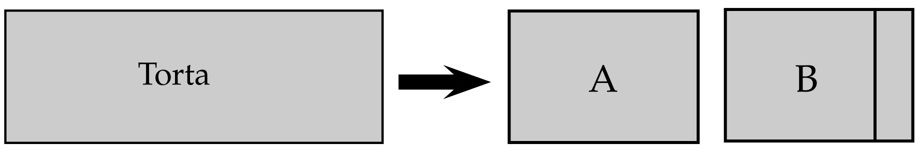


En cualquier momento el Jugador 2 pensará que la distancia entre ambos cuchillos es exactamente $\frac{1}{\mathrm{k}}$ (*ya que posee parte del complemento el cual es de tamaño mayor estricto a $\frac{1}{k}$*) y manda a cortar.

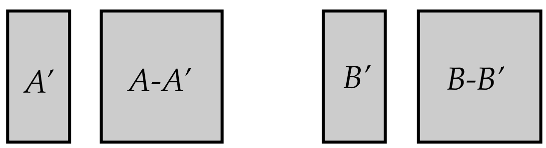
§ 1.5.4. Versión de Austin del Protocolo de Fink para 3 personas

Austin descubrió que combinando sus resultados con el *Protocolo de Fink* se obtiene un procedimiento proporcional para tres personas (Ver [**1**] y [**5**]). Esta versión consiste en lo siguiente

Jugador 1 y Jugador 2 usan el *Protocolo de Austin* para dividir la torta en dos piezas A y B (*donde A y B son de tamaño* $\frac{1}{2}$).



El Jugador 1 y el Jugador 3 usando el *Acuerdo de Austin* obtienen una pieza $A^{'}$ de A de tamaño $\frac{1}{3}$. El Jugador 2 y el Jugador 3 hacen lo mismo con B y obtienen $B^{'}$.



El Jugador 1 recibe $A \setminus A^{'}$, el Jugador 2 recibe $B \setminus B^{'}$ y el Jugador 3 recibe $A^{'} \cup B^{'}$.

Este protocolo es proporcional. El Jugador 1 piensa que

$$\mu_1(A \setminus A^{'}) = \mu_1(A) - \mu_1(A^{'}) = \mu_1(A) - \frac{\mu_1(A)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Para el Jugador 2

$$\mu_2(B \setminus B^{'}) = \mu_2(B) - mu_2(B^{'}) = \mu_2(B) - \frac{\mu_2(B)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

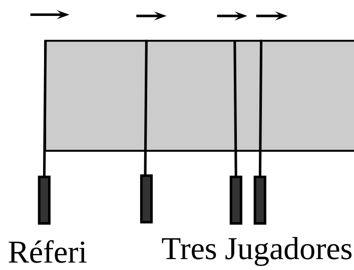
Para el Jugador 3

$$\mu_3(A^{'} \cup B^{'}) = \mu_3(A^{'}) + \mu_3(B^{'}) = \frac{\mu_3(A)}{3} + \frac{\mu_3(B)}{3} = \frac{\mu_3(A) + \mu_3(B)}{3} = \frac{\mu_3(T)}{3} = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, este protocolo no es de satisfacción total. Puede ocurrir que el Jugador 1 piense que $B^{'}$ es de tamaño estrictamente menor a $\frac{1}{3}$ de B (ya que él no participa en la obtención de esta pieza) y como consecuencia se tiene que $B \setminus B^{'}$ es de tamaño mayor estricto a $\frac{1}{3}$ y así más grande que la pieza del Jugador 1.

§ 1.5.5. Protocolo de Stromquist para 3 personas

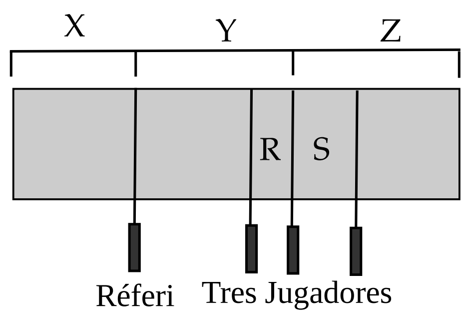
El protocolo de Stromquist [**10**] inicia con un réferi sosteniendo un cuchillo en el borde izquierdo de la torta. Cada uno de los tres jugadores coloca un cuchillo sobre la torta paralelo al cuchillo del réferi (*de forma que cada uno piense que está dividiendo por la mitad la parte de la torta a la derecha del cuchillo del réferi*).



El réferi mueve el cuchillo como en *Dubins-Spanier*. Los tres Jugadores mueven sus cuchillos en la misma dirección que el réferi (*de modo que siga dividiendo por la mitad la parte de la torta a la derecha del réferi*).

En cualquier momento un jugador puede decir corte (*cuando piense que la parte de la torta a la izquierda del cuchillo del réferi es de tamaño igual a* $\frac{1}{3}$), en este momento hacen un corte el réferi y el jugador que tenga el cuchillo en el medio de los otros dos jugadores.

Denotemos por X la pieza a la izquierda del cuchillo del réferi; Y la pieza que se encuentra entre los cuchillos que cortan y Z la pieza restante.



Las piezas X,Y y Z serán asignadas de la siguiente manera:

El Jugador que dice corte recibe la pieza X. De los jugadores que no dijeron corte, el que tiene el cuchillo más cercano al cuchillo del réferi recibe la pieza Y y el jugador restante recibe la pieza Z.

Este protocolo es proporcional. Sin pérdida de generalidad, hagamos corresponder el primer cuchillo (de izquierda a derecha) al Jugador 1, el segundo al Jugador 2 y el último al Jugador 3. La parte de la torta ubicada entre los cuchillos de los jugadores 1 y 2 la llamaremos R y la parte entre los cuchillos de los jugadores 2 y 3 la llamaremos S.

Caso 1.- El Jugador 1 dice corte. Siguiendo el protocolo el Jugador 1 recibe X, el Jugador 2 recibe Y y el Jugador 3 recibe Z.
El Jugador 1 piensa que $\mu_1(X) = \frac{1}{3}$.
El Jugador 2 piensa que $\mu_2(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_2(Y) = \frac{1}{2}(1 - \mu_2(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
El Jugador 3 piensa que $\mu_3(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_3(Z) > \mu_3(Z \setminus S) = \frac{1}{2}(1 - \mu_3(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
Todos obtienen una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$.

Caso 2.- El Jugador 2 dice corte. Siguiendo el protocolo el Jugador 2 recibe X, el Jugador 1 recibe Y y el Jugador 3 recibe Z.
El Jugador 2 piensa que $\mu_2(X) = \frac{1}{3}$.
El Jugador 1 piensa que $\mu_1(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_1(Y) > \mu_1(Y \setminus R) = \frac{1}{2}(1 - \mu_1(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
El Jugador 3 piensa que $\mu_3(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_3(Z) > \mu_3(Z \setminus S) = \frac{1}{2}(1 - \mu_3(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
Todos obtienen una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$.

Caso 3.- El Jugador 3 dice corte. Siguiendo el protocolo el Jugador 3 recibe X, el Jugador 1 recibe Y y el Jugador 2 recibe Z.
El Jugador 3 piensa que $\mu_3(X) = \frac{1}{3}$.
El Jugador 1 piensa que $\mu_1(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_1(Y) > \mu_1(Y \setminus R) = \frac{1}{2}(1 - \mu_1(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
El Jugador 2 piensa que $\mu_2(X) < \frac{1}{3}$ y $\mu_2(Z) = \frac{1}{2}(1 - \mu_2(X)) > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
Todos obtienen una pieza de tamaño mayor o igual a $\frac{1}{3}$.

Notemos que este protocolo no es de satisfacción total. Supongamos que el Jugador 1 dice corte, siguiendo el protocolo de Stromquist el Jugador 1 recibe X, el Jugador 2 recibe Y y el Jugador 3 recibe Z. Luego, para el jugador 1 se tiene:

$$\mu_1(X) = \mu_1(Y \setminus R) \quad \text{y} \quad \mu_1(Y) > \mu_1(Y \setminus R) \quad \text{donde} \quad \mu_1(R) > 0$$

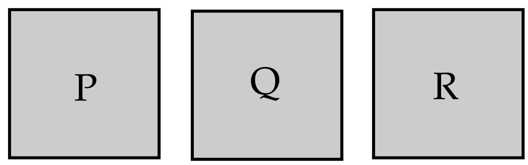
donde la pieza Y correspondiente al Jugador 2 es más grande que la pieza obtenida por el Jugador 1 (según su medida). Por lo tanto el protocolo no es de satisfacción total.

§ 1.5.6. Protocolo de Levmore-Cook para 3 personas

Es otro procedimiento de satisfacción total y es creado por Saul Levmore y Elizabeth Cook en el Año 1981 [**7**].

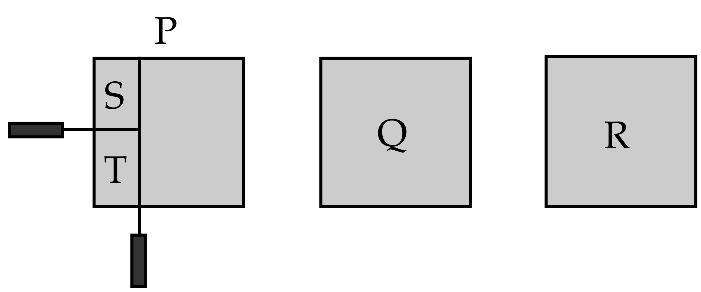
Protocolo Levmore-Cook

Jugador 1 divide la torta en tres piezas P, Q y R (*que considera del mismo tamaño*).



Los jugadores 2 y 3 marcan cada uno una pieza (*que considere la más grande*). Si estos marcan piezas distintas estas serán asignadas al jugador que las marcó y la pieza restante será asignada al Jugador 1 terminándose el protocolo. En caso contrario podemos asumir que ambos marcan P.

El Jugador 1 comenzará un movimiento vertical de cuchillo como en *Dubins-Spanier*, pero al mismo tiempo pondrá un segundo cuchillo perpendicular al primer cuchillo. (*Como en la figura*) Note que P quedaría cortado en tres pedazos donde dos de ellos van marcados por ambos cuchillos. Llamemos S y T a cada una de esas partes.



El segundo cuchillo se moverá haciendo una incisión (*de tal manera que el Jugador 1 piense que S y T tienen el mismo tamaño*). En el momento que el proceso empieza S y T son conjuntos vacios así que el jugador 2 y el Jugador 3 piensan que $P\backslash(S\cup T)$ es más grande que $Q\cup S$, $R\cup T$, $Q\cup T$ y $R\cup S$.

De modo que tenemos 4 desigualdades:

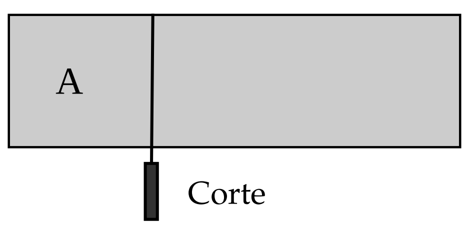
- $P \setminus (S \cup T) > Q \cup S$
- $P \setminus (S \cup T) > R \cup T$
- $P \setminus (S \cup T) > Q \cup T$
- $P \setminus (S \cup T) > R \cup S$

En cualquier momento uno de los dos jugadores 2 y 3 pueden decir pare (*cuando crea que una de las desigualdades se invierte*). El que no dice pare toma $P \setminus (S \cup T)$, el que dice pare toma uno de los siguientes conjuntos $\{Q \cup S,\ R \cup T,\ Q \cup T, R \cup S.\}$ (*cualquiera que piense que sea el más grande*) y el Jugador 1 toma la parte restante de la torta.

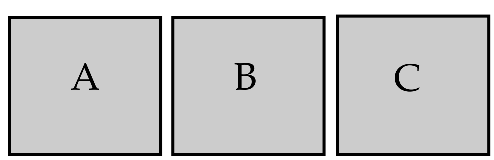
El que obtuvo $P \setminus (S \cup T)$ piensa que se siguen cumpliendo las desigualdades, por lo tanto su pieza es más grande que las restantes (*según su medida*). El que dijo pare piensa que obtiene una pieza de igual tamaño a $P \setminus (S \cup T)$ y más grande o igual que la pieza restante. Por último el Jugador 1 piensa que obtiene una pieza de tamaño más grande que $P \setminus (S \cup T)$ y de igual tamaño que la del otro jugador, dado que S=T.

§ 1.5.7. Protocolo de Webb para 3 personas

([**11**]) Un cuchillo se mueve como en *Dubins-Spanier* hasta que un jugador dice corte (*cuando piense que la pieza en el lado izquierdo del cuchillo es de tamaño $\frac{1}{3}$ de la torta*); supongamos que es el Jugador 1. Llamemos A la pieza resultante del corte.



Ahora el Jugador 1 y cualquiera de los otros dos jugadores, supongamos el Jugador 2, emplean el *Protocolo de Austin* para dividir el resto de la torta en dos piezas, digamos B y C (*de modo que ambos piensen que fue cortada a la mitad*).



Las piezas A, B y C se reparten en el siguiente orden: Jugador 3, Jugador 2 y Jugador 1.

Esta asignación es de satisfacción total. El Jugador 3 porque elige de primero, el Jugador 2 porque elige una de las piezas B o C que tienen el mismo tamaño y son por lo menos tan grandes como la pieza A. Por último el Jugador 1 toma la pieza restante de la torta que según su medida es de igual tamaño a las piezas elegidas por los jugadores 2 y 3.

Note que sólo se usan dos cortes en este protocolo.

Capítulo 2

Protocolos de Satisfacción Total para 4 personas

En el capítulo anterior nos familiarizamos con el problema de repartir un bien entre un número dado de personas dando la definición de Protocolos y los tipos de asignaciones. Mostramos los protocolos de Steinhaus y el de Fink, los cuales producen una asignación proporcional para tres personas y el generalizado creado por Banach y Knaster. Estudiamos algunos protocolos con movimientos de cuchillos y el protocolo de Selfridge y Conway el cual asegura a cada jugador una pieza de tamaño maximal según su medida. En el presente capítulo mostraremos dos protocolos de satisfacción total para cuatro personas.

Podemos pensar en una generalización utilizando el proceso recortar y elegir, el cual asegura una asignación de satisfacción total parcial en cada iteración. Más precisamente, la idea es la siguiente en el caso en que tenemos 4 personas: el jugador 1 corta el pastel en cinco piezas (del mismo tamaño según su medida). El jugador 2 elige tres piezas (las más grandes según su medida) y puede pasar (si son de igual tamaño) o recorta a lo sumo dos (las más grandes llevándolas al tamaño de la más pequeña entre esas tres piezas). Luego el Jugador 2 elige dos piezas (las más grandes) y puede pasar (si son de igual tamaño) o recorta una (la más grande llevándola al tamaño de la más pequeña). Los recortes en cualquiera de los casos son dejados a un lado. Los jugadores proceden a elegir una pieza (la más grande según su medida) en el siguiente orden: Jugador 4, Jugador 3, Jugador 2 y Jugador 1

Es fácil ver que esa asignación parcial es de satisfacción total. El Jugador 4 porque elige de primero, los jugadores 2 y 3 porque poseen una estrategia que les garantiza una pieza de igual tamaño a la más grande, y el Jugador 1 porque hace al inicio todas las piezas de igual tamaño y además se asegura una de estas sin modificar, dado que son cinco piezas. Sin embargo, el protocolo no ha terminado por lo que se repiten los pasos unificando las piezas restantes. El inconveniente de este protocolo es no tener un número finito de iteraciones pues siempre sobrará una pieza sin asignar junto con los recortes. Así, es necesario buscar otras ideas de repartición.

No obstante, en el año 1995 Steven J. Brams y Alan D. Taylor [2] crearon un protocolo de satisfacción total para cuatro personas. La idea central de esta generalización es tomada del protocolo de satisfacción total para 3 personas creado por Selfridge y Conway la cual dice:

> *Si existe un jugador inconforme con una asignación, éste manipula la pieza envidiada de tal forma que, al hacer una nueva repartición, él pensará que tiene una ventaja irrevocable sobre el jugador cortador.*

§ 2.1. Primer protocolo de satisfacción total para n=4

Antes de presentar este protocolo es necesario mostrar un esquema del mismo ya que es de gran importancia ubicar las ideas fundamentales dentro de los 20 pasos que conforman este protocolo.

§ 2.1.1. Esquema del Protocolo de Satisfacción Total para n=4

El esquema está formado por cuatro etapas:

Etapa 1 Un jugador corta la torta en cuatro piezas de igual tamaño, las reparte y si todos están satisfechos, se termina el protocolo.

Etapa 2 Si no termina el protocolo, se tiene un jugador insatisfecho y un cortador.
Las piezas asignadas inicialmente a estos dos jugadores se manipulan de tal forma que al hacer una nueva repartición, la pieza asignada al jugador insatisfecho sea estrictamente más grande que la asignada al jugador cortador. Llamaremos a esa diferencia ϵ.

Etapa 3 Se hace una serie de iteraciones manipulando las piezas restantes (unión de recortes) y asignando una parte de éstas, hasta lograr una pieza de tamaño menor estricto a ϵ. En este punto el Jugador insatisfecho tendrá una ventaja irrevocable sobre el cortador.

Nota: En las etapas 2 y 3 las asignaciones parciales realizadas han sido de Satisfacción total.

Etapa 4 Se define el conjunto de ventaja irrevocable como:

$$V := \{(i,j) : \text{Jugador i tiene una ventaja irrevocable sobre el Jugador j}, \quad 1 \leq i,j \leq 4 \quad \text{y} \quad j \neq i\}$$

El cortador manipula la pieza restante y se definen los conjuntos A y D (acuerdo y desacuerdo). Cada uno de los jugadores se define de tipo A si está de acuerdo en que las piezas resultantes de la manipulación tienen el mismo tamaño o de tipo D, si no lo está.

Luego, si $D \times A \subseteq V$ se reparten las piezas entre los jugadores de tipo A y se termina el protocolo, de lo contrario se toma el menor par $(a,b) \in D \times A$ siguiendo el orden lexicográfico y se regresa a la **Etapa 2** donde el Jugador a tomará el papel del jugador insatisfecho y el Jugador b tomará el papel del cortador.

§ 2.1.2. Pasos del protocolo de satisfacción total para n=4

Paso1 Uno de los jugadores, supongamos el Jugador 2, corta la torta en cuatro piezas (*del mismo tamaño*), elige una y asigna una pieza a cada jugador.

Paso2 Al resto de los jugadores se les pregunta si están o no satisfechos con dicha asignación.

Paso3 Si todos los jugadores están satisfechos, entonces el protocolo se termina.

Paso4 De otra forma, elegimos el menor i tal que el Jugador i no está satisfecho.

Supongamos que es el Jugador 1. Llamemos A la pieza envidiada por éste jugador y B la pieza que le fue asignada a éste en el Paso1; las piezas restantes son dejadas a un lado. Para el Jugador 1 la pieza A es más grande que que la pieza B y para el Jugador 2 las piezas A y B tienen el mismo tamaño.

Paso5 El Jugador 1 nombra un entero positivo r $\geq$ 10 (*lo elige de manera que para cualquier partición de A en r pedazos el Jugador 1 prefiera A que a B aún con las siete piezas de menor tamaño removidas de A*). *Ver Lema 2.1.*

Paso6 El Jugador 2 particiona A en r subconjuntos (*del mismo tamaño*) y hace lo mismo con la pieza B.

Paso7 El Jugador 1 elige tres piezas (*las más pequeñas*) de la partición de B y las nombra B_{r-2}, B_{r-1}, B_r (*en orden decreciente*), también elige tres piezas (*las más grandes*) de la partición de A (*si piensa que estas son estrictamente más grandes que las $B's$*) y recorta a lo sumo dos de estas (*llevándolas al tamaño de la más pequeña*), o divide una pieza (*la más grande*) de la partición de A en tres pedazos (*que él considere del mismo tamaño*). En cualquier caso, él nombra estas piezas Y_1, Y_2, Y_3.

Observación 3 *La estrategia del Jugador 1 le garantiza que las piezas Y_1, Y_2 y Y_3 tengan el mismo tamaño (según su medida) y que sean estrictamente más grandes que las piezas B_{r-2}, B_{r-1} y B_r. Por otro lado el Jugador 2 piensa que las piezas B_{r-2}, B_{r-1} y B_r tienen el mismo tamaño y son por lo menos tan grandes como las piezas Y_1, Y_2 y Y_3.*
Ver Lema 2.2.

Paso8 El Jugador 3 observa las piezas $Y_1, Y_2, Y_3, B_{r-2}, B_{r-1}$ y B_r y puede pasar (*si por lo menos las dos más grandes tienen el mismo tamaño*) o recorta una (*la más grande llevándola al tamaño de la segunda más grande*). Los recortes son dejados a un lado.

Paso9 Los Jugadores 4,3,2, y 1, en este orden, proceden a elegir una de las seis piezas modificadas o no en el Paso 8 (*que ellos consideren la más grande*) y donde el Jugador 3 requiere tomar la pieza recortada si hubo corte y si el Jugador 4 no la eligió, el Jugador 2 debe elegir una de las piezas de B_{r-2}, B_{r-1}, B_r no modificada y el Jugador 1 debe elegir una de la piezas de Y_1, Y_2, Y_3 no modificada.

Denotemos X_i la pieza elegida por el Jugador i.

Esto da una partición $\{X_1, X_2, X_3, X_4, L\}$ de la torta donde:

1. El Jugador 1 tiene asegurada una pieza no modificada del conjunto $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ y el Jugador 2 tiene asegurada una pieza no modificada del conjunto $\{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$. *Ver Lema 2.3.*

2. $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ es una asignación de satisfacción total. Para el Jugador 4, porque elige de primero; el Jugador 3, porque asegura en el Paso8 una pieza de tamaño igual a la más grande. Para los jugadores 1 y 2, porque aseguran una pieza no modificada del conjunto $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ y $\{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$ respectivamente.

3. L es la unión de las piezas restantes.

4. El Jugador 1 piensa que $\mu_1(X_1) > \mu_1(X_2)$.
   Para éste, $X_1 \in \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ y $X_2 \in \{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$. En virtud del *Lema 2.2.* se tiene la desigualdad. Consideremos $\mu_1(X_1) - \mu_1(X_2) = \epsilon$.

Paso10 El Jugador 1 nombra un entero positivo s. Lo elige de tal manera que $\left(\frac{4}{5}\right)^s \mu_1(L) < \epsilon$.

El entero s especifica cuántas veces los jugadores iterarán la secuencia de cortar y elegir de los pasos 11 a 14. La iteración se detendrá cuando el tamaño de la pieza restante sea menor que ϵ. *Ver Lema 2.4.*

Paso11 El Jugador 1 divide L en cinco piezas (*que él considera del mismo tamaño*).

Paso12 El Jugador 2 toma la colección de cinco piezas y selecciona tres (*las más grandes*) y recorta dos piezas (*las dos más grandes las lleva al tamaño de la más pequeña de entre ellas*).

Paso13 El Jugador 3 toma la colección de cinco piezas y selecciona dos (*las más grandes*) y recorta una pieza (*la más grande, llevándola al tamaño de la más pequeña*).

Paso14 Los Jugadores 4,3,2, y 1, en este orden, proceden a elegir una pieza de entre las cinco (*que ellos consideren la más grande o de igual tamaño a la más grande*). Los jugadores 2 y 3 deben tomar una pieza recortada por ellos si estas no fueron elegidas.

Paso15 Los Pasos 11-14 son repetidos $s-1$ veces, obteniéndose una partición $\{X_1', X_2', X_3', X_4', L_s\}$ donde $X_i' = \bigcup_{j=1}^{s} X_{i,j}$, con $X_{i,j}$ la pieza asignada al Jugador i en la iteración j.

Afirmación a.- Para cada iteración j, la asignación parcial $\{X_{1,j}, X_{2,j}, X_{3,j}, X_{4,j}\}$ es de satisfacción total.

Para el Jugador 1, porque divide L en cinco piezas de igual tamaño, y siempre le queda una sin modificar. Los jugadores 2 y 3 aseguran en los Pasos 13 y 14 una pieza de tamaño igual a la más grande, según sus medidas. El Jugador 4, como elige de primero, se asegura de tomar la pieza más grande.

Afirmación b.- $\{X_1', X_2', X_3', X_4'\}$ es una asignación parcial de satisfacción total.

En virtud del *Lema 1.3.*, cada una de las piezas X_i' es una asignación de satisfacción total, para todo i.

Afirmación c.- Para el Jugador 1, $\mu_1(X_1' \cup X_1) > \mu_1(X_2' \cup X_2) \cup \mu_1(L_s)$.
Dada la ***Afirmación b***, el Jugador 1 asegura que $\mu_1(X_1') \geq \mu_1(X_2')$, además en el Paso 9 fue considerado $\epsilon = \mu_1(X_1) - \mu_1(X_2)$. De esto se obtiene

$$\mu_1(X_1 \cup X_1') \geq \mu_1(X_2 \cup X_2') + \epsilon > \mu_1(X_2 \cup X_2') + \mu_1(L_s)$$

En esta parte de la etapa, el Jugador 1 piensa que tiene una ventaja irrevocable sobre el Jugador 2. Para él es independiente la forma en que se quiera repartir la pieza L_s (respecto al Jugador 2), ya que, al final, la parte total de la torta que le correspondería al Jugador 2 no podría superar la parte total de la torta que a él le corresponde.

Daremos creación a un subconjunto de $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ el cual llamaremos V para ventaja irrevocable, donde $(1,2) \in V$.

Paso16 El Jugador 2 corta L_s en doce piezas (*que él considere del mismo tamaño*).
Paso17 Cada uno de los otros jugadores se declara a sí mismo de tipo A si está de acuerdo en que todas las piezas tienen el mismo tamaño, o de tipo D si no lo está.
El Jugador 2 se declara de tipo A.
Paso18 Si $D \times A \subseteq V$, entonces se repartirán las doce piezas entre los jugadores de tipo A y se habrá asignado todo el pastel. Los jugadores que pertenecen a D poseen una ventaja irrevocable sobre los de A e independientemente de la repartición de estas doce piezas, para los jugadores de D las piezas de los jugadores de A no superarán en tamaño a sus piezas.
Paso19 De otra forma , elegimos el menor par $(a, b) \in D \times A$ (*siguiendo el orden lexicográfico*) y regresaremos al Paso4 donde el Jugador a tomará el rol del Jugador 1 (insatisfecho), el Jugador b tomará el rol del Jugador 2 (cortador) y L_s tomará el lugar de la torta.

Paso20 Los Pasos 5-19 se repiten, hasta que el protocolo se termine con la aplicación del paso 18 en la última iteración. Lo que garantiza que el protocolo termine es que el conjunto de pares de individuos es finito y en cada iteración al conjunto V se le añade un par.

Lema 2.1 *Se puede nombrar un entero positivo $r \geq 10$ de forma que para cualquier partición de A en r subconjuntos, el Jugador 1 prefiera a A que a B aún con las 7 piezas de menor tamaño removidas de A.*

Prueba. Debemos probar que existe $r \geq 10$ que cumple

$$\sum_{i=r-6}^{r} \mu(A_i) < \mu(A) - \mu(B)$$

En virtud de la propiedad arquimediana se puede elegir un r lo suficientemente grande para que cumpla

$$7 \cdot \frac{\mu(A)}{r} < \mu(A) - \mu(B) \tag{2.1}$$

Considere ahora cualquier partición de A en r subconjuntos dispuestos en orden decreciente.

$$A_1, A_2, ..., A_r$$

Dado que $\mu(A_{i+1}) < \mu(A_i)$ para todo i se tiene que $\mu(A_k) < \mu(A_{r-7})$ se cumple para cualquier k entre $r-6$ y r. Entonces

$$\sum_{i=r-6}^{r} \mu(A_i) < 7 \cdot \mu(A_{r-7})$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $(r-7)$ se tiene

$$(r-7) \cdot \sum_{i=r-6}^{r} \mu(A_i) < (r-7) \cdot (7) \cdot \mu(A_{r-7}) \tag{2.2}$$

De igual forma se cumple que $\mu(A_{r-7}) < \mu(A_k)$ para cualquier k entre 1 y $r-7$. Entonces

$$(r-7)\cdot\mu(A_{r-7}) < \sum_{i=1}^{r-7}\mu(A_i)$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por 7 se tiene

$$(7)\cdot(r-7)\mu(A_{r-7}) < 7\sum_{i=1}^{r-7}\mu(A_i) \tag{2.3}$$

De las desigualdades (2.2) y (2.3) se obtiene

$$(r-7)\cdot\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) < 7\cdot\sum_{i=1}^{r-7}\mu(A_i)$$

Sumando $7\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i)$ en ambos lados de la desigualdad

$$7\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) + (r-7)\cdot\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) < 7\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) + 7\cdot\sum_{i=1}^{r-7}\mu(A_i)$$

$$\text{es decir, } \sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) < 7\cdot\frac{\mu(A)}{r} \tag{2.4}$$

Finalmente, de (2.1) y (2.4) se obtiene que

$$\sum_{i=r-6}^{r}\mu(A_i) < \mu(A) - \mu(B)$$

■

Lema 2.2 *Para el Jugador 1, las piezas Y_1, Y_2 y Y_3 son estrictamente más grandes que las piezas B_{r-2}, B_{r-1} y B_r*

Prueba. Sean $A_1, A_2, ..., A_r$ y $B_1, B_2, ..., B_r$ las particiones de A y B respectivamente, ordenadas en forma decreciente, según la medida del Jugador 1.

Caso1: si el Jugador 1 piensa que A_1, A_2 y A_3 son estrictamente más grandes que B_{r-2}, se tendría que $\mu_1(Y_1) = \mu_1(Y_2) = \mu_1(Y_3) = \mu_1(A_3)$ y además $\mu_1(A_3) > \mu_1(B_{r-2})$, cumpliéndose con el lema. Caso2: Por el contrario, podemos suponer que:

1. $\mu_1(Y_1) = \mu_1(Y_2) = \mu_1(Y_3) = \dfrac{\mu_1(A_1)}{3}$.
2. $\mu_1(B_{r-2}) \geq \mu_1(A_3)$, es decir A_1, A_2 y A_3 no son estrictamente más grandes que Z_{r-2}.
3. Supongamos por reducción al absurdo que $\mu_1(B_{r-2}) \geq \dfrac{\mu_1(A_1)}{3}$.

De 2. tenemos

$$\mu_1(B_1) \geq \mu_1(B_2) \geq ... \geq \mu_1(B_{r-2}) \geq \mu_1(A_3) \geq \mu_1(A_4) \geq ... \geq \mu_1(A_r)$$

Así

$$\mu_1 \left(B_7 \cup B_8 \cup ... \cup B_{r-3}\right) \geq \mu_1 \left(A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_{r-7}\right) \tag{2.5}$$

De 3. tenemos

$$\mu_1 \left(B_1 \cup B_2 \cup B_3\right) \geq 3\mu_1(B_{r-2}) \geq \mu_1(A_1)$$

$$\mu_1 \left(B_4 \cup B_5 \cup B_6\right) \geq 3\mu_1(B_{r-2}) \geq \mu_1(A_1) > \mu_1(A_2)$$

Así

$$\mu_1 \left(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6\right) \geq \mu_1 \left(A_1 \cup A_2\right) \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) tenemos

$$\mu_1(B) \geq \mu_1 \left(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{r-3}\right) \geq \mu_1 \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{r-7}\right)$$

Por lo tanto

$$\mu_1(B) \geq \mu_1 \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{r-7}\right) = \mu_1(A) - \sum_{i=r-6}^{r} \mu_1(A_i)$$

Pero esto es una contradicción, ya que r se eligió de tal forma que B no sea más grande que A aún con las siete piezas más pequeñas removidas de A.

■

Lema 2.3 *El Jugador 1 tiene asegurada una pieza no modificada del conjunto* $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ *y el Jugador 2 tiene asegurada una pieza no modificada del conjunto* $\{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$*.*

Prueba. Consideremos el peor caso posible que le puede suceder al Jugador 1, para mostrar que a éste le queda una pieza del conjunto $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ sin modificar.

Supongamos que el Jugador 3, en el Paso8, modifica una pieza de Y y el Jugador 4 elige una pieza de Y (distinta a la modificada). Siguiendo el protocolo, el Jugador 3 debe tomar la pieza modificada en el Paso8 (pues el Jugador 4 no lo hizo). Luego el Jugador 2 requiere tomar una de las piezas del conjunto $\{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$ (que no fueron modificadas). Así se habrán modificado y asignado sólo 2 de las tres piezas de Y. Por lo tanto se le asegura una de estas sin modificar al Jugador 1. ■

Lema 2.4 *El Jugador 1 puede nombrar un entero positivo* s *de manera que al iterar* s *veces los Pasos 11-14 tengamos que* $\mu_1(L_s) < \epsilon$*, donde* L_s *es la parte restante de la torta.*

Prueba.

En primer lugar siempre es posible encontrar un s tal que $\left(\frac{4}{5}\right)^s \cdot \mu_1(L) < \epsilon$ ya que $\dfrac{4}{5} < 1$ y $\mu_1(L) < 1$. Faltaría mostrar que

$$\mu_1(L_s) < \left(\frac{4}{5}\right)^s \mu_1(L)$$

se cumple para cualquier s.

Haremos la prueba por inducción sobre el número de iteraciones.

Base inductiva Veamos que se cumple para $s = 1$.

Aplicando los Pasos 11-14 se tiene una partición $\{X_1, X_2, X_3, X_4, L_1\}$ de L donde el Jugador 1 piensa:

1. $\mu_1(X_1) = \mu_1(X_5) = \dfrac{\mu_1(L)}{5}$.
2. $\mu_1(X_i) = \dfrac{\mu_1(L)}{5} - \mu_1(R_i), \quad \text{donde} \quad 0 \leq \mu_1(R_i) < \dfrac{\mu_1(L)}{5} \qquad \text{con} \qquad i = 2, 3, 4.$
3. $\mu_1(L_1) = \mu_1(X_5 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4)$

Luego

$$\mu_1(L_1) = \mu_1(X_5 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4) < \left(\frac{4}{5}\right) \mu_1(L)$$

Hipótesis inductiva Supongamos que se cumple para s=k, es decir $\mu_1(L_k) < \left(\frac{4}{5}\right)^k \mu_1(L)$

Debemos probar que $\mu_1(L_{k+1}) < \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} \mu_1(L)$

Iterando los Pasos 11-14 $k+1$ veces se tiene una partición $\{X_1, X_2, X_3, X_4, L_{k+1}\}$ de L_k donde el Jugador 1 piensa:

1. $\mu_1(X_1) = \mu_1(X_5) = \dfrac{\mu_1(L_k)}{5}$

2. $\mu_1(X_i) = \dfrac{\mu_1(L_k)}{5} - \mu_1(R_i), \quad$ donde $\quad 0 \leq \mu_1(R_i) < \dfrac{\mu_1(L_k)}{5} \quad$ con $\quad i = 2, 3, 4$

3. $\mu_1(L_{k+1}) = \mu_1(X_5 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4)$

Luego

$$\mu_1(L_{k+1}) = \mu_1(X_5 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4) < \left(\frac{4}{5}\right) \mu_1(L_k) < \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \mu_1(L) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} \mu_1(L)$$

Como queríamos. ■

§ 2.2. Protocolo de Satisfacción total con movimientos de cuchillos para 4 personas

El problema de la existencia de un protocolo de satisfacción total para cuatro o más personas fue resuelto en la sección precedente, sin embargo esto requiere de un gran número de pasos, y sobre todo un gran número de cortes, por lo que su realización práctica se hace difícil o casi imposible.

Es por ello que se busca un nuevo protocolo, que sea de satisfacción total, tenga un número razonable de cortes y funcione por lo menos para cuatro personas.

En Febrero del año 1997 fue presentado en el artículo "A Moving-Knife Solution to the Four-Person Envy-Free Cake-Division Problem" [**12**] un protocolo de satisfacción total para cuatro personas que requiere sólo once cortes.

Este protocolo emplea movimientos de cuchillos, en particular el *Protocolo de Austin* para dos personas y es presentado como la unión de dos protocolos.

El primero consiste en repartir una torta entre cuatro personas empleando el *Protocolo de Austin.* Este asegura una asignación de satisfacción total para los jugadores, pero es necesario hacer trece cortes, luego se presenta un segundo protocolo que disminuye a once el número de cortes. Esa es la mejor cota por el momento.

Pasamos ahora a la exposición de los protocolos mencionados.

El siguiente protocolo con movimientos de cuchillo produce una repartición de satisfacción total para cuatro personas empleando el *Protocolo de Austin.*

Teorema 2.1 *Existe un protocolo con movimientos de cuchillo que produce una asignación de satisfacción total entre cuatro personas.*

Prueba. Consideremos el siguiente protocolo

Paso1 Los Jugadores 1 y 2 emplean el *Protocolo de Austin* para obtener dos piezas de igual tamaño. Repiten este procedimiento con cada una de las partes resultando cuatro piezas de igual tamaño (*según la medida de cada jugador*).

Paso2 El Jugador 3 elige dos de las cuatro piezas (*las más grandes*) y puede pasar (*si tienen el mismo tamaño*) o recorta una (*la más grande, llevándola al tamaño de la segunda más grande*). Llamemos L al recorte, éste será dejado a un lado.

Paso3 Los Jugadores 4,3,2, y 1, en este orden, proceden a elegir una pieza (*la que consideren más grande*), donde el Jugador 3 requiere tomar la pieza recortada si el Jugador 4 no lo hizo, en el caso donde el Jugador 3 recorta. Llamemos X_i la pieza asignada al Jugador i.

En este caso, la asignación parcial $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ es de satisfacción total.

El Jugador 4, como elige de primero, toma la pieza más grande, según su medida. El Jugador 3 posee una estrategia que le garantiza una pieza de tamaño igual a la más grande. Los jugadores 1 y 2 aseguran, empleando el *Protocolo de Austin* tres veces, una de las cuatro piezas no modificadas que poseen igual tamaño.

Paso4 Si el Jugador 3 no recorta, entonces se habrá asignado toda la torta.

Paso5 De lo contrario, el jugador que toma la pieza recortada será llamado No-cortador y el otro Cortador. Respecto a los jugadores 3 y 4.

En este momento el Jugador 1 tiene una ventaja irrevocable sobre el No-Cortador.

Según la medida del Jugador 1, no importa la forma en que se asigne una parte de L al No-cortador, ya que al final, la parte de la torta correspondiente al No-cortador no podrá superar la del Jugador 1.

Paso6 El Cortador y el Jugador 2 emplean el *Protocolo de Austin* para dividir L en cuatro piezas de igual tamaño.

Paso7 Los jugadores proceden a elegir una de las piezas resultantes en el siguiente orden: No-cortador, Jugador 1, el Cortador o el Jugador 2 en cualquier orden.

Llamemos X'_i la pieza asignada al Jugador i.

La asignación parcial $\{X'_1, X'_2, X'_3, X'_4\}$ es de satisfacción total.

Para el No-cortador, porque elige de primero; el Jugador 1, porque elige antes que el Jugador 2 y el Cortador, y porque tiene una ventaja irrevocable sobre el No-cortador. Finalmente el Jugador 2 y el Cortador, porque dividen L en cuatro piezas de igual tamaño y siempre les queda una pieza no modificada.

Luego, empleando el *Lema 1.3.* se tiene que la asignación total de la torta es de satisfacción total.

Observación 4 *Trece es el máximo número de cortes realizables en este protocolo.*

- En el Paso 1, *Austin* requiere realizar a lo sumo seis cortes (*dos por cada pieza*).
- El Jugador 3 puede realizar un corte en el Paso2.
- En el Paso 6 se usa de nuevo *Austin* por lo cual se pueden realizar , a lo sumo, otros seis cortes más.

$\blacksquare$

El siguiente lema será usado para mostrar la existencia de un protocolo de satisfacción total para cuatro personas que emplea sólo once cortes.

Lema 2.5 *Dados dos jugadores, existe un protocolo con movimientos de cuchillos que divide la torta en cuatro piezas haciendo sólo cinco cortes y en donde:*

i) *Un jugador piensa que las cuatro piezas tienen el mismo tamaño.*

ii) *Para el otro jugador, las tres piezas más grandes tienen el mismo tamaño.*

Prueba. Consideremos el siguiente protocolo

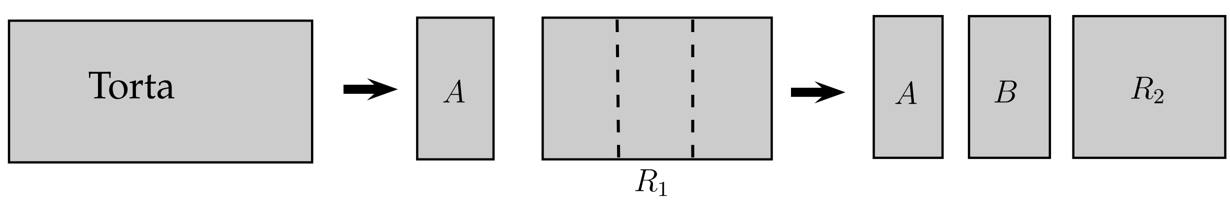
Paso1 El protocolo inicia con un cuchillo moviéndose desde el extremo izquierdo de la torta hacia el derecho, como en *Austin*. Uno de los jugadores, supongamos el Jugador 1, manda a cortar cuando piense que la parte al lado izquierdo del cuchillo sea $\frac{1}{4}$ de la torta. Llamemos a esta pieza A y al resto de la torta R_1.

Notemos que

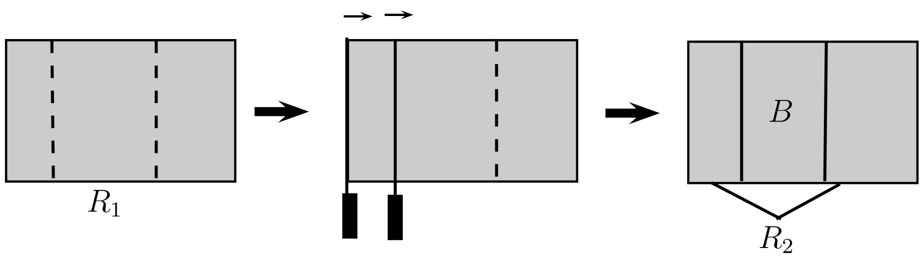
$$\mu_1(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad \mu_2(A) \leq \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad R_1 = T \setminus A$$

Paso2 Sobre R_1 el Jugador 1 hace dos marcas paralelas al corte anterior. Las hace de tal forma que las piezas entre estas marcas sean de tamaño $\frac{1}{3}$ de R_1.

Paso3 Si para el Jugador 2 una de las piezas determinada por las marcas posee tamaño exactamente $\frac{1}{3}$ de R_1, entonces la separa haciendo uno o dos cortes. Llamemos a esta pieza B.



De otra forma el Jugador 2 indica dos de las piezas adyacentes que, según su medida, presentan tamaño menor y mayor estricto a $\frac{1}{3}$ de R_1. El Jugador 1 mueve dos cuchillos sobre las piezas adyacentes, como en *Austin*, y el Jugador 2 manda a cortar cuando piense que la pieza entre ambos cuchillos sea exactamente $\frac{1}{3}$ de R_1. Esta nueva pieza será llamada B y el resto R_2



En cualquier caso

$$\mu_1(B) = \frac{1}{3}\mu_1(R_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad , \quad \mu_2(B) = \frac{1}{3}\mu_2(R_1) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$R_2 = R_1 \setminus B \qquad \text{y} \qquad \mu_i(R_2) = \mu_i(R_1) - \frac{1}{3}\mu_i(R_1) = \frac{2}{3}\mu_i(R_1), \quad \text{para} \quad i = 1,2$$

Paso4 Los jugadores emplean el *Protocolo de Austin* para dividir R_2 en dos piezas de igual tamaño y las nombran C y D.

$$\mu_i(C) = \mu_i(D) = \frac{1}{2}\mu_i(R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\mu_i(R_1) = \frac{1}{3}\mu_i(R_1) = \mu_i(B) \quad \text{para} \quad i = 1,2$$

Por lo tanto, se cumple que

1. $\mu_1(A) = \mu_1(B) = \mu_1(C) = \mu_1(D) = \frac{1}{4}$

2. $\mu_2(B) = \mu_2(C) = \mu_2(D) \geq \frac{1}{4} \quad \text{con} \quad \mu_2(A) \leq \frac{1}{4}$

Suponiendo que el Jugador 1 manda a cortar en el Paso 1.

■

Ahora estamos listos para probar el teorema de existencia de un protocolo de satisfacción total para 4 personas con 11 cortes.

Teorema 2.2 *Existe un protocolo con movimientos de cuchillo que emplea sólo once cortes y produce una asignación de satisfacción total para cuatro personas.*

Prueba. Consideremos el siguiente protocolo

Paso1 Los Jugadores 1 y 2 usan el *Lema 2.5.* para dividir la torta en cuatro piezas.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que el Jugador 1 piensa que las piezas resultantes tienen el mismo tamaño y que el Jugador 2 piensa que las tres más grandes tienen el mismo tamaño.

Paso2 El Jugador 3 elige dos piezas (*las más grandes*) y puede pasar (*si tienen el mismo tamaño*) o recorta a lo sumo una (*la más grande, llevándola al tamaño de la más pequeña entre las dos*). Llamemos L al recorte, este será dejado a un lado.

Paso3 Los Jugadores 4,3,2, y 1, en este orden, proceden a elegir una pieza (*la más grande según su medida*), donde el Jugador 3 requiere tomar la pieza recortada si el Jugador 4 no lo hizo, en el caso donde el Jugador 3 recorta.
Llamemos X_i la pieza asignada al Jugador i.
En este caso la asignación parcial $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ es de satisfacción total.
El Jugador 4, como elige de primero, toma la pieza más grande. El Jugador 3 posee una estrategia que le garantiza una pieza de tamaño igual a la más grande. Emplear el lema anterior en el Paso 1 asegura que el Jugador 2 obtenga una de las tres piezas más grandes no modificada de la repartición; de igual forma asegura al Jugador 1 una de las cuatro piezas más grandes no modificada.

Observación 5 *Se han realizado a lo sumo seis cortes, cinco posibles cortes correspondientes al Lema 2.5. y uno que puede hacer el Jugador 3 en el Paso 2.*

Paso4 *Si el Jugador 3 no recorta, entonces se habrá asignado toda la torta.*

Paso5 De lo contrario, el jugador que toma la pieza recortada será llamado No-cortador y el otro Cortador. Respecto a los jugadores 3 y 4.

En este momento el Jugador 1 tiene una ventaja irrevocable sobre el No-Cortador.

Según la medida del Jugador 1, no importa la forma en que se asigne una parte de L al No-cortador, ya que al final, la parte de la torta correspondiente al No-cortador no podrá superar la del Jugador 1.

Paso6 El Cortador y el Jugador 2 emplean el *Lema 2.5.* anterior para dividir L en cuatro piezas de igual tamaño.

Sin pérdida de generalidad supongamos que el Cortador piensa que las piezas resultantes tienen el mismo tamaño y que el Jugador 2 piensa que las tres más grandes tienen el mismo tamaño.

Paso7 Los jugadores proceden a elegir una pieza (*la más grande según su medida*) en el siguiente orden:

No-cortador, Jugador 1, Jugador 2 y Cortador.

Llamemos X_i' la pieza asignada al Jugador i.

La asignación parcial $\{X_1', X_2', X_3', X_4'\}$ es de satisfacción total.

El No-cortador, como elige de primero, toma la pieza más grande. El Jugador 1 elige antes que el Jugador 2 y el Cortador, y tiene una ventaja irrevocable sobre el No-cortador. Emplear el lema anterior en el Paso 6 asegura que el Jugador 2 obtenga una de las tres piezas más grandes no modificadas de la repartición; y el cortador una de las cuatro piezas más grandes no modificadas.

Luego, empleando el *Lema 1.3.* se tiene que la asignación total de la torta es de satisfacción total.

Por último, en este protocolo, se han realizado a lo sumo cinco cortes, los correspondientes al *Lema 2.5.* Por lo tanto, se ha encontrado un protocolo que sólo necesita de once cortes y que es de satisfacción total para cuatro personas.

■

Capítulo 3

Protocolo de Satisfacción Total para $n \geq 4$

En este capítulo presentamos una generalización del protocolo presentado en la seccion 2.1 del capítulo anterior.

§ 3.1. Esquema del Protocolo de Satisfacción Total para n personas, con $n \geq 4$

El siguiente esquema divide el protocolo en cuatro etapas. Cada una representará los objetivos necesarios para alcanzar tan esperada asignación.

Etapa 1 Un jugador corta la torta en n piezas de igual tamaño, las reparte y si todos están satisfechos, se termina el protocolo.

Etapa 2 Si no termina el protocolo, se tiene un jugador insatisfecho y un cortador.
Las piezas asignadas a estos dos jugadores se manipulan de tal forma que al hacer una nueva repartición, la pieza asignada al Jugador insatisfecho sea estrictamente más grande que la asignada al cortador.

Llamaremos a esa diferencia ϵ.

Etapa 3 Se itera los pasos 12-15 manipulando las piezas restantes (unión de recortes), hasta lograr una pieza de tamaño menor estricto a ϵ. En este punto el Jugador insatisfecho tendrá una ventaja irrevocable sobre el cortador.

Etapa 4 Se define el conjunto de ventaja irrevocable como:

$$V := \{(i,j) : \text{Jugador i tiene una ventaja irrevocable sobre el Jugador j}, \quad 1 \leq i,j \leq n \quad \text{y} \quad j \neq i\}$$

El cortador manipula la parte restante de la torta y define los conjuntos A y D (acuerdo y desacuerdo). Cada uno de los jugadores se declara de tipo A si está de acuerdo en que las piezas resultantes de la manipulación tienen el mismo tamaño o de tipo D si no lo esta.

Luego, si $D \times A \subseteq V$, se reparten estas piezas entre los jugadores de tipo A y se termina el protocolo. De lo contrario, se toma el menor par $(a, b) \in D \times A$ siguiendo el orden lexicográfico y se regresa a la **Etapa 2** donde el Jugador a tomará el papel del jugador insatisfecho y el Jugador b tomará el papel del cortador.

§ 3.2. Pasos del protocolo de satisfacción total para n personas, con $n \geq 4$

Paso1 Uno de los jugadores, supongamos el Jugador 2, corta la torta en n piezas (*del mismo tamaño*), elige una y asigna una pieza a cada jugador.

Paso2 Al resto de los jugadores se les pregunta si están o no satisfechos con esta asignación.

Paso3 Si todos están satisfechos, se termina el protocolo.

Paso4 De otra forma elegimos el menor i tal que el Jugador i no está satisfecho.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que es el Jugador 1, llamemos A a la pieza envidiada por éste jugador y B a la pieza asignada a este jugador en el Paso 1; las piezas restantes son dejadas a un lado.

Para el Jugador 1, la pieza A es más grande que la pieza B y para el Jugador 2 las piezas A y B tienen el mismo tamaño.

Paso5 El Jugador 1 nombra un entero positivo $r \geq m^2 + 1$.

Lo hace de tal forma que para cualquier partición de A en r piezas el Jugador 1 prefiera a A que a B aún con las k piezas de menor tamaño removidas de A, donde $m = 2^{(n-3)} + 1$ y $k = (m-1)(m) + 1$. *Ver Lema 3.1.*

Observación 6 *Los valores de m, r y k dependen del número de jugadores que participan en el protocolo. Más adelante daremos una razón del por qué se tomaron de esta manera.*

Paso6 El Jugador 2 particiona las piezas A y B en r subconjuntos (*del mismo tamaño*).

Paso7 El Jugador 1 elige m piezas (*las más pequeñas*) de la partición de B y m piezas (*las más grandes*) de la partición de A.

Consideremos $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ y $\{B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$, las particiones obtenidas en el Paso 7, cuyas piezas están ordenadas en forma decreciente.

Paso8 El Jugador 1 observa el conjunto $\{A_1, A_2, ..., A_m, B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$. Si $\mu_1(A_m) > \mu_1(B_{r-(m-1)})$, éste puede recortar a lo sumo $(m-1)$ piezas de $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ (y las iguala en tamaño). De lo contrario, el Jugador 1 divide la pieza A_1 en m pedazos (*del mismo tamaño*). En cualquier caso, denotemos $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ las piezas obtenidas.
La estrategia del Jugador 2 le garantiza m piezas $\{B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$ de igual tamaño que son por lo menos tan grandes como las piezas $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, esto se debe a que el Jugador 2, en el Paso 2, hace las piezas del conjunto $\{A_1, ..., A_m, B_{r-(m-1)}, ..., B_r\}$ de igual tamaño, mientras que en el Paso 8 las piezas de A han podido ser modificadas y llamadas Y. Por otro lado, la estrategia del Jugador 1 le garantiza m piezas $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$ de igual tamaño que son estrictamente más grandes que $B_{r-(m-1)}$ (según la medida del Jugador 1). *Ver Lema 3.2.*

Paso9 Para $i = 3, ..., n-1$ el Jugador i toma $2^{(n-(i+1))} + 1$ piezas (*las más grandes*) de la colección $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m, B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$ (modificadas o no) y puede pasar (*si tienen el mismo tamaño*) o las iguala en tamaño (recortando a lo sumo $2^{(n-(i+1))}$ piezas).
Paso10 Los Jugadores proceden a elegir una de las piezas resultantes en el siguiente orden:

$$\text{Jugador } n,\ \text{Jugador } n-1,\ ...,\ \text{Jugador } 2,\ \text{Jugador } 1$$

donde el Jugador i requiere tomar una de sus piezas modificadas, si los primeros jugadores en elegir no lo hicieron. El Jugador 1 debe elegir una pieza no modificada del conjunto $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$ y el Jugador 2 debe tomar una pieza no modificada del conjunto $\{B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$. Denotemos L a la parte restante de la torta y llamemos X_i a la pieza elegida por el Jugador i.

Afirmación a.- Los jugadores $3, ...n-1$ obtienen una pieza de tamaño igual a la más grande, según la medida de cada jugador. Es un resultado del *Lema 3.3.*, considerando el conjunto $C = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m, B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$.

Afirmación b.- El Jugador 1 asegura una pieza no modificada del conjunto $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$.
El conjunto $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$ está formado por $m = 2^{(n-3)} + 1$ piezas.
Consideremos el peor caso, supongamos que los $n-2$ jugadores restantes (no incluyendo el Jugador 2) modifican y eligen las piezas de Y. Verifiquemos que se sigue cumpliendo la condición para el Jugador 1.

1. El Jugador n elige de primero, y toma una pieza de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$.

2. Los jugadores $J_3, ..., J_{n-1}$ pueden modificar a lo sumo $2^{(n-3)} - 1$ piezas de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$.

En 1, 2 se puede modificar a lo sumo $2^{(n-3)}$ piezas. Por lo tanto, el Jugador 1 asegura una pieza no modificada del conjunto $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$.
Afirmación c.- El Jugador 2 asegura una pieza no modificada del conjunto $\{B_{r-(m-1)}, B_{r-(m-2)}, ..., B_r\}$. Es un resultado análogo de la ***Afirmación a***.

Afirmación d.- La asignación parcial $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ es de satisfacción total.
El Jugador n como elige de primero, toma la pieza más grande de la repartición. Los jugadores 1 y 2 aseguran con las afirmaciones anteriores y con el Paso 8 una pieza de tamaño igual a la más grande. Por último, el *Lema 3.3.* garantiza al resto de los jugadores una pieza de tamaño igual a la más grande.

Afirmación e.- El Jugador 1 piensa que $\mu_1(X_1) > \mu_1(X_2)$.
$X_1 \in \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ y $X_2 \in \{B_{r-2}, B_{r-1}, B_r\}$. En virtud del *Lema 3.2.* se tiene la desigualdad. Consideremos $\mu_1(X_1) - \mu_1(X_2) = \epsilon$.

Paso11 El Jugador 1 nombra un entero positivo s (*lo elige de tal manera que* $\left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^s \cdot \mu_1(L) < \epsilon$).

El entero s especifica cuántas veces los jugadores iterarán la siguiente secuencia de cortar y elegir. En algún momento uno de los jugadores mandará a parar la iteración, cuando considere que el tamaño de la pieza restante es menor que ϵ. *Ver Lema 3.4.*

Paso12 El Jugador 1 divide a L en $2^{(n-2)}+1$ piezas (*que él considere del mismo tamaño*).

Paso13 El Jugador 2 toma la colección de L piezas y selecciona $2^{(n-3)}+1$ (*las más grandes*) donde puede elegir recortar a lo sumo $2^{(n-3)}$ piezas (*para igualarlas en tamaño*).

Paso14 Para $i = 3, ..., n-1$ el Jugador i toma la colección de L piezas (modificadas o no) y selecciona $2^{(n-(i+1))}+1$ (*las más grandes*) donde puede elegir recortar a lo sumo $2^{(n-(i+1))}$ piezas (*y las iguala en tamaño*).

Paso15 Los Jugadores proceden a elegir una pieza (*la más grande o de igual tamaño a la más grande*) en el siguiente orden:

$$\text{Jugador } n,\ \text{Jugador } n-1,\ ...,\ \text{Jugador } 2,\ \text{Jugador } 1$$

donde el Jugador i requiere tomar una pieza recortada por éste si los $r-i$ primeros jugadores no lo hicieron.

Paso16 Los pasos 12-15 son iterados $s-1$ veces con los restos de la torta.

Esto da una partición $\{X'_1, X'_2, ..., X'_n, L_s\}$ de la torta, donde:

1. $X'_i = \bigcup_{j=1}^{s} X_{i,j}$, donde $X_{i,j}$ es la pieza asignada al jugador i en la iteración j.

2. $\{X_{1,j}, X_{2,j}, ..., X_{n,j}\}$ es una asignación parcial de satisfacción total en cada iteración.

   El Jugador n, como elige de primero, toma la pieza más grande. El *Lema 3.3.* (considerando el conjunto L) asegura a los jugadores $n-1, n-2, ..., 2$ una pieza de tamaño igual a la más grande (según sus medidas). El Jugador 1 divide L en $2^{(n-2)}+1$ piezas de igual tamaño, y siempre le queda una sin modificar.

3 $\{X_1^{'}, ..., X_n^{'}\}$ es una asignación parcial de satisfacción total.

Esto es una consecuencia del *Lema 1.3.*

4 Para el Jugador 1 $\mu_1(X_1^{'} \cup X_1) > \mu_1(X_2^{'} \cup X_2) \cup \mu_1(L_s)$.

- En virtud del *Lema 1.3.*, el Jugador 1 asegura que la asignación $X_1^{'}$ es de satisfacción total, por lo tanto $\mu_1(X_1^{'}) \geq \mu_1(X_2^{'})$.
- En el Paso 10 fue considerado $\epsilon = \mu_1(X_1) - \mu_1(X_2)$. De esto se obtiene

$$\mu_1(X_1 \cup X_1^{'}) \geq \mu_1(X_2 \cup X_2^{'}) + \epsilon > \mu_1(X_2 \cup X_2^{'}) + \mu_1(L_s)$$

En este instante el Jugador 1 tiene una ventaja irrevocable sobre el Jugador 2. Daremos creación a un subconjunto de $\{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\}$ el cual llamaremos V para ventaja irrevocable, donde $(1, 2) \in V$.

Paso17 El Jugador 2 corta L_s en h piezas (*del mismo tamaño*). Donde h representa el mínimo común múltiplo de los primeros n naturales.

Paso18 Cada uno de los otros jugadores se declara a sí mismo de tipo A, si está de acuerdo en que todas las piezas tienen el mismo tamaño, o de tipo D si no lo está.

El Jugador 2 se declara de tipo A.

Paso19 Si $D \times A \subseteq V$, entonces se repartirán las h piezas entre los jugadores de tipo A y se habrá asignado toda la torta.

Paso20 De otra forma , elegimos el menor par (a, b) (*siguiendo el orden lexicográfico*) del conjunto $D \times A$ que no está en V y regresaremos al Paso4 donde el Jugador a tomará el rol del Jugador 1 (insatisfecho), el Jugador b tomará el rol del Jugador 2 (cortador) y L_s tomará el lugar de la torta.

Paso21 Los Pasos 5-20 se repiten.

Observación 7 *Cada vez que pasemos por el Paso17 añadiremos un par ordenado a* V*.*

Final del protocolo

Lema 3.1 *Se puede nombrar un entero positivo $r \geq m^2+1$ de forma que, para cualquier partición de A en r subconjuntos, el Jugador 1 prefiera a A que a B, aún con las k piezas de menor tamaño removidas de A, donde $m = 2^{(n-3)}+1$ y $k = (m)(m-1)+1$.*

Prueba. Sea $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ cualquier partición de A en r piezas (ordenadas en forma decreciente). Mostremos las siguientes desigualdades

1. $\sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i) \leq k\frac{\mu(A)}{r}$

2. $k\frac{\mu(A)}{r} < \mu(A) - \mu(B)$

En virtud de la propiedad arquimediana siempre es posible encontrar un r que cumpla

$$k\frac{\mu(A)}{r} < \mu(A) - \mu(B)$$

Para mostrar la otra desigualdad consideremos la siguiente afirmación

Las k piezas más pequeñas de la partición de A no supera k veces el promedio del tamaño de las piezas de A.

$$\sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i) \leq k\frac{\mu(A)}{r}$$

Supongamos por reducción al absurdo que

$$\sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i) > k\frac{\mu(A)}{r}$$

entonces, la pieza más grande de la colección $\{A_{(r-k+1)}, A_{(r-k)}, ..., A_r\}$ es de por lo menos tan grande como el promedio de las r piezas.

$$\mu(A_{(r-k+1)}) \geq \frac{\mu(A)}{r} \tag{3.1}$$

Por otro lado, las $r-k$ piezas más grandes de la partición de A son por lo menos tan grandes como la pieza $A_{(r-k+1)}$, así

$$\mu(A_i) \geq \mu(A_{(r-k+1)}) \qquad \text{Para todo} \quad 1 \leq i \leq r-k \tag{3.2}$$

Por la transitividad en (3.1) y (3.2) tenemos $\mu(A_i) \geq \frac{\mu(A)}{r}$ para todo $1 \leq i \leq r-k$.

$$\sum_{i=1}^{r-k} \mu(A_i) \geq (r-k)\frac{\mu(A)}{r} \tag{3.3}$$

Luego de la suposición y (3.3), tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r-k} \mu(A_i) + \sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i) &> (r-k)\frac{\mu(A)}{r} + k\frac{\mu(A)}{r}\\ \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) &> r\frac{\mu(A)}{r}\\ \mu(T) &> 1\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.
Finalmente, de las desigualdades 1 y 2 se tiene que

$$\sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i) < \mu(A) - \mu(B)$$

Y así

$$\mu(B) < \mu(A) - \sum_{i=r-k+1}^{r} \mu(A_i)$$

donde $A_{(r-k+1)}, A_{(r-k)}, ..., A_r$ son las k piezas más pequeñas de la partición de A. ■

Lema 3.2 *El Jugador 1 tiene garantizado que los* $Y's$ *son más grandes que las* $B's$ *según su medida.*

Prueba. Asumiremos que A y B son particionadas en r piezas y que B no es más grande que A aún con las k piezas más pequeñas removidas de A. Las piezas de las particiones serán organizadas en orden decreciente $A_1, A_2, ..., A_r$ y $B_1, B_2, ..., B_r$ según la medida del Jugador 1.

Caso1: si el Jugador 1 piensa que $\mu_1(A_m) > \mu_1(B_{r-(m-1)})$ se tiene

$$\mu_1(Y_1) = \mu_1(Y_2) = ... = \mu_1(Y_m) = \mu_1(A_m) > \mu_1(B_{r-(m-1)}) \geq ... \geq \mu_1(B_r)$$

cumpliendose la afirmación.

Caso2: por el contrario, supongamos que:

1. $\mu_1(Y_1) = \mu_1(Y_2) = ... = \mu_1(Y_m) = \dfrac{\mu_1(A_1)}{m}$.
2. $\mu_1(B_{r-(m-1)}) \geq \mu_1(A_m)$, es decir las piezas del conjunto $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ no son estrictamente más grandes que $B_{r-(m-1)}$.
3. Supongamos por reducción al absurdo que $\mu_1(B_{r-(m-1)}) \geq \dfrac{\mu_1(A_1)}{m}$.

De 2. tenemos

$$\mu_1(B_1) \geq \mu_1(B_2) \geq ... \geq \mu_1(B_{r-(m-1)}) \geq \mu_1(A_m) \geq \mu_1(A_{m+1}) \geq ... \geq \mu_1(A_r)$$

$$\mu_1(B_k \cup B_{k-1} \cup ... \cup B_{r-m}) \geq \mu_1(A_m \cup A_{m+1} \cup ... \cup A_{r-k}) \tag{3.4}$$

Así

$$\sum_{i=k}^{r-m} \mu_1(B_i) \geq \sum_{i=m}^{r-k} \mu_1(A_i) \tag{3.5}$$

De 3. tenemos

$$\begin{gathered}\mu_1\left(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m\right) \geq m\mu_1(B_{r-(m+1)}) \geq \mu_1(A_1)\\ \mu_1\left(B_{m+1} \cup B_{m+2} \cup ... \cup B_{2m}\right) \geq m\mu_1(B_{r-(m+1)}) \geq \mu_1(A_1) \geq \mu_1(A_2)\\ \vdots\vdots\\ \mu_1\left(B_{m^2-2m+1} \cup B_{m^2-2m+2} \cup ... \cup B_{(m-1)m}\right) \geq m\mu_1(B_{r-(m+1)}) \geq \mu_1(A_1) \geq ... \geq \mu_1(A_{m-1})\end{gathered}$$

Y así

$$\sum_{i=1}^{(m-1)m} \mu_1(B_i) \geq \sum_{i=1}^{m-1} \mu_1(A_i) \tag{3.6}$$

Luego

1. $\sum_{i=1}^{r-m} \mu_1(B_i) \geq \sum_{i=1}^{r-k} \mu_1(A_i)$.

2. $\mu_1(B) > \sum_{i=1}^{r-m} \mu_1(B_i)$.

3. $\sum_{i=1}^{r-k} \mu_1(A_i) = \mu_1(A) - \sum_{i=r-(k+1)}^{r} \mu_1(A_i)$

Finalmente, de 1, 2 y 3 se obtiene

$$\mu_1(B) > \mu_1(A) - \sum_{i=r-(k+1)}^{r} \mu_1(A_i) \qquad \text{Contradicción con el enunciado}$$

Por lo tanto, es necesario considerar $\mu_1(B_{r-(m-1)}) < \frac{\mu_1(A_1)}{m}$.

Observaciones

- Es necesario considerar $k = m(m-1) + 1$ para completar las sumatorias en (3.5) y (3.6).
- Para asegurar por lo menos una pieza en (3.4), es necesario considerar $r > m + k$, es por ello que
$$r > m^2 + 1$$
- Recordemos que $m = 2^{(n-3)} + 1$, así los valores de r y k dependen del número de jugadores que participan en el protocolo.

■

Lema 3.3 *Es necesario considerar $2^{(n-(i+1))}+1$ piezas de un conjunto C dado y modificar a lo sumo $2^{(n-(i+1))}$ para asegurar al Jugador i una pieza de tamaño igual a la más grande.*

Prueba. De acuerdo con el protocolo, el Jugador i en el toma las $(2^{(n-(i+1))}+1)$ piezas más grandes del conjunto C (modificadas o no por otro jugador) y puede igualarlas en tamaño, modificando a lo sumo $(2^{(n-(i+1))})$ piezas.

Denotemos J_i al Jugador i. Los jugadores $J_{i+1}, ..., J_{n-1}$ repiten el procedimiento realizado por el Jugador i, donde al final se obtiene $\sum\limits_{j=i+1}^{n-1} 2^{(n-(j+1))}$ modificaciones posibles entre estos jugadores. Consideremos la sumatoria $\sum\limits_{j=0}^{n-(i+1)} 2^j$ la cual equivalente a la sumatoria anterior.

<u>Afirmación</u>: $\sum\limits_{j=0}^{p} 2^j = 2^{p+1}-1, \quad \text{donde} \;\; p = n-(i+1)$

Haremos la prueba por inducción sobre el valor de p.

Base inductiva Veamos que se cumple para $p=0$. En efecto,

$$\sum_{j=0}^{0} 2^j = 2^0 = 1 = 2^{0+1}-1$$

Hipótesis inductiva Supongamos que se cumple para p=k,

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j = 2^{k+1}-1$$

Debemos mostrar que se cumple para p=k+1

$$\sum_{j=0}^{k+1} 2^j = 2^{k+2}-1$$

Empleando la Hipótesis inductiva, tenemos

$$\sum_{j=0}^{k+1} 2^j \;=\; 2^{k+1}+\sum_{j=0}^{k} 2^j \;=\; 2^{k+1}+2^{k+1}-1 \;=\; 2(2^{k+1})-1 = 2^{k+2}-1$$

Como queríamos.

Luego

- $2^{(n-(i+1))} - 1$ piezas pueden ser modificadas por los jugadores $J_{i+1}, ..., J_{n-1}$.
- J_n podría tomar una de las piezas de C la cual no necesariamente es modificada por los jugadores mencionados.

Quedando así por lo menos una pieza no modificada para el Jugador i la cual, según su medida, es de igual tamaño que la pieza más grande de la repartición.

Lema 3.4 *El Jugador 1 puede nombrar un entero positivo s de manera que al iterar s veces los Pasos 12-15 tengamos que $\mu_1(L_s) < \epsilon$, donde L_s es la parte restante de la torta.*

Prueba. En primer lugar siempre es posible encontrar un s tal que $\left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^s \mu_1(L) < \epsilon$ ya que $\left(\dfrac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right) < 1$ y $\mu_1(L) < 1$.

Faltaría mostrar que la siguiente desigualdad se cumple para todo entero positivo s.

$$L_s < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^s \mu_1(L)$$

Haremos la prueba por inducción sobre el número de iteraciones.

Base inductiva Veamos que se cumple para $s = 1$.

Sea $\{P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ..., P_{2^{(n-2)}+1}\}$ la partición de L obtenida en el Paso 12.

Realizando los Pasos 13-15 se obtiene una partición $\{X_1, X_2, ..., X_n, L_1\}$ de L donde X_i es la pieza elegida por el Jugador i (para $i = 1, ..., n$) y L_1 es la parte restante de L.

Denotemos $R_2, ..., R_n$ los posibles recortes que se realizaron sobre las piezas de P y llamemos $Z_{n+1}, Z_{n+2}, ..., Z_{2^{(n-2)}+1}$ las piezas que no fueron elegidas. Luego

1. $\mu_1(X_1) = \mu_1(Z_i) = \dfrac{\mu_1(L)}{2^{(n-2)}+1}$ para $i = n+1, ..., 2^{(n-2)}+1$
2. $\mu_1(X_i) = \dfrac{\mu_1(L)}{2^{(n-2)}+1} - \mu_1(R_i), \quad$ donde $\quad 0 \leq \mu_1(R_i) < \dfrac{\mu_1(L)}{2^{(n-2)}+1}, \qquad$ para $\quad i = 2, ..., n.$

3. $\mu_1(L_1) = \mu_1(R_2 \cup R_3 \cup ... \cup R_n \cup X_{n+1} \cup ... \cup X_{2^{(n-2)}+1})$

   De estos tenemos

$$\mu_1(L_1) = \mu_1(R_2 \cup R_3 \cup ... \cup R_n \cup X_{n+1} \cup ... \cup X_{2^{(n-2)}+1}) < 2^{(n-2)} \cdot \left(\frac{\mu_1(L)}{2^{(n-2)}+1}\right)$$

   Obteniéndose $\mu_1(L_1) < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)\mu_1(L)$, por lo tanto se cumple para $s = 1$.

Hipótesis inductiva Supongamos que se cumple para $s = k$, es decir

$$\mu_1(L_k) < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^k \mu_1(L)$$

Veamos que se cumple para $s = k + 1$

Iterando los pasos 12-15 $k+1$ veces se obtiene una partición $\{X_1', X_2', ..., X_n', L_k\}$ de L donde X_i' es la pieza elegida por el Jugador i (para $i = 1, ..., n$) y L_k es la parte restante de L.

Denotemos $R_2', ..., R_n'$ los posibles recortes obtenidos en la última iteración y llamemos $Z_{n+1}', Z_{n+2}', ..., Z_{2^{(n-2)}+1}'$ las piezas que no fueron elegidas, en la última iteración.

Notemos que, para el Jugador 1 se cumple

1. $\mu_1(X_1') = \mu_1(Z_i') = \dfrac{\mu_1(L_k)}{2^{(n-2)}+1}$ Para $i = n+1, ..., 2^{(n-2)}+1$

2. $\mu_1(X_i') = \dfrac{\mu_1(L_k)}{2^{(n-2)}+1} - \mu_1(R_i')$, donde $0 \leq \mu_1(R_i') < \dfrac{\mu_1(L_k)}{2^{(n-2)}+1}$, para $i = 2, ..., n$

3. $\mu_1(L_{k+1}) = \mu_1(R_2' \cup R_3' \cup ... \cup R_n' \cup X_{n+1}' \cup ... \cup X_{2^{(n-2)}+1}')$

De estos tenemos

$$\mu_1(L_{k+1}) = \mu_1(R_2' \cup R_3' \cup ... \cup R_n' \cup X_{n+1}' \cup ... \cup X_{2^{(n-2)}+1}') < 2^{(n-2)} \cdot \left(\frac{\mu_1(L_k)}{2^{(n-2)}+1}\right)$$

Luego

$$\mu_1(L_{k+1}) < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)\mu_1(L_k) < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right) \cdot \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^k \mu_1(L) = \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^{k+1} \mu_1(L)$$

Cumpliéndose para $s = k$.

Por lo tanto $L_s < \left(\frac{2^{(n-2)}}{2^{(n-2)}+1}\right)^s \mu_1(L)$ se cumple para cualquier s. $\blacksquare$

Observaciones finales

A manera de conclusión quisiéramos recapitular nuestro trabajo. Hemos presentado protocolos proporcionales y de satisfacción total para cualquier número de personas.

La construcción del protocolo para $n \geq 5$ es nuestra y se inspira en el trabajo de Brams y Taylor [2].

Un problema abierto es la existencia de protocolos de satisfacción total para $n \geq 5$ en donde el número de cortes esté limitado.

Bibliografía

[1] A.K. Austin, "Sharing a cake", *Mathematical Gazette* 6, no 437 (october, 1982), 212-215.

[2] S.J. Brams and A.D. Taylor, "An envy free cake division protocol", *American Mathematical Monthly* 102 no. 1 (January, 1995), 9-18.

[3] S.J. Brams, A.D. Taylor and W.S Zwicker, "Old and new moving-knife schemes", *Economic Research Reports* RR#94-30 (October 1994).

[4] L.E. Dubins and E.H. Spanier, "How to cut a cake fairly", *American Mathematical Monthly* 68 (1961), 1-17.

[5] A.M. Fink, "A note on the fair division problem", *Mathematics Magazine* 34 (November-December), 341-342.

[6] B. Knaster, " Sur le probleme du partege pragmatique de H. Steinhaus, *Annales de la Societé Polonaise de Mathematique* 19 (1946), 228-230.

[7] S.X. Levmore and E.E. Cook, "Super Strategies for Puzzles and Games", *Doubleday and Company*, Garden City, NY (1981), 47-53.

[8] H. Steinhaus, "The problem of fair division", *Econometrica* 16 (1948), 101-104.

[9] H. Steinhaus, "Sur la division pragmatique", *Econometrica* (suplement) 17 (1949), 315-319.

[10] W. Stromquist, "How to cut a cake fairly", *American Mathematical Monthly* 87, no. 8 (October, 1981) 613-614.

[11] W. Webb, "But he got a bigger piece than I did", preprint, n.d.

[12] S.J. Brams, A.D. Taylor and W.S Zwicker, "A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem", *Proceedings of The American Mathematical Society* Volume 125, Number 2, February 1997, Pages 547–554.

[13] S. J. Brams and A. D. Taylor, *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution*, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1996.