CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Acta – Veredicto

Quienes subscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad, en un todo de acuerdo con lo establecido en los Artículos 51 y 52 del Reglamento para la Carrera de Matemáticas, declaran:

Aprobado – mención distinguido

el **Requisito Especial de Grado**, en la **modalidad Seminario – Monografía**, titulado

“Aplicaciones de los Ultrafiltros”

Para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**

Presentado por el Bachiller **WILSON EDECIO MORA MONTILVA**

Titular de la cédula de identidad V-17.321.417

En este mismo acto dejamos constancia del logro de los objetivos originalmente propuestos, así como del esfuerzo y dedicación, por parte del mencionado Bachiller. Así mismo queremos destacar que dicho trabajo posee características sobresalientes.

En Mérida, el día viernes 24 de abril de 2009.

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas

Prof. Carlos Uzcátegui
C.I. V-05.202.140
Universidad de Los Andes
Tutor

Prof. Ramón Pino
C.I. V-03.995.182
Universidad de Los Andes
Jurado

Prof. Luis González
C.I. V-04.579.785
Universidad de Los Andes
Jurado

/Luz.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Núcleo "Pedro Rincón Gutiérrez", Edificio "E", Facultad de Ciencias Mérida 5101 - República Bolivariana de Venezuela
Teléfono: (58 - 274) 240 1345 / 240 1346 - Fax: 240 1345 / 240 1286 - Web: www.ciens.ula.ve Correo_e: jefemat@ula.ve

Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

APLICACIONES DE LOS ULTRAFILTROS

Wilson Edecio Mora Montilva

Trabajo especial de grado: Modalidad Seminario-Monografía

Tutor: Carlos Uzcátegui.

Mérida, Abril de 2009

APLICACIONES DE LOS ULTRAFILTROS[1]

Requisito Especial de Grado, presentado por:

WILSON E. MORA M.

en la modalidad de Seminario-Monografía para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Tutor: Dr. CARLOS UZCÁTEGUI[2]

[1]Este trabajo fue parcialmente financiado por Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico, CDCHT-ULA, bajo el proyecto: C-1659-09-05-F

[2]Universidad de Los Andes, Departamento de Matemáticas, Grupo de Análisis Funcional, Edificio Teórico de la Facultad de Ciencias, La Hechicera, Mérida 5101, Mérida - Venezuela, uzca@ula.ve.

A mis hermanos, sobrinos y a mis padres Marleni Montilva y Omar Mora.

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar aquí mi gratitud a todas aquellas personas que con su valiosa colaboración contribuyeron, de una u otra manera, en el desarrollo de este trabajo.

A mi tutor, Dr. Carlos Uzcátegui, por su predisposición permanente e incondicional en aclarar mis dudas y por sus substanciales sugerencias durante la redacción de la Tesis, por su asesoramiento científico y estímulo para seguir creciendo intelectualmente, por su amistad.

A mis padres quienes me infundieron la ética y el rigor que guían mi transitar por la vida, a ustedes les debo todo.

A Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Hoy y siempre, a mi familia y compañeros.

En general quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis, con sus altos y bajos, que no necesito nombrar porque tanto ellas como yo sabemos que desde los más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

A todos .... gracias!!

Índice general

Introducción

En el año 1908, Frederic Riesz introdujo el concepto de ultrafiltro, en una charla donde no recibió mucha atención. Su uso sistemático en matemática se inició en la década de 1930 por la Escuela Polaca (*Banach*, *Tarski*, *Ulam*, etc.). Los ultrafiltros son herramientas estándar en matemática, lógica y teoría de conjuntos; pero también son ampliamente usados en combinatoria y topología.

En este trabajo mostraremos tres aplicaciones de los ultrafiltros, seguiremos el artículo de Peter Komjath y Vilmos Totik [2]:

1. *El problema de los interruptores.* Tenemos un conjunto de interruptores, cada uno con tres posiciones, todos conectados a una lámpara que puede estar en tres estados (por ejemplo, un semáforo). Se supone que además satisfacen la restricción que si todos los interruptores cambian simultáneamente de posición, entonces la lámpara cambia de estado. Entonces existe un ultrafiltro tal que el estado de la lámpara depende sólo de los subconjuntos (de interruptores) que pertenecen al ultrafiltro. En particular, mostraremos que cuando el conjunto de interruptores es finito entonces existe un interruptor que determina el estado de la luz.

2. *Una versión del teorema de Arrow para conjuntos infinitos.* Este teorema trata sobre sistemas de votación. Mostraremos que bajo ciertas condiciones los sistemas de votación están determinado por un ultrafiltro. La versión más conocida es cuando el conjunto de votantes es finito, en este caso, el teorema de Arrow nos garantiza la existencia de un votante que determina el resultado.

3. *Límites de Banach.* Este método permite basado en ultrafiltros, asociar una noción de límite a cualquier sucesión acotada de números reales.

Este trabajo lo dividiremos en cuatro capítulos, en el primer capítulo daremos los conceptos necesarios para desarrollar toda la teoría.

En el segundo capítulo daremos solución al primer problema, el modelo usado se basa en unas funciones que hemos llamado *de agregación*. Mostraremos que la existencia de ultrafiltros es equivalente a la existencia de funciones de agregación, parte de esta equivalencia es un resultado no incluido en el artículo [2] (véase teorema (2.14)).

En el tercer capítulo resolveremos el segundo problema, el modelo usado se basa en funciones que hemos llamado *sistemas de votación*. Mostraremos que la existencia de ultrafiltros es equivalente a la existencia de sistemas de votación, parte de esta equivalencia también es un resultado que no está en el artículo [2] (véase teorema (3.17)).

Por último, en el cuarto capítulo atacaremos el tercer problema. Mostraremos que dado un ultrafiltro podemos asociar a toda sucesión acotada de números reales una noción de límite, que hemos llamado *límite generalizado*. Por otra parte mostraremos que el uso de los ultrafiltros es imprescindible para definir los límites generalizados (véase el teorema (4.12)). Esto también es un resultado que no está incluido en [2].

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es dar algunas definiciones y resultados básicos que serán usados en el trabajo.

Definición 1.1 *Una familia* $\mathcal{H}$ *de subconjuntos de un conjunto* X*; es un* ***filtro*** *sobre* X *si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\emptyset \notin \mathcal{H}$.

ii) $X \in \mathcal{H}$.

iii) Si $A \in \mathcal{H}$ *y* $A \subseteq B$ *entonces* $B \in \mathcal{H}$.

iv) Si $A, B \in \mathcal{H}$ *entonces* $A \cap B \in \mathcal{H}$.

Ejemplos 1.2

1. *Sea* $\mathbb{N}$ *el conjunto de los números naturales y* $\mathcal{H}$ *el conjunto de todos los subconjuntos cofinitos de* $\mathbb{N}$*, es decir* $\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$. *Entonces* $\mathcal{H}$ *es un filtro sobre* $\mathbb{N}$.

2. *En general, dado cualquier conjunto infinito* X *y* $\mathcal{H}$ *el conjunto de todos los subconjuntos cofinitos de* X*, entonces* $\mathcal{H}$ *es un filtro sobre* X.

3. *Sea* τ *una topología sobre* X. *Para cada* $x \in X$ *el conjunto*

$$\mathcal{V}(x) = \{A \subseteq X \mid x \in V \subseteq A \text{ para algún } V \in \tau\}$$

   es un filtro sobre X*; cada* $A \in \mathcal{V}(x)$ *es una vecindad de* x *y* $\mathcal{V}(x)$ *se denomina el* ***filtro de vecindades*** *del punto* x.

4. *Sea μ la medida de lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \quad \mu(\mathbb{R} \backslash A) = 0\}$$

es un filtro.

5. *Sea $f : X \to Y$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces el conjunto*

$$f[\mathcal{F}] = \{B \subseteq Y \mid \ f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}$$

es un filtro sobre Y, se denomina el filtro imagen de $\mathcal{F}$ por f. ♣

Definición 1.3 *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un* ***ultrafiltro*** *si además satisface que:*

$$\forall A \subseteq X \ \ (A \in \mathcal{F} \ \text{ ó } \ X \backslash A \in \mathcal{F})$$

Ejemplos 1.4

1. *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$, es decir $\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \backslash A \quad \text{es finito}\}$. Entonces $\mathcal{H}$ no es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$.*

2. *Sea μ la medida de lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \quad \mu(\mathbb{R} \backslash A) = 0\}$$

no es un ultrafiltro.

3. *Sea $a \in X$ fijo. Entonces el siguiente conjunto*

$$\mathcal{H}_a = \{Y \subseteq X \ \mid \ a \in Y\}$$

es un ultrafiltro generado por un solo elemento, también es llamado ***ultrafiltro principal****.* ♣

Definición 1.5 *Una relación $\leq$ en un conjunto $\mathcal{P}$ es un* ***orden parcial*** *si cumple con las siguientes propiedades:*

i) *Para todo $a, b \in \mathcal{P}$ se cumple que si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*

ii) *Para todo $a \in \mathcal{P}$ se cumple la relación $a \leq a$.*

iii) Para todo $a, b, c \in \mathcal{P}$ se cumple que si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

Definición 1.6 *$C \subseteq \mathcal{P}$ es una **cadena** si:*

$$\forall\, a, b \in C \ \ (a \leq b \ \ \text{ó} \ \ b \leq a)$$

Teorema 1.7 ***(Principio de Maximalidad)*** *Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ un orden parcial. Toda cadena en $\mathcal{P}$ está contenida en una cadena maximal.*

Definición 1.8 *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de intersección finita , si para todo n y para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ se cumple que:*

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$$

Proposición 1.9 *Sea $\mathcal{A}$ una familia con la propiedad de intersección finita sobre X, entonces la siguiente colección:*

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq X \mid \exists n \text{ y } \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \ \ (A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq B)\}$$

es un filtro sobre X que contiene a $\mathcal{A}$.

Demostración: Es claro que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, a continuación verificaremos las condiciones para que $\mathcal{F}$ sea un filtro:

i) Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{F}$, así existen $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tales que $A_1 \cap \ldots \cap A_k \subseteq \emptyset$ pero esto es una contradicción ya que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita, por lo tanto $A_1 \cap \ldots \cap A_k \neq \emptyset$; así $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

ii) Sean $M, N \in \mathcal{F}$ luego existen $m, n \in \mathbb{N}$ y $M_1, \ldots, M_m, N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{A}$ tales que:

$$M_1 \cap \ldots \cap M_m \subseteq M \quad \text{y} \quad N_1 \cap \ldots \cap N_n \subseteq N.$$

Por lo tanto,

$$M_1 \cap \ldots \cap M_m \cap N_1 \cap \ldots \cap N_n \subseteq M \cap N,$$

así $M \cap N \in \mathcal{F}$.

iii) Sean $M \in \mathcal{F}$ y $M \subseteq N$, como $M \in \mathcal{F}$ entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $M_1 \cap \ldots \cap M_m \in \mathcal{A}$ tal que $M_1 \cap \ldots \cap M_m \subseteq M$ pero $M \subseteq N$, así $M_1 \cap \ldots \cap M_m \subseteq N$ por lo tanto $N \in \mathcal{F}$.

iv) $X \in \mathcal{F}$ es evidente.

■

Teorema 1.10 *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X y sea

$$\mathcal{P} = \{G \mid \mathcal{F} \subseteq G \text{ y } G \text{ es un filtro sobre } X\}$$

$(\mathcal{P}, \subseteq)$ es un orden parcial. Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}\}$, $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{P}$, por el principio de maximalidad existe una cadena maximal $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Sea

$$\mathcal{U} = \bigcup_{K \in \mathcal{M}} K = \bigcup \{K \mid K \in \mathcal{M}\}$$

$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$, en efecto, a continuación verificaremos las condiciones requeridas para que $\mathcal{U}$ sea un filtro:

i) Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{U}$, luego existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $\emptyset \in A$, esto es una contradicción ya que $A \in \mathcal{M}$, por tanto A es un filtro sobre X, así $\emptyset \notin A$.

ii) $X \in \mathcal{F}$ por $\mathcal{F}$ ser un filtro sobre X. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $X \in \mathcal{U}$.

iii) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, entonces existen $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ tales que $U_1 \in M_1$ y $U_2 \in M_2$. Como $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ se cumple que $M_1 \subseteq M_2$ ó $M_2 \subseteq M_1$.

   iii.1) $M_1 \subseteq M_2$
   Como $U_1 \in M_1$ y $M_1 \subseteq M_2$ entonces $U_1 \in M_2$. Luego $U_1 \cap U_2 \in M_2$ por ser M_2 un filtro sobre X. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

   iii.2) $M_2 \subseteq M_1$
   Como $U_2 \in M_2$ y $M_2 \subseteq M_1$ entonces $U_2 \in M_1$. Luego $U_1 \cap U_2 \in M_1$ por ser M_1 un filtro sobre X. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

iv) Supongamos que $U_1 \in \mathcal{U}$ y sea $U_2 \in \mathcal{P}$ tal que $U_1 \subseteq U_2$, así existe $M \in \mathcal{M}$ con $U_1 \in M$. Como M es un filtro sobre X y $U_1 \subseteq U_2$ concluimos que $U_2 \in M$, lo que implica que $U_2 \in \mathcal{U}$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq X$ y supongamos que $A \notin \mathcal{U}$, mostraremos que $\mathcal{U} \cup \{(X \setminus A)\}$ tiene la propiedad de intersección finita. En efecto, como $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, solo debemos verificar que si $B \in \mathcal{U}$ entonces $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Sea $B \in \mathcal{U}$ y supongamos que $B \cap (X \setminus A) = \emptyset$ así $B \subseteq A$, usando que $\mathcal{U}$ es un filtro concluimos que $A \in \mathcal{U}$, esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{U} \cup \{(X \setminus A)\}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Por la proposición 1.9 se tiene que existe un filtro $\mathcal{O}$ que contiene a $\mathcal{U} \cup \{(X \backslash A)\}$, probaremos que $\mathcal{M} \cup \{\mathcal{O}\}$ es una cadena. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{M}$, por $\mathcal{M}$ ser una cadena A y B son comparables, luego si $C \in \mathcal{M}$ se cumple que $C \subseteq \mathcal{U}$, entonces $C \subseteq \mathcal{O}$; de tal manera que C y $\mathcal{O}$ son comparables para todo $C \in \mathcal{M}$. Así $\mathcal{M} \cup \{\mathcal{O}\}$ es una cadena que contiene a $\mathcal{M}$, por ser $\mathcal{M}$ una cadena maximal se verifica que $\mathcal{M} \cup \{\mathcal{O}\} = \mathcal{M}$, luego $\mathcal{O} \in \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$, lo que nos conduce a que $\mathcal{O} = \mathcal{U}$; así $X \backslash A \in \mathcal{U}$. En conclusión $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. ■

Definición 1.11 *Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos sus subconjuntos, llamaremos a la función $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ una* ***medida finitamente aditiva*** *en X a valores en $\{0, 1\}$ si:*

i) $\mu(X) = 1$.

ii) Si $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(X)$ y son disjuntos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$, entonces

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Definición 1.12 *Sea $\mathcal{H}_\mu$ una familia de subconjuntos de X y μ una medida finitamente aditiva en X a valores en $\{0, 1\}$. Diremos que $A \in \mathcal{H}_\mu$ si, y solo sí $\mu(A) = 1$.*

Lema 1.13 *$\mathcal{H}_\mu$ es un ultrafiltro sobre X.*

Demostración:

i) $\emptyset \notin \mathcal{H}_\mu$ ya que $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) $\mu(X) = 1$ por definición.

iii) Sean $A, B \in \mathcal{H}_\mu$, entonces $\mu(A) = 1$ y $\mu(B) = 1$. Supongamos que $\mu(A \cap B) = 0$, luego $\mu(A^c \cup B^c) = 1$. Sabemos que $\mu(A^c \cup B^c) = \mu(A^c) + \mu(B^c)$ y $\mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$. Esto es una contradicción, por lo tanto $\mu(A \cap B) = 1$. En consecuencia $A \cap B \in \mathcal{H}_\mu$.

iv) Sea $A \in \mathcal{H}_\mu$ y $A \subseteq B$, luego se verifica que $\mu(A) = 1$. Ahora bien, como $A \subseteq B$ entonces $\mu(B) = 1$ por monotonía; así $B \in \mathcal{H}_\mu$.

■

Definición 1.14 *Si $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces se define $\mu_{\mathcal{H}}$ como sigue:*

$$\mu_{\mathcal{H}}(A) = \begin{cases} 1 & si\ A \in \mathcal{H} \\ 0 & si\ A \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Lema 1.15 *$\mu_{\mathcal{H}}$ es una medida finitamente aditiva a valores en $\{0,1\}$ sobre X.*

Demostración:

i) Como $\mathcal{H}$ es un filtro sobre X se cumple que $X \in \mathcal{H}$, luego $\mu_{\mathcal{H}}(X) = 1$.

ii) Sean $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(X)$ disjuntos dos a dos, veremos que a lo sumo un solo A_i, con $1 \leq i \leq n$ pertenece a $\mathcal{H}$. En efecto, Supongamos que $A_i, A_j \in \mathcal{H}$ con $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, luego $A_i \cap A_j \in \mathcal{H}$ entonces $\mu_{\mathcal{H}}(A_i \cap A_j) = 1$, pero esto es una contradicción ya que A_i, A_j son disjuntos. Ahora analizaremos dos posibles casos:

ii.2) Supongamos que existe j con $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que $A_j \in \mathcal{H}$, como $A_j \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{H}$ así:

$$1 = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A_j) = 1$$

ii.3) Supongamos que $A_i \notin \mathcal{H}$ para todo i con $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces queremos ver que $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 0$. Razonando por el absurdo, supongamos que $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1$ esto quiere decir que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{H}$, por ser $\mathcal{H}$ un ultrafiltro se cumple que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i^c \notin \mathcal{H}$ pero esto es una contradicción ya que cada $A_i^c \in \mathcal{H}$ y los ultrafiltros son cerrados bajo intersecciones finitas.

■

A continuación, introduciremos la siguiente notación:

- $MFA^{\{0,1\}}$ es el conjunto de todas las medidas finitamente aditivas μ en X a valores en $\{0,1\}$.
- $\mathcal{U}(X)$ es el conjunto de todos los ultrafiltros sobre X.

Teorema 1.16 *Sea* $\alpha : MFA^{\{0,1\}} \to \mathcal{U}(X)$ *definida por* $\alpha(\mu) = \mathcal{H}_\mu$ *y* $\beta : \mathcal{U}(X) \to MFA^{\{0,1\}}$ *definida por* $\beta(\mathcal{H}) = \mu_{\mathcal{H}}$. *Entonces* α *es la inversa de* β.

Demostración:

1. Mostraremos que $(\beta \circ \alpha)(\mu) = \mu$.
   Sea μ una medida finitamente aditiva a valores en $\{0,1\}$. Tenemos que $\alpha(\mu) = \mathcal{H}_\mu$, por definición de $\mathcal{H}_\mu$ se cumple que $A \in \mathcal{H}_\mu$ si, y solo sí $\mu(A) = 1$.

   Luego $\beta(\alpha(\mu)) = \beta(\mathcal{H}_\mu)$. Por definición de $\beta(\mathcal{H}_\mu)$ y de μ tenemos que:

   $$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\} \qquad\qquad \beta(\mathcal{H}_\mu) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$$

   $$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{H}_\mu \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{H}_\mu \end{cases} \qquad\qquad \beta(\mathcal{H}_\mu)(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{H}_\mu \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{H}_\mu. \end{cases}$$

   Como ambas funciones tienen el mismo dominio y la misma ley de correspondencia, entonces $\mu = \beta(\mathcal{H}_\mu)$.

2. Mostraremos que $(\alpha \circ \beta)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
   Sea $\mathcal{H}$ un ultrafiltro. Luego $\beta(\mathcal{H}) = \mu_{\mathcal{H}}$. Ahora $\alpha(\beta(\mathcal{H})) = \alpha(\mu_{\mathcal{H}})$.

   Veamos que $\alpha(\mu_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$

   ($\subseteq$) Sea $M \in \alpha(\mu_{\mathcal{H}})$. Por definición de $\alpha(\mu_{\mathcal{H}})$ tenemos que $\mu_{\mathcal{H}}(M) = 1$, por lo tanto $M \in \mathcal{H}$.

   ($\supseteq$) Sea $N \in \mathcal{H}$. Por definición de $\mu_{\mathcal{H}}$ se tiene que $\mu_{\mathcal{H}}(N) = 1$. Así $N \in \alpha(\mu_{\mathcal{H}})$.

$\blacksquare$

Teorema 1.17 *Un filtro $\mathcal{H}$ en un conjunto X es un ultrafiltro si, y solo sí es un filtro maximal.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{K}$ un ultrafiltro y $\mathcal{H}$ un filtro tal que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$, queremos ver que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Sea $A \in \mathcal{H}$ y supongamos que $A \notin \mathcal{K}$, como $\mathcal{K}$ es un ultrafiltro se tiene que $X \backslash A \in \mathcal{K}$, luego $X \backslash A \in \mathcal{H}$. Esto es una contradicción, por lo tanto $A \in \mathcal{K}$. Así $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{H}$ un filtro maximal, por el teorema 1.10 existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}$, ahora bien, como $\mathcal{H}$ es un filtro maximal entonces $\mathcal{H} = \mathcal{U}$, así $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro.

■

Teorema 1.18 *En un conjunto finito X todo ultrafiltro $\mathcal{H}$ es principal.*

Demostración: Sea $a \in X$ y $\mathcal{H}$ un ultrafiltro sobre X. Si $\{a\} \in \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro principal, en efecto mostraremos que $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}$. Sea $A \in \mathcal{H}_a$, por definición de $\mathcal{H}_a$ se tiene que $a \in A$, usando la propiedad (ii) de ultrafiltros concluimos que $A \in \mathcal{H}$, ya que $\{a\} \subseteq A$. Ahora, por el teorema 1.15 se cumple que $\mathcal{H}_a$ es un filtro maximal, así $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}$. En conclusión $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro principal.

Ahora probaremos que $\{a\}$ tiene que estar en $\mathcal{H}$. Supongamos que $\{a\} \notin \mathcal{H}$, luego $X \backslash \{a\} \in \mathcal{H}$. Como el a se tomo de manera arbitraria entonces para todo $a \in X$, se tiene que $X \backslash \{a\} \in \mathcal{H}$.

De esto resulta que $\bigcap_{a \in X} X \backslash \{a\} \in \mathcal{H}$, debido a que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro (cerrado bajo intersecciones finitas) , luego

$$\bigcap_{a \in X} X \backslash \{a\} = X \backslash \bigcup_{a \in X} \{a\} = X \backslash X = \emptyset,$$

y esto es una contradicción, ya que $\emptyset \notin \mathcal{H}$. ■

Teorema 1.19 *Un ultrafiltro $\mathcal{H}$ sobre X no es principal si y solo sí, $\mathcal{H}$ contiene todos los subconjuntos cofinitos de X ($A \subseteq X$ es cofinito si $X \backslash A$ es finito).*

Demostración: Sea $\mathcal{H}$ un ultrafiltro sobre X.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{H}$ no es principal, queremos ver que $\{A \subseteq X : X \backslash A \text{ es finito}\} \subseteq \mathcal{H}$. Razonaremos por el absurdo, supongamos que existe $B \subseteq X$ tal que $X \backslash B$ es finito y $B \notin \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro entonces $X \backslash B \in \mathcal{H}$. Luego existe un $b \in X \backslash B$

tal que $\{b\} \in \mathcal{H}$, en efecto, supongamos que $\{b\} \notin \mathcal{H}$ para todo $b \in X\backslash B$, por ser $\mathcal{H}$ ultrafiltro se tiene que $X\backslash\{b\} \in \mathcal{H}$ para todo $b \in X\backslash B$, así

$$\bigcap_{b\in X\backslash B} X\backslash\{b\} = \left(\bigcup_{b\in X\backslash B}\{b\}\right)^c = (X\backslash B)^c = B \in \mathcal{H},$$

pero esto es una contradicción, ya que $B \notin \mathcal{H}$, por lo tanto existe $b \in X\backslash B$ tal que $\{b\} \in \mathcal{H}$, aplicando el mismo razonamiento usado en la demostración del terorema (1.18) obtenemos que $\mathcal{H}_b = \mathcal{H}$, esto nos dice que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro principal, lo cual es una contradicció. Por lo tanto $\{A \subseteq X : X\backslash A \text{ es finito}\} \subseteq \mathcal{H}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{A \subseteq X : X\backslash A \text{ es finito}\} \subseteq \mathcal{H}$, queremos ver que $\mathcal{H}$ no es principal. Razonemos por el absurdo, supongamos que $\mathcal{H}$ es principal, así existe $a \in X$ tal que $\mathcal{H} = \{A \subseteq X : a \in A\}$. Por lo tanto $X\backslash\{a\} \notin \mathcal{H}$, pero esto es una contradicción ya que $X\backslash\{a\}$ es cofinito y todos los subconjuntos cofinitos de X están en $\mathcal{H}$.

■

Definición 1.20 *Un* **orden total** *en un conjunto X es una relación binaria $\prec$ sobre X que es antisimétrica, transitiva y total, es decir, para todo a, b y c en X, tenemos que:*

- *Si $a \prec b$ y $b \prec a$ entonces $a = b$ (antisimétrica).*
- *Si $a \prec b$ y $b \prec c$ entonces $a \prec c$ (transitividad).*
- *$a \prec b \quad o \quad b \prec a$ (totatildad)*

Teorema 1.21 *Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \ldots$, una sucesión encajada de subconjuntos cerrados de un espacio compacto X. Si $C_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces la intersección de todos los $(C_i)_i$ es no vacia.*

Demostración:

Supongamos que $\bigcap_i C_i = \emptyset$, así $(\bigcap_i C_i)^c = X$, luego $\bigcup_i C_i^c = X$, es decir, la familia $(C_i^c)_i$ es un cubrimiento por abiertos de X, como X es compacto entonces existe un subcubrimiento finito de X, por elementos de dicha familia, digamos $X = C_{i_1}^c \cup \ldots \cup C_{i_k}^c$. Como la familia $(C_i^c)_i$ es encajada entonces $X = C_{i_k}^c$, esto nos dice que $C_{i_k} = \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que $C_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. ■

Capítulo 2

El problema de los interruptores

En este capítulo daremos solución al problema de los interruptores, dicho problema consiste de un conjunto X de interruptores, cada uno con tres posiciones $\{0, 1, 2\}$ y una luz también con tres estados $\{L_1, L_2, L_3\}$, ellos están conectados de tal manera que si las posiciones de todos los interruptores son cambiadas al mismo tiempo, entonces el estado de la luz también cambia. Nuestro objetivo es mostrar que existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ en X que determine el estado de la luz, en el sentido de que si el estado de la lámpara es L_i $(i = 1, 2, 3)$, entonces el conjunto $B = \{s \in X : s \text{ está en la i-ésima posición}\}$ pertenece a $\mathcal{H}$.

Definición 2.1 *Diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función interruptor si $f(x) \in \{0, 1, 2\}$ para todo $x \in X$. Denotaremos el conjunto de todas las funciones interruptor por $\mathbb{I}$.*

Nota: Dado $A \subseteq X$, el conjunto de todas las funciones $f : A \to \{0, 1, 2\}$, se denotará por $\{0, 1, 2\}^A$.

Definición 2.2 *Diremos que una función $\Phi : \mathbb{I} \to \{0, 1, 2\}$ es de Agregación si cumple con las siguientes condiciones:*

a) Si f_0 y f_1 difieren en todas partes entonces $\Phi(f_0) \neq \Phi(f_1)$.

b) Si f_i es la función constantemente igual a i ($f_i(s) = i \;\; \forall s \in X$), entonces $\Phi(f_i) = i$.

De ahora en adelante, denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de todas las funciones de agregación.

Ejemplo 2.3

- *Sea* $x \in X$. *Sea* $\Phi_x : \mathbb{I} \to \{0,1,2\}$ *definida por:*

$$\Phi_x(f) = f(x),$$

para cada $f \in \mathbb{I}$. *Entonces* Φ_x *es una función de agregación.* ♣

A continuación presentaremos un ejemplo menos trivial de función de agregación:

Definición 2.4 *Si* $\mathcal{H}$ *es un ultrafiltro sobre* X. *Sea* $\Phi_{\mathcal{H}} : \mathbb{I} \to \{0,1,2\}$ *definida como sigue:*

$$\Phi_{\mathcal{H}}(f) = \begin{cases} 0 & si\ \{x \in X \mid f(x) = 0\} \in \mathcal{H} \\ 1 & si\ \{x \in X \mid f(x) = 1\} \in \mathcal{H} \\ 2 & si\ \{x \in X \mid f(x) = 2\} \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

para cada $f \in \mathbb{I}$.

Lema 2.5 *Si* $\mathcal{H}$ *es un ultrafiltro, entonces* $\Phi_{\mathcal{H}}$ *es una función de agregación.*

Demostración: Para mostrar que $\Phi_{\mathcal{H}} \in \mathbb{A}$ debemos verificar dos propiedades:

(a) Sean f_0 y f_1, con $f_0 \not\simeq f_1$, mostraremos que $\Phi_{\mathcal{H}}(f_0) \neq \Phi_{\mathcal{H}}(f_1)$. En efecto, supongamos que $\Phi_{\mathcal{H}}(f_0) = \Phi_{\mathcal{H}}(f_1)$, sin perdida de generalidad digamos que $\Phi_{\mathcal{H}}(f_0) = \Phi_{\mathcal{H}}(f_1) = 0$, esto quiere decir que los conjuntos $\{x \in X \mid f_0(x) = 0\}, \{x \in X \mid f_1(x) = 0\} \in \mathcal{H}$, luego $\{x \in X \mid f_0(x) = 0\} \cap \{x \in X \mid f_1(x) = 0\} \in \mathcal{H}$, pero esto es una contradicción ya que $\{x \in X \mid f_0(x) = 0\} \cap \{x \in X \mid f_1(x) = 0\} = \emptyset$, debido a que $f_0 \not\simeq f_1$.

(b) Sea f una función constante, es decir $f(x) = i$ con $i \in \{0,1,2\}$ para todo $x \in X$, verificaremos que $\Phi_{\mathcal{H}}(f) = i$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, así $\Phi_{\mathcal{H}}(f) = 0$ ya que $X \in \mathcal{H}$.

■

El objetivo de este capítulo es mostrar que toda función de agregación es de la forma $\Phi_{\mathcal{H}}$.

Definición 2.6 *Una función* $f : X \to \{0,1,2\}$ *es llamada constante si existe* $i \in \{0,1,2\}$ *tal que* $f(x) = i$ *para todo* $x \in X$. *Dado* $A \subseteq X$, *denotaremos por* $(i)_A$ *a la función que es constante igual a* i *en* A.

Definición 2.7 *Diremos que una función $f : X \to \{0,1,2\}$ es puntualmente diferente a una función $g : X \to \{0,1,2\}$, si $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$. Usaremos la notación $f \not\approx g$ para señalar que f es puntualmente diferente a g.*

Definición 2.8 *Sea $A \subseteq X$ y sean $f : A \to \{0,1,2\}$, $g : A^c \to \{0,1,2\}$ funciones interruptor. Definimos $f * g : X \to \{0,1,2\}$ de la siguiente manera:*

$$(f * g)(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ g(x) & si\ x \in A^c. \end{cases}$$

Definición 2.9 *Dado $A \subseteq X$, diremos que $\Phi(f)$ depende de $f|_A$ si se cumple que $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$.*

Lema 2.10 *Dada $\Phi \in \mathbb{A}$ y $\emptyset \neq A \subseteq X$. Entonces para toda $f \in \mathbb{I}$ se tiene que $\Phi(f)$ depende de $f|_A$ ó de $f|_{A^c}$.*

Demostración:

Sean $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B = X \setminus A$ y $\Phi \in \mathbb{A}$. Usando las propiedades de Φ tenemos que:

$$\Phi((0)_A * (0)_B) = 0 \ ; \ \Phi((1)_A * (1)_B) = 1 \ ; \ \Phi((2)_A * (2)_B) = 2.$$

Notemos que $\Phi((1)_A * (0)_B) \neq \Phi((2)_A * (2)_B)$, por lo tanto $\Phi((1)_A * (0)_B) \in \{0,1\}$.

Supongamos primero que $\Phi((1)_A * (0)_B) = 1$. Mostraremos que $\Phi(f)$ depende de $f|_A$ para toda $f \in \mathbb{I}$, a continuación verificaremos algunos hechos que necesitaremos más adelante:

1. Sea $\overline{g} : B \to \{1,2\}$. Entonces:

$$\Phi((2)_A * \overline{g}) \neq \Phi((0)_A * (0)_B) = 0$$
$$\Phi((2)_A * \overline{g}) \neq \Phi((1)_A * (0)_B) = 1.$$

   Por lo tanto $\Phi((2)_A * \overline{g}) = 2$, para toda función $\overline{g} \in \{1,2\}^B$.

2. Sean $g : B \to \{1,2\}$ y $\overline{g} : B \to \{1,2\}$ con $g \not\approx \overline{g}$, entonces es claro que las funciones $(0)_A * (0)_B$, $(1)_A * g$, $(2)_A * \overline{g}$ son puntualmente diferentes. Como $\Phi((0)_A * (0)_B) = 0$ y $\Phi((2)_A * \overline{g}) = 2$ (por la parte 1), entonces:

$$\Phi((1)_A * g) = 1 \text{ para toda función } g \in \{1,2\}^B.$$

Como $\Phi((0)_A * g) \neq \Phi((1)_A * \overline{g})$ y $\Phi((0)_A * g) \neq \Phi((2)_A * \overline{g})$, entonces resulta que $\Phi((0)_A * g) = 0$. Por lo tanto tenemos que:

$$\Phi((i)_A * g) = i, \quad \text{para toda función } g : B \to \{1,2\} \;\; i = 0,1,2.$$

3. Sean $g : B \to \{0,1,2\}$ y $\overline{g} : B \to \{1,2\}$ con $g \not\simeq \overline{g}$. Notemos que

$$\Phi((0)_A * g) \neq \Phi((1)_A * \overline{g})$$

$$\Phi((0)_A * g) \neq \Phi((2)_A * \overline{g}).$$

Como $\Phi((1)_A * \overline{g}) = 1$ y $\Phi((2)_A * \overline{g}) = 2$ (por la parte 2), entonces $\Phi((0)_A * g) = 0$. Haciendo un razonamiento análogo para las funciones $(1)_A * g$ y $(2)_A * g$ concluimos que:

$$\Phi((i)_A * g) = i, \quad \text{para toda función } g : B \to \{0,1,2\}, \;\; i = 0,1,2.$$

4. Sean $f : A \to \{0,1\}$, $\;g : B \to \{0,1,2\}$ y $\overline{g} : B \to \{0,1,2\}$ con $g \not\simeq \overline{g}$. Es claro que

$$\Phi(f * g) \neq \Phi((2)_A * \overline{g}).$$

Como $\Phi((2)_A * \overline{g}) = 2$ (por la parte 3), entonces $\Phi(f * g) \in \{0,1\}$. Por lo tanto, dada $\overline{f} : A \to \{i_0, i_1\}$ se cumple que

$$\Phi(\overline{f} * g) \in \{i_0, i_1\} \quad \text{con} \;\; i_0, i_1 \in \{0,1,2\}.$$

Finalmente, sean $f : A \to \{0,1,2\}$ y $g_0, g_1 : B \to \{0,1,2\}$. Mostraremos que $\Phi(f * g_0) = \Phi(f * g_1)$. Supongamos que $\Phi(f * g_0) \neq \Phi(f * g_1)$, entonces sin pérdida de generalidad podemos fijar $\Phi(f * g_0) = i_0$ y $\Phi(f * g_1) = i_1$. Ahora podemos encontrar funciones $\overline{f} : A \to \{i_0, i_1\}$ y $g_2 : B \to \{0,1,2\}$ tales que $f \not\simeq \overline{f}$ y $g_0 \not\simeq g_2 \not\simeq g_1$. Luego

$$\Phi(\overline{f} * g_2) \neq \Phi(f * g_0) = i_0$$
$$\Phi(\overline{f} * g_2) \neq \Phi(f * g_1) = i_1.$$

Por lo tanto $\Phi(\overline{f} * g_2) = i_2$, pero esto es una contradicción ya que por la parte 4 se cumple que $\Phi(\overline{f} * g_2) \in \{i_0, i_1\}$. En conclusión, hemos establecido que si dos funciones coinciden en A el valor asociado por Φ es el mismo.

Ahora bien, si suponemos que $\Phi((1)_A * (0)_B) = 0$, haciendo un razonamiento similar llegamos a la conclusión de que el valor que asigna Φ a dos funciones que coinciden en B es el mismo.

■

Ahora mostraremos que existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ que determina el estado de la lámpara.

Teorema 2.11 *Sea X un conjunto arbitrario y sean $f \in \mathbb{I}$, $\Phi \in \mathbb{A}$. Existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ sobre X tal que $\Phi(f) = i$ si, y solo sí el conjunto $\{x \in X : f(x) = i\} \in \mathcal{H}$, es decir $\Phi = \Phi_{\mathcal{H}}$.*

Demostración:
Sea

$$\mathcal{H} = \{Y \subseteq X \mid \Phi(f) \text{ depende de } f|_Y \text{ para cualquier función } f \in \mathbb{I}\},$$

a continuación verificaremos que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro:

i) $\emptyset \notin \mathcal{H}$, en efecto, supongamos que $\emptyset \in \mathcal{H}$ y sean $f, g \in \mathbb{I}$ con $f \not\simeq g$ luego se cumple que $\Phi(f) = \Phi(f|_\emptyset * g) = \Phi(g)$, esto es una contradicción ya que $f \not\simeq g$ por lo tanto $\Phi(f) \neq \Phi(g)$.

ii) Sea $A \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq B$ queremos ver que $B \in \mathcal{H}$. Sea $f \in \mathbb{I}$ como $A \in \mathcal{H}$ entonces $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$. Supongamos que $B \notin \mathcal{H}$, por el lema 2.6 se tiene que $B^c \in \mathcal{H}$, así $\Phi(f) = \Phi(f|_{B^c} * h)$ para cualquier función $h \in \{0,1,2\}^B$. Consideremos una función $\overline{f} \in \mathbb{I}$ con $\overline{f} \not\simeq f$ y definamos las funciones $h(x) : B \to \{0,1,2\}$ y $g(x) : A^c \to \{0,1,2\}$, como sigue a continuación:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \backslash A \\ \overline{f} & \text{si } x \in A \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \backslash A \\ \overline{f} & \text{si } x \in B^c \end{cases}$$

Luego $f|_A * g \not\simeq f|_{B^c} * h$ por lo tanto $\Phi(f|_A * g) \neq \Phi(f|_{B^c} * h)$, esto es una contradicción ya que $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ y $\Phi(f|_{B^c} * h) = \Phi(f)$.

iii) Sean $A, B \in \mathcal{H}$, por lo tanto dada una función $f \in \mathbb{I}$ se cumple lo siguiente:

$$\Phi(f) = \Phi(f|_A * g) \text{ para toda función } g \in \{0,1,2\}^{A^c} \quad (iii.a)$$

$$\Phi(f) = \Phi(f|_B * h) \text{ para toda función } h \in \{0,1,2\}^{B^c} \quad (iii.b)$$

Supongamos que $A \cap B \notin \mathcal{H}$ así por el lema 2.6 se tiene que $(A \cap B)^c \in \mathcal{H}$, entonces $\Phi(f) = \Phi(f|_{(A\cap B)^c} * \varphi)$ para cualquier función $\varphi \in \{0,1,2\}^{(A\cap B)}$.

Consideremos ahora una función $\overline{f} \in \mathbb{I}$ con $f \not\simeq \overline{f}$, notemos que:

$$\Phi(f) = \Phi(f|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c}) \quad \text{por } (iii.a)$$

Como la función $f|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c}$ coincide en B con la función $\overline{f}|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c}$ entonces por $(iii.b)$ obtenemos que:

$$\Phi(f) = \Phi(f|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c}) = \Phi(\overline{f}|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c})$$

Notemos que tomando $z = \overline{f}|_{A\cap B}$ obtenemos que $\Phi(f) = \Phi(f|_{(A\cap B)^c} * z)$, pero esto es una contradicción ya que $(f|_{(A\cap B)^c} * z) \not\approx (\overline{f}|_{A\cap B^c} * f|_{A\cap B} * \overline{f}|_{A^c\cap B} * \overline{f}|_{(A\cap B)^c})$.

iv) Por el lema 2.6 tenemos que dado $A \subseteq X$ y una función $f \in \{0,1,2\}^A$ se cumple que $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$ ó que $\Phi(f) = \Phi(h * f|_{A^c})$ para toda función $h \in \{0,1,2\}^{A^c}$; de tal manera que $A \in \mathcal{H}$ ó $A^c \in \mathcal{H}$.

A continuación mostraremos que $\mathcal{H}$ determina el valor de Φ. Sean $f \in \mathbb{I}$ y $\Phi \in \mathbb{A}$, supongamos que $\Phi(f) = 0$, queremos ver que $\{x \in X : f(x) = 0\} \in \mathcal{H}$. Como

$$\bigcup_{i=0}^{2}\{x \in X : f(x) = i\} = X,$$

es decir, X es igual a la unión de tres conjuntos disjuntos, entonces a lo sumo uno de ellos debe pertenecer a $\mathcal{H}$. Supongamos que $A = \{x \in X : f(x) = 1\} \in \mathcal{H}$, por lo tanto se sigue que $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g) = 0$, para cualquier función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$, pero esto es una contradicción ya que si tomamos $g = (1)_{A^c}$ entonces $\Phi(f|_A * g) = 1$. De igual forma si suponemos que $\{x \in X : f(x) = 2\} \in \mathcal{H}$ haciendo un razonamiento análogo al anterior obtenemos una contradicción. En conclusión $\{x \in X : f(x) = 0\} \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, supongamos que $C_0 = \{x \in X : f(x) = 0\} \in \mathcal{H}$. Queremos ver que $\Phi(f) = 0$. Como $C_0 \in \mathcal{H}$, entonces $\Phi(f) = \Phi(f|_{C_0} * g)$ para toda $g \in \{0,1,2\}^{C_0^c}$. Tomando $g \equiv 0$ (función constante igual a cero) obtenemos que $\Phi(f|_{C_0} * g) = 0$. Por lo tanto $\Phi(f) = 0$, análogamente se tratan los otros casos (C_1 ó $C_2 \in \mathcal{H}$).

■

A continuación mostraremos que si tenemos un conjunto finito de interruptores, existe un interruptor x tal que el estado de la luz depende sólo de la posición de dicho interruptor.

Corolario 2.12 *Sea X un conjunto finito y sean $f \in \mathbb{I}$, $\Phi \in \mathbb{A}$. Entonces existe $x \in X$ tal que:*

$$\Phi(f) = f(x).$$

Demostración:

Sea

$$\mathcal{H} = \{Y \subseteq X \mid \Phi(f) \text{ depende de } f|_Y \text{ para cualquier función } f \in \mathbb{I}\},$$

en la demostración del teorema (2.11), verificamos que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro sobre X. Como X es un conjunto finito, usando el teorema (1.18) tenemos que $\mathcal{H}$ es principal, es decir, existe $x \in X$ tal que:

$$\mathcal{H} = \{Y \subseteq X : x \in Y\}.$$

Sea $f \in \mathbb{I}$, de lo anterior resulta que $\{x\} \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\Phi(f) = \Phi(f|_{\{x\}} * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{\{x\}^c}$. Tomando $g = (f|_{\{x\}})_{\{x\}^c}$ obtenemos que $\Phi(f|_{\{x\}} * g) = f(x)$. Así $\Phi(f) = f(x)$.

■

Definición 2.13 *Dado $\Phi \in \mathbb{A}$, definimos $\mathcal{H}_\Phi$ como sigue:*

$$\mathcal{H}_\Phi = \{A \subseteq X \mid \Phi(f) \text{ depende de } f|_A, \forall f \in \mathbb{I}\}.$$

En la demostración del teorema (2.11) se mostró que $\mathcal{H}_\Phi$ es un ultrafilro sobre X.

En resumen, hasta ahora hemos probado que toda función de agregación es de la forma $\Phi_{\mathcal{H}}$, para algún ultrafiltro $\mathcal{H}$. Mostraremos que la correspondencia entre ultrafiltros y funciones de agregación es muy precisa, como lo indica el teorema dado a continuación:

Teorema 2.14 *Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathcal{U}(X)$ definida por $\alpha(\Phi) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\beta : \mathcal{U}(X) \to \mathbb{A}$ definida por $\beta(\mathcal{H}) = \Phi_{\mathcal{H}}$. Entonces α es la inversa de β.*

Demostración:

1. Mostraremos que $(\beta \circ \alpha)(\Phi) = \Phi$ para toda función de agregación Φ.
   Sea $\Phi \in \mathbb{A}$. Luego $\alpha(\Phi) = \mathcal{H}_\Phi$, queremos ver que $\beta(\mathcal{H}_\Phi) = \Phi$. Ambas funciones tienen el mismo dominio, así que sólo tenemos que verificar que tienen la misma ley de correspondencia. Consideremos una función $f \in \mathbb{I}$ y supongamos que $\Phi(f) = 0$ y que $\beta(\mathcal{H}_\Phi)(f) \neq 0$.

   i) Si $\beta(\mathcal{H}_\Phi)(f) = 1$ entonces $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \in \mathcal{H}_\Phi$, en consecuencia $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$, tomando $g \equiv 1$ (función constante igual a uno) obtenemos que $0 = \Phi(f) = \Phi(f|_A * g) = 1$ esto es una contradicción, así $\beta(\mathcal{H}_\Phi)(f) \neq 1$.

ii) Si $\beta(\mathcal{H}_\Phi)(f) = 2$ entonces $A = \{x \in X \mid f(x) = 2\} \in \mathcal{H}_\Phi$, en consecuencia $\Phi(f) = \Phi(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$, tomando $g \equiv 2$ (función constante igual a uno) obtenemos que $0 = \Phi(f) = \Phi(f|_A * g) = 2$ esto es una contradicción, así $\beta(\mathcal{H}_\Phi)(f) \neq 2$.

Los casos donde $\Phi(f) = 1$ y $\Phi(f) = 2$ se analizan de manera análoga.

2. Mostraremos que $(\alpha \circ \beta)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ para todo ultrafiltro $\mathcal{H}$.
Sea $\mathcal{H}$ un ultrafiltro. Luego $\beta(\mathcal{H}) = \Phi_\mathcal{H}$, queremos ver que $\alpha(\Phi_\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Notemos que $\mathcal{H} \subseteq \alpha(\Phi_\mathcal{H})$, en efecto, sea $A \in \mathcal{H}$ tenemos que verificar que $A \in \alpha(\Phi_\mathcal{H})$, es decir, dada una función $f \in \mathbb{I}$ se tiene que cumplir que $\Phi_\mathcal{H}(f) = \Phi_\mathcal{H}(f|_A * g)$ para toda función $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$.

   Fijemos $g \in \{0,1,2\}^{A^c}$ y $f \in \mathbb{I}$. Supongamos que $\Phi_\mathcal{H}(f) = 0$, esto implica que $f^{-1}(0) \in \mathcal{H}$, luego por propiedades de ultrafiltros se cumple que $A \cap f^{-1}(0) \in \mathcal{H}$.

   Sea $M = \{x \in X : (f|_A * g)(x) = 0\}$, usando el hecho de que $A \cap f^{-1}(0) \subseteq M$ obtenemos que $M \in \mathcal{H}$, por lo tanto $\Phi_\mathcal{H}(f|_A * g) = 0$. De manera análoga se tratan los casos cuando $\Phi_\mathcal{H}(f) = 1$ y $\Phi_\mathcal{H}(f) = 2$.

   Como $\mathcal{H}$ es un filtro maximal y $\mathcal{H} \subseteq \alpha(\Phi_\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{H} = \alpha(\Phi_\mathcal{H})$. ∎

Capítulo 3

El teorema de imposibilidad de Arrow

En este capítulo presentaremos el teorema de Arrow para conjuntos infinitos. Este teorema trata sobre sistemas de votación. Mostraremos que bajo ciertas condiciones los sistemas de votación están determinados por ultrafiltros. La versión más conocida es cuando el conjunto de votantes es finito, en este caso, el teorema de Arrow nos garantiza la existencia de un votante que determina el resultado. De ahora en adelante X denotará un conjunto de votantes y $\mathcal{C}$ denotará un conjunto finito de candidatos con al menos tres integrantes. Una elección consiste en que cada votante escoge un orden lineal de $\mathcal{C}$ que indica sus preferencias y el resultado de la votación también es un orden lineal. Ahora precisaremos estos conceptos:

Definición 3.1 *$\mathcal{P}(\mathcal{C})$ (perfiles de $\mathcal{C}$) es el conjunto de todas los posibles ordenes lineales de $\mathcal{C}$.*

Definición 3.2 *Una elección es una función $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ al conjunto de todas las posibles elecciones.*

Cuando queramos resaltar que $f(x)$ es un orden, usaremos la siguiente notación: $\prec_x^f$.

Definición 3.3 *Un sistema de votación es una función $\Phi : \mathcal{P}(\mathcal{C})^X \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ que satisface:*

1. *(Pareto débil) Si $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ es una función constante, entonces $\Phi(f) = f(x)$ para algún (ó cualquier) $x \in X$.*

2. *(Independencia de alternativas irrelevantes) Dadas $f, g \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ y $a, b \in \mathcal{C}$. Si para todo $x \in X$, se tiene que $[a \prec_x^f b \Leftrightarrow a \prec_x^g b]$, entonces $[a \prec_\Phi^f b \Leftrightarrow a \prec_\Phi^g b]$. Donde $\prec_\Phi^f$ denota el orden parcial $\Phi(f)$.*

Notación: Denotaremos por SV al conjunto de todos los sistemas de votación.

Ejemplo 3.4

- *Sea* $x \in X$. *Definimos* $\Phi_x : \mathcal{P}(\mathcal{C})^X \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ *como sigue:*

$$\Phi_x(f) = f(x).$$

  Entonces Φ_x *es un sistema de votación.*

- *En este ejemplo se ilustra como se usa la independencia de alternativas irrelevantes. Sean* $X = \{x, y\}$ *y* $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$. *Supongamos que* $f, g \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ *vienen dadas como se indica a continuación:*

$$f(x) = abc \qquad g(x) = acb$$

$$f(y) = bac \qquad g(y) = cba.$$

  Luego tenemos que:

$$a \prec_x^f b \qquad a \prec_x^g b$$

$$b \prec_y^f a \qquad b \prec_y^g a.$$

  Sea Φ *un sistema de votación. Si suponemos que* $b \prec_\Phi^f a$, *entonces por independencia de alternativas irrelevantes obtenemos que* $b \prec_\Phi^g a$.

♣

A continuación presentaremos otro ejemplo de sistema de votación menos trivial.

Definición 3.5 *Sea* $\mathcal{H}$ *un ultrafiltro sobre* X. *Definimos* $\Phi_{\mathcal{H}} : \mathcal{P}(\mathcal{C})^X \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ *como sigue:*

$$\Phi_{\mathcal{H}}(f) = \prec_{\Phi_{\mathcal{H}}}^f .$$

Donde $\prec_{\Phi_{\mathcal{H}}}^f$ *se define a continuación: Sean* $a, b \in \mathcal{C}$.

$$a \prec_{\Phi_{\mathcal{H}}}^f b \quad \text{si, y solo sí} \quad \{x \in X : a \prec_x^f b\} \in \mathcal{H}.$$

Para ver que $\Phi_{\mathcal{H}}$ es un sistema de votación, debemos primero verificar que la relación $\prec_{\Phi_{\mathcal{H}}}^f$ está bien definida.

Lema 3.6 *La relación binaria $\prec_{\Phi}^{f}$ es un orden total sobre el conjunto $\mathcal{C}$.*

Demostración:

1. (Antisimétrica)
   Sean $a, b \in \mathcal{C}$ supongamos que $a \prec_{\Phi}^{f} b$ y además que $b \prec_{\Phi}^{f} a$, por lo tanto $A = \{x \in X : a \prec_{x}^{f} b\} \in \mathcal{H}$ y $B = \{x \in X : b \prec_{x}^{f} a\} \in \mathcal{H}$. Mostraremos que $a = b$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $a \neq b$, luego $A \cap B = \emptyset$, pero esto es una contradicción ya que $A \cap B \in \mathcal{H}$ por propiedades de ultrafiltros y $\emptyset \notin \mathcal{H}$.

2. (Transitiva)
   Sean $a, b, c \in \mathcal{C}$, supongamos que $a \prec_{\Phi}^{f} b$ y además que $b \prec_{\Phi}^{f} c$, por lo tanto $A = \{x \in X : a \prec_{x}^{f} b\} \in \mathcal{H}$ y $B = \{x \in X : b \prec_{x}^{f} c\} \in \mathcal{H}$, por propiedades de ultrafiltros se tiene que $A \cap B \in \mathcal{H}$. Queremos ver que $C = \{x \in X : a \prec_{x}^{f} c\} \in \mathcal{H}$, para ellos notemos que $A \cap B \subseteq C$, así nuevamente usando propiedades de los ultrafiltros obtenemos que $C \in \mathcal{H}$.

3. (Totalidad)
   Sean $a, b \in \mathcal{C}$, notemos que $X = A \cup B$, donde $A = \{x \in X : a \prec_{x}^{f} b\}$ y $B = \{x \in X : b \prec_{x}^{f} a\}$, por propiedades de ultrafiltros uno de ellos debe pertenecer al ultrafiltro $\mathcal{H}$. Sin perdida de generalidad supongamos que $A \in \mathcal{H}$, así $a \prec_{\Phi}^{f} b$.

■

Lema 3.7 *$\Phi_{\mathcal{H}}$ es un sistema de votación.*

Demostración:

1. (Pareto débil) Sea $f \in \mathcal{P}(Ce)^X$ una función constante. Queremos ver que $\Phi_{\mathcal{H}}(f) = f(x)$, para todo $x \in X$. Supongamos por el absurdo que $\Phi_{\mathcal{H}}(f) \neq f(x)$ para todo $x \in X$, por lo tanto existen $a, b \in \mathcal{C}$ tal que:

   $$a \prec_{\Phi_{\mathcal{H}}}^{f} b \quad \text{ y } \quad b \prec_{x}^{f} a, \text{ para todo } x \in X.$$

   De la definición de $\Phi_{\mathcal{H}}$ se tiene que $\{x \in X : a \prec_{x}^{f} b\} \in \mathcal{H}$. Notemos que el conjunto $\{x \in X : a \prec_{x}^{f} b\} = \emptyset$, debido a que $b \prec_{x}^{f} a$ para todo $x \in X$. Esto es una contradicción ya que $\emptyset \notin \mathcal{H}$, así $\Phi_{\mathcal{H}}(f) = f(x)$ para todo $x \in X$.

2. (Independencia de alternativas irrelevantes) Sean $f, g \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ y $a, b \in \mathcal{C}$. Supongamos que:

   $$\forall x \in X \ \ [a \prec_{x}^{f} b \Leftrightarrow a \prec_{x}^{g} b], \tag{3.1}$$

queremos ver que:

$$[a \prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}}} b \Leftrightarrow a \prec^g_{\Phi_{\mathcal{H}}} b],$$

Esto último es claro ya que por (3.1) se tiene que:

$$\{x \in X : a \prec^f_x b\} = \{x \in X : a \prec^g_x b\}.$$

■.

El objetivo de este capítulo es mostrar que todo sistema de votación es de la forma $\Phi_{\mathcal{H}}$

Definición 3.8 *Dado un sistema de votación Φ, diremos que un votante x es llamado decisivo según Φ si:*

$$\Phi(f) = f(x),$$

para toda $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$.

Definición 3.9 *Dado un sistema de votación Φ, diremos que un subconjunto de votantes $\mathcal{F}$ de X es decisivo según Φ; si dada $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{F}$, se cumple que $\Phi(f) = f(x)$ para algún (ó cualquier) $x \in \mathcal{F}$.*

En palabras, si F es decisivo, entonces en cada elección donde voten igual todos los miembros de $\mathcal{F}$, el resultado de la elección debe ser lo que los miembros de $\mathcal{F}$ deciden.

Cuando el sistema de votación sea claro del contexto, con el fin de simplificar notación diremos simplemente que un votante es decisivo, en vez de decisivo según Φ.

Lema 3.10 *Dado un sistema de votación Φ. Para toda $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$, si $a \prec^f_x b$ para todo $x \in X$, entonces $a \prec^f_\Phi b$.*

Demostración:

Sean $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ y $a, b \in \mathcal{C}$, supongamos que $a \prec^f_x b$ para todo $x \in X$, queremos ver que $a \prec^f_\Phi b$. Sea $x_0 \in X$ y sea $g \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ definida por $g(x) = f(x_0)$, para todo $x \in X$. Luego tenemos que $a \prec^g_x b$ para todo $x \in X$ (debido a que $a \prec^f_{x_0} b$). Usando pareto débil obtenemos que $a \prec^g_\Phi b$. Hemos mostrado que:

$$\forall x \in X \quad a \prec^f_x b \Leftrightarrow a \prec^g_x b.$$

Ahora por independencia de alternativas irrelevantes se tiene que:

$$a \prec^f_\Phi b \Leftrightarrow a \prec^g_\Phi b.$$

Como ya sabemos que $a \prec^g_\Phi b$, entonces $a \prec^f_\Phi b$. ■

Lema 3.11 *Dado un sistema de votación* Φ*. Si* $card(X) = 2$*, entonces uno de los votantes es decisivo según* Φ*.*

Demostración:

Sean x e y votantes, supongamos que x no es decisivo, mostraremos que y es decisivo. Como x no es decisivo, existe una elección f y candidatos a y b tales que x los ordenó en su lista como ab ($a \prec_x^f b$) y en el resultado aparecen en el orden ba ($b \prec_\Phi^f a$). Necesariamente el votante y los ordenó en su lista como ba ($b \prec_y^f a$), de lo contrario, si el votante x los ordena ab y el votante y también, por pareto débil éste sería el resultado, esta contradicción establece que el votante y los ordenó de forma ba. Ahora introduciremos un candidato c para determinar cual es el resultado de la votación si el votante x clasifica a los candidatos a y b en el orden ba. Notemos que en la siguiente tabla cada columna implica la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7
x :	ab	acb	ac	abc	bc	bac	ba
y :	ba	cba	ca	cab	cb	acb	ab
Resultado:	ba	cba	ca	cab	cb	acb	ab

Esto prueba que y es decisivo para la pareja a y b. Repitiendo el mismo argumento, si sustituimos la columna 1 por la columna 3 (respectivamente por la columna 5). En otras palabras, si intercambiamos a y b por a y c (respectivamente por b y c), obtenemos que el votante y es decisivo para cualquier par de candidatos. Por lo que la decisión del votante y queda establecida. ■

Lema 3.12 *Dado un sistema de votación* Φ*. Si* $card(X) = 4$*, entonces uno de los votantes es decisivo según* Φ*.*

Demostración: Sean x, y, w y z votantes, queremos ver que uno de ellos es decisivo. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ y supongamos que x e y votan en bloque (es decir, $f(x) = f(y)$) y que w y z también votan en bloque ($f(w) = f(z)$). Entonces tenemos dos bloques de votantes, por el lema 3.9 uno de ellos es decisivo. Supongamos sin pérdida de generalidad que xy es el bloque decisivo ($\Phi(f) = f(x)$).

Mostraremos que el bloque xy sigue siendo decisivo aun cuando w y z no votan en bloque. Razonemos por el absurdo, supongamos que el bloque xy no es decisivo cuando w y z no votan en bloque. Por lo tanto existen candidatos a y b tales que el bloque xy los coloca en su lista en el orden ab mientras que en el resultado dichos candidatos están en el orden ba. En la siguiente tabla $a'b'$ y $a''b''$ denotan permutaciones del orden ab y de nuevo cada columna implica la siguiente:

	1	2	3
x :	ab	acb	cb
y :	ab	acb	cb
w :	$a'b'$	$a'b'c$	bc
z :	$a''b''$	$a''b''c$	bc
Resultado:	ba	bac	bc

Esto contradice el hecho de que el bloque xy es decisivo cuando los votantes w y z votan en bloque. Ésta contradicción establece que el bloque xy es decisivo, aun cuando los votantes w y z voten como lo deseen.

Ahora fijaremos la clasificación de los votantes w y z en un cierto orden fijo, digamos $\pi(C_1), \ldots, \pi(C_n)$, donde $\pi : \{C_1, \ldots, C_n\} \to \{C_1, \ldots, C_n\}$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, es decir π es un orden lineal de los candidatos; permitiremos que los votantes x e y voten como lo deseen. Por lo tanto, el sistema de votación de cuatro votantes se reduce a un sistema de votación de dos votantes (x e y), ya que el orden de clasificación de los votantes w y z fue fijado previamente. De manera que uno de ellos es decisivo.

Supongamos que el votante x es decisivo en este sistema. Afirmamos que el votante x es decisivo en el sistema original de cuatro votantes. Para mostrar esto último razonaremos por el absurdo, supongamos que el votante x no es decisivo en el sistema original de cuatro votantes, así existe una elección f y candidatos $a, b \in \mathcal{C}$ tal que el votante x los clasifica en el orden ab ($a \prec_x^f b$), mientras que en el resultado aparecen en el orden ba ($b \prec_\Phi^f a$). Notemos que el votante y necesariamente tiene que clasificar a dichos candidatos en el orden ba, pues de lo contrario x e y votarían en bloque y ya sabemos que este bloque es decisivo, razón por la cual su clasificación sería el resultado. De nuevo $a'b'$ y $a''b''$ denotan permutaciones del orden ab y fijemos $c = \pi(C_n)$. De esta manera, en la tabla que sigue a continuación cada columna implica la siguiente:

	1	2	3
x :	ab	acb	cb
y :	ba	bac	bc
w :	$a'b'$	$a'b'c$	bc
z :	$a''b''$	$a''b''c$	bc
Resultado:	ba	bac	bc

(3.2)

Esto contradice el hecho de que el votante x es decisivo cuando los votantes w y z votan en el orden fijo $\pi(C_1), \ldots, \pi(C_n)$, ahora analizaremos dos posibles casos:

- Caso1: $(a = \pi(C_n))$ ó $(b = \pi(C_n))$
  Sin pérdida de generalidad supongamos que $b = \pi(C_n)$ y $c = \pi(C_1)$. En la tabla que sigue a continuación cada columna implica la siguiente:

	1	2	3	4	5
x :	ab	acb	ac	abc	bc
y :	ba	cba	ca	cab	cb
w :	$a'b'$	$ca'b'$	ca	cab	cb
z :	$a''b''$	$ca''b''$	ca	cab	cb
Resultado:	ba	cba	ca	cab	cb

(3.3)

  y de nuevo esto es una contradicción.

- Caso 2: $(a = \pi(C_1), b = \pi(C_n))$ ó $(b = \pi(C_1), a = \pi(C_n))$
  Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = \pi(C_1), b = \pi(C_n)$ y $c = \pi(C_2)$, de (3.2) ó (3.3) se obtiene la misma contradicción.

De ésta manera, ha quedado establecida la decisión del votante x en el sistema original de cuatro votantes. ■

Lema 3.13 *Sea Φ un sistema de votación y $\mathcal{F}$ un subconjunto de X. Si $\mathcal{F}$ es decisivo según Φ en el esquema de votación de dos bloques consistente de $\mathcal{F}$ y $X \backslash \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es decisivo según Φ en general.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto decisivo de X. Razonemos por el absurdo, supongamos que $\mathcal{F}$ no es decisivo cuando los votantes en $X \backslash \mathcal{F}$ votan como lo deseen, por lo tanto existe una elección f y un par de candidatos $a, b \in \mathcal{C}$, tal que los votantes en $\mathcal{F}$ los clasificaron en el orden ab ($a \prec_x^f b \; \forall x \in \mathcal{F}$), mientras que en el resultado aparecen en el orden ba ($b \prec_\Phi^f a$). Sean V_1 y V_2 subconjuntos de votantes de $X \backslash \mathcal{F}$, quienes clasifican a los candidatos en el orden ab ($a \prec_x^f b \; \forall x \in V_1$) y ba ($b \prec_x^f a \; \forall x \in V_2$) respectivamente y c un candidato distinto de a y b. En la tabla que sigue a continuación cada columna implica la siguiente:

	1	2	3
$\mathcal{F}$:	ab	acb	cb
V_1 :	ab	abc	bc
V_2 :	ba	bac	bc
Resultado:	ba	bac	bc

Esto contradice la decisión de $\mathcal{F}$ en el esquema de votación de dos bloques consistente de $\mathcal{F}$ y $X\backslash\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un subconjunto decisivo en general. ■

Lema 3.14 *Sea Φ un sistema de votación. Si $\mathcal{H}_\Phi$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X decisivos según Φ, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ es un ultrafiltro sobre X.*

Demostración: A continuación verificaremos las cuatro condiciones requeridas para que $\mathcal{H}_\Phi$ sea un ultrafiltro:

i) $\emptyset \notin \mathcal{H}_\Phi$. Si $\emptyset \in \mathcal{H}_\Phi$, entonces $\emptyset$ es decisivo, pero esto es una contradicción ya que $X\backslash\emptyset = X$, y si todos los electores en X votan en bloque, entonces estos deciden el resultado por pareto débil.

ii) Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_\Phi$ y supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$. Queremos ver que $\mathcal{K} \in \mathcal{H}_\Phi$. Esto es directo ya que si todos los electores en $\mathcal{K}$ votan en bloque, estos deciden el resultado debido a que estarían votando en bloque todos los electores en $\mathcal{F}$ y este conjunto por hipótesis es decisivo.

iii) Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}_\Phi$, queremos ver que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}_\Phi$. Para verificar esto consideremos el sistema de cuatro bloques de votación conformado por:

$$X\backslash(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2), \quad \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_1\backslash\mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_2\backslash\mathcal{F}_1.$$

Por el lema 3.10 uno de estos bloques tiene que ser decisivo.

iii.1 ($X\backslash(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \notin \mathcal{H}_\Phi$) Supongamos que el conjunto $X\backslash(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ es decisivo. Esto nos dice que su clasificación es el resultado. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{H}_\Phi$ razón por la cual $\mathcal{F}_1$ es quien determina el resultado.

iii.2 ($\mathcal{F}_1\backslash\mathcal{F}_2 \notin \mathcal{H}_\Phi$) Supongamos que el conjunto $\mathcal{F}_1\backslash\mathcal{F}_2$ es decisivo. Esto nos dice que su clasificación es el resultado. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}_\Phi$ razón por la cual $\mathcal{F}_1$ es quien determina el resultado.

iii.3 ($\mathcal{F}_2\backslash\mathcal{F}_1 \notin \mathcal{H}_\Phi$) Supongamos que el conjunto $\mathcal{F}_2\backslash\mathcal{F}_1$ es decisivo. Esto nos dice que su clasificación es el resultado. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{H}_\Phi$ razón por la cual $\mathcal{F}_1$ es quien determina el resultado.

En conclusión $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}_\Phi$.

iv) Sea $\mathcal{F} \subseteq X$. Veamos que $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_\Phi$ ó $X\backslash\mathcal{F} \in \mathcal{H}_\Phi$. Este resultado es consecuencia directa del lema (3.11) y el lema (3.13).

Por lo tanto $\mathcal{H}_\Phi$ es un ultrafiltro sobre X.

$\blacksquare$

A continuación presentaremos el Teorema de Arrow versión infinita.

Teorema 3.15 *Sean Φ un sistema de votación y X un conjunto arbitrario. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ tal que $\Phi = \Phi_{\mathcal{H}}$.*

Demostración:

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los subconjuntos decisivos según Φ de X, por el lema (3.14) tenemos que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro. Sean $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$ y $a, b \in \mathcal{C}$. Supongamos que $a \prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}}} b$, queremos ver que $a \prec^f_\Phi b$. Como $a \prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}}} b$ entonces $\{x \in X : a \prec^f_x b\} \in \mathcal{H}$. De esto último y de la definición de $\mathcal{H}$ obtenemos que $a \prec^f_\Phi b$. Como estos son ordenes lineales, entonces $\prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}}} = \prec^f_\Phi$. Por lo tanto $\Phi = \Phi_{\mathcal{H}}$. $\blacksquare$

Ahora presentaremos el teorema de Arrow para una cantidad finita de votantes:

Corolario 3.16 *Sean Φ un sistema de votación y X un conjunto finito. Entonces existe $a \in X$ tal que $\Phi(f) = f(a)$, para toda $f \in \mathcal{P}(\mathcal{C})^X$.*

Demostración:

Del teorema anterior tenemos que existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ tal que $\Phi = \Phi_{\mathcal{H}}$. Usando el teorema 1.18 obtenemos que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro principal. Por lo tanto existe un $a \in X$ tal que $\mathcal{H} = \{Y \subseteq X : a \in Y\}$, de esto último se deduce que $\{a\} \in \mathcal{H}$, lo que es equivalente a decir que $\Phi(f) = f(a)$.

$\blacksquare$

Mostraremos que la correspondencia entre ultrafiltros y sistemas de votación es muy precisa, como lo indica el teorema a continuación:

Teorema 3.17 *Sea $\alpha : SV \to \mathcal{U}(X)$ una función definida por $\alpha(\Phi) = \mathcal{H}_\Phi$ y sea $\beta : \mathcal{U}(X) \to SV$ una función definida por $\beta(\mathcal{H}) = \Phi_{\mathcal{H}}$. Entonces α es la inversa de β.*

Demostración:

1. Mostraremos que $(\beta \circ \alpha)(\Phi) = \Phi$ para todo sistema de votación Φ.
   Sea $\Phi \in SV$, así $\alpha(\Phi) = \mathcal{H}_\Phi$, queremos ver que $\beta(\mathcal{H}_\Phi) = \Phi$. Como $\beta(\mathcal{H}_\Phi) = \Phi_{\mathcal{H}_\Phi}$, solo tenemos que verificar que ambas funciones ($\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}$ y Φ) nos dan la misma lista de clasificación de los candidatos, es decir $\prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}}} = \prec^f_\Phi$. Sean $a, b \in \mathcal{C}$, sin pérdida de generalidad, digamos que $a \prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}} b$ (a está por delante de b en la lista $\prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}}$),

queremos verificar que $a \prec^f_\Phi b$ (a está por delante de b en la lista $\prec^f_\Phi$). En efecto, como $a \prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}} b$ entonces el conjunto $\{x \in X : a \prec^f_x b\} \in \mathcal{H}_\Phi$, pero esto nos dice automáticamente que $a \prec^f_\Phi b$ ya que $\mathcal{H}_\Phi$ es el conjunto de todos los subconjuntos decisivos según Φ de X. Como $\prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}}$ es un orden lineal, entonces $\prec^f_{\Phi_{\mathcal{H}_\Phi}}=\prec^f_\Phi$.

2. Mostraremos que $(\alpha \circ \beta)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ para todo ultrafiltro $\mathcal{H}$.
Sea $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(X)$, luego $\beta(\mathcal{H}) = \Phi_\mathcal{H}$. Por lo tanto $\alpha(\beta(\mathcal{H})) = \alpha(\Phi_\mathcal{H}) = \mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}}$, donde $\mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}}$ es el ultrafiltro de todos los conjuntos decisivos según $\Phi_\mathcal{H}$, queremos ver que $\mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Sea $A \in \mathcal{H}$, queremos ver que $A \in \mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}}$, es decir debemos verificar que A es decisivo según $\Phi_\mathcal{H}$. Supongamos que dada una elección f, se cumple que $\prec^f_x=\prec^f_y$ para todo $x, y \in A$, veamos que $\prec^f_{\Phi_\mathcal{H}}=\prec^f_x$ para algún (o cualquier) $x \in A$.

   Sean $a, b \in \mathcal{C}$, supongamos que $a \prec^f_{\Phi_\mathcal{H}} b$, queremos ver que $a \prec^f_x b$ para algún $x \in A$. Como $a \prec^f_{\Phi_\mathcal{H}} b$ entonces se tiene que $B = \{x \in X : a \prec^f_x b\} \in \mathcal{H}$, por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$, así existe un $x_1 \in A \cap B$, tal que $a \prec^f_{x_1} b$. Como $\prec^f_{\Phi_\mathcal{H}}$ es un orden lineal, entonces $\prec^f_{\Phi_\mathcal{H}}=\prec^f_{x_1}$.

   Hemos probado que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}}$, ahora como $\mathcal{H}$ es un filtro maximal, concluimos que $\mathcal{H}_{\Phi_\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

■

Capítulo 4

Límites de Banach

En este capítulo introduciremos el concepto de límite de Banach (debido a Stefan Banach), el cual es un límite generalizado que se puede asociar a toda sucesión acotada. También estudiaremos las propiedades de los límites usuales que conservan dichos límites, en general, nos vamos a enfocar en mostrar que los ultrafiltros nos proporcionan una manera elegante de definir los límites de Banach.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de números reales. Si resulta ser convergente (con respecto a la topología estándar de la línea real), entonces denotamos este límite por $\lim_n x_n$. Nuestro objetivo es asignar un valor (límite generalizado) $\lim_n^* x_n$ a toda sucesión acotada $(x_n)_n$ y lo queremos hacer de manera tal que ciertas propiedades se preserven. Un límite generalizado es un límite de Banach. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números reales.

Definición 4.1 *Un límite generalizado es una función* $\lim_n^* : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$*, que satisface:*

(A) *Si* $(x_n)_n$ *es convergente, entonces* $\lim\limits_n{}^* x_n = \lim\limits_n x_n$.

(B) $\lim\limits_n{}^*(x_n + y_n) = \lim\limits_n{}^* x_n + \lim\limits_n{}^* y_n$

(C) $\lim\limits_n{}^* c x_n = c \lim\limits_n{}^* x_n$

(D) $|\lim\limits_n{}^* x_n| \leq \sup_n |x_n|$.

(E) *Si* $(x_n)_n$ *es una sucesión no negativa, entonces* $\lim\limits_n{}^* x_n \geq 0$.

Algunos límites generalizados poseen una propiedad adicional, que enunciaremos a continuación:

(F) $\lim_n^* x_n \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Notación: El conjunto de todos los límites generalizados lo denotaremos por $\mathbb{L}$.

Sea $\mathcal{H}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales). Por el teorema (1.19) se tiene que $\mathcal{H}$ contiene todos los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$ (es decir, todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyos complementos son conjuntos finitos). Recordemos la definición de límite de una sucesión:

Definición 4.2 *Una sucesión $(x_n)_n$ tiene límite a si para cada $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Note que esto es equivalente a decir que los conjuntos $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{n : |x_n - a| < \varepsilon\}$ son cofinitos.

Ahora daremos un ejemplo de un límite generalizado:

Definición 4.3 *Dada una sucesión real acotada $(x_n)_n$, diremos que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = s$, si $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon) = \{n : |x_n - s| < \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Primero mostraremos que ésta es una buena definición, es decir, que $\lim_{\mathcal{H}} x_n$ existe para cada sucesión acotada $(x_n)_n$ en $\mathbb{R}$ y éste es único.

Sea $L = \sup_n |x_n|$, entonces tenemos que $-L \leq x_n \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado un entero positivo "m", dividimos el intervalo $[-L, L]$ en 2^m intervalos disjuntos, de la siguiente manera:

$$I_{m,j} = \left[-L + \frac{2(j-1)L}{2^m}\, , \, -L + \frac{2Lj}{2^m}\right)$$

$$I_{m,2^m} = \left[-L - \frac{2L}{2^m}\, , \, L\right].$$

Definimos por

$$J_{m,j} = \{n : x_n \in I_{m,j}\},$$

es claro que $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{2^m-1} J_{m,j} \cup J_{m,2^m}$.

Como $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y la familia $(J_{m,j})_j$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ disjunta dos a dos, entonces existe un y sólo un $j_m \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$ tal que $J_{m,j_m} \in \mathcal{H}$. Ahora notemos que aplicando el mismo razonamiento en el siguiente nivel $(I_{m+1,j})$ obtenemos que uno y sólo uno de los $J_{m+1,j} \in \mathcal{H}$, digamos $J_{m+1,j_{m+1}} \in \mathcal{H}$. Observemos que $J_{m+1,j_{m+1}} \subseteq J_{m,j_m}$, si esto no fuera cierto entonces $\mathcal{H}$ contendría dos conjuntos disjuntos y esto es una contradicción.

Por lo tanto la clausura de los intervalos I_{m,j_m} forma una sucesión acotada y encajada de intervalos cerrados con diámetro tendiendo a cero. Usando el teorema (1.21) obtenemos que existe un $s \in \bigcap_m J_{m,j_m}$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces para un m suficientemente grande el intervalo I_{m,j_m} es un subconjunto de $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$. Así, el conjunto $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon) = \{n : |x_n - s| < \varepsilon\}$ contiene el intervalo I_{m,j_m}, razón por la cual $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon) \in \mathcal{H}$, ya que $I_{m,j_m} \in \mathcal{H}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$, entonces por definición tenemos que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = s$.

Ahora verificaremos que el $\lim_{\mathcal{H}}$ es único. Razonemos por el absurdo, dada $(x_n)_n \in \mathcal{A}$, supongamos que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = s$ y que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = s'$, con $s \neq s'$. Luego para un ε suficientemente pequeño, tenemos que $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon)$ y $\mathcal{U}((x_n), s', \varepsilon)$ son disjuntos, lo cual es una contradicción ya que ambos conjuntos pertenecen a $\mathcal{H}$ y su intersección es vacía. Por cierto también hemos establecido que $\lim_{\mathcal{H}} x_n$ está en $[-L, L]$, de esta manera tenemos que $\lim_{\mathcal{H}}$ tiene la propiedad (D), a continuación verificaremos las otras propiedades requeridas:

Lema 4.4 $\lim_{\mathcal{H}}$ *es un límite generalizado y tiene la propiedad (F).*

Demostración: Solo falta verificar las propiedades (A), (B), (C), (E) y (F).

(A) Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente. Queremos ver que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = \lim_n x_n$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = s$ y que $\lim_n x_n = s'$, con $s \neq s'$. Ahora podemos encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que el intervalo $(s-\varepsilon_0, s+\varepsilon_0)$ no contiene ningúna cola de la sucesión (es decir, contiene a lo sumo una cantidad finita de elementos de la sucesión), de lo contrario estaríamos diciendo que $\lim_n x_n = s$ y esto es una contradicción debido a la unicidad del límite de una sucesión. Ahora bien, por definición de límite generalizado de una sucesión tenemos que $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon) \in \mathcal{H}$ para todo $\varepsilon > 0$, pero esto es una contradicción, ya que $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon_0) \notin \mathcal{H}$, debido a que $\mathcal{U}((x_n), s, \varepsilon_0)^c \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ contiene los cofinitos).

(B) Sean $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$. Queremos ver que $\lim_{\mathcal{H}}(x_n + y_n) = \lim_{\mathcal{H}} x_n + \lim_{\mathcal{H}} y_n$. Supongamos que $\lim_{\mathcal{H}} x_n = r$ y que $\lim_{\mathcal{H}} y_n = s$, por lo tanto los conjuntos $A_\varepsilon = \{n : |x_n - r| < \varepsilon/2\}$, $B_\varepsilon = \{n : |y_n - s| < \varepsilon/2\}$ pertenecen a $\mathcal{H}$ para todo $\varepsilon > 0$. Notemos que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subseteq \{n : |(x_n + y_n) - (r+s)| < \varepsilon\} = C$, en efecto, sea $n_0 \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$, luego $|(x_{n_0} + y_{n_0}) - (r+s)| \leq |x_{n_0} - r| + |y_{n_0} - s| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, como queriamos. Por lo tanto $C \in \mathcal{H}$ para todo $\varepsilon > 0$.

(C) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $\text{lím}_{\mathcal{H}}(cx_n) = c\,\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n$. Supongamos que $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n = r$, de esta manera se tiene que el conjunto $A_\varepsilon = \{n : |x_n - r| < \varepsilon/|c|\} \in \mathcal{H}$, para todo $\varepsilon > 0$. Notemos ahora que el conjunto $B_\varepsilon = \{n : |cx_n - cr| < \varepsilon\} \in \mathcal{H}$, ya que $|cx_n - cr| = |c||x_n - r| < \frac{|c|\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. Por lo tanto $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, cx_n = cr$.

(E) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ no negativa. Queremos ver que $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n \geq 0$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $r = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n < 0$, luego tomando $\varepsilon = |r|/2$ obtenemos que $\mathcal{U}((x_n), r, \varepsilon) = \emptyset$, ya que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción, por lo tanto $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n \geq 0$.

(F) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Queremos ver que $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n = r \notin \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Así existe un abierto de la topología usual en $\mathbb{R}$, digamos V_r tal que $r \in V_r$ y además se tiene que $V_r \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Luego podemos encontrar un ε suficientemente pequeño tal que $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq V_r$. Por definición de $\text{lím}_{\mathcal{H}}$ tenemos que $\mathcal{U}((x_n), r, \varepsilon) \in \mathcal{H}$. Esto contradice el hecho de que $V_r \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, ya que $\mathcal{U}((x_n), r, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Ahora nos preguntamos si el $\text{lím}_{\mathcal{H}}$ es invariante por traslación, ésta es una propiedad que es habitual incluir en esta teoría y establece que dadas dos sucesiones x_n, y_n en $\mathbb{R}$, si $y_n = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, y_n$. En particular, la invarianza por traslación implica que si queremos modificar finitamente muchos términos de una sucesión entonces el límite generalizado sigue siendo el mismo. La convergencia estándar tiene esta característica, pero desafortunadamente el límite generalizado como está definido no la tiene, en efecto:

Ejemplo 4.5

- *Consideremos la sucesión* $\{x_n\} = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$*, entonces usando la definición de límite generalizado obtenemos directamente que* $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n \in \{0, 1\}$*. Ahora tomemos* $\{y_n\} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$*, es claro que* $\{x_n + y_n\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$*. Por lo tanto* $\text{lím}_{\mathcal{H}}(x_n + y_n) = 1$*, así* $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, y_n = 1 - \text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n$*, esto muestra que* $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n \neq \text{lím}_{\mathcal{H}}\, y_n$*, aun cuando* $y_n = x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.* ♣

Sin embargo, a partir del $\text{lím}_{\mathcal{H}}$ podemos construir un límite generalizado invariante por traslación, que denotaremos por $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}$.

Definición 4.6 *Dada una sucesión acotada* $(x_n)_n$ *en* $\mathbb{R}$*, definimos* $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, z_n$*, donde* $z_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$.

Teorema 4.7 $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n$ *es un límite generalizado y es invariante por traslación.*

Demostración:
A continuación verificaremos que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}$ satisface las propiedades (A), (B), (C), (D) y (E):

(A) Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente. Queremos verificar que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n = \text{lím}_n\, x_n$. En efecto, supongamos que $\text{lím}_n\, x_n = r$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - r| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Veamos ahora que $\text{lím}_n\, z_n = r$. Tomando un n suficientemente grande ($n > n_0$) obtenemos lo siguiente:

$$\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} - r\right| = \left|\frac{x_0+\cdots+x_n - r(n+1)}{n+1}\right| \leq \frac{|x_0-r|+\cdots+|x_n-r|}{n+1}$$
$$= \frac{|x_0-r|+\cdots+|x_{n_0}-r|}{n+1} + \frac{|x_{n_0}-r|+\cdots+|x_n-r|}{n+1}$$

Sea $N = \sup\{|x_0-r|,\ldots,|x_{n_0}-r|$, así tenemos que:

$$\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} - r\right| \leq \frac{(n_o+1)N}{n+1} + \frac{(n-n_o-1)(\varepsilon/2)}{n+1} \quad \text{para todo } n \geq n_0$$
$$\leq \frac{(n_o+1)N}{n+1} + \varepsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Tomando $n_1 > n_0$, tal que $\frac{(n_0+1)N}{n_1+1} < \varepsilon/2$, obtenemos:

$$\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} - r\right| \leq \frac{(n_o+1)N}{n+1} + \varepsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_0$$
$$\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} - r\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_1$$

De esta manera hemos probado que $\text{lím}_n\, z_n = r$. De la propiedad (A) del límite generalizado y de lo antes probado obtenemos que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, z_n = \text{lím}_n\, z_n = \text{lím}_n\, x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, x_n$.

(B) Sean $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$. Queremos ver que:

$$\text{lím}^*_{\mathcal{H}}(x_n + y_n) = \text{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n + \text{lím}^*_{\mathcal{H}} y_n.$$

Notemos que:

$$\text{lím}^*_{\mathcal{H}}(x_n + y_n) = \text{lím}_{\mathcal{H}} z_n,$$

donde $z_n = \frac{x_0+y_0+\cdots+x_n+y_n}{n+1}$.

Es claro que

$$z_n = \frac{x_0 + y_0 + \cdots + x_n + y_n}{n+1} = \overbrace{\frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1}}^{u_n} + \overbrace{\frac{y_0 + \cdots + y_n}{n+1}}^{w_n}.$$

Como $\text{lím}_{\mathcal{H}}$ satisface la propiedad (B), entonces tenemos que:

$$\text{lím}_{\mathcal{H}} z_n = \text{lím}_{\mathcal{H}} u_n + \text{lím}_{\mathcal{H}} w_n,$$

y

$$\text{lím}_{\mathcal{H}} u_n = \text{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n \qquad \text{lím}_{\mathcal{H}} w_n = \text{lím}^*_{\mathcal{H}} y_n.$$

(C) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Queremos demostrar que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, cx_n = c\, \text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n$. En efecto, por definición tenemos que:

$$\text{lím}^*_{\mathcal{H}}(x_n) = \text{lím}_{\mathcal{H}} z_n,$$

donde $z_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$. Como $\text{lím}_{\mathcal{H}}$ satisface la propiedad (C), entonces se cumple que:

$$c\, \text{lím}_{\mathcal{H}} z_n = \text{lím}_{\mathcal{H}} c\, z_n.$$

Ahora como $c\, z_n = \frac{c\,x_0+\cdots+c\,x_n}{n+1}$, entonces $\text{lím}_{\mathcal{H}}\, c\, z_n = \text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, cx_n$.

(D) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Queremos ver que $|\,\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n| \leq \sup_n |x_n|$. Sabemos que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}\, x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}}\, z_n$, con $z_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$, luego usando la propiedad (D) del $\text{lím}_{\mathcal{H}}$, obtenemos que:

$$|\,\text{lím}_{\mathcal{H}} z_n| \leq \sup_n |z_n|.$$

Ahora mostraremos que $\sup_n |z_n| \leq \sup_n |x_n|$, notemos que $|z_m| \leq \sup_n |x_n|$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$, es claro que

$$|x_0| + \cdots + |x_m| \leq (m+1) \cdot \sup_{0 \leq n \leq m} |x_n|,$$

por lo tanto:

$$\frac{|x_0| + \cdots + |x_m|}{m+1} \leq \sup_{0\leq n\leq m} |x_n|,$$

Luego por propiedades del valor absoluto se tiene que:

$$|z_m| \leq \frac{|x_0| + \cdots + |x_m|}{m+1} \leq \sup_{0\leq n\leq m} |x_n| \leq \sup_n |x_n|.$$

Esto muestra que $\sup_n |z_n| \leq \sup_n |x_n|$. En conclusión se tiene que:

$$|\operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n| = |\operatorname{lím}_{\mathcal{H}} z_n| \leq \sup_n |z_n| \leq \sup_n |x_n|.$$

(E) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ no negativa. Queremos ver que $\operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n \geq 0$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $r = \operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n < 0$, luego tomando $\varepsilon = |r|/2$ obtenemos que $\mathcal{U}((x_n), r, \varepsilon) = \emptyset$, ya que $z_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debido a que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; pero esto es una contradicción. Por lo tanto $\operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n \geq 0$.

Veamos ahora que $\operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}}$ es invariante por traslación. Notemos que $\operatorname{lím}_n(z_n - z'_n) = 0$, con $z_n = \frac{x_0+\ldots+x_n}{n+1}$ y $z'_n = \frac{y_0+\ldots+y_n}{n+1}$, si $y_n = x_{n+1}$. En efecto,

$$\operatorname{lím}_n(z_n - z'_n) = \operatorname{lím}_n \frac{(x_0 - x_{n+1})}{n+1},$$

como la sucesión es acotada, es decir $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $|x_0 - x_{n+1}| \leq 2M$, así

$$\operatorname{lím}_n \frac{(x_0 - x_{n+1})}{n+1} \leq \operatorname{lím}_n \frac{2M}{n+1} = 0.$$

Así,

$$0 = \operatorname{lím}_{\mathcal{H}}(z_n - z'_n) = \operatorname{lím}_{\mathcal{H}} z_n - \operatorname{lím}_{\mathcal{H}} z'_n.$$

Por lo tanto $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}} z_n = \operatorname{lím}_{\mathcal{H}} z'_n$, es decir, $\operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n = \operatorname{lím}^*_{\mathcal{H}} y_n$.

■

A continuación daremos un ejemplo de un límite generalizado que no tiene la propiedad (F).

Ejemplo 4.8

- *El* $\text{lím}^*_{\mathcal{H}}$ *no tiene la propiedad (F). En efecto, Sea* $(x_n)_n$ *una sucesión acotada dada por:*

$$x_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 2k \quad , \textit{ con } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \textit{si } n = 2k+1 \, , \textit{ con } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notemos que $\text{lím}^*_{\mathcal{H}} x_n = \text{lím}_{\mathcal{H}} z_n$*, con* $z_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$*. Es claro que* $\text{lím}_n z_n = 0$*. Por la propiedad (A) del* $\text{lím}_{\mathcal{H}}$*, se tiene que* $\text{lím}_{\mathcal{H}} z_n = 0$*. Pero* $\{0\} \notin \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *ya que* $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{-1, 1\}$.

♣

El objetivo de lo restante de este capítulo es mostrar la existencia de un ultrafiltro a partir de un límite generalizado, y que el límite generalizado asociado a dicho ultrafiltro cumple con ciertas propiedades.

Definición 4.9 *Sea* $L \in \mathbb{L}$ *que tenga la propiedad (F). Sea* $\mu_L : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ *definida como sigue:*

$$\mu_L(A) = L(\chi_A),$$

donde:

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \in A \\ 0 & \textit{si } n \in A^c. \end{cases}$$

Veamos que μ_L está bien definida. En efecto, como L tiene la propiedad (F) se deduce que $L(\chi_A) \in \overline{\{\chi_A(k) : k \in \mathbb{N}\}}$, esto nos dice automáticamente que $L(\chi_A) \in \{0,1\}$, ya que 0 y 1 son los únicos puntos de acumulación de la sucesión $(\chi_A(k))_k$.

Lema 4.10 μ_L *es una medida finitamente aditiva sobre* $\mathbb{N}$ *a valores en* $\{0,1\}$.

Demostración:

i) Notemos que $\chi_{\mathbb{N}}(k) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\text{lím}_k \chi_{\mathbb{N}}(k) = 1$, luego por la propiedad (A) de L, tenemos que $L(\chi_{\mathbb{N}}) = 1$. Así $\mu_L(\mathbb{N}) = 1$.

ii) Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, disjuntos dos a dos. queremos ver que:

$$\mu_L(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_L(A_i).$$

Sea $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$, mostraremos primero que:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} = \chi_B,$$

en efecto, sea $k \in \mathbb{N}$, notemos que si $\chi_B(k) = 1$, entonces existe un único $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $k \in A_i$ (debido a que los A_n son disjuntos dos a dos). Por lo tanto $\chi_{A_i}(k) = 1$ y $\chi_{A_j}(k) = 0$ para todo $j \neq i$. de esta manera tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(k) = 1 = \chi_B(k).$$

Luego si $\chi_B(k) = 0$, entonces $k \notin A_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Así $\chi_{A_i}(k) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por tal motivo se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(k) = 0 = \chi_B(k).$$

Ahora usando la propiedad (B) de L se tiene que:

$$L(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} L(\chi_{A_i}).$$

En conclusión:

$$\mu_L(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu_L(B) = L(\chi_B) = L(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} L(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_L(A_i).$$

■

Definición 4.11 *Sea $L \in \mathbb{L}$ que tenga la propiedad (F). Sea $\mathcal{H}_L$ definido como sigue:*

$$\mathcal{H}_L = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mu_L(A) = 1\}.$$

El lema (1.13) muestra que $\mathcal{H}_L$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Lo enunciamos como teorema para podernos referir a él.

Teorema 4.12 *$\mathcal{H}_L$ es un ultrafiltro.*

Lema 4.13 *Sea $L \in \mathbb{L}$ que tenga la propiedad (F). Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, se tiene que:*

$$L(\chi_A) = \operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A).$$

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$,

i) Supongamos que $L(\chi_A) = 1$, esto nos dice que $\mu_L(A) = 1$, por lo tanto $A \in \mathcal{H}_L$. Queremos ver que $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A) = 1$, razonemos por el absurdo, supongamos que $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A) = 0$, así $\mathcal{U}((\chi_A), 0, \varepsilon) \in \mathcal{H}_L$ para todo $\varepsilon > 0$. Tomemos $\varepsilon = 1/2$, luego como $\mathcal{H}_L$ es un ultrafiltro se cumple que $A \cap \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2) \in \mathcal{H}_L$.

   Mostraremos que esto último no es posible ya que $A \cap \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2) = \emptyset$. En efecto, supongamos $A \cap \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2) \neq \emptyset$, por lo tanto existen $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \in A$ y $n \in \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2)$, de esto se deduce que $\chi_A(n) = 1$ (porque $n \in A$) y que $\chi_A(n) = 0$ (porque $n \in \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2) \Leftrightarrow |\chi_A(n)| < 1/2$) y esto es una contradicción.

   Por lo tanto, $A \cap \mathcal{U}((\chi_A), 0, 1/2) \notin \mathcal{H}_L$, esta contradicción establece que $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A) = 1$.

ii) Ahora si suponemos que $L(\chi_A) = 0$, entonces obtenemos que $A \notin \mathcal{H}_L$, como $\mathcal{H}_L$ es un ultrafiltro, entonces $A^c \in \mathcal{H}_L$, así $L(\chi_{A^c}) = 1$. Por lo mostrado en i) tenemos que $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_{A^c}) = 1$, Luego $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A) = 0$, ya que $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_{\mathbb{N}}) = \operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_A) + \operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_{A^c})$ y $\operatorname{lím}_{\mathcal{H}_L}(\chi_{\mathbb{N}}) = 1$.

■

Teorema 4.14 *Sea $L \in \mathbb{L}$ que tenga la propiedad (F). Si existe $\mathcal{K}$ ultrafiltro tal que $L = \operatorname{lím}_{\mathcal{K}}$, entonces $\mathcal{H}_L = \mathcal{K}$.*

Demostración:

Sean $A \subseteq \mathbb{N}$, supongamos que $A \in \mathcal{H}_L$, queremos ver que $A \in \mathcal{K}$. Como $A \in \mathcal{H}_L$ tenemos que $\mu_L(A) = 1$, lo que es equivalente a decir que $L(\chi_A) = 1$. Luego por hipótesis tenemos que $\operatorname{lím}_{\mathcal{K}} \chi_A = 1$.

Razonemos por el absurdo, supongamos que $A \notin \mathcal{K}$, como $\lim_{\mathcal{K}} \chi_A = 1$, entonces $\mathcal{U}((\chi_A), 1, \varepsilon) \in \mathcal{K}$ para todo $\varepsilon > 0$. Tomemos $\varepsilon = 1/2$, así tenemos que $\mathcal{U}((\chi_A), 1, 1/2) \in \mathcal{K}$ y $A^c \in \mathcal{K}$, por lo tanto $\mathcal{U}((\chi_A), 1, 1/2) \cap A^c \in \mathcal{K}$, esto nos dice que $\mathcal{U}((\chi_A), 1, 1/2) \cap A^c \notin \emptyset$, por tal motivo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in A^c$ y $n \in \mathcal{U}((\chi_A), 1, 1/2)$, de esto se deduce que $\chi_A(n) = 0$ (porque $n \in A^c$) y que $\chi_A(n) = 1$ (porque $n \in \mathcal{U}((\chi_A), 1, 1/2) \Leftrightarrow |\chi_A(n) - 1| < 1/2$). Esto es una contradicción.

Por lo tanto $A \in \mathcal{K}$. Ahora como $\mathcal{H}_L \subseteq \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es un filtro maximal, entonces $\mathcal{K} = \mathcal{H}_L$.

■

Como un comentario final, note que sólo basta ver que $L\chi_A = \lim_{\mathcal{K}} \chi_A$, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$. Para mostrar que $\mathcal{K} = \mathcal{H}_L$.

No sabemos que todo límite generalizado es de la forma $\lim_{\mathcal{K}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{K}$. El teorema anterior nos dice que si esto fuese así, entonces $\mathcal{K} = \mathcal{H}_L$.

Bibliografía

[1] Kazimierz Kuratowski, Topology, Academic Press, 1968.

[2] Ultrafilters por Péter Komjáth y Vilmos Totik, American Mathematical Monthly 115, 2008, 33-44.

[3] J. Roitman, Introduction to Modern Set Theory, Joth Wiley & Sons, 1990.