Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Grupo de Análisis Funcional

Algunos teoremas del punto fijo para funciones T-Contracciones

Wilmer Eduardo Barrera Yayes

Trabajo especial de grado: Modalidad Seminario-Monografía

Tutor: Prof. José Roberto Morales.

Mérida, febrero de 2010

Índice general

Resúmen

Sean (X, d) un espacio métrico y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones cualesquiera. Queremos hallar condiciones sobre S, T y/o X de forma que S satisfaga alguna condición contractiva cuya desigualdad dependa de T, además, analizar la teoría métrica del punto fijo para esta nueva clase de funciones.

En este trabajo presentaremos varias nociones que nos van a permitir dar alguna respuesta al problema.

Introducción

En 1922, el matemático Polaco Banach probó un teorema que aseguraba las condiciones apropiadas para la existencia y unicidad del punto fijo, su resultado fué llamado el Teorema del Punto Fijo o el Principio de Contracción de Banach (P.C.B). Este teorema provee una teoría para encontrar la solución de una gran variedad de aplicaciones en matemática e ingeniería.

Dado un espacio métrico (X, d), y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones, la pregunta que surge de manera natural es, bajo qué condiciones sobre el espacio X y/o las funciones S, T se puede garantizar la existencia de un punto fijo, dado que S satisfaga alguna condición contractiva cuya desigualdad dependa de T.

Con el objetivo de hacer autocontenido este trabajo y tratar de facilitar su comprensión, el mismo fue dividido en cuatro capítulos de la siguiente manera:

Capítulo 1

En este capítulo, se harán referencia a algunas definiciones y resultados clásicos de la teoría de los espacios métricos.

Capitulo 2

En este capítulo, se estudiarán las nociones básicas de las funciones contracciones es decir, sus definiciones, ejemplos, relaciones y propiedades. De manera análoga se estudiarán las funciones T-contracciones.

Capitulo 3

En este capítulo, se hará un estudio de los resultados clásicos de la teoría métrica del punto fijo del punto fijo.

Capitulo 4

Este capítulo forma parte de la idea central del trabajo, en donde se desarrollarán y analizarán algunos resultados de la teoría métrica del punto fijo para las funciones T-contracciones.

1

Preliminares

En este capítulo se dará un breve resúmen de la teoría de espacios métricos.

Definición 1.1 *Se dice que una métrica en un conjunto $X \neq \emptyset$ es una función* $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ *que cumple con las siguientes propiedades*

d_1.– $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

d_2.– $d(x, y) = d(y, x)$.

d_3.– $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdad triangular),* $\forall\, x, y, z \in X$.

El par (X, d) es llamado un *espacio métrico.*

Ejemplo 1.2 : *Sea $X \neq \emptyset$ y consideremos $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq y \\ 0, & si\ x = y \end{cases}$$

d es una métrica sobre X llamada métrica discreta. El par (X, d) es llamado espacio métrico discreto.

Ejemplo 1.3 : *Sea $X = \mathbb{R}$ y consideremos $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por:*

$$d(x, y) = \mid x - y \mid$$

Usando las propiedades del valor absoluto se demuestra que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$ llamada métrica usual de $\mathbb{R}$, así el par (X, d) es un espacio métrico.

Ejemplo 1.4 : *Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ definida por :*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Usando la desigualdad de Hölder se demuestra que d_p es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto (X, d_p) es un espacio métrico.

Si $p = 1$ entonces $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$, y así $(\mathbb{R}^n, d_1)$ es un espacio métrico.

Si $p = 2$ obtenemos la llamada métrica euclidiana

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y así $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico.

Si $p = \infty$ definimos :

$$d_\infty(x, y) = sup\{\mid x_i - y_i \mid : 1 \leq i \leq n\}$$

y así, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico donde d_∞ es llamada la métrica del supremo.

Definición 1.5 *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a \in X$ y $r > 0$. Entonces:*

i) definimos la bola abierta de centro a y radio $r > 0$ como sigue:

$$A = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Este conjunto lo denotaremos por $B(a, r)$.

ii) definimos la bola cerrada de centro a y radio $r > 0$ como sigue:

$$B = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

Este conjunto lo denotaremos por $B[a, r]$.

Ejemplo 1.6 : *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $d_1 : X \times X \to [0, \infty)$, entonces:*

$$\begin{aligned} B_{d_1}(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d_1(x, a) < r\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - a_i \mid < r \right\}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$ se tiene de la parte anterior :

$$\begin{aligned} B_{d_1}(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : \mid x - a \mid < r\} \\ &= (a - r, a + r). \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos que:

$$B_{d_1}[a, r] = [a - r, a + r].$$

Ejemplo 1.7 : *Sea* $X = \mathbb{R}^2$ *,*$a \in \mathbb{R}^2$*,*$r > 0$ *y* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *la métrica euclidia dada por:*

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} \mid x_i - y_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces tenemos que $B_d(a,r)$ *coincide con el interior del círculo de centro* a *y radio* $r > 0$*.*

Definición 1.8 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Un subconjunto* $U \subseteq X$ *se dice abierto en* X *si para cualquier* $x_0 \in U$ *existe* $r = r(x_0) > 0$ *tal que* $B(x_0, r) \subseteq U$*.*

Propiedades

$A_1.-$ X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos.

$A_2.-$ Sea I un conjunto de índices. Si U_i es abierto $\forall i \in I$ entonces $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un conjunto abierto.

$A_3.-$ Sean U_1 y U_2 conjuntos abiertos, entonces $U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.9 : *Sea* $X = \mathbb{R}$*, y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$*.*

$$B_d(a,r) = (a - r, a + r) \text{ es un conjunto abierto de } X$$

Ejemplo 1.10 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica discreta. Todo subconjunto* $A \subseteq X$ *es abierto.*

Definición 1.11 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Un subconjunto* $F \subseteq X$ *se dice cerrado si su complemento* $U = X \backslash F$ *es abierto en* X*.*

Propiedades

$C_1.-$ X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.

$C_2.-$ Sea I un conjunto de índices. Si U_i es cerrado $\forall i \in I$ entonces $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ es un conjunto cerrado.

$C_3.-$ Sean U_1 y U_2 conjuntos cerrados, entonces $U_1 \cup U_2$ es un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.12 : *Sea* $X = \mathbb{R}$*, y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$*.*

$$B_d[a,r] = [a - r, a + r] \text{ es un conjunto cerrado de } X$$

Ejemplo 1.13 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica discreta. Todo subconjunto* $A \subseteq X$ *es cerrado.*

Definición 1.14 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Diremos que una sucesión* $\{x_n\} \subset X$ *converge a un punto* $a \in X$ *si*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_n, a) < \epsilon \qquad \forall\, n > k.$$

Este hecho lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Ejemplo 1.15 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$*. Consideremos*

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión converge y el valor del límite es 0*.*

Ejemplo 1.16 : *Existen sucesiones que no son convergentes. En efecto sea* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *y consideremos la sucesión*

$$x_n = (-1)^n.$$

Esta sucesión es no convergente.
Una sucesión que no converge se le llama Divergente.

Ejemplo 1.17 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$*.Tomemos* $0 < a < 1$ *y Consideremos*

$$x_n = a^n.$$

El límite de ésta sucesión es 0*.*

Definición 1.18 *Se dice que una sucesión* $\{x_n\}$ *de un espacio métrico* (X, d) *es acotada si existen* $x_0 \in X$ *y* $r > 0$ *tal que* $\{x_n\} \subseteq B(x_0, r)$*.*

Ejemplo 1.19 : *Sea* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*, la sucesión :*

$$x_n = cos(n)$$

pertenece al conjunto $(-1, 1)$*, por lo tanto está acotada.*

Ejemplo 1.20 : *Sea* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*, la sucesión :*

$$x_n = (-1)^n$$

pertenece al conjunto $\{-1, 1\}$*, por lo tanto está acotada.*

Definición 1.21 *Una sucesión* $\{x_n\}$ *de un espacio* (X, d) *se dice monótona creciente (decreciente) si para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$*.*

Ejemplo 1.22 : *Sea* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *y consideremos* $f : \mathbb{R} \to R$ *una función dada por:*

$$f(x) = e^x.$$

Es claro que esta función es monótona creciente por lo tanto, tenemos que la sucesión :

$$x_n = e^n$$

es monótona creciente.

Ejemplo 1.23 : *Consideremos el espacio métrico* $([1, +\infty), |\cdot|)$ *y sea* $f : [1, +\infty) \to R$ *una función dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Es claro que esta función es decreciente en el dominio de definición por lo tanto, la sucesión definida por:

$$x_n = \frac{1}{n}$$

es monótona decreciente.

Definición 1.24 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de un espacio métrico* (X, d).
Sean $r_1, r_2, r_3 \cdots r_k, \cdots$ *con* $r_k, k \in \mathbb{N}$ *tales que* $r_1 < r_2 < r_3 \cdots < r_k < \cdots$. *Entonces se dice que la sucesión* $\{x_{r_k}\}$ *es una subsucesión de* $\{x_n\}$.

Propiedades

S_1.– Si una sucesión es convergente entonces el límite es único.

S_2.– Sea $\{x_n\}$ una sucesión en (X, d). Si $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ entonces toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ converge a x.

S_3.– Toda sucesión convergente es acotada.

S_4.– Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Ejemplo 1.25 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$. *Consideremos la sucesión*

$$x_n = sen\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right).$$

Entonces, las sucesiones:

$$\begin{aligned} x_k &= sen\left(\frac{\pi + 4k\pi}{2}\right) = 1 \\ x_p &= sen\left(\frac{3\pi + 4p\pi}{2}\right) = -1 \qquad \forall\ k, p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$. *Es claro que* $\{x_n\}$ *no converge.*

Ejemplo 1.26 : *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$. *Consideremos la sucesión*

$$x_n = 1 + (-1)^n.$$

Entonces, las sucesiones:

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 1 + (-1)^{2n} = 2 \\ x_{2n+1} &= 1 + (-1)^{2n+1} = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$, *la cual no es convergente.*

Definición 1.27 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión. Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si cumple con la siguiente condición:*

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, k \in \mathbb{N} \;\; \textit{tal que} \;\; \forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\; \textit{con} \;\; n, m > k \quad \textit{se tiene que} \;\; d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Este hecho lo denotaremos por:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Propiedades

ς_1.– Toda sucesión convergente es de Cauchy.

ς_2.– Toda sucesión de Cauchy es acotada.

ς_3.– Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Si $\{x_n\}$ posee una subsucesión que converge a un punto $x_0 \in X$, entonces $\{x_n\}$ converge a x_0.

Ejemplo 1.28 : *Sea $X = \mathbb{R}$ y d la métrica usual de $\mathbb{R}$. Consideremos la sucesión*

$$x_n = n^{\frac{1}{n}}.$$

$\{x_n\}$ converge a 1 por lo tanto esta sucesión es de Cauchy.

Ejemplo 1.29 : *Sea $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y consideremos la sucesión*

$$x_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

Esta sucesión es divergente por lo tanto no es de Cauchy.

Definición 1.30 *Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que (X, d) es un espacio métrico completo si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ de Cauchy se tiene que $\{x_n\}$ converge en X.*

Ejemplo 1.31 : *$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{R}, d_\infty)$ son espacios métricos completos.*

En lo que sigue daremos ejemplos de espacios métricos que no son completos.

Ejemplo 1.32 : *Sea $X = (-1, 1)$ y d la métrica usual. Consideremos la sucesión:*

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Esta sucesión converge al punto $x_0 = 1 \notin (-1, 1)$ por lo tanto, $((-1, 1), |\cdot|)$ no es completo.

Ejemplo 1.33 : *Consideremos en el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ de los números racionales la sucesión dada por:*

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 1{,}4 \\ x_1 & = & 1{,}41 \\ x_2 & = & 1{,}414 \\ x_3 & = & 1{,}4142 \\ x_4 & = & 1{,}41421 \\ \vdots & = & \vdots \end{array} \tag{1.1}$$

de números con una cantidad finita de decimales (que converge en $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Esta sucesión es de Cauchy, por lo tanto $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es un espacio métrico completo.

Lema 1.34 *Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión y $a < 1$ tal que:*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración: En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}).$$

esto implica:

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n+1}, x_n) & \leq & ad(x_n, x_{n-1}) \leq a^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq a^n d(x_{n-(n-1)}, x_{n-(n)}) \\ d(x_{n+1}, x_n) & \leq & a^n d(x_1, x_0). \end{array}$$

Ahora, sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ es decir, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + h$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_{n+h}) & \leq & d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+h-1}, x_{n+h}). \\ & \leq & a^n d(x_0, x_1) + a^{n+1} d(x_0, x_1) + a^{n+2} d(x_0, x_1) + \cdots + a^{n+h-1} d(x_0, x_1). \\ & = & a^n d(x_0, x_1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{h-1}). \\ & = & \dfrac{a^n}{1-a}(1 - a^h) d(x_0, x_1). \\ & < & \dfrac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1) \end{array} \tag{1.2}$$

De (1.2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1) = 0$$

Por lo tanto se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

■

Definición 1.35 *Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Se dice que una colección $C = \{(C_i)_{i\in I}\}$ de conjuntos de X, es un cubrimiento de K, si $K \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$. Es decir, para cada $x \in K$ existe $i \in I$ tal que $x \in C_i$.*

Si $K \subseteq \bigcup_{i\in I^\star} C_i$ con $I^\star \subset I$, entonces se dice que la colección $C^\star = \{C_i : i \in I^\star\}$ es un subcubrimiento de K. Si cada elemento de la colección C es un conjunto abierto, se dice entonces que C es un cubrimiento abierto de K, del mismo modo, se dice que $C^\star$ es un subcubrimiento abierto de K

Definición 1.36 *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que $K \subseteq X$ es un conjunto compacto si todo cubrimiento abierto de $K \subset \bigcup_{i\in I} C_i$ posee un subcubrimiento finito para K, es decir, $K \subseteq C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup C_{i_3} \cdots \cup C_{i_n}$.*

Propiedades

$K_1.-$ Todo conjunto compacto es acotado.

$K_2.-$ Todo conjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

$K_3.-$ Si (X,d) es un espacio compacto entonces X es completo.

$K_4.-$ (X,d) es compacto si, y sólo si toda sucesión de X posee una subsucesión convergente en X.

Ejemplo 1.37 :
Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, entonces todo subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ tal que $K = [a,b]$ es compacto.

Ejemplo 1.38 : *Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos claramente es compacto.*

Ejemplo 1.39 :
Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y sea

$$K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

K es un conjunto es compacto.

Ejemplo 1.40 : *El espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es compacto, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por conjuntos abiertos*

$$\mathcal{C} = \{(-n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

no posee ningún subcubrimiento finito que cubra a $\mathbb{R}$.

Definición 1.41 *Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos y $T : X \to Y$ una función. Entonces T es una función:*

$\tau_1.-$ *Continua en $x_0 \in X$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0, x \in X : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(T(x),T(x_0)) < \epsilon.$$

τ_2.– *Continua en X si T es continua $\forall\, x \in X$.*

Ejemplo 1.42 *i) Toda función constante es continua en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

ii) La función identidad es continua en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

iii) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & si\ x < 0 \\ -1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

F no es continua en $x = 0$, por lo tanto F no es continua en todo $\mathbb{R}$.

Definición 1.43 *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $T : X \to Y$ una función. Se dice que T es uniformemente continua (U.C) si:*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ tal\ que\ \ \forall\, x, y \in X\ \ y\ \ d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(T(x), T(y)) < \epsilon.$$

i) Toda función constante es U.C en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

ii) La función identidad es U.C en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ejemplo 1.44 : *La función $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:$f(x) = \dfrac{1}{x}$, es continua pero no U.C.*

Propiedades
Sean (X, d) , (Y, ρ) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función U.C, entonces:

i) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.

ii) Para cualesquiera par de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en X,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) = 0.$$

iii) Toda función U.C es continua.

iv) Si (X, d) es compacto entonces toda función continua con dominio X es U.C.

Definición 1.45 *Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \to X$ una aplicación. Se dice que $T : X \to X$ es secuencialmente convergente, si para toda sucesión $\{Y_n\} \subseteq X$ tal que $\{T(Y_n)\}$ converge, entonces $\{Y_n\}$ converge.*

Definición 1.46 *Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \to X$ una aplicación. Se dice que $T : X \to X$ es subsecuencialmente convergente, si para toda sucesión $\{Y_n\} \subseteq X$ tal que $\{T(Y_n)\}$ converge, entonces $\{Y_n\}$ posee una subsucesion convergente.*

Observación:
Toda aplicación $T : (X, d) \to (X, d)$, donde (X, d) es un espacio métrico compacto es subsecuencialmente convergente.

Ejemplo 1.47 *Sea* $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ *con* d *la métrica usual de* $\mathbb{R}$*, definamos* $T : X \to X$ *dada por:*

$$T(x) = \begin{cases} x^2, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

i) T *no es una función continua*

ii) $([0, 1], d)$ *es un espacio métrico compacto por lo tanto, de la observación anterior se tiene que* T *es una función subsecuencialmente convergente.*

Ejemplo 1.48 *Sea* $T : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *una función definida por:*

$$T(x) = e^{-x}.$$

Entonces

i) T *es una función continua en* $[0, +\infty)$

ii) T *no es una función subsecuencialmente convergente ya que,* $T(n) = e^{-n} \to 0$ *pero* $(n) \subset [0, +\infty)$ *no posee una subsucesión convergente.*

2

Las funciones contracciones y las T-contracciones

En este capítulo se dará la teoría de las funciones contracciones, es decir, sus definiciones, ejemplos, relaciones y propiedades. De manera análoga, se estudiarán las funciones T-contracciones.

2.0.1. Funciones Contracciones

Definición 2.1 *Sea (X, d) un espacio métrico y $S : X \to X$ una aplicación arbitraria. Entonces:*

C_1.- *Se dice que S es una Contracción de Banach (B-Contracción), si existe $0 \leq a < 1$ constante tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq ad(x, y), \qquad \forall\, x, y \in X. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.2 *Sea $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Definimos $S : X \to X$ dada por:*

$$S(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

entonces:

i) S es una aplicación continua.

ii) S es una B-Contracción, ya que:

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) &= \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mid x - y \mid \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} d(x, y) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} d(x, y). \end{aligned}$$

Así, tomando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene que S es una B-contraccón.

C_2.- *Se dice que S es una aplicación contráctil (E-contracción), si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene:*

$$d(S(x), S(y)) < d(x, y). \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.3 *Sea $X = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica usual y $S : X \to X$ una aplicación definida por:*

$$S(x) = \sqrt{x}.$$

i) S es una aplicación continua en X.

ii) S es una aplicación contráctil, puesto que:

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) = \mid \sqrt{x} - \sqrt{y} \mid &= \frac{\mid \sqrt{x} - \sqrt{y} \mid\mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \mid}{\mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \mid} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \mid x - y \mid \\ &\leq \frac{1}{2} \mid x - y \mid \\ &< d(x, y). \end{aligned}$$

C_3.- *Se dice que S es un Operador de Banach, si existe $h \in (0, 1)$ constante tal que:*

$$d(S(x), S^2(x)) \leq hd(x, S(x)), \qquad \forall\, x \in X. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.4 *Sea $X = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica usual y $S : X \to X$ una aplicación definida por:*

$$S(x) = \frac{x}{2}.$$

i) S es una aplicación continua en X.

ii) S es un operador de Banach, ya que

$$\begin{aligned} d(S(x), S^2(x)) = \left| \frac{x}{2} - \frac{x}{4} \right| &= \frac{1}{2} \left| x - \frac{x}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} d(x, S(x)). \end{aligned}$$

Así, tomando $h = \frac{1}{2}$ se tiene (ii).

Lema ***2.5*** *Toda función contracción de Banach sobre un espacio métrico satisface:*

B-Contracción $\Rightarrow$ E-Contracción $\Rightarrow$ Lipchitz $\Rightarrow$ U.C $\Rightarrow$ Continuidad.

C_4.- *Se dice que S es una aplicación del Tipo Kannan (K-contracción), si existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))], \qquad \forall \; x, y \in X.$$

Ejemplo 2.6 *Sea $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}, & si\ x > 2 \end{cases}$$

i) S no es una función continua en $\mathbb{R}$.

ii) S es una función del tipo Kannan, ya que:
Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

ii_1) Si $x, y \leq 2$

$$d(S(x), S(y)) = 0 \leq b[\mid x \mid + \mid y \mid] = b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))], \qquad b \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

ii_2) Si $x, y > 2$, entonces:

$$d(S(x), S(y)) = 0 \leq b\left[\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{1}{2}\right|\right] = b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))],\ b \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

ii_3) Si $x \leq 2$ y $y > 2$, entonces:

$d(S(x), S(y)) = \mid 0 - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$.
$d(x, S(x)) \; = \mid x \mid \geq 0$.
$d(y, S(y)) = \mid y + \frac{1}{2} \mid \geq \frac{5}{2}$. *Por lo tanto:*

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} \leq \frac{1}{2}[d(x, S(x)) + d(y, S(y))].$$

ii_4) El caso en que $x > 2$ y $y \leq 2$ es análogo al anterior.

Así, para terminar la justificación tomemos $b = \frac{1}{2}$.

Observación:
En este ejemplo es facil chequear que K-contracción no implica continuidad.

C_5.- *Se dice que S es una aplicación del Tipo Chatterjea (C-contracción), si existe $c \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq c[d(x, S(y)) + d(y, S(x))], \qquad \forall \; x, y \in X.$$

Ejemplo 2.7 *Sea $S : [0, 1] \to [0, 1]$ una función dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si\ x = 1 \end{cases}$$

1.- *S es una función discontinua.*

2.- *S es una función C-contracción.*

Observación:
En este ejemplo es facil chequear que C-contracción no implica continuidad.

C_6.- *Se dice que S es un Operador de Zamfirescu ($\mathcal{Z}$-Operador), si existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \in (0,1)$ y $b, c \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $\forall x, y \in X$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones:*

$\mathcal{Z}_1.-$ $d(S(x), S(y)) \leq ad(x,y)$.

$\mathcal{Z}_2.-$ $d(S(x), S(y)) \leq b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))]$.

$\mathcal{Z}_3.-$ $d(S(x), S(y)) \leq c[d(x, S(y)) + d(y, S(x))]$.

Proposición ***2.8*** *Sea (X, d) un espacio métrico y $S : X \to X$ una contracción de Kannan. Entonces S satisface las siguientes propiedades:*

i) *Existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(x,y) + \frac{2b}{1-b} d(x, S(x)). \qquad \forall\, x, y\ \in X$$

y

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(x,y) + \frac{2b}{1-b} d(y, S(y)). \qquad \forall\, x, y\ \in X$$

ii) *Existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(x,y) + \frac{2b}{1-b} d(x, S(y)). \qquad \forall\, x, y\ \in X$$

y

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(x,y) + \frac{2b}{1-b} d(y, S(x)). \qquad \forall\, x, y\ \in X$$

Demostración: *Sean $x, y \in X$. Como S es una contracción de Kannan existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ de modo que S satisface la siguiente desigualdad:*

$$d(S(x), S(y)) \leq b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))].$$

i) *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) &\leq b[d(x, S(x)) + d(y, x) + d(x, S(x)) + d(S(x), S(y))] \\ &\leq 2bd(x, S(x)) + bd(x,y) + bd(S(x), S(y)) \\ (1-b)d(S(x), S(y)) &\leq bd(x,y) + 2bd(x, S(x)) \\ d(S(x), S(y)) &\leq \frac{b}{1-b} d(x,y) + \frac{2b}{1-b} d(x, S(x)). \end{aligned}$$

Nuevamente por desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(S(x),S(y)) &\leq b[d(x,y)+d(y,S(y))+d(S(y),S(x))+d(y,S(y))] \\
&\leq bd(x,y)+2bd(y,S(y))+bd(S(x),S(y)) \\
(1-b)d(S(x),S(y)) &\leq bd(x,y)+2bd(y,S(y)) \\
d(S(x),S(y)) &\leq \frac{b}{1-b}d(x,y)+\frac{2b}{1-b}d(y,S(y)).
\end{aligned}$$

$ii)$ *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned}
d(S(x),S(y)) &\leq b[d(x,S(y))+d(S(y),S(x))+d(y,x)+d(x,S(y))] \\
&\leq bd(x,y)+2d(x,S(y))+bd(S(x),S(y)) \\
(1-b)d(S(x),S(y)) &\leq bd(x,y)+2bd(x,S(y)) \\
d(S(x),S(y)) &\leq \frac{b}{1-b}d(x,y)+\frac{2b}{1-b}d(x,S(y)).
\end{aligned}$$

Nuevamente usando desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(S(x),S(y)) &\leq b[d(x,y)+d(y,S(x))+d(y,S(x))+d(S(x),S(y))] \\
&\leq bd(x,y)+2bd(y,S(x))+bd(S(x),S(y)) \\
(1-b)d(S(x),S(y)) &\leq bd(x,y)+2bd(y,S(x)) \\
d(S(x),S(y)) &\leq \frac{b}{1-b}d(x,y)+\frac{2b}{1-b}d(y,S(x)).
\end{aligned}$$

■

Proposición ***2.9*** *Sea (X,d) un espacio métrico y $S : X \to X$ una contracción de Chatterjea. Entonces S satisface las siguientes propiedades:*

$i)$ *Existe $c \in [0,\frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x),S(y)) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y)+\frac{2c}{1-b}d(x,S(x)). \qquad \forall\, x,y\, \in X$$

y

$$d(S(x),S(y)) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y)+\frac{2c}{1-c}d(y,S(y)). \qquad \forall\, x,y\, \in X$$

$ii)$ *Existe $b \in [0,\frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(S(x),S(y)) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y)+\frac{2c}{1-c}d(x,S(y)). \qquad \forall\, x,y\, \in X$$

y

$$d(S(x),S(y)) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y)+\frac{2c}{1-c}d(y,S(x)). \qquad \forall\, x,y\, \in X$$

Demostración: *Sean $x, y \in X$. Como S es una contracción de Chatterjea existe $c \in [0, \frac{1}{2})$ de modo que se satisface la siguiente desigualdad:*

$$d(S(x), S(y)) \leq c[d(y, S(x)) + d(x, S(y))].$$

i) *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned}
d(S(x), S(y)) &\leq c[d(y,x) + d(x, S(x)) + d(x, S(x)) + d(S(x), S(y))] \\
&\leq cd(x,y) + 2cd(x, S(x)) + cd(S(x), S(y)) \\
(1-c)d(S(x), S(y)) &\leq cd(x,y) + 2cd(x, S(x)) \\
d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(x, S(x)).
\end{aligned}$$

Nuevamente por desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(S(x), S(y)) &\leq c[d(x,y) + d(y, S(y)) + d(y, S(y)) + d(S(y), S(x))] \\
&\leq cd(x,y) + 2cd(y, S(y)) + cd(S(x), S(y)) \\
(1-c)d(S(x), S(y)) &\leq cd(x,y) + 2cd(y, S(y)) \\
d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(y, S(y)).
\end{aligned}$$

ii) *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned}
d(S(x), S(y)) &\leq c[d(x, S(y)) + d(y,x) + d(x, S(y)) + d(S(y), S(x))] \\
&\leq cd(x,y) + 2cd(x, S(y)) + cd(S(x), S(y)) \\
(1-c)d(S(x), S(y)) &\leq cd(x,y) + 2cd(x, S(y)) \\
d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(x, S(y)).
\end{aligned}$$

Nuevamente usando desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(S(x), S(y)) &\leq c[d(x,y) + d(y, S(x)) + d(S(x), S(y)) + d(y, S(x))] \\
&\leq cd(x,y) + 2cd(y, S(x)) + cd(S(x), S(y)) \\
(1-c)d(S(x), S(y)) &\leq cd(x,y) + 2cd(y, S(x)) \\
d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(y, S(x)).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposición ***2.10*** *Sea (X, d) un espacio métrico y $S : X \to X$ un operador de Zamfirescu. Entonces existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $\forall\, x, y \in X$ se cumple:*

i) $d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(x, S(x))$.

ii) $d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(y, S(y))$.

iii) $d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(x, S(y))$.

iv) $d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(y, S(x))$.

Demostración: *Sean $x, y \in X$. Entonces:*

i) *Si S satisface las condiciones $\mathcal{Z}_2$ y $\mathcal{Z}_3$, usando las proposiciones (2.8)(i) y (2.9)(i) se cumplen respectivamente las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) &\leq \frac{b}{1-b} d(x, y) + \frac{2b}{1-b} d(x, S(x)). \\ d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c} d(x, y) + \frac{2c}{1-c} d(x, S(x)). \end{aligned}$$

Además, si se satisface $\mathcal{Z}_1$ entonces tomando $\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$ se tiene que $\delta \in (0, 1)$ y

$$d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(x, S(x)).$$

ii) *Esta demostración es análoga a (i).*

iii) *Si S satisface las condiciones $\mathcal{Z}_2$ y $\mathcal{Z}_3$, usando las proposiciones (2.8)(ii) y (2.9)(ii) se cumplen respectivamente las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) &\leq \frac{b}{1-b} d(x, y) + \frac{2b}{1-b} d(x, S(y)). \\ d(S(x), S(y)) &\leq \frac{c}{1-c} d(x, y) + \frac{2c}{1-c} d(x, S(y)). \end{aligned}$$

Además, si se satisface $\mathcal{Z}_1$ entonces tomando $\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$ se tiene que $\delta \in (0, 1)$ y

$$d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(x, S(y)).$$

vi) *Esta demostración es análoga a (iii).*

■

C_7.- *Se dice que S es una aplicación Contracción débil o (δ, L)-Operador, si existe $\delta \in (0, 1)$ y algún $L \geq 0$ tal que:*

$$d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, S(x)), \quad \forall\, x, y \in X$$

2.1. Relaciones entre las funciones contracciones

$\mathcal{A}$.- *Para toda B-contracción S se tiene que:*

$\mathcal{A}_1$.- *S es una aplicación E-contráctil, ya que para $x, y \in X$ con $x \neq y$, se cumple para algún $0 \leq a < 1$:*

$$d(S(x), S(y)) \leq ad(x, y) < d(x, y).$$

$\mathcal{A}_2$.- *S es un operador de Banach, y se verifica tomando $y = S(x)$, para todo $x \in X$ es decir:*

$$d(S(x), S(y)) = d(S(x), S^2(x)) \leq ad(x, S(x)).$$

De $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ se tiene:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \Rightarrow & C_2 \\ \Downarrow & & \\ C_3 & & \end{array}$$

$\mathcal{A}_3$.- *S no necesariamente es una K-contracción ya que la función $S : [-1, 1] \to [-1, 1]$ dada por:*

$$S(x) = \frac{x}{2}. \tag{2.4}$$

Es una B-contracción y se demuestra para $x \in [-1, 1]$ y $y = -x$ que S no es una K-contracción.

$\mathcal{A}_4$.- *S no es una C-contracción ya que la función $S : [-1, 1] \to [-1, 1]$ dada por:*

$$S(x) = -\frac{x}{2}$$

Es una B-contracción y se demuestra para $x = -1$ y $y = 1$ que S no es una C-contracción.

De $\mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ se tiene:

$$C_1 \not\Rightarrow C_4 \quad y \quad C_1 \not\Rightarrow C_5$$

$\mathcal{A}_5$.- *S es un operador de Zamfirescu ya que, cumple con $\mathcal{Z}_1$.*

$\mathcal{A}_6$.- *S es un (δ, L)-Operador, tomando $\delta = a$ y $L = 0$.*

De $\mathcal{A}_5$ y $\mathcal{A}_6$ se tiene:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \Rightarrow & C_6 \\ \Downarrow & & \\ C_7 & & \end{array}$$

$\mathcal{B}$.- *Para toda función Contráctil S se tiene que:*

$\mathcal{B}_1$.- *S no necesariamente es una B-contracción pues:*

Sea $X = [1, +\infty)$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Definamos $S : X \to X$ dada por:

$$S(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$\mathcal{B}_{1_1}$.- *S es una función continua en X.*

$\mathcal{B}_{1_2}$.- *S es una aplicación E-contráctil, ya que:*

$$\begin{aligned} d(S(x),S(y)) &= \left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right| \\ &= \left|x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \\ &= \left|x-y-\frac{x-y}{xy}\right| \\ &= \left|(x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)\right| \\ &= \mid x-y \mid \left|1-\frac{1}{xy}\right|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Afirmación:

$$\left|1-\frac{1}{xy}\right|<1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & x,y \geq 1 \\ \Rightarrow\ & 0<\frac{1}{xy}\leq 1 \\ \Rightarrow\ & 0>-\frac{1}{xy}\geq -1 \\ \Rightarrow\ & 1>1-\frac{1}{xy}\geq 0 \\ \Rightarrow\ & \left|1-\frac{1}{xy}\right|<1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

así, de (2.5) *y* (2.6) *se obtiene:*

$$\mid x-y \mid \left|1-\frac{1}{xy}\right|<d(x,y)$$

por lo tanto

$$d(S(x),S(y))<d(x,y).$$

Nota:

$\lim\limits_{x,y\to\infty}\left|1-\dfrac{1}{xy}\right|=1$, *entonces para todo* $a<1$ *existen* $x_0,y_0\ \in X$ *tal que* $\left|1-\frac{1}{x_0y_0}\right|>a$.

$\mathcal{B}_{1_3}$.- *S no es una contracción de Banach ya que:*
Si S es una contracción de Banach, existe $a < 1$ tal que para todo $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \mid x-y \mid \left|1-\frac{1}{xy}\right| &\leq a \mid x-y \mid \\ \left|1-\frac{1}{xy}\right| &\leq a \end{aligned}$$

Esta última desigualdad contradice la nota anterior, por lo tanto :

$$C_2 \nRightarrow C_1.$$

$\mathcal{B}_3$.- *S no necesariamente es una K-contracción ya que, la función $S(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in [-1, 1]$, verifica la condición de B-contracción y por $(\mathcal{A}_1)$ es contráctil, ahora por $(\mathcal{A}_3)$ S no es K-contracción.*

$\mathcal{B}_4$.- *S no necesariamente es una C-contracción ya que, la función $S(x) = -\frac{x}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ es B-contracción y por $(\mathcal{A}_1)$ es contractil, luego por $(\mathcal{A}_4)$ S no es C-contracción.*

De $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ se tiene que:

$$C_2 \nRightarrow C_4 \quad y \quad C_2 \nRightarrow C_5.$$

Consideramos interesante plantearnos las siguientes interrogantes:

$\mathcal{B}_2$.- *¿Será cierto que toda aplicación contráctil es un operador de Banach?*

$\mathcal{B}_5$.- *¿Será cierto que toda aplicación contráctil es un operador de Zamfirescu?*

$\mathcal{B}_6$.- *¿Será cierto que toda aplicación contráctil es un (δ, L)-Operador?*

$\mathcal{C}$.- *Para todo operador de Banach S se cumple que:*

$\mathcal{C}_1$.- *S no es una B-contracción. ya que para $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 2 \\ -1, & si\ x > 2 \end{cases}$$

Se tiene:

$\mathcal{C}_{1_1}$.- *S no es una función continua en X.*

$\mathcal{C}_{1_2}$.- *S es un operador de Banach, ya que:*

$$\begin{aligned} x \leq 2 \quad &\Rightarrow \quad d(S(x), S^2(x)) = 0 \leq \mid x \mid = d(x, S(x)). \\ x > 2 \quad &\Rightarrow \quad d(S(x), S^2(x)) = 1 < \frac{1}{3}\,|x+1| = \frac{1}{3} d(x, S(x)). \end{aligned}$$

Así, tomando $h = \frac{1}{3}$ se tiene que S es un operador de Banach.

$\mathcal{C}_{1_3}$.- *S no es una B-contracción ya que, S no es una aplicación continua.*

$\mathcal{C}_2$.- *Por la parte $(\mathcal{C}_1)$ se tiene que S no necesariamente es contráctil.*

De las partes inmediatas anteriores se tiene que:

$$C_3 \nRightarrow C_1 \quad y \quad C_3 \nRightarrow C_2.$$

$\mathcal{C}_3$.- *S no necesariamente es K-contracción ya que la función* $S(x) = \dfrac{x}{2}$ $\forall\, x \in [-1,1]$ *es una B-contracción, luego por la parte* $(\mathcal{A}_2)$ *S es un operador de Banach y por* $(\mathcal{B}_3)$ *no es una K-contracción.*

$\mathcal{C}_4$.- *S no necesariamente verifica la definición de C-contracción ya que la función* $S(x) = -\dfrac{x}{2}$ $\forall\, x \in [-1,1]$ *es una B-contracción y por lo tanto un operador de Banach pero por* $(\mathcal{A}_4)$ *no es C-contracción.*

De las partes inmediatas anteriores se tiene que:

$$C_3 \nRightarrow C_4 \quad y \quad C_3 \nRightarrow C_5.$$

$\mathcal{C}_5$.- *S no necesariamente es un* $\mathcal{Z}$*-operador ya que para la función* $S : [0,1] \to [0,1]$ *dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5}, & si\ \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

$\mathcal{C}_{5_1}$.- *S es un operador de Banach.*

$\mathcal{C}_{5_2}$.- *S es una función discontinua por lo tanto, no es B-contracción.*

$\mathcal{C}_{5_3}$.- *S no es una K-contracción y se verifica tomando* $x = 0$ *y* $y = 1$.

$\mathcal{C}_{5_4}$.- *S no es una C-contracción y se verifica tomando* $x = \frac{1}{2}$ *y* $y = \frac{1000}{1999}$.

De las partes anteriores se tiene que:

$$C_3 \nRightarrow C_6.$$

Consideramos interesante plantearnos la siguiente interrogante:

$\mathcal{C}_6$.- *¿Será cierto que un operador de Banach es un* (δ, L)*- Operador?*

$\mathcal{D}$.- *Para toda función K-contracción se tiene que:*

$\mathcal{D}_1$.- *S no necesariamente es una B-contracción y se verifica en el ejemplo (2.6), en el cual la función es K-contracción pero discontinua.*

$\mathcal{D}_2$.- *S no necesariamente es contráctil y se verifica en* $(\mathcal{D}_1)$.

De $\mathcal{D}_1$ *y* $\mathcal{D}_2$ *se tiene que:*

$$C_4 \nRightarrow C_1 \quad y \quad C_4 \nRightarrow C_2.$$

$\mathcal{D}_3$.- *S es un operador de Banach y se verifica tomando* $y = S(x)$ *en la definición de K-contracción. es decir:*

$$C_4 \Rightarrow C_3.$$

$\mathcal{D}_4$.- *S no necesariamente es una C-contracción ya que la función* $S(x) = -\frac{x}{2}$ $\forall\, x \in [-1, 1]$ *verifica la condición de Kannan y se demuestra para* $c = \frac{5}{12}$, $y = 1$ *y* $x = -1$ *que S no es de Charttejea, es decir:*

$$C_4 \nRightarrow C_5.$$

$\mathcal{D}_5$.- *Es claro que toda aplicación de Kannan es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{D}_6$.- *S es un* (δ, L)*-Operador y se verifica por la proposición* (2.8).

$\mathcal{E}$.- *Para toda aplicación de Chatterjea S se tiene que:*

$\mathcal{E}_1$.- *S no necesariamente es una B-contracción ya que para* $S : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si\ x = 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

$\mathcal{E}_{1_1}$.- *S no es continua.*

$\mathcal{E}_{1_2}$.- *S es una C-contracción.*

$\mathcal{E}_{1_3}$.- *Por* $(\mathcal{E}_{1_1})$ *S no es una B-contracción.*

$\mathcal{E}_2$.- *Por la parte* $(\mathcal{E}_{1_1})$ *se tiene que S no necesariamente es contráctil.*

De $\mathcal{E}_1$ *y* $\mathcal{E}_2$ *tenemos:*

$$C_5 \nRightarrow C_1 \quad y \quad C_5 \nRightarrow C_2.$$

Consideramos interesante plantearnos la siguiente interrogante:

$\mathcal{E}_3$.- *¿Será cierto que una C-contracción es un operador de Banach?*

$\mathcal{E}_4$.- *S no necesariamente es K-contracción y se verifica en la parte* $(\mathcal{E}_1)$ *tomando* $x \in (0, 1)$ *y* $y = 0$*, es decir:*

$$C_5 \nRightarrow C_4.$$

$\mathcal{E}_5$.- *Es claro que S es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{E}_6$.- *S es un* (δ, L)*-Operador y se verifica usando la proposición* (2.9).

$\mathcal{F}$.- *Para todo operador de Zamfirescu se tiene que:*

$\mathcal{F}_1$.- *S no necesariamente es una B-contracción ya que para la función* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}, & si\ x > 2 \end{cases}$$

Se tiene:

$\mathcal{F}_{1_1}$.- *S es de Kannan.*

$\mathcal{F}_{1_2}$.- *De* $(\mathcal{F}_{1_1})$ *y* $(\mathcal{D}_5)$ *se concluye que S es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{F}_{1_3}$.- *S no es una B-contracción ya que, es discontinua.*

$\mathcal{F}_2$.- *S no necesariamente es contráctil y se verifica con la justificación en* $(\mathcal{F}_1)$.

De $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *tenemos que:*

$$C_6 \nRightarrow C_1 \quad y \quad C_6 \nRightarrow C_2.$$

$\mathcal{F}_3$.- *S es un operador de Banach y la justificación esta más adelante. (en* $\mathcal{G}_3$*).*

$\mathcal{F}_4$.- *S no necesariamente es una K-contracción ya que, para la función* $S:[0,1]\to[0,1]$ *dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si\ x = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{F}_{4_1}$.- *De* $(\mathcal{E}_1)$ *S es una C-contracción.*

$\mathcal{F}_{4_2}$.- *De* $(\mathcal{E}_6)$ *S es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{F}_{4_3}$.- *De* $(\mathcal{E}_4)$ *S no es K-contracción.*

$\mathcal{F}_5$.- *S no necesariamente es una C-contracción ya que existe una función (dada en* $\mathcal{D}_4$*) la cual es una K-contraccón (por lo tanto es* $\mathcal{Z}$*-Operador) pero no satisface la condición de Chatterjea.*

De $\mathcal{F}_4$ *y* $\mathcal{F}_5$ *tenemos:*

$$C_6 \nRightarrow C_4 \quad y \quad C_6 \nRightarrow C_5.$$

$\mathcal{F}_6$.- *S es un* (δ, L)*-Operador y se verifica usando la proposición* (2.10).

$\mathcal{G}$.- *Para todo* (δ, L)*-Operador se cumple que:*

$\mathcal{G}_1$.- *S no necesariamente es una B-contracción ya que para* $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por:*

$$S(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}, & si\ x = 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

$\mathcal{G}_{1_1}$.- *S no es continua.*

$\mathcal{G}_{1_2}$.- *S es de Kannan.*

$\mathcal{G}_{1_3}$.- *Por la parte* $(\mathcal{D}_5)$ *S es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{G}_{1_4}$.- *Por la parte* $(\mathcal{F}_6)$ *S es un* (δ, L)*-Operador y por* $(\mathcal{G}_{1_1})$ *no es B-contracción.*

$\mathcal{G}_2$.- *S no necesariamente es contráctil y se verifica en la parte* $(\mathcal{G}_1)$.

De $\mathcal{G}_1$ *y* $\mathcal{G}_2$ *tenemos:*

$$C_7 \nRightarrow C_1 \quad y \quad C_7 \nRightarrow C_2.$$

$\mathcal{G}_3$.- *S es un operador de Banach y se verifica tomando* $y = S(x)$ *en la definición dada en* C_7.

$\mathcal{G}_4$.- *S no necesariamente es una K-contracción puesto que para la función dada en* $(\mathcal{E}_1)$ *se tiene que:*

$\mathcal{G}_{4_1}$.- *S es de Chatterjea.*

$\mathcal{G}_{4_2}$.- *Por* $(\mathcal{E}_5)$, *S es un* $\mathcal{Z}$*-Operador.*

$\mathcal{G}_{4_3}$.- *Por* $(\mathcal{F}_6)$, *S es un* (δ, L)*-Operador.*

$\mathcal{G}_{4_4}$.- *Por* $(\mathcal{E}_4)$, *S no es de Kannan.*

$\mathcal{G}_5$.- *S no nesariamente es una C-contracción ya que para la función dada en* $(\mathcal{D}_4)$ *se tiene:*

$\mathcal{G}_{5_1}$.- *S es una función de Kannan.*

$\mathcal{G}_{5_2}$.- *De* $(\mathcal{D}_6)$, *S es* (δ, L)*- Operador.*

$\mathcal{G}_{5_3}$.- *De* $(\mathcal{D}_4)$, *S no es C-contracción.*

De $\mathcal{G}_4$ *y* $\mathcal{G}_5$ *tenemos que:*

$$C_7 \not\Rightarrow C_4 \quad y \quad C_7 \not\Rightarrow C_5.$$

Consideramos interesante plantearnos la siguiente interrogante:

$\mathcal{G}_6$.- *¿Será cierto que todo* (δ, L)*-Operador es un* $\mathcal{Z}$*- Operador?*

2.1.1. Funciones T-Contracciones

En el 2009, A. Beiranvand, S. Moradi, M.Omid, H.Pazandeh, introdujeron una nueva clase de funciones contractivas $\mathcal{C}_1^T$ y $\mathcal{C}_2^T$. De manera análoga J.Morales introdujo $\mathcal{C}_3^T$.

Definición 2.11 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $S : X \to X$ *una aplicación arbitraria. Entonces:*

$\mathcal{C}_1^T$.- *Se dice que aplicación S es una T-Contracción de Banach (TB-Contracción), si existe* $0 \leq \alpha < 1$ *constante tal que:*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \alpha d(T(x), T(y)), \qquad \forall\, x, y \in X. \tag{2.7}$$

$\mathcal{C}_2^T$.- *Se dice que S es una aplicación T-contráctil (TE-contracción), si para todo* $T(x) \neq T(y) \in X$

$$d(TS(x), TS(y)) < d(T(x), T(y)). \tag{2.8}$$

$\mathcal{C}_3^T$.- *Se dice que S es un T-Operador de Banach si existe* $h \in (0, 1)$ *constante tal que:*

$$d(TS(x), TS^2(x)) \leq hd(T(x), TS(x)), \qquad \forall\, x \in X. \tag{2.9}$$

Observación: *Es claro que si tomamos* $T(x) = x \quad \forall\, x \in X$ *en las desigualdades* (2.7),(2.8) *y* (2.9) *obtenemos* (2.1),(2.2) *y* (2.3) *respectivamente.*

Ejemplo 2.12 : *Sea* $X = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, *con la métrica inducida por* $\mathbb{R}$ *y* $T, S : X \to X$ *dos aplicaciónes definidas por:*

$$T(x) = \ln(x) + 1 \qquad y \qquad S(x) = 2\sqrt{x}.$$

i) S y T son funciones continuas en X.

ii) S no es una B-Contracción, ya que:

$$
\begin{aligned}
d(S(x),S(y)) = \mid 2\sqrt{x}-2\sqrt{y}\mid &= 2\frac{\mid \sqrt{x}-\sqrt{y}\mid\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\mid}{\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\mid} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mid x-y\mid \\
&\leq \mid x-y\mid \\
&= d(x,y).
\end{aligned}
$$

iii) S es TB-contracción, puesto que:

$$
\begin{aligned}
d(TS(x),TS(y)) &= \mid \ln(2\sqrt{x})+1-\ln(2\sqrt{y})-1\mid \\
&= \left|\ln(2)+\frac{\ln(x)}{2}+1-\ln(2)+\frac{\ln(y)}{2}-1\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\ln(x)+1-\ln(y)-1\right| \\
&= \frac{1}{2}d(T(x),T(y)).
\end{aligned}
$$

En este ejemplo observamos que no necesariamente S es una B-Contracción.

Ejemplo 2.13 : *Sea $X=[0,3]\subseteq\mathbb{R}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ y $T,S:X\to X$ dos aplicaciones definidas por:*

$$
T(x)=x^2 \qquad y \qquad S(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}.
$$

i) S y T son funciones continuas en X.

ii) S no es una aplicación contráctil, ya que para $x,y\in X$ tal que $x=\frac{2}{\sqrt{2}}$ y $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ tenemos:

$$
d(S(x),S(y)) = \left|\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}}-\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{2\sqrt{2}}. \tag{2.10}
$$

$$
d(x,y) = \left|\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.11}
$$

Así, de (2.10) y (2.11) tenemos que $d(S(x),S(y))>d(x,y)$.

iii) S es una aplicación T-Contráctil, ya que:

$$
\begin{aligned}
d(TS(x),TS(y)) &= \left|\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}|x^2-y^2| \\
&< |x^2-y^2| \\
&= d(Tx,Ty).
\end{aligned}
$$

Esta última desigualdad demuestra lo que se quiere.

En este ejemplo es claro que no necesariamente S debe ser contráctil para que S sea TE-contracción.

Ejemplo 2.14 : *Sea $X = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ y $T, S : X \to X$ dos aplicaciones definidas por:*

$$T(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad y \qquad S(x) = 2x.$$

i) *S y T son funciones continuas en X.*

ii) *S no es un operador de Banach, puesto que:*

$$d(S(x), S^2(x)) = \mid 2x - 4x \mid = 2 \mid x \mid > \mid x \mid = d(x, S(x)).$$

iii) *S es un T-operador de Banach, ya que:*

$$\begin{aligned} d(TS(x), TS^2(x)) = \left|\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \left(1+\frac{1}{4x}\right)\right| &= \frac{1}{2}\left|\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} \mid T(x) - TS(x) \mid \\ &\leq \frac{1}{2} d(T(x), TS(x)). \end{aligned}$$

A continuación de manera análoga tenemos las siguientes definiciones:

$\mathcal{C}_4^T$.- *Se dice que S es una T-contracción de Kannan (TK-contracción), si existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq b[d(T(x), TS(x)) + d(T(y), TS(y))], \qquad \forall\, x, y \in X. \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.15 *Sea $X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ y $T, S : X \to X$ dos aplicaciones definidas por:*

$$T(x) = x^2 \qquad y \qquad S(x) = \frac{x}{2}.$$

Entonces:

i) *S y T son funciones continuas.*

ii) *S no satisface la condición de K-Contracción y se verifica en (2.4).*

iii) *S es una T Contracción de Kannan ya que:*
Sean $x, y \in X$ y mostremos:

$$d(TS(x), TS(y)) \leq b[d(Tx, TS(x)) + d(Ty, TS(y))].$$

En efecto,

$$\begin{aligned} d(TS(x), TS(y)) &= \left|\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right| \\ &= \frac{1}{4}|x^2 - y^2| \\ &\leq \frac{1}{3}\frac{3}{4}[|x^2| + |y^2|] \\ &= \frac{1}{3}\left[\left|x^2 - \frac{x^2}{4}\right| + \left|y^2 - \frac{y^2}{4}\right|\right] \\ d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{1}{3}[d(Tx, TS(x)) + d(Ty, TSy)]. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad demuestra lo que se quiere.

$\mathcal{C}_5^T$.- *Se dice que S es una T-contracción de Chatterjea (TC-contracción), si existe $c \in [0, \frac{1}{2})$ tal que:*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq c[d(T(x), TS(y)) + d(T(y), TS(x))], \qquad \forall\, x, y \in X. \tag{2.13}$$

$\mathcal{C}_6^T$.- *Se dice que S es un T-Operador de Zamfirescu ($T\mathcal{Z}$-Operador) si existen $a \in [0, 1)$ $b \in [0, \frac{1}{2})$ y $c \in [0, \frac{1}{2})$ tal que $\forall\, x, y \in X$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones:*

$T\mathcal{Z}_1$.- $d(TS(x), TS(y)) \leq ad(T(x), T(y))$.

$T\mathcal{Z}_2$.- $d(TS(x), TS(y)) \leq b[d(T(x), TS(x)) + d(T(y), TS(y))]$.

$T\mathcal{Z}_3$.- $d(TS(x), TS(y)) \leq c[d(T(x), TS(y)) + d(T(y), TS(x))]$.

En las siguientes proposiciones se refleja una propiedad que cumplen las aplicaciones de T-Kannan, T-Chatterjea y T-Zamfirescu, respectivamente.

Proposición *2.16* *Sean (X, d) un espacio métrico y $S, T : X \to X$ dos funciones tales que, S sea una T Contracción de Kannan. Entonces TS satisface las siguientes propiedades:*

i) *Existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b} d(T(x), TS(x)). \qquad \forall\, x, y \in X$$

y

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b} d(T(y), TS(y)). \qquad \forall\, x, y \in X$$

ii) *Existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b} d(T(x), TS(y)). \qquad \forall\, x, y \in X$$

y

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \frac{b}{1-b} d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b} d(T(y), TS(x)). \qquad \forall\, x, y \in X$$

Demostración: *Sean $x, y \in X$. Como S es una T Contracción de Kannan, existe $b \in [0, \frac{1}{2})$ tal que TS satisface la siguiente desigualdad:*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq b[d(T(x), TS(x)) + d(T(y), TS(y))].$$

i) *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned}
d(TS(x), TS(y)) &\leq b[d(T(x), TS(x)) + d(T(y), T(x)) + d(T(x), TS(x)) + \\
&\quad\; d(TS(x), TS(y))] \\
&\leq 2bd(Tx, TS(x)) + bd(T(x), T(y)) + bd(TS(x), TS(y)) \\
(1-b)d(TS(x), TS(y)) &\leq bd(T(x), T(y)) + 2bd(T(x), TS(x)) \\
d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{b}{1-b} d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b} d(T(x), TS(x)).
\end{aligned}$$

Nuevamente por desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(TS(x),TS(y)) &\le b[d(T(x),T(y))+d(T(y),TS(y))+d(TS(y),TS(x))+\\
&\quad d(T(y),TS(y))]\\
&\le bd(T(x),T(y))+2bd(T(y),TS(y))+bd(TS(x),TS(y))\\
(1-b)d(TS(x),TS(y)) &\le bd(T(x),T(y))+2bd(T(y),TS(y))\\
d(TS(x),TS(y)) &\le \frac{b}{1-b}d(T(x),T(y))+\frac{2b}{1-b}d(T(y),TS(y)).
\end{aligned}$$

ii) *Usando desigualdad triangular se tiene:*

$$\begin{aligned}
d(TS(x),TS(y)) &\le b[d(T(x),TS(y))+d(TS(y),TS(x))+d(T(y),T(x))+\\
&\quad d(Tx,TS(y))]\\
&\le bd(T(x),T(y))+2d(T(x),TS(y))+bd(TS(x),TS(y))\\
(1-b)d(TS(x),TS(y)) &\le bd(T(x),T(y))+2bd(T(x),TS(y))\\
d(TS(x),TS(y)) &\le \frac{b}{1-b}d(T(x),T(y))+\frac{2b}{1-b}d(T(x),TS(y)).
\end{aligned}$$

Nuevamente usando desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
d(TS(x),TS(y)) &\le b[d(T(x),T(y))+d(T(y),TS(x))+d(T(y),TS(x))+\\
&\quad d(TS(x),TS(y))]\\
&\le bd(T(x),T(y))+2bd(T(y),TS(x))+bd(TS(x),TS(y))\\
(1-b)d(TS(x),TS(y)) &\le bd(T(x),T(y))+2bd(T(y),TS(x))\\
d(TS(x),TS(y)) &\le \frac{b}{1-b}d(T(x),T(y))+\frac{2b}{1-b}d(T(y),TS(x)).
\end{aligned}$$

Este resultado generaliza la proposición (2.8)*, al considerar* $T(x)=x$. ■

Proposición ***2.17*** *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $S,T:X\to X$ *dos funciones tales que,* S *sea una* T *Contracción de Chatterjea. Entonces* TS *satisface las siguientes propiedades:*

i) *Existe* $c\in[0,\frac{1}{2})$ *tal que:*

$$d(TS(x),TS(y))\le\frac{c}{1-c}d(T(x),T(y))+\frac{2c}{1-b}d(T(x),TS(x)).\qquad\forall\ x,y\ \in X$$

y

$$d(TS(x),TS(y))\le\frac{c}{1-c}d(T(x),T(y))+\frac{2c}{1-c}d(T(y),TS(y)).\qquad\forall\ x,y\ \in X$$

ii) *Existe* $b\in[0,\frac{1}{2})$ *tal que:*

$$d(TS(x),TS(y))\le\frac{c}{1-c}d(T(x),T(y))+\frac{2c}{1-c}d(T(x),TS(y)).\qquad\forall\ x,y\ \in X$$

y

$$d(TS(x),TS(y))\le\frac{c}{1-c}d(T(x),T(y))+\frac{2c}{1-c}d(T(y),TS(x)).\qquad\forall\ x,y\ \in X$$

Demostración: *La demostración es análoga a la que se dió en la proposición* (2.16)*.*

Proposición ***2.18*** *Sean (X, d) un espacio métrico y $S, T : X \to X$ dos funciones tales que, S sea un T Operador de Zamfirescu. Entonces existe $\delta \in (0, 1)$ tal que TS satisface lo siguiente $\forall\, x, y \in X$:*

i) $d(TS(x)TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(x))$.

ii) $d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(y), TS(y))$.

iii) $d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(y))$.

iv) $d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(y), TS(x))$.

Demostración: *Sean $x, y \in X$. Entonces*

i) *Si S satisface las condiciones $T\mathcal{Z}_2$ y $T\mathcal{Z}_3$, usando las proposiciones* (2.16)(*i*) *y* (2.17)(*i*) *se cumplen respectivamente las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{b}{1-b}d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b}d(T(x), TS(x)) \\ d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(T(x), T(y)) + \frac{2c}{1-c}d(T(x), TS(x)). \end{aligned}$$

Además, si se satisface $T\mathcal{Z}_1$ entonces tomando $\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$ se tiene que $\delta \in (0, 1)$ y

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(x)).$$

ii) *Esta demostración es análoga a* (*i*)*.*

iii) *Si S satisface las condiciones $T\mathcal{Z}_2$ y $T\mathcal{Z}_3$, usando las proposiciones* (2.16)(*ii*) *y* (2.17)(*ii*) *se cumplen respectivamente las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{b}{1-b}d(T(x), T(y)) + \frac{2b}{1-b}d(T(x), TS(y)) \\ d(TS(x), TS(y)) &\leq \frac{c}{1-c}d(T(x), T(y)) + \frac{2c}{1-c}d(T(x), TS(y)). \end{aligned}$$

Además, si se satisface $T\mathcal{Z}_1$ entonces tomando $\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$ se tiene que $\delta \in (0, 1)$ y

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(y)).$$

vi) *Esta demostración es análoga a* (*iii*)*.*

■

$\mathcal{C}_7^T$.- *Se dice que S es una T-Contracción débil (T- (δ, L) Contracción), si existe $\delta \in (0, 1)$ y algún $L \geq 0$ tal que:*

$$d(TS(x), TS(y)) \leq \delta d(T(x), T(y)) + Ld(T(y), TS(x)), \quad \forall\, x, y \in X. \tag{2.14}$$

Ejemplo 2.19 *Sea $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ y $T, S : X \to X$ dos aplicaciones definidas por:*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si\ x = 1 \end{cases} \qquad T(x) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2}, & si\ x = 1 \end{cases}$$

i) *S y T no son funciones continuas.*

ii) $TS(x) = 0\ \ \forall\, x \in [0,1]$.

iii) *Por la parte anterior se tiene que S satisface todas las definiciones de T-Contracciones que conocemos.*

Este ejemplo muestra que las condiciones de T-Contracciones no implican la continuidad de S y T.

2.2. Algunas relaciones entre las funciones T-Contracciones

$\mathcal{A}$.− Para toda TB-Contraccion S se tiene que:

$\mathcal{A}_1$.− S es una aplicación T-contráctil, ya que para $x, y \in X$ con $T(x) \neq T(y)$, existe $0 \leq a < 1$ tal que:

$$d(TS(x), TS(y)) \leq ad(Tx, Ty) < d(Tx, Ty).$$

$\mathcal{A}_2$.− S es un operador de Banach, ya que considerando $y = S(x)$, para todo $x \in X$ se tiene:

$$d(TS(x), TS(y)) = d(TS(x), TS^2(x)) \leq ad(Tx, TS(x)).$$

$\mathcal{A}_3$.− S es una $T\mathcal{Z}$ contracción, ya que satisface la condición $T\mathcal{Z}_1$.

$\mathcal{A}_4$.− S es una T-Contracción débil, y se verifica al tomar $\delta = a$ y $L = 0$ en (2.14).

$\mathcal{B}$.− Para toda TK-Contracción S se tiene:

$\mathcal{B}_1$.− S es un T-Operador de Banach, y se verifica tomando $y = S(x)$ en (2.12).

$\mathcal{B}_2$.− S es una $T\mathcal{Z}$ contracción, ya que satisface la condición $T\mathcal{Z}_2$.

$\mathcal{C}$.− Toda T-Contracción débil S es un T-Operador de Banach, y se verifica tomando $y = S(x)$ en (2.14).

3

Resultados clásicos de la teoría métrica del punto fijo

En este capítulo se estudiarán los teoremas clásicos del punto fijo en espacio métricos para aplicaciones con alguna propiedad contractiva y sus respectivas demostraciones.
En lo que sigue F_S denotará el conjunto de puntos fijos de la función S.

3.1. Teoremas del punto fijo

3.1.1. Teorema del punto fijo de Banach

Teorema 3.1 *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $S : X \to X$ una B-contracción. Entonces se tiene que:*

i) *Para todo $x_0 \in X$ y $x_n = S^n(x_0)$, existe $z \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$.*

ii) $F_S = \{z\}$

iii) $d(x_n, z) \leq \dfrac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1)$.

iv) $d(x_{n+1}, z) \leq \dfrac{a}{1-a} d(x_{n+1}, x_n)$.

v) $d(x_{n+1}, z) \leq a d(x_n, z)$

Demostración: *Esta demostración será constructiva.*
(i) Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión:

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \ldots\ , x_{n+1} = S(x_n) \qquad (3.1)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$*. Mostremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.*
Para ello, usando (3.1) *y el hecho de que* S *es una B-contracción se tiene:*

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &= d(S(x_0),S(x_1)) \leq ad(x_0,x_1). \\ d(x_2,x_3) &= d(S(x_1),S(x_2)) \leq ad(x_1,x_2) \leq a^2 d(x_0,x_1). \\ d(x_3,x_4) &= d(S(x_2),S(x_3)) \leq ad(x_2,x_3) \leq a^3 d(x_0,x_1). \\ d(x_4,x_5) &= d(S(x_3),S(x_4)) \leq ad(x_3,x_4) \leq a^4 d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

Así, de manera inductiva se tiene la siguiente desigualdad:

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq a^n d(x_0,x_1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Ahora, sean $m,n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que* $m \geq n \geq 1$ *es decir, existe* $h \in \mathbb{N}$ *tal que* $m = n + h$*. Entonces:*

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+h}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + d(x_{n+2},x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+h-1},x_{n+h}). \\ &\leq a^n d(x_0,x_1) + a^{n+1} d(x_0,x_1) + a^{n+2} d(x_0,x_1) + \cdots + a^{n+h-1} d(x_0,x_1). \\ &= a^n d(x_0,x_1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{h-1}). \\ &= \frac{a^n}{1-a}(1-a^h) d(x_0,x_1). \\ &= \frac{a^n}{1-a} d(x_0,x_1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $a < 1$ *entonces* (3.3) *converge a cero cuando* $n \to \infty$*, esto implica que* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.*
En vista de que el espacio X *es completo se tiene que existe* $z \in X$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$*.*

(ii)*Dado que* S *es una aplicación continua entonces:*

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = S(\lim_{n\to\infty} x_n) = S(z).$$

Esto implica que $z \in F_S$*.*
Unicidad:
supongamos que existe $y \in X$ *tal que* $S(y) = y$*. Entonces*

$$d(z,y) = d(S(z),S(y)) \leq ad(z,y) \leq d(z,y) \Rightarrow (1-a)d(z,y) = 0 \Rightarrow d(z,y) = 0$$

Así, $z = y$*.*
(iii) *De* (3.3) *se tiene que:*

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0,x_1). \tag{3.4}$$

Luego, como $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = z$ *y la función* d *es continua, se deduce de* (3.4)*:*

$$d(x_n,z) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0,x_1).$$

(iv) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(S(x_n), S(x_{n+1})) \leq ad(x_n, x_{n+1}). \\
d(x_{n+2}, x_{n+3}) &= d(S(x_{n+1}), S(x_{n+2})) \leq ad(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq a^2 d(x_n, x_{n+1}). \\
d(x_{n+3}, x_{n+4}) &= d(S(x_{n+2}), S(x_{n+3})) \leq ad(x_{n+2}, x_{n+3}) \leq a^3 d(x_{n+1}, x_{n+2}). \\
d(x_{n+4}, x_{n+5}) &= d(S(x_{n+3}), S(x_{n+2})) \leq ad(x_{n+3}, x_{n+4}) \leq a^4 d(x_{n+2}, x_{n+3}).
\end{aligned}$$

Así, de manera inductiva se tiene que:

$$d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \leq a^m d(x_n, x_{n+1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Luego, para $m \geq 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) &\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m+1}). \\
&\leq ad(x_n, x_{n+1}) + a^2 d(x_n, x_{n+1}) + a^3 d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + a^m d(x_n, x_{n+1}). \\
&= ad(x_n, x_{n+1})(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{m-1}). \\
&= \frac{a}{1-a}(1 - a^m) d(x_n, x_{n+1}). \\
&\leq \frac{a}{1-a} d(x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Así:

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \leq \frac{a}{1-a} d(x_n, x_{n+1}). \tag{3.6}$$

Luego, tomando $m \to \infty$ en (3.6) se tiene:

$$d(x_{n+1}, z) \leq \frac{a}{1-a} d(x_n, x_{n+1}).$$

(v)

$$d(x_{n+1}, z) = d(S(x_n), S(z)) \leq ad(x_n, z).$$

■

3.1.2. Teorema del punto fijo para operadores de Banach

Definición 3.2 *Sea (X, d) un espacio métrico y $S : X \to X$ una aplicación:*

1.- *Para $x \in X$ definimos la órbita de x como el conjunto*

$$(x, \infty) = \{x, S(x), S^2(x), S^3(x), \ldots, S^n(x), \ldots\}.$$

2.- *Sea $x \in X$. Una función $G : X \to \mathbb{R}$ es S-orbitalmente semicontinua inferiormente en q si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq (x, \infty)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = q$ implica que $G(q) \leq \liminf_n G(x_n)$.*

Teorema 3.3 *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $0 \leq h < 1$. Supongamos que existe $x \in X$ tal que:*

$$d(S(y), S^2(y)) \leq d(y, S(y))$$

para todo $y \in (x, \infty)$. Entonces:

i.- $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x) = q$ *existe.*

ii.- $d(S^n(x), q) \leq \dfrac{h^n}{1-h} d(x, S(x))$.

iii.- q *es un punto fijo de* S *si, y sólo si* $G(x) = d(x, S(x))$ *es* S*-orbitalmente semicontinua inferiormente en* q.

Demostración: Sea $x \in X$ tal que $d(S(y), S^2(y)) \leq d(y, S(y))$ para todo $y \in (x, \infty)$. Para $y = S(x)$ se tiene:

$$d(S^2(x), S^3(x)) \leq hd(S(x), S^2(x)) \leq h^2 d(x, S(x)).$$

Así, de manera inductiva

$$d(S^n(x), S^{n+1}(x)) \leq h^n d(x, S(x)).$$

A continuación, mostremos que la sucesión $\{S^n(x)\}$ es de Cauchy.
En efecto, sean $n, p \in \mathbb{N}$ entonces:

$$d(S^n(x), S^{n+p}(x)) \leq d(S^n(x), S^{n+1}(x)) + d(S^{n+1}(x), S^{n+2}(x)) + \cdots + d(S^{n+p-1}(x), S^{n+p}(x)).$$

Luego por la parte anterior:

$$\begin{aligned}
d(S^n(x), S^{n+p}(x)) &\leq h^n d(x, xS(x)) + h^{n+1} d(x, S(x)) + \cdots + h^{n+p-1} d(x, S(x)) \\
&\leq h^n d(x, S(x))[1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1}] \\
&\leq \frac{h^n}{1-h}(1 - h^{p-1}) d(x, S(x)) \\
&\leq \frac{h^n}{1-h} d(x, S(x)) \\
d(S^n(x), S^{n+p}(x)) &\leq \frac{h^n}{1-h} d(x, S(x)). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

De (3.7) se tiene que $\{S^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $q \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x) = q$.
Así,

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x) = q$$

Luego, cuando $p \to \infty$ en la desigualdad (3.7) se tiene que

$$d(S^n, q) \leq \frac{h^n}{1-h} d(x, S(x)).$$

A continuación mostraremos la parte (iii)
Supongamos que $S(q) = q$ y sea $\{x_n\} \subseteq (x, \infty)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = q$, entonces
$G(q) = d(q, S(q)) = 0$ y $\liminf G(x_n) \geq 0$ por lo tanto,

$$G(q) \leq \liminf G(x_n).$$

Reciprocamente

$$\begin{aligned} G(q) = G(q, S(q)) &\leq \liminf G(x_n) = d(x_n, S(x_n)) \\ &\leq d(S^n(x), S^{n+1}(x)) \leq h^n d(x, S(x))) < \epsilon. \end{aligned}$$

Y esta última desigualdad se cumple para n suficientemente grande. Esto implica que $S(q) = q$.

3.1.3. Teorema del punto fijo de Edelstein

Teorema 3.4 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $S : X \to X$ una aplicación contráctil. Entonces existe un único $z \in X$ tal que $S(z) = z$.*

Demostración: En efecto, sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesion:

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \ldots\ , x_{n+1} = S(x_n). \tag{3.8}$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$.
Dado que el espacio (X, d) es compacto, la sucesión $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente es decir, existe $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ y $z \in X$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = z$. Como S es contractiva entonces por el lema (2.5), S es continua además, la sucesión $\{d(x_n, x_{n+1})\} \subseteq \mathbb{R}$ es decreciente, de términos positivos y acotada inferiormente por lo tanto converge. Así:

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, S(x_{n_k})) = d(z, S(z)).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} d(z, S(z)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) &= \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(S(x_n), S^2(x_n)) \\ &= d(S(z), S^2(z)). \end{aligned}$$

Es decir, $d(z, S(z)) = d(S(z), S^2(z))$.
Si $z \neq S(z)$ entonces:

$$d(z, S(z)) = d(S(z), S(S(z))) < d(z, S(z)) \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Por lo tanto $S(z) = z$.
Unicidad:
Supongamos que existe $y \in X$ tal que $S(y) = y$, entonces:

$$d(z, y) = d(S(z), S(y)) < d(z, y) \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Así $F_S = \{z\}$.

■

3.1.4. Teorema del punto fijo de Kannan

Teorema 3.5 *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $S : X \to X$ una aplicación de Kannan. Entonces existe un único $z \in X$ tal que $S(z) = z$.*

Demostración: En efecto, sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión:

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \ldots\ , x_{n+1} = S(x_n)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$.
Como S es K-contracción, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(S(x_n), S(x_{n-1})) &\leq b[d(x_n, S(x_n)) + d(x_{n-1}, S(x_{n-1}))] \\ &\leq bd(x_n, x_{n+1}) + bd(x_{n-1}, x_n) \\ (1-b)d(x_{n+1}, x_n) &\leq bd(x_{n-1}, x_n) \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq \frac{b}{1-b} d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por otro lado se tiene:

$$b < \frac{1}{2} \Rightarrow b + b < 1 \Rightarrow \frac{b}{1-b} < 1 \tag{3.10}$$

Así, de (3.9) , (3.10) y usando el lema (1.34) se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.
Por la completitud del espacio X, existe $z \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$.
Ahora:

$$\begin{aligned} d(z, S(z)) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, S(z)) \\ &\leq d(z, x_n) + d(S(x_{n+1}), S(z)) \\ &\leq d(z, x_n) + b[d(x_{n+1}, S(x_{n+1})) + d(z, S(z))] \\ &\leq d(z, x_n) + bd(x_{n+1}, x_n) + bd(z, S(z)) \\ (1-b)d(z, S(z)) &\leq d(z, x_n) + bd(x_{n+1}, x_n) \\ d(z, S(z)) &\leq \frac{1}{1-b} d(z, x_n) + \frac{b}{1-b} d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{1-b} d(z, x_n) \left(\frac{b}{1-b}\right)^{n+1} d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Luego, tomando $n \to \infty$ en (3.11) se obtiene:

$$d(z, S(z)) = 0 \Rightarrow z = S(z).$$

Unicidad:
Supongamos que existe $y \in X$ tal que $S(y) = y$, entonces:

$$\begin{aligned} d(z, y) = d(S(z), S(y)) &\leq b[d(z, S(z)) + bd(y, S(y))] \\ &\leq bd(z, z) + d(y, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(z, y) = 0$, lo cual implica que $z = y$.

$\blacksquare$

3.1.5. Teorema del punto fijo de Chatterjea

Teorema 3.6 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $S : X \to X$ una aplicación de Charttejea. Entonces existe un único $z \in X$ tal que $S(z) = z$.*

Demostración: En efecto, sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión:

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \ldots\ , x_{n+1} = S(x_n)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$.

Como S es C-contracción, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(S(x_n), S(x_{n-1})) &\leq c[d(x_n, S(x_{n-1})) + d(x_{n-1}, S(x_n))] \\ &\leq cd(x_n, x_n) + cd(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq cd(x_{n+1}, x_n) + cd(x_n, x_{n-1}) \\ (1-c)d(x_{n+1}, x_n) &\leq cd(x_n, x_{n-1}) \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq \frac{c}{1-c} d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Luego, en esta última desigualdad como $\dfrac{c}{1-c} < 1$, por el lema (1.34) se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.
Así, dado que el espacio X es completo, existe $z \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$.
Mostremos que $F_S = \{z\}$

$$\begin{aligned} d(z, S(z)) &\leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, S(z)) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + d(S(x_n), S(z)) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + c[d(x_n, S(z)) + d(z, S(x_n))] \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + cd(x_n, S(z)) + cd(z, x_{n+1}) \\ &\leq (1+c)d(z, x_{n+1}) + cd(x_n, z) + cd(z, S(z)) \\ (1-c)d(z, S(z)) &\leq (1+c)d(z, x_{n+1}) + cd(x_n, z) \\ d(z, S(z)) &\leq \frac{1+c}{1-c} d(z, x_{n+1}) + \frac{c}{1-c} d(x_n, z). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Afirmación:

$$\frac{1+c}{1-c} < 3.$$

En efecto, dado que $c < \frac{1}{2}$ entonces se tiene lo siguiente:

$$2c < 1 \Rightarrow 4c < 2 \Rightarrow c + 3c < 3 - 1 \Rightarrow 1 + c < 3 - 3c \Rightarrow \frac{1+c}{1-c} < 3 \tag{3.14}$$

Así, de (3.14) y (3.13) se tiene:

$$d(z, S(z)) \leq 3d(z, x_{n+1}) + \frac{c}{1-c} d(x_n, z) \tag{3.15}$$

Luego, tomando $n \to \infty$ en (3.15):

$$d(z, S(z)) = 0 \Rightarrow z = S(z).$$

Unicidad:
Supongamos que existe $y \in X$ tal que $S(y) = y$, entonces:

$$\begin{aligned} d(z,y) = d(S(z), S(y)) &\leq c[d(z, S(y)) + d(y, S(z))] \\ &\leq cd(z,y) + cd(y,z) \\ &\leq 2cd(z,y) \\ (1-2c)d(z,y) &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En (3.16), dado que $0 < (1-2c)$ entonces $d(z,y) \leq 0$ lo cual implica que $d(z,y) = 0$.
Por lo tanto

$$z = y.$$

■

3.1.6. Teorema del punto fijo de Zamfirescu

Teorema 3.7 *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $S : X \to X$ una aplicación de Zamfirescu. Entonces existe un único $z \in X$ tal que $S(z) = z$.*

Demostración: Sean $x, y \in X$. Entonces al menos una de las condiciones se cumple:

1.– $d(S(x), S(y)) \leq ad(x,y)$ con $a < 1$.

2.– $d(S(x), S(y)) \leq b[d(x, S(x)) + d(y, S(y))]$ con $b < \frac{1}{2}$.

3.– $d(S(x), S(y)) \leq c[d(x, S(y)) + d(y, S(x))]$ con $c < \frac{1}{2}$.

Por la proposición (2.10) existe $\delta \in (0,1)$ con $\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$ tal que

$$d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x,y) + 2\delta d(y, S(x)) \tag{3.17}$$

$$d(S(x), S(y)) \leq \delta d(x,y) + 2\delta d(y, S(x)). \tag{3.18}$$

Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión:

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \ldots\ , x_{n+1} = S(x_n)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$.
De (3.17) se tiene:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(S(x_n), S(x_{n-1})) \leq \delta d(x_n, x_{n-1}) + 2\delta d(x_{n-1}, S(x_n)) \\ &\leq \delta d(x_n, x_{n-1}) + 2\delta d(x_{n-1}, x_{n-1}) \\ &\leq \delta d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Esto implica

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \delta d(x_n, x_{n-1})$$

Así, por el lema (1.34), $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $z \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.
A continuación, veamos que $z = S(z)$.
En efecto

$$\begin{aligned} d(z,S(z)) &\leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},S(z)) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + d(S(x_n),S(z)) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \delta d(x_n,z) + 2\delta d(z,x_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.19}$$

En (3.19) se tiene que $d(z,S(z)) = 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto,

$$S(z) = z.$$

Unicidad:
Esto se prueba de usando (3.18) y de manera análoga a las que se demostraron en los teoremas anteriores.

■

3.1.7. Teorema del punto fijo para (δ, L) operadores

Sea (X,d) un espacio métrico completo y $S : X \to X$ una aplicación contracción débil. Entonces S tiene punto fijo.
Demostración: Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión

$$x_1 = S(x_0)\ ,\ x_2 = S(x_1)\ ,\ x_3 = S(x_2)\ , x_4 = S(x_3)\ , x_5 = S(x_4)\ , \dots\ , x_{n+1} = S(x_n)$$

Es decir, $x_n = S^n(x_0)$.
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &= d(S(x_{n-1}),S(x_n)) \\ &\leq \delta d(x_{n-1},x_n) + 2\delta d(x_n,S(x_{n-1})) \\ d(x_n,x_{n+1}) &\leq \delta d(x_{n-1},x_n) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Luego, como $\delta < 1$ en la desigualdad (3.20) se tiene del lema (1.34) que $x_n = S(x_{n-1})$ es una sucesión de cauchy. En vista de que el espacio es completo, existe $z \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.
Ahora, mostremos que $S(z) = z$.
En efecto

$$\begin{aligned} d(z,S(z)) &\leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},S(z)) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + d(S(x_n),S(z)) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \delta d(x_n,z) + 2\delta d(z,x_{n+1}) \\ &\leq (1+2\delta)d(z,x_{n+1}) + \delta d(x_n,z) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Luego, tomando $n \to \infty$ en (3.21) se obtiene:

$$S(z) = z.$$

■

4

Teoremas del punto fijo para las aplicaciones T-contracciones

Este capítulo forma parte de la idea central de este trabajo especial de grado, aqui se desarrollarán los teoremas del punto fijo para las funciones T-contracciones.

4.1. Teorema del punto fijo para funciones TB-Contracciones

Teorema 4.1 *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones tales que, T sea continua, inyectiva y subsecuencialmente convergente. Si S es una TB-contracción continua, entonces S tiene un único punto fijo q, además, si T es secuencialmente convergente se tiene que para cualquier $x_0 \in X$, la sucesión $\{S^n x_0\}$ converge a q.*

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $\{S^n x_0\}$. Entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\begin{aligned} d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) &= d(TSS^{n-1}(x_0), TSS^n(x_0)) \\ &\leq ad(TS^{n-1}(x_0), TS^n(x_0)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luego como $a < 1$, por el lema (1.34) se tiene de (4.1), que la sucesión $\{TS^n(x_0)\}$ es de cauchy. Por ser X un espacio métrico completo, existe $u \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} TS^n(x_0) = u$. Por otra parte, como T es subsecuencialmente convergente, existen $\{S^{n_k}(x_0)\} \subseteq \{S^n(x_0)\}$ y $q \in X$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} S^{n_k}(x_0) = q \tag{4.2}$$

De (4.2) y por ser T una función continua se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} TS^{n_k}(x_0) = T(q)$$

Por lo tanto,

$$T(q) = u \tag{4.3}$$

Luego, como T y S son continuas se tiene respectivamente:

$$\lim_{k\to\infty} TS(S^{n_k}(x_0) = TS(q) \tag{4.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} S(S^{n_k}(x_0)) = S(q) \tag{4.5}$$

Es claro que (4.4) es una subsucesión de $\{TS^n(x_0)\}$ y por lo tanto:

$$TS(q) = u \tag{4.6}$$

Así, de (4.6) y (4.3) tenemos:

$$TS(q) = T(q)$$

Por la inyectividad de T, se obtiene que $S(q) = q$. Si T es secuencialmente convergente entonces se sigue el resultado teniendo en cuenta que la sucesión $\{S^n(x_0)\}$ converge. ■

4.2. Teorema del punto fijo para T-Contracciones de Edelstein

Teorema 4.2 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones. Supongamos que T es una función continua, inyectiva y secuencialmente convergente. Si S es una función T-Contracción de Edelstein, entonces S tiene un único punto fijo q, además, para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $\{S^n(x_0)\}$ converge a q.*

Demostración:

Mostremos que S es continua.

En efecto, sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión, y supongamos que existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Probemos que $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = S(x)$.

Como S es T-Contráctil entonces:

$$d(TS(x_n), TS(x)) \leq d(T(x_n), Tx) \tag{4.7}$$

De (4.7) y la continuidad de T se deduce que $\lim_{n\to\infty} TS(x_n) = TS(x)$.
Ahora, sea $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ una subsucesión arbitraria y supongamos que converge a $y \in X$. De la continuidad de T se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} TS(x_{n_k}) = T(y) \tag{4.8}$$

Esto implica de (4.7) y (4.8) que $TS(x) = T(y)$ y como T es inyectiva, se concluye que $S(x) = y$ por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = S(x)$.

Ahora como S y T son funciones continuas, la función $\varphi : X \to [0, \infty)$ dada por:

$$\varphi(y) = d(TS(y), T(y))$$

es continua, y como X es un espacio métrico compacto se tiene que φ alcanza un valor mínimo, digamos $q \in X$, es decir, $\varphi(q) \leq \varphi(y) \ \ \forall\, y \in X$.

Si $S(q) \neq q$ entonces:

$$\varphi(S(q)) = d(TS^2(q), TS(q)) \leq d(TS(q), T(q)) = \varphi(q) \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Por lo tanto se tiene que

$$S(q) = q \tag{4.9}$$

Unicidad.- Supongamos que existe $z \in X$ tal que $S(z) = z$. Es claro que $TS(q) = T(q)$ y $TS(z) = T(z)$. Si $T(q) \neq T(z)$ entonces:

$$d(T(q), T(z)) = d(TS(q), TS(z)) < d(T(q), T(z)) \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Por lo tanto $T(q) = T(z)$, de la inyectividad de T se concluye que $q = z$.

Sea $x_0 \in X$, mostremos que la sucesión $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x_0) = q$.
En efecto, consideremos la sucesión:

$$a_n = d(TS^n(x_0), T(q)).$$

$$a_{n+1} = d(TS^{n+1}(x_0), T(q)) = d(TS^{n+1}(x_0), TS(q)) \leq d(TS^n(x_0), T(q)) = a_n.$$

Esto implica que $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, decreciente, acotada inferiormente por lo tanto converge, es decir, existe $a \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} d(TS^n(x_0), T(q)) = a. \tag{4.10}$$

Como X es compacto, $\{TS^n(x_0)\}$ posee una subsucesión convergente a un $z \in X$, digamos

$$\lim_{k\to\infty} TS^{n_k}(x_0) = z.$$

Como T es secuencialmente convergente, entonces existe $w \in X$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} S^{n_k}(x_0) = w. \tag{4.11}$$

De (4.10) se tiene que:

$$d(T(w), T(x)) = a$$

De (4.11) y la continuidad de S se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} S^{n_k+1}(x_0) = S(w). \tag{4.12}$$

Por otro lado, si $S(w) \neq q$ entonces de (4.10), (4.12) y (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} d(TS^n(x_0), T(q)) = \lim_{k\to\infty} d(TS^{n_k+1}(x_0), T(q)) &= d(TS(w), T(q)) \\ &= d(TS(w), TS(q)) \\ &< d(T(w), T(q)) \\ &= a \qquad (\Rightarrow\Leftarrow) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S(w) = q. \tag{4.13}$$

De (4.10) y (4.13) se tiene:

$$\begin{aligned} a = \lim_{k\to\infty} d(TS^{n_k+1}(x_0), T(q)) &= d(TS(w), T(q)) \qquad (4.14) \\ &= d(T(q), T(q)) \\ a &= 0 \end{aligned}$$

De (4.10) y (4.15) se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} TS^n(x_0) = T(q). \tag{4.15}$$

Como T es secuencialmente convergente, de (4.15), (4.11) y (4.13) se tiene:

$$w = \lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} S^{n+1}(x_0) = S(w) = q. \tag{4.16}$$

Es decir

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = q.$$

■

4.3. Teorema del punto fijo para T-Operadores de Banach

Teorema 4.3 *Sean (X, d) un espacio métrico completo y S y T dos aplicaciones tales que, T sea continua, inyectiva y subsecuencialmente convergente. Si S es un T-Operador de Banach continua entonces:*

$\mathcal{B}_1$.– $\lim_{n\to\infty} TS^n(x) = q$ *existe.*

$\mathcal{B}_2$.– $d(TS^n(x), q) \leq \dfrac{h^n}{1-h} d(T(x), TS(x))$.

$\mathcal{B}_3$.– *S posse un único punto fijo y.*

$\mathcal{B}_4$.– *Si T es secuencialmente convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} S^n(x) = y$.

Demostración: Dado que S es un T-Operador de Banach se tiene para todo $x \in X$:

$$d(TS^2(x), TS(x)) \leq hd(TS(x), T(x)).$$

Luego de manera inductiva se tiene:

$$d(TS^{n+1}(x), TS^n(x)) \leq hd(TS^n(x), TS^{n-1}(x)) \leq \cdots \leq h^n d(TS(x), T(x)).$$

Ahora, veamos que $\{TS^n(x)\}$ es una sucesión de cauchy.
En efecto, sean $n, p \in \mathbb{N}$, así:

$$\begin{aligned} d(TS^n(x), TS^{n+p}(x)) &\leq d(TS^n(x), TS^{n+1}(x)) + d(TS^{n+1}(x), TS^{n+2}(x)) + \cdots + \\ &\quad\; d(TS^{n+p-1}(x), TS^{n+p}(x)) \\ &\leq h^n d(TS(x), T(x)) + h^{n+1} d(TS(x), T(x)) + \cdots + \\ &\quad\; h^{n+p-1} d(TS(x), T(x)) \\ &= h^n d(TS(x), T(x))[1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1}] \\ &= \frac{h^n}{1-h} d(TS(x), T(x))(1 - h^p) \\ &< \frac{h^n}{1-h} d(TS(x), T(x)). \end{aligned} \tag{4.17}$$

De (4.17) y como $h < 1$ se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} d(TS^n(x), TS^{n+p}(x)) = 0.$$

Por lo tanto $\{TS^n(x)\}$ es una sucesión de cauchy, y como el espacio es completo, existe $q \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} TS^n(x) = q. \tag{4.18}$$

Esto demuestra $(\mathcal{B}_1)$. En (4.17), cuando $p \to \infty$ se obtiene $(\mathcal{B}_2)$.
De (4.18) y por ser T subsecuencialmente convergente, existen $\{S^{n_k}(x)\} \subseteq \{S^n(x)\}$ y $y \in X$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} S^{n_k}(x) = y. \tag{4.19}$$

De (4.19) y la continuidad de T se obtiene:

$$\lim_{k \to \infty} TS^{n_k}(x) = T(y). \tag{4.20}$$

De (4.20) y (4.18) se obtiene:

$$T(y) = q. \tag{4.21}$$

De (4.19) y por continuidad de S se tiene:

$$\lim_{k \to \infty} S^{n_k+1}(x) = S(y). \tag{4.22}$$

De (4.22) por continuidad de T se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} TS^{n_k+1}(x) = TS(y). \tag{4.23}$$

De (4.18), (4.21) y (4.23) se tiene:

$$TS(y) = q = T(y). \tag{4.24}$$

Por la inyectividad de T se tiene:

$$S(y) = y.$$

Esto prueba ($\mathcal{B}_3$).
Si T es secuencialmente convergente se sigue ($\mathcal{B}_4$) a partir de (4.19), considerando (n) en lugar de (n_k).

■

4.4. Teorema del punto fijo para funciones TK-Contracciones

Teorema 4.4 *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones tales que, T sea continua, inyectiva y secuencialmente convergente. Si S es una TK-Contracción entonces:*

$\mathcal{K}_1.-$ $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n x_0 = v$ *existe.*

$\mathcal{K}_2.-$ $F_S = \{y\}$.

$\mathcal{K}_3.-$ $d(TS^n x_0, Ty) \leq \dfrac{\gamma^n}{1-\gamma} d(TSx_0, Tx_0)$, *donde* $\gamma = \dfrac{b}{1-b}$.

$\mathcal{K}_4.-$ $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x_0) = y, \quad \forall\, x_0 \in X$.

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $x_n = S^n(x_0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(T(x_n), T(x_{n+1})) &= d(TS(x_{n-1}), TS(x_n)) \\
&\leq b[d(T(x_{n-1}), TS(x_{n-1})) + d(T(x_n), TS(x_n))] \\
&= b[d(T(x_{n-1}), T(x_n)) + d(T(x_n), T(x_{n+1}))] \\
d(T(x_n), T(x_{n+1})) &= \frac{b}{1-b} d(T(x_{n-1}), T(x_n)).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De forma inductiva, tomando $\gamma = \dfrac{b}{1-b}$ se prueba:

$$d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) \leq \gamma^n d(TS(x_0), T(x_0)). \tag{4.26}$$

Como $\dfrac{b}{1-b} < 1$ entonces de (4.25) y el lema (1.34) se tiene que la sucesión $\{TS^n(x_0)\}$ es de Cauchy. Por ser el espacio X completo, existe $v \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n(x_0) = v$. Esto demuestra

$(\mathcal{K}_1)$.
Dado que T es secuencialmente convergente, la sucesión $x_n = S^n(x_0)$ converge, es decir, existe $y \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = y. \tag{4.27}$$

Ahora mostremos que y es un punto fijo.

$$\begin{aligned}
d(TS(y), T(y)) &\leq d(TS(y), TS^n(y)) + d(TS^n(y), TS^{n+1}(y)) + d(TS^{n+1}(y), T(y)) \\
&\leq b[d(T(y), TS(y)) + d(T(x_{n-1}), T(x_n))] + d(T(x_n), T(x_{n+1})) + \\
&\quad d(T(x_{n+1}), T(y)) \\
&= \frac{1}{1-b} d(T(x_{n-1}), T(x_n)) + \frac{1}{1-b} d(T(x_n), T(x_{n+1})) + \\
&\quad \frac{1}{1-b} d(T(x_{n+1}), T(y)) \\
d(TS(y), T(y)) &\leq 2d(T(x_{n-1}), T(x_n)) + 2d(T(x_n), Tx_{n+1}) + \\
&\quad 2d(T(x_{n+1}), T(y)). \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Luego cuando $n \to \infty$ en (4.28) se obtiene:

$$TS(y) = T(y).$$

De la inyectividad de T se tiene que:

$$S(y) = y$$

Unicidad.- Supongamos que existe $z \in X$ tal que $S(z) = z$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
d(T(z), T(y)) = d(TS(z), TS(y)) &\leq b[d(T(z), TS(z)) + d(t(y), TS(y))] \\
&= bd(T(z), T(z)) + bd(T(y), T(y)) \\
d(T(z), T(y)) &\leq 0. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

De (4.29) y de la inyectividad de T se tiene que

$$y = z.$$

Esto demuestra $(\mathcal{K}_2)$.
Para probar $(\mathcal{K}_3)$, sean $n, p \in \mathbb{N}$. De (4.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(TS^{n+p-1}(x_0), TS^{n+p}(x_0)) \\
&\leq \gamma^n d(TS(x_0), T(x_0)) + \cdots + \gamma^{n+p-1} d(TS^n(x_0), T(x_0)) \\
&\leq \gamma^n d(TS(x_0), T(x_0))[1 + \gamma + \cdots + \gamma^{p-1}] \\
&= \frac{\gamma^n}{1-\gamma}(1-\gamma^p) d(TS(x_0), T(x_0)) \\
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(TS(x_0), T(x_0)). \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

De (4.30), la continuidad de la función distancia y (4.27), haciendo $p \to \infty$ se tiene:

$$d(TS^n x_0, Ty) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(TSx_0, Tx_0).$$

De la arbitrariedad de x_0, se tiene que (4.27) demuestra $(\mathcal{K}_4)$.

■

4.5. Teorema del punto fijo para funciones TC-Contracciones

Teorema 4.5 *Sean* (X, d)*un espacio métrico completo y* $S, T : X \to X$ *dos funciones tales que,* T *sea continua, inyectiva y secuencialmente convergente. Si* S *es una* T *contracción de Chatterjea, entonces:*

$\mathcal{C}_1$.– $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n x_0 = u$ *existe.*

$\mathcal{C}_2$.– $F_S = \{z\}$.

$\mathcal{C}_3$.– $d(TS^n x_0, Tz) \leq \dfrac{\omega^n}{1-\omega} d(TSx_0, Tx_0)$, *donde* $\omega = \dfrac{c}{1-c}$.

$\mathcal{C}_4$.– $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x_0) = z, \quad \forall\, x_0 \in X$.

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $x_n = S^n(x_0)$. Mostremos que la sucesión $\{TS^n(x_0)\}$ es de Cauchy.
En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned} d(T(x_{n+1}), T(x_n)) &= d(TS(x_n), TS(x_{n-1})) \\ &\leq c[d(T(x_n), TS(x_{n-1})) + d(T(x_{n-1})), T(S(x_n))] \\ &= c[d(T(x_n), T(x_n)) + d(T(x_{n-1}), T(x_{n+1}))] \\ &\leq cd(T(x_{n-1}), T(x_n)) + cd(T(x_n), T(x_{n+1})) \\ &\leq \frac{c}{1-c} d(T(x_n), T(x_{n+1})) \qquad (4.31) \end{aligned}$$

De forma inductiva, tomando $\omega = \dfrac{c}{1-c}$ se demuestra:

$$d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) \leq \gamma^n d(TS(x_0), T(x_0)). \qquad (4.32)$$

De (4.31) y como $\dfrac{c}{1-c} < 1$, usando el lema (1.34) se tiene que $\{TS^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy. Como el espacio X es completo, existe $u \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n(x_0) = u$. Esto prueba $(\mathcal{C}_1)$.
De esto y como T es secuencialmente convergente, existe $z \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = z. \qquad (4.33)$$

Veamos que $S(z) = z$.
En efecto,

$$\begin{aligned} d(T(z), TS(z)) &\leq d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS^{n+1}(x_0), TS(z)) \\ &= d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS(S^n)(x_0), TS(z)) \\ &\leq d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + c[d(T(S^n)(x_0), TS(z)) + d(T(z), TS^{n+1}(x_0))] \\ &= (1+c)d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + cd(T(S^n)(x_0), TS(z)) \\ &\leq \frac{1+c}{1-c} d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + \frac{c}{1-c} d(T(S^n)(x_0), TS(z)) \\ d(T(z), TS(z)) &< 3d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + d(T(S^n)(x_0), TS(z)) \qquad (4.34) \end{aligned}$$

De (4.34), cuando $n \to \infty$ se obtiene:

$$d(T(z), TS(z)) = 0 \tag{4.35}$$

Y esto implica que

$$T(z) = TS(z).$$

Por la inyectividad de T se tiene:

$$S(z) = z.$$

Unicidad.- Supongamos que existe $w \in X$ tal que $S(w) = w$, mostremos que $w = z$.

$$\begin{aligned}
d(T(w), T(z)) &= d(TS(w), TS(z)) \\
&\leq c[d(T(w), TS(z))d(T(z), TS(w))] \\
&= c[d(T(w), T(z)) + d(T(z), T(w))] \\
&= 2cd(T(w), T(z)) \\
(1-2c)d(T(w), T(z)) &\leq 0 \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

De (4.36) y en vista de que $c < \dfrac{1}{2}$ se obtiene:

$$T(w) = T(z). \tag{4.37}$$

De la inyectividad de T se tiene que $w = z$. Esto demuestra $(\mathcal{C}_2)$.
Para probar $(\mathcal{C}_3)$, sean $n, p \in \mathbb{N}$. De (4.32) se tiene:

$$\begin{aligned}
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(TS^{n+p-1}(x_0), TS^{n+p}(x_0)) \\
&\leq \omega^n d(TS(x_0), T(x_0)) + \cdots + \omega^{n+p-1} d(TS^n(x_0), T(x_0)) \\
&\leq \omega^n d(TS(x_0), T(x_0))[1 + \omega + \cdots + \omega^{p-1}] \\
&= \frac{\omega^n}{1-\omega}(1-\omega^p) d(TS(x_0), T(x_0)) \\
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq \frac{\omega^n}{1-\omega} d(TS(x_0), T(x_0)). \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

De (4.38) y (4.33), haciendo $p \to \infty$ se tiene:

$$d(TS^n x_0, Ty) \leq \frac{\omega^n}{1-\omega} d(TSx_0, Tx_0).$$

De la arbitrariedad de x_0, se tiene que (4.33) demuestra $(\mathcal{C}_4)$.

■

4.6. Teorema del punto fijo para T-Operadores de Zamfirescu

Teorema 4.6 *Sean (X, d) un espacio métrico copmleto y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones tales que, T sea continua, inyectiva y secuencialmente convergente. Si S es un T-Operador de Zamfirescu, entonces:*

$\mathcal{Z}_1$.– $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n x_0 = w$ *existe.*

$\mathcal{Z}_2$.– $F_S = \{z\}$.

$\mathcal{Z}_3$.– $d(TS^n x_0, Tz) \leq \dfrac{\delta^n}{1-\delta} d(TSx_0, Tx_0)$.

$\mathcal{Z}_4$.– $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x_0) = z, \quad \forall\, x_0 \in X$.

Demostración:
En efecto, como S es un T-Operador de Zamfirescu de la proposición (2.18) se tiene que, para todo $x, y \in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} d(TS(x), TS(y)) &\leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(y)) && (4.39)\\ d(TS(x), TS(y)) &\leq \delta d(T(x), T(y)) + 2\delta d(T(x), TS(x)) && (4.40)\end{aligned}$$

Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $x_n = S^n(x_0)$, de (4.39) se tiene:

$$\begin{aligned} d(TS^{n+1}(x_0), TS^n(x_0)) &= d(TS(S^n(x_0)), TS(S^{n-1}(x_0)))\\ &\leq \delta d(T(S^n(x_0)), T(S^{n-1}(x_0))) + 2\delta d(T(S^n(x_0)), TS(S^{n-1}(x_0)))\\ &= \delta d(T(S^n(x_0)), T(S^{n-1}(x_0))) + 2\delta d(T(S^n(x_0)), T(S^n(x_0)))\\ d(TS^{n+1}(x_0), TS^n(x_0)) &= \delta d(T(S^n(x_0)), T(S^{n-1}(x_0))) && (4.41)\end{aligned}$$

así de manera inductiva se demuestra:

$$d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) \leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0)). \qquad (4.42)$$

En vista de que $\delta < 1$ entonces por el lema (1.34) se tiene de (4.41) que $\{TS^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es una espacio métrico completo, existe $w \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n(x_0) = w$. Esto demuestra ($\mathcal{Z}_1$).
Por ser T secuencialmente convergente, existe $z \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = z. \qquad (4.43)$$

De (4.40) se tiene:

$$\begin{aligned} d(T(z), TS(z)) &\leq d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS^{n+1}(x_0), TS(z))\\ &\leq d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS(S^n(x_0)), TS(z))\\ &\leq d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) + \delta d(TS^n(x_0), T(z)) +\\ &\quad 2\delta d(T(z), TS^{n+1}(x_0)) && (4.44)\end{aligned}$$

De (4.43), haciendo $n \to \infty$ en (4.44) se obtiene:

$$TS(z) = T(z).$$

Por la inyectividad de T se tiene :

$$S(z) = z.$$

Unicidad.- Supongamos que existe $q \in X$ tal que $S(q) = q$, mostremos que $q = z$.
De (4.40) se tiene:

$$\begin{aligned} d(T(q), T(z)) &= d(TS(q), TS(z)) \\ &\leq \delta d(T(q), T(z)) + 2\delta d(T(q), TS(q)) \\ &\leq \delta d(T(q), T(z)) \\ (1-\delta)d(T(q), T(z)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.45), en vista de que $\delta < 1$ se tiene:

$$d(T(q), T(z)) = 0.$$

Esto implica que $T(q) = T(z)$, luego de la inyectividad de T se tiene:

$$q = z.$$

Esto demuestra $(\mathcal{Z}_2)$.
Para probar $(\mathcal{Z}_3)$, sean $n, p \in \mathbb{N}$. De (4.42) se tiene:

$$\begin{aligned} d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(TS^{n+p-1}(x_0), TS^{n+p}(x_0)) \\ &\leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0)) + \cdots + \delta^{n+p-1} d(TS^n(x_0), T(x_0)) \\ &\leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0))[1 + \delta + \cdots + \delta^{p-1}] \\ &= \frac{\delta^n}{1-\delta}(1-\delta^p) d(TS(x_0), T(x_0)) \\ d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(TS(x_0), T(x_0)). \end{aligned} \tag{4.46}$$

De (4.46) y (4.43), haciendo $p \to \infty$ se tiene:

$$d(TS^n x_0, Tz) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(TSx_0, Tx_0).$$

De la arbitrariedad de x_0, se tiene que (4.43) demuestra $(\mathcal{Z}_4)$.

■

4.7. Teorema del punto fijo para T-(δ, L)-Operador

Teorema 4.7 *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $S, T : X \to X$ dos aplicaciones tales que, T sea continua, inyectiva y secuencialmente convergente. Si S es un T-(δ, L)-Operador, entonces:*

$\mathcal{O}_1$.– $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n x_0 = x$ *existe.*

$\mathcal{O}_2$.– $F_S \neq \emptyset$.

$\mathcal{O}_3$.– $d(TS^n x_0, Tq) \leq \dfrac{\delta^n}{1-\delta} d(TSx_0, Tx_0)$.

$\mathcal{O}_4$.– $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(x_0) = q, \quad \forall\, x_0 \in X$.

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $x_n = S^n(x_0)$. Mostremos que la sucesión $\{TS^n(x_0)\}$ es de Cauchy.
En efecto, se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(T(S^n(x_0)), T(S^{n+1}(x_0))) &\leq \delta d(TS^{n-1}(x_0), TS^n(x_0)) + Ld(TS^n(x_0), TS^n(x_0)) \\ &\leq \delta d(TS^n(x_0), TS^{n-1}(x_0)) \end{aligned} \tag{4.47}$$

De forma inductiva, se demuestra que:

$$d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) \leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0)). \tag{4.48}$$

Usando el lema (1.34) en (4.47) se tiene que $\{TS^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy. Luego, en vista de que el espacio X es completo, se tiene que existe $x \in X$ tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n(x_0) = x$. Esto demuestra $(\mathcal{O}_1)$.
Por otro lado como T es secuencialmente convrgente, existe $q \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = q. \tag{4.49}$$

Mostremos que q es un punto fijo. En efecto

$$\begin{aligned} d(T(q), TS(q)) &\leq d(T(q), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS^{n+1}(x_0), TS(q)) \\ &\leq d(T(q), TS^{n+1}(x_0)) + d(TS(S^n(x_0)), TS(q)) \\ &\leq d(T(q), TS^{n+1}(x_0)) + \delta d(TS^n(x_0), T(q)) + Ld(T(q), TS^{n+1}(x_0)) \\ &\leq (1+L)d(T(q), TS^{n+1}(x_0)) + \delta d(TS^n(x_0), T(q)) \end{aligned} \tag{4.50}$$

De (4.49) y la continuidad de T en (4.50) se obtiene:

$$TS(q) = T(q).$$

De la inyectividad de T se concluye:

$$S(q) = q.$$

Esto demuestra $(\mathcal{O}_2)$. Para probar $(\mathcal{O}_3)$, sean $n, p \in \mathbb{N}$. De (4.42) se tiene:

$$\begin{aligned}
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq d(TS^n(x_0), TS^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(TS^{n+p-1}(x_0), TS^{n+p}(x_0)) \\
&\leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0)) + \cdots + \delta^{n+p-1} d(TS^n(x_0), T(x_0)) \\
&\leq \delta^n d(TS(x_0), T(x_0))[1 + \delta + \cdots + \delta^{p-1}] \\
&= \frac{\delta^n}{1-\delta}(1-\delta^p) d(TS(x_0), T(x_0)) \\
d(TS^n(x_0), TS^{n+p}(x_0)) &\leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(TS(x_0), T(x_0)). \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

De (4.51) y (4.49), haciendo $p \to \infty$ se tiene:

$$d(TS^n x_0, Tq) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(TSx_0, Tx_0).$$

De la arbitrariedad de x_0, se tiene que (4.49) demuestra $(\mathcal{O}_4)$.

■

Bibliografía

[1] A.Beiranvand, S.Moradi, M.omid and H.pazandeh, two fixed point theorems for special functions, arXiv:0903.1504v1 [math.Fa],Mar 2009

[2] S.K Chatterjea, Fixed point Theorem, C.R:Acad. Bulg. Sci. 25.(1972),727-730.

[3] R. Kannan, some results on fixed points, bull. Calcu. Math. Soc. 60,(1968), 71-76.

[4] S.Moradi, Kannan fixed point Theorem on complet metric spaces and on generalized metric spaces depended an another function, arXiv:0903.1577v1.[math.FA] 9 Mar.2009

[5] T.Zamfirescu, Fixed point theorems in metric spaces, Arch.Math. 23,(1972),292-298.

[6] V.Berinde, Iterative Approximation of fixes points, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1912, 2007.