Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Mérida – Venezuela

INFORME FINAL DE PASANTIA

–

Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Matemáticas IV en la Escuela de Educación Mención Matemáticas de la Universidad de Los Andes.

Br. Yessica Arlhey Villamizar Sarmiento

Tutor Interno: Dr. Diómedes Bárcenas

Tutor Externo: Prof. Nolberto Dugarte

Junio, 2008

Introducción

El siguiente informe presenta el proyecto metodológico aplicado en las pasantías realizadas en la Facultad de Humanidades, Escuela de Educación Mención Matemáticas de la Universidad de los Andes, denominado (semestre B-2007).

Este proyecto tiene como finalidad despertar el interés de los alumnos por el estudio de la materia y el fortalecimiento de propiedades básicas que son necesarias para su formación como futuros docentes de la escuela secundaria, es por ello que en este proyecto se presentan diferentes estrategias metodológicas como el uso de la historia de la matemática, uso de la heurística, lúdica, modelización y aplicaciones de temas de interés que no sólo ayudan a afianzar propiedades de los temas del curso sino que también les presenta la utilidad e importancia de los mismos en el mundo actual.

En este informe se presentan las diferentes actividades desarrolladas durante el transcurso del semestre basadas en las estratégicas metodológicas de la propuesta, los talleres realizados con fin de que los estudiantes fortalecieran sus conocimientos y su posterior evaluación. Además, se encuentran los diferentes temas motivaciones expuestos en cada capítulo del curso de Matemáticas 40 como lo son: la Sucesión de Fibonacci, la Distribución Normal, Combinatoria y el Binomio de Newton y la Descomposición radioactiva, así como las biografías de Martin Gardner, Miguel de Guzmán, Karl Gauss, Isaac Newton entre otros.

Índice

Bibliografía

Apostol T. *Cálculo*, Editorial Reverté S.A, volumen II, México, 1967.

Boyce,W.E & DiPrima,R.C. *Elementos de Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera*, Editorial Noriega Limusa, Séptima edición, México, 1993.

Cuestiones de Física. *Biografía de Karl Friedrich Gauss* [en línea]. Yahoo! España, GeoCities. Última actualización, 03/11/2001. [Consulta: Noviembre, 2007] <http://es.geocities.com/cuestionesdefisica/Gauss.htm>

El Prisma. *Ecuaciones Diferenciales – Historia* [en línea]. Venezuela, última actualización 02/06/2008.[Consulta:Enero,2008]. <http://www.elprisma.com/apuntes/curso.asp?id=3924>

Formación del Profesorado. *La Sucesión de Fibonacci* [en línea]. Gobierno de España. Ministerio de Educación, Política Social y Deporte. Madrid, 2005. [Consulta: Mayo,2008] http://www.formacion.cnice.mec.es/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm

Gardner, M. Miscelanea Matemática, Salvat Editores S.A, Barcelona, 1986.

Guadalupe,M & Tamayo, R. *Descomposición Radiactiva* [en línea]. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). [Consulta: Enero,2008]. <http://www.sagan-gea.org/hojared_radiacion/paginas/Radiactividad.html>

Guzmán Ozámiz, M de. *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática* [en línea]. Edición HTML: Joaquín Asenjo. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. [Consulta: Octubre, 2007] <http://www.oei.es/edumat.htm>

Hristov,A. *Radioactividad* [en línea]. Publicado el 09/04/2004. [Consulta: Enero, 2008] <http://www.ciencia.net/VerArticulo/?idTitulo=Radioactividad>

Leithold, L. *Cálculo*, Editorial Fidencio Mata Gonzáles, México, 2007.

Manual de la Universidad de Málaga. *Distribución Normal o Gaussiana* [en línea]. U.D Bioestadística. Facultad de Medicina. Universidad de Málaga. [Consulta: Octubre, 2007] <http://www.bioestadistica.uma.es/libro/node79.htm>

Peña, A & Paco, O. *Relación de la Campana Gaussiana con los niveles de glucosa en la sagre* [en línea]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Medicina. Lima, Perú,2002[Consulta:Noviembre,2007] http://sisbib.unmsm.edu.pe/BVrevistas/anales/v63_n3/concepto_general_enfermedad.htm

Pimm, D. *El Lenguaje Matemático en el aula*, Ediciones Morata S.L, Segunda edición, Madrid, 1999.

Red Escolar. *Los Trucos de Fibonacci* [en línea]. Red Escolar SEP-ILCE, México. [Consulta:Noviembre,2007] <http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/imagina/mate3q.htm>

Schmidtke, R. *Coeficiente Binomial y Triángulo de Pascal* [en línea]. Wikipedia Foundation, Inc. Ultima actualización 11/04/2007. [Consulta: Noviembre, 2007] <http://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_binomial_y_tri%C3%A1ngulo_de_Pascal>

Swokowski, E.W. *Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1989.

Zill D. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones,* Grupo Editorial Iberoamérica, Tercera edición, México, 1997.

Mérida, 04 de junio de 2008

Departamento de Matemáticas
Coordinación del Ciclo Específico
Dr. Giovanni Calderón
Su Despacho.-

Apreciado Doctor Calderón,

Me es grato saludarle en la oportunidad de avalar el Informe de Pasantías de la Br. Yessica Villamizar, C.I. 15.920.016, realizadas en la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad de Los Andes bajo la asesoría del Profesor José N. Dugarte.

La pasantía realizada por la bachiller Villamizar en la mencionada institución obedece al plan de trabajo propuesto por ella y mi persona, aprobado por el departamento en septiembre del 2007, el cual lleva por título, Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Matemáticas IV en la Escuela de Educación Mención Matemáticas de la Universidad de Los Andes; para desarrollar la mencionada propuesta la bachiller Villamizar dictó el curso de Matemáticas 40 en dicha Escuela de Educación, dirigido a los estudiantes de la Licenciatura en Matemática. Allí Yessica, realizó una serie de actividades que seguí muy de cerca gracias a que nos reuníamos semanalmente para el seguimiento y control del plan propuesto. Durante la realización de estas actividades pude observar con placer el entusiasmo con el que Yessica realizó esta actividad, para lo cual, además de la preparación y el enfoque poco usual de la materia a presentar, dedicó horas extras a la búsqueda de motivación y nivelación para sus estudiantes, hecho que se refleja en el alto rendimiento del curso. Las razones recién expuestas son más que suficientes para avalar el mencionado informe.

Sin más a que referirme queda de Ud.

Muy atentamente,

Dr. Diomedes Bárcenas

Tutor Interno

Preliminares

La unidad curricular Matemáticas IV se ubica en el quinto semestre de la Licenciatura de Educación Mención Matemáticas de la Facultad de Humanidades en la Universidad de Los Andes, en la cual se estudian los siguientes tópicos fundamentales: Sucesiones, Series, Integrales Impropias y Ecuaciones Diferenciales. El proyecto busca introducir el uso de herramientas por cada tema, como lo son, la historia de las matemáticas y su aspecto lúdico con la finalidad de motivar al estudiante.

JUSTIFICACIÓN

El proyecto se justifica porque con frecuencia se presentan casos de falta de interés hacia la matemática por parte del educando, en cualquier nivel de su formación, la cual es originada en muchos casos por poca confianza en el dominio de los contenidos a enseñar y en muchos otros por escasez de motivación para presentar los temas a enseñar.

Creemos firmemente que el refuerzo de las destrezas de los contenidos a enseñar y la fortaleza de conocimientos que estén a nivel superior de esos contenidos en el docente aportan la confianza necesaria para un cabal desenvolvimiento en sus labores pedagógicas.

Así mismo creemos que la enseñanza de los contenidos relacionándolos con sus orígenes históricos y sus potenciales aplicaciones en las ciencias –y en la matemática misma- podrían generar en el estudiante una actitud positiva hacia el tópico que pretendamos enseñar. Un objetivo similar se puede obtener mediante una enseñanza amena valiéndonos de elementos lúdicos.

OBJETIVOS GENERALES

Diseño e Implementación de técnicas de didáctica y pedagogía a fin de incrementar los conocimientos de Educación Básica y Media Diversificada utilizando como herramientas, a manera de incentivar y motivar a los estudiantes, elementos de historia de las matemáticas y la introducción de algunos elementos lúdicos para el logro de estos fines.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fortalecer el conocimiento del futuro docente en tópicos de la matemática que están a un nivel superior de los contenidos a enseñar, particularmente todo el contenido de Matemáticas IV correspondiente al pensum de la Licenciatura de Educación Mención Matemáticas de la Facultad de Humanidades en la Universidad de Los Andes.

- Introducir la historia de las matemáticas en cada tema del programa (Sucesiones, Series, Integrales Impropias, Ecuaciones Diferenciales) con el propósito de motivar y captar la atención del estudiante.

- Desarrollar las habilidades del pensamiento individual y colectivo a través de distintos elementos lúdicos que serán introducidos por cada tema.

- Reforzar a través del Cálculo Diferencial e Integral temas de Educación Media y Diversificada como factorización, completar cuadrados, identidades trigonométricas, entre otros.

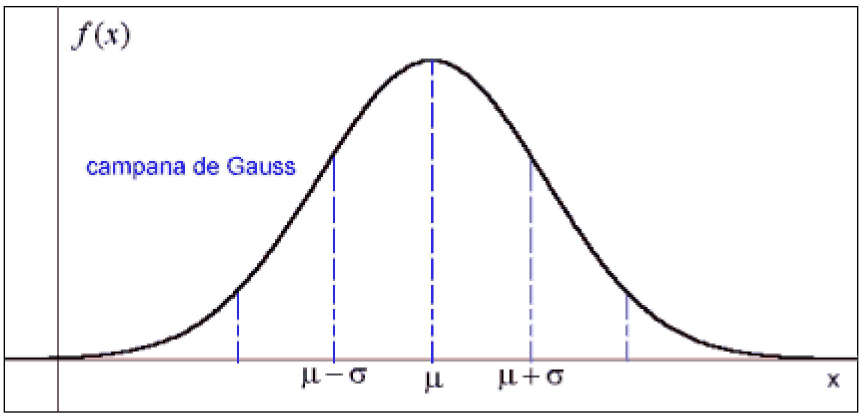
PROPUESTA

Considerando que nuestro objetivo principal es elaboración de una estrategia de trabajo que vaya más allá del clásico uso de tiza, borrador y pizarra, se plantea además del uso de métodos de didáctica y pedagogía emplear elementos de la historia de las matemáticas, elementos lúdicos y algunas aplicaciones prácticas a fin de lograr el interés por parte de los estudiantes.

De esta manera, el primer tema, Sucesiones, puede motivarse a través del estudio en la introducción por parte de Fibonacci de un modelo matemático el cual realizó para explicar el crecimiento de población de conejos, con el fin de dar una idea intuitiva del concepto de sucesión, seguido de la formalización del mismo y estudio de sus propiedades. En cuanto al aspecto lúdico se pretende dar a conocer e implementar algunos juegos de pensamiento a los estudiantes, por ejemplo, el juego de 11 tal como lo describe Martin Gardner en su ensayo de Número de Lucas y Números de Fibonacci.

Por otra parte, el tema de Series podemos motivarlo con la idea de sumas finitas y particularmente el caso de las series condicionalmente convergentes el cual ilustra que para el caso de sumas infinitas no se cumple la ley de conmutatividad. Además del uso de la enseñanza experimental por medio de aplicaciones a ciertos problemas de la física, química y biología.

Existen figuras geométricas (entendiéndose por una figura geométrica cualquier subconjunto del plano) que tienen perímetro infinito que encierran áreas finitas, esté hecho puede ser una motivación del acercamiento lúdico al estudio de la integral impropia, de esta manera se estudiarán sus aplicaciones así como los distintos criterios de convergencia de series numéricas. Es importante reflejar la gran utilidad que tienen las integrales impropias en todas las ramas del saber, especialmente en las estadísticas la cual está fundamentada en teoría de probabilidades, particularmente en las distribuciones de variables aleatorias siendo una de las más importantes la distribución normal, la cual está intrínsicamente relacionada a la integral impropia · Además, la gráfica de la función f(x)= representa una figura geométrica de perímetro infinito de área finita (Campana de Gauss).



-
-
- Por último, Ecuaciones Diferenciales. Existen problemas de física, especialmente en mecánica, donde resulta más importante desde nuestro punto de vista el cálculo de primitivas que el de pendiente de una curva, es el caso de la ecuación de cantidad de movimiento, tratándose simplemente de una ecuación diferencial que ha generado interés desde hace más de tres siglos; llama la atención de la comunidad científica como lo es el estudio de la descomposición radioactiva. Aplicaciones como éstas se pretende exponer a los alumnos con el objeto de dar a conocer la importancia de las ecuaciones diferenciales.

-
- Cabe destacar, que además del uso de la historia, así como elementos lúdicos y algunas aplicaciones, se elaborarán listas de problemas que el alumno deberá resolver con

el propósito de desarrollar y fortalecer habilidades a la hora de resolver los mismos y ¿por qué no? que como ente innovador puedan crear y proponer sus propios problemas.

Estrategias Metodológicas

Enseñar una clase de matemáticas o de cualquier otra disciplina, consiste en la narración oral o escrita, por medio de la cual se pretende establecer un diálogo claro y preciso con el fin de lograr el entendimiento del tema que se está tratando. Para lograr tal propósito debemos no sólo usar las herramientas que los libros de cálculo nos presentan sino además recurrir al uso de algunas estrategias metodológicas que nos facilitan captar la atención de los estudiantes, despertar su interés, estimular el gusto por la materia, así como el transmitir de manera amena, anecdótica e interactiva el conocimiento matemático, el surgir de algunas teorías y la importancia de las mismas, tal como recomienda el matemático, escritor, miembro de la Real Academia Española, Miguel de Guzmán Ozámiz, en su libro "Tendencias Innovadoras en Educación Matemática".

Los temas a enseñar en el curso de Matemáticas 40 son los siguientes: sucesiones, series infinitas, integrales impropias, series de potencia y ecuaciones diferenciales. Cada uno de estos temas va precedido de una motivación bien sea histórica, de aplicabilidad a otras ciencias y de la misma matemática a través de las siguientes estrategias metodológicas:

USO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Enseñar Matemática es enseñar a resolver problemas y la historia de la Matemática nos proporciona una guía para introducir de manera anecdótica los diferentes temas, dando a conocer interesantes personalidades que han hecho grandes aportes al desarrollo de la matemática e intentando explicar cómo, cuándo y bajo qué circunstancias surgieron algunas teorías como solución a problemas de la vida cotidiana, como lo es el caso de la conocida Sucesión de Fibonacci, la cual se origina según Martin Gardner, mediante la construcción de un modelo matemático que explica bajo ciertas condiciones el crecimiento de una familia de conejos que además de ser interesante, por su potencial aplicabilidad en el estudio de crecimiento de poblaciones, constituye una fuente de gran riqueza para el desarrollo del capítulo de sucesiones dando a conocer de esta manera la idea intuitiva del concepto de sucesión, la forma en que surgió como solución a un problema sencillo, algunas de sus propiedades y su gran importancia en el mundo real, tal como lo es su curiosa presencia en la naturaleza, conocido mediante el número de oro.

Así pues, el conocimiento de la historia nos proporciona una visión histórica de la evolución de la matemática además de destacar la importancia de los temas a estudiar y nos permite introducir, como estrategia metodológica el elemento sorpresa en nuestra enseñanza, pues ya se ha dicho que enseñar cualquier asignatura consiste en una narración y si queremos convencer, como mínimo debemos captar la atención del educando, por lo tanto, recurrimos a las técnicas narrativas entre las que se cuenta el elemento sorpresa en el desarrollo de la trama, es así como en el estudio de integrales impropias usamos la existencia de figuras geométricas que tienen perímetro infinito y encierran áreas finitas, como por ejemplo, la campana gaussiana. Aprovechamos el tema para presentar una breve bibliografía del matemático alemán Carl Frederich Gauss, resaltando sus aportes a la teoría de estadística y probabilidades a través de la distribución normal, también llamada distribución gaussiana, creemos que conociendo la vida y anécdotas de los cultores de la matemática, se pueda despertar el interés por su estudio; destacamos también la forma en que Carl Frederich en su niñez sorprendió a su maestro sumando los números del 1 el 100; así se pretende explicar de manera sencilla, no sólo las importancia de esta distribución sino las propiedades y la gran utilidad de las integrales impropias.

Es cierto que la matemática es una de las ciencias más difíciles de aprender y enseñar según el matemático Miguel de Guzmán Ozámiz, razón por la cual es pertinente buscar diferentes formas de motivación al momento de pretender que los estudiantes aprendan esta ciencia, así como también es cierto por experiencia propia que uno de los temas que genera más inquietud en ellos, no por su interés en él, sino porque ven un nivel de dificultad, sin desmerecer los demás temas, es el capítulo de ecuaciones diferenciales; es por ello que se trató de manera diferente a los demás temas sin dejar de lado los antecedentes y resaltando una vez más su gran impacto en la historia de la humanidad a través de una breve reseña sobre las guerras mundiales en las cuales se ha hecho uso desmedido de agentes químicos como el "uranio" para bombardear al enemigo, elemento producto de la descomposición radioactiva, la cual es posible estudiar gracias a la gran herramienta que constituyen las ecuaciones diferenciales, no sólo para el estudio de la creación de agentes químicos sino también para muchos otros fines como por ejemplo, calcular la antigüedad de los fósiles y la antigüedad de un árbol a través de la descomposición radioactiva, estudiar el crecimiento de una población, entre otros. De esta manera, no sólo se pretende motivar al estudiante, sino le aportamos gran cantidad de información que, además de ser útil para su formación como futuros profesores, también alimenta su cultura general conociendo la riqueza de la evolución de algunas teorías y su importancia en otras ramas de la ciencia, lo cual a su vez le permite incrementar su acervo de recursos didácticos y pedagógicos.

USO DE LA HEURÍSTICA

Es importante en la enseñanza de la matemática la resolución de problemas para que el estudiante logre alcanzar progresivamente por medio de los mismos el dominio de las propiedades dadas en el desarrollo de cada tema, ejercitando su creatividad y destreza al momento de enfrentar un problema , activar su capacidad mental, la confianza en sí mismo; pues no olvidemos que estamos enseñando a futuros docentes de matemática en la Escuela Secundaria, es así como en el capítulo de series y sucesiones reforzamos los contenidos curriculares de secundaria como productos notables, factorización, potenciación, radicales, compleción de cuadrados y suma de fracciones, aprovechando la oportunidad que nos brinda el cálculo de límites. De igual manera, es importante el dominio de derivadas, no sólo para el cálculo de límites sino también para el capítulo de integrales impropias y por su puesto, para el estudio del tema de ecuaciones diferenciales; es por ello que se realizaron talleres por cada tema, no sin antes haber hecho un breve quiz de derivadas en el cual debían hacer uso de las propiedades antes mencionadas, pues es importante resaltar que para el curso de Matemáticas 40 es imprescindible el dominio de derivadas ; en vista de que la gran mayoría no lo dominaba y considerando su importancia para el estudio del curso , dedicamos la primera semana a la resolución de problemas de derivación con el fin de nivelar a los estudiantes . Cabe destacar, que en el desarrollo de cada clase se solucionaron detalladamente problemas, a fin de que los estudiantes al momento de los talleres tuviesen conocimiento de la manera de abordarlos, sin dejar de lado la asistencia personal de mi parte al momento de los mismos, dando oportunidad a los estudiantes de despejar sus dudas y al mismo tiempo, dándome la oportunidad de conocer las dificultades de cada uno de ellos. Además, la resolución de problemas no sólo permite que los estudiantes pongan en práctica y apliquen las propiedades dadas en clase, sino que también les brinda la oportunidad de desarrollar problemas de aplicación a otras áreas como la Física, Biología, Probabilidades, Combinatoria y Geometría, por supuesto, acordes con el nivel y contenido de cada tema.

MODELIZACIÓN Y APLICACIONES

Como ya hemos mencionado, es de vital importancia conocer la utilidad, en nuestro caso, de las series y sucesiones, integrales impropias y ecuaciones diferenciales en la solución de problemas, no sólo del pasado, sino de la actualidad, razón por la cual además de recalcar a través de la heurísca algunas propiedades, se expone por cada tema aplicaciones a otras áreas de la matemática y otras ciencias, tal es el caso del capítulo de integrales impropias, en el cual por medio de la distribución normal se explica de manera geométrica e informal cómo la campana gaussiana ayuda al estudio de los niveles de azúcar en la sangre de un individuo, así como en el capítulo de series aparecen en los talleres problemas de fractales (serie geométrica) y física de manera que el estudiante se sienta atraído por la materia y capte la importancia que tiene el conocimiento matemático aplicado a otras áreas con el fin de motivarlos y que no se lleven la impresión de estudiar temas que no tienen utilidad , que sólo sirven para hallar un simple número, que a lo mejor para ellos sólo significa eso, “un número” sin sentido e interpretación alguna. Cabe destacar, que con este propósito se organizaron exposiciones en el capítulo de ecuaciones diferenciales, no sin antes haber dado en clase los diferentes métodos, en cada exposición se asignó una aplicación, por ejemplo; Física (resistencia de un resorte), Biología (crecimiento del ser humano, crecimiento de poblaciones), Química (soluciones ácido-bases), Medicina (marcapasos), Economía (estudio de oferta y demanda) y Paleontología (edad de los fósiles).

Además, como parte de la evaluación, la cual se explicará más adelante, se asignaron trabajos por cada tema, en los cuales al menos uno de los problemas era una aplicación de la teoría enseñada en clases (ver anexos). Sin dejar de lado el factor sorpresa, una vez terminado el capítulo de series se expuso la no conmutatividad de las series condicionalmente convergentes bajo reordenamiento, destacando que la suma finita de los números reales es conmutativa, propiedad que preservan las series incondicionalmente convergentes pero que, por el contrario, no se cumple en las series condicionalmente convergentes; no para ser evaluado, sino como valor agregado, tomando en cuenta el nivel de conocimiento de los estudiantes, explicando algunas demostraciones de la manera más clara y sencilla posible para su entendimiento, pues recordemos que nos estamos dirigiendo a estudiantes de humanidades, quienes parecieran no estar familiarizados con las demostraciones matemáticas, hecho que genera algunas observaciones de mi parte, las cuales será expuestas posteriormente.

De manera similar, en el capítulo de series de potencia nos dedicamos un poco al estudio del Binomio de Newton, tema de gran importancia no sólo por la relación de sus coeficientes con el triángulo de Pascal sino también, y aún más relevante, su relación con la teoría combinatoria, dando así ejemplos sencillos y prácticos, por supuesto, sin alejarnos de nuestro principal objetivo, motivarlos al estudio de nuestra materia, Matemáticas 40.

USO DE LA LÚDICA

Con el fin de despertar el interés y el gusto por la materia en los estudiantes acudimos también al uso de recursos lúdicos además de hacer más divertida y dinámica la clase aporta a los estudiantes trucos matemáticos por medio de los cuales pueden fortalecer sus habilidades y destrezas al momento de enfrentar un problema, juegos como los presentados anualmente en el encuentro de la física, química, matemática y biología , coordinado en nuestra escuela por el profesor Pérez Sánchez, quien no sólo se caracteriza por su excelente cátedra sino por usar esta metodología haciendo de la matemática un mundo mágico y divertido.

Del valor de los juegos para despertar el interés de los estudiantes se ha expresado certeramente Martin Gadner, gran experto en la presentación de multitud de juegos por muchos años en sus columnas de la revista de divulgación científica, "Scientific American", de la cual tomamos el Juego del 11 en el cual se hace uso de una de las propiedades más destacada de la sucesión de Fibonacci, juego que se realizó al final del capítulo de sucesiones.

Cronología

Semana 1

Fecha	Contenido
02/10/07	✓ Presentación Tema I: Sucesiones ✓ Motivación: Sucesión de Fibonacci ✓ Definición de sucesión ✓ Definición de límite
04/10/07	✓ Convergencia y divergencia de sucesiones ✓ Ejemplos ✓ Propiedades (ejemplos) ✓ Tipos de indeterminación ($\infty\infty$,1∞). Ejemplos ✓ Sucesiones crecientes y decrecientes
05/10/07	✓ Ejemplos de sucesiones crecientes y decrecientes ✓ Teorema de convergencia de sucesiones ✓ Aplicaciones

Semana 2

Fecha	Contenido
09/10/07	✓ Taller I ✓ Evaluación en el pizarrón
11/10/07	✓ Quiz de derivación ✓ Continuación del Taller I ✓ Motivación: Juego del 11
12/10/07	Feriado

Semana 3

Fecha	Contenido
16/10/07	✓ Repaso de derivadas, regla de la cadena, propiedades de potenciación.
18/10/07	Tema II: Series Infinitas ✓ Definición ✓ Definición de convergencia y divergencia de series (ejemplos) ✓ Serie telescópica. Ejemplos ✓ Serie armónica. Ejemplos ✓ Serie geométrica. Ejemplos
19/10/07	✓ Teorema de series convergentes. Ejemplos

✓ Criterio del n-ésimo término para la divergencia de series. Ejemplos

Semana 4

Fecha	Contenido
23/10/07	✓ Taller II
25/10/07	✓ Continuación del Taller II
26/10/07	✓ Criterio de la integral. Ejemplos
	✓ Teorema de la serie p. Ejemplos
	✓ Criterio de comparación por límite. Ejemplos
	✓ Criterio básico de comparación. Ejemplos

Semana 5

Fecha	Contenido
30/10/07	✓ Criterio de la razón
	✓ Criterio de la raíz. Ejemplos
	✓ Definición de series alternantes

	✓ Ejemplos
	✓ Criterio para la convergencia de series alternantes. Ejemplos
	✓ Definición de series absolutamente convergentes
	✓ Ejemplos
01/11/07	✓ Definición de series condicionalmente convergentes
	✓ Ejemplos
	✓ Criterio de la razón para series absolutamente convergentes. Ejemplos
	✓ Motivación: No conmutatividad de las series condicionalmente convergentes bajo reordenamiento.
	✓ Quiz
02/11/07	✓ Taller III

Semana 6

Fecha	Contenido
06/11/07	✓ Repaso de integración: Por partes Por sustitución
	Tema III: Integrales Impropias
	✓ Motivación: Bibliografía de Gauss Campana Gaussiana. Distribución Normal (Importancia en la estadística)
08/11/07	✓ Definición de integrales impropias

- ✓ Integrales impropias con límite superior infinito. Ejemplos
- ✓ Integrales impropias con límite inferior infinito. Ejemplos
- ✓ Integrales impropias con límite superior e inferior infinitos. Ejemplos
- ✓ Función de densidad exponencial

09/11/07 ✓ Primer Parcial

Semana 7

Fecha	Contenido
13/11/07	✓ Repaso de la clase anterior por causa de manifestaciones
15/11/07	✓ Taller IV
16/11/07	✓ Integrales impropias con discontinuidad infinita. Ejemplos
	✓ Integral impropia con discontinuidad infinita en su límite superior e inferior. Ejemplos

Semana 8

Fecha	Contenido
20/11/07	✓ Continuación del Taller IV
22/11/07	Capítulo IV: Series de Potencia
	✓ Definición de series de potencia en x

	✓ Intervalo de convergencia. Ejemplos
23/11/07	✓ Ejemplos de series de potencia en x ✓ Definición de series de potencia en (x-c) ✓ Teoremas ✓ Intervalo de convergencia. Ejemplos

Semana 9

Fecha	Contenido
27/11/07	✓ Representación de funciones en series de potencia. Ejemplos ✓ Intervalos de convergencia. Ejemplos ✓ Teorema de representación de funciones en series de potencia. Ejemplos
29/11/07	✓ Taller V
30/11/07	✓ Continuación del Taller V

Semana 10

Fecha	Contenido
04/12/07	✓ Series de Taylor. Ejemplos

	✓ Series de MacLaurin. Ejemplos ✓ Serie del Binomio de Newton. Ejemplos
06/12/07	✓ Segundo Parcial
07/12/07	No hubo clase (manifestaciones)

Semana 11

Fecha	Contenido
11/12/07	✓ Discusión del Segundo Parcial
13/12/07	✓ Repaso del capítulo de series de potencia
14/12/07	No hubo clase (manifestaciones)

Semana 12

Fecha	Contenido
08/01/08	✓ Repaso de series de potencia. ✓ Motivación: relación del binomio de newton con la teoría combinatoria.
10/01/08	✓ Continuación del Taller V
11/01/08	Capítulo V: Ecuaciones Diferenciales ✓ Organización de los grupos y fechas de exposiciones. ✓ Asignación de las exposiciones ✓ Discusión sobre la evaluación de la exposición y la

presentación de su respectivo trabajo.

Semana 13

Fecha	Contenido
15/01/08	✓ Motivación: Descomposición Radioactiva
17/01/08	✓ Definición de ecuación diferencial ordinaria de primer orden
	✓ Ejemplos
	✓ Definición de solución de una ecuación diferencial. Ejemplos
	✓ Ecuaciones diferenciales separables. Ejemplos
18/01/08	✓ Solución particular y general de una ecuación diferencial. Ejemplos
	✓ Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas. Ejemplos
	✓ Variación de parámetros. Ejemplos

Semana 14

Fecha	Contenido
22/01/08	✓ Tercer Parcial
24/01/08	✓ Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Ejemplos
	✓ Ecuaciones diferenciales de Ricatti. Ejemplos
25/01/08	✓ No hubo clase

Semana 15

Fecha	Contenido
29/01/08	✓ Exposiciones 1 y 2
31/01/08	Feriado (Corridas de Toros)
01/02/08	

Semana 16

Fecha	Contenido
05/02/08	Feriado (lunes de carnaval)
07/02/08	✓ Exposiciones 3 y 4
08/02/08	✓ Exposición 5

(*) Semanas de Extensión del Semestre

Semana 17

Fecha	Contenido
12/02/08	✓ Exposiciones 6 y 7
14/02/08	✓ Exposiciones 8 y 9
15/02/08	✓ Exposiciones 10 y 11

Semana 18

Fecha	Contenido
19/02/08	No hubo clase (ya habíamos terminado el programa)
21/02/08	
22/02/08	✓ Examen Diferido

Semana 19

Fecha	Contenido
26/02/08 28/02/08 29/02/08	✓ Entrega de notas

(*) En el mes de noviembre a pesar de las fuertes manifestaciones estudiantiles debido a la cercanía de la Reforma Constitucional hubo una asistencia masiva a la clase. En oportunidades nos reuníamos a las 9:00 a.m. para no ser afectados directamente por las mismas, es por esta razón, que no perdimos muchos días de clase permitiéndonos cumplir de esta manera con el 100% del programa; además de sentirnos holgados en las semanas de extensión que el Consejo Universitario aprobó.

Evaluación

Trabajos: Se realizó un trabajo por cada tema (Series y sucesiones, Integrales Impropias, Series de potencia, Ecuaciones Diferenciales), en el que se les asignó problemas de aplicación, así como también, al menos una demostración con el propósito de despertar su gusto por las mismas y romper con el temor que presentaban ante ellas.

Exámenes: Se realizaron tres exámenes parciales por tema en los cuales se evaluaron ejercicios trabajados en los talleres; esto se hizo con el propósito de que los estudiantes se sintieran de alguna manera obligados a asistir a los talleres y a desarrollar todos los problemas asignados en los mismos, con el mismo propósito en cada examen se evaluó un ejercicio del trabajo.

Exposiciones: Como había mencionado antes, el tema de ecuaciones diferenciales fue tratado de manera diferente a pesar de que se dieron en clase los métodos para hallar las soluciones de los mismos, de manera que una vez terminado el capítulo se asignaron exposiciones en pareja, apoyadas en un trabajo, el cual tenía que estar muy bien presentado, justificando cada una de las operaciones que allí se realizaban así como también la justificación de los métodos que fueron usados con algunas demostraciones. En estas exposiciones se recalcaron los métodos vistos en clase además de una aplicación.

Evaluación continua: A pesar de no tener un peso porcentual específico se realizaron algunos quices, tareas, evaluaciones en el pizarrón y pequeños interrogatorios grupales con el propósito de que llevaran la materia al día, los cuales fueron tomados en cuenta a la hora de los exámenes.

Los porcentajes de evaluación fueron los siguientes,

Exámenes parciales	15%
Trabajos	10%
Exposición	15%
Trabajo de la exposición	10%

Limitaciones

- El desinterés por el curso y por la entrega de tareas al comienzo del semestre. Es por ello que tomé la decisión de hacer evaluaciones continuas en el pizarrón y la aplicación de quices para que de esta forma se vieran obligados a leer el cuaderno y realizar los ejercicios propuestos como tareas, viendo al cabo de dos fuertes semanas un cambio satisfactorio.

- La mayoría de los alumnos no recordaban derivar, por lo cual no podía avanzar en el contenido del programa sin antes hacer un esfuerzo intensivo de una semana para nivelar no sólo el cálculo de derivadas sino también reforzar algunas propiedades los conocimientos de bachillerato.

- Conocían algunos teoremas vistos en los cursos de matemática anteriores pero no entendían la esencia ni el significado y aplicación de los mismos; entre ellos podemos citar el teorema del sandwich y el teorema de L`Hopital, por lo cual en momentos dejaba de lado la clase para dedicar un rato a explicar con ejemplos sencillos estos teoremas.

- Las manifestaciones estudiantiles sin duda fueron una de las principales limitaciones en cuanto al normal y tranquilo desarrollo de la clase puesto que a pesar de la asistencia masiva por tratarse a horas de la mañana, a saber 10:00 a.m, las manifestaciones comenzaban alrededor de las 11:00 a.m. haciendo que la salida de la Facultad se tornaba en algunas ocasiones difícil y peligrosa. A pesar de ello, en oportunidades acordamos conjuntamente realizar las clases más temprano de lo usual para evitar la pérdida de clases.

- La mala presentación de los trabajos. De una u otra forma fue una limitante en el avance de la clase puesto que cada vez que asignaba los trabajos era necesario dedicar al menos 20 minutos para explicar la manera correcta de presentar un trabajo en general, y más aún por tratarse de una trabajo de matemáticas, explicar la forma de desarrollar cierto problema y cómo hacer una demostración, pues en muchas oportunidades y con mayor frecuencia al principio del semestre, encontré trabajos realizados con distintos tipos de letras, desordenados, y carentes de redacción alguna.

- La apatía y el temor a las demostraciones matemáticas. Incluso hubo personas que no distinguían la hipótesis de la tesis. Por esta razón, muchos de los objetivos planteados en la propuesta no fueron alcanzados en su totalidad, ya que los que los estudiantes no contaban con los conocimientos necesarios para el desarrollo de algunos temas, tal es el caso de la distribución normal el cual se dio de manera informativa, sin demostración alguna.

Recomendaciones

- Exigir a los profesores que culminen con el programa de la materia asignada puesto que los mismos estudiantes manifestaron no estar lo suficientemente preparados para el curso de Matemáticas 40 debido a que en materias anteriores (las materias prelantes) no se dio todo el contenido del programa o se dio de manera superficial, razón por la cual no recordaban derivar y mucho menos integrar; recordemos la importancia de los mismos para el estudio de convergencia de series y sucesiones a través de evaluaciones de límites, así como la importancia que constituyen en el capítulo de integrales impropias y ecuaciones diferenciales.

- Enseñar al estudiante desde el principio de la carrera a hacer pequeñas demostraciones para que, de alguna manera u otra, desaparezca el temor y desinterés que presentan por las mismas.

- Mayor supervisión al personal obrero ya que en muchas oportunidades el salón no estaba en condiciones óptimas para el desarrollo de la clase.

- Los estudiantes manifestaron su interés en que las demás materias sean de alguna u otra forma impartidas con un tipo de motivación, bien sea histórica o de aplicabilidad, de igual manera manifestaron su agrado por el presente proyecto, pues además de darles la oportunidad de conocer grandes personalidades de la historia de las matemáticas fortalecieron sus conocimientos a través de los talleres en los cuales también tuvieron la oportunidad de desarrollar y conocer algunas aplicaciones. Además, recalcaron ser la primera vez que ven una materia de esta manera, razón por la cual, les gustaría que esta forma de enseñanza fuese aplicada a las demás materias.

Resultados

En el curso de Matemáticas 40 hubo una asistencia hasta el final del curso de 19 personas, lo cual equivale al 95% de los estudiantes, pues a pesar de que no hubo retiros, el 5% restante equivalente a 1 estudiante no tuvo una asistencia frecuente; no digo con esto que hubo total asistencia todos los días pero entraban al menos dos veces de las tres clases semanales excepto esta persona.

Total de Estudiantes	20	100%
Estudiantes Aprobados	19	95%
Estudiantes Reprobados	1	5%

En el siguiente gráfico se puede observar el promedio de cada parcial y trabajo por capítulos. En el primer capítulo series y sucesiones el promedio general fue 8.35 ya que los estudiantes no dominaban derivadas y algunas propiedades básicas, rendimiento muy distinto al del segundo parcial, 12.6, resultado que atribuyo al arduo esfuerzo realizado en los talleres. En el tercer parcial, 10.35. Notablemente, el rendimiento fue mucho mayor en los trabajos ya que los mismos fueron elaborados en parejas con un tiempo no mayor de una semana para su entrega.

A continuación, un gráfico en el cual se presenta los promedios del curso en forma porcentual;

El promedio general del curso fue, 11.4 puntos. En el gráfico podemos observar que el 5% con 08 puntos, 40% entre 10 y 11 puntos, 20% entre 12 y 13 puntos, 10% entre 14 y 15 puntos, y 25% entre 16 y 17 puntos.

En general, el rendimiento del curso fue bueno a pesar de las limitaciones que al pasar el tiempo fueron superándose poco a poco a través de los talleres.

En cuanto al curso anterior a éste, a saber A-2007, el total de personas inscritas fue de 9 personas de las cuales 5 aprobaron el curso y 4 lo reprobaron.

En mi opinión este proyecto trae consigo muy buenos resultados, no sólo en la parte cuantitativa, sino también en la parte cualitativa, pues claramente se observó un gran cambio en el interés de los estudiantes por la materia y un cambio de actitud completo ya que en un principio presentaban gran apatía por la materia e incluso temor por la misma.

Sería interesante que estas estrategias metodológicas sean empleadas en otras materias para estudiar los resultados y hacer posteriores comparaciones y estudios al respecto.

Los siguientes son los elementos motivaciones expuestos en clase por cada capítulo como lo hemos explicado anteriormente, así como algunas biografías de personalidades matemáticas.

La sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144....

A finales del siglo XII, la república de Pisa era una gran

potencia comercial, con delegaciones en todo el norte de África. En una de estas delegaciones, en la ciudad argelina de Bugía, uno de los hijos de Bonaccio, el responsable de la oficina de aduanas en la ciudad, Leonardo, fué educado por un tutor árabe en los secretos del cálculo posicional hindú y tiene su primer contacto con lo que acabaría convirtiéndose, gracias a él, en uno de los más magníficos regalos del mundo árabe a la cultura occidental: nuestro actual sistema de numeración posicional.

Leonardo de Pisa, Fibonacci, nombre con el que pasará a la Historia, aprovechó sus viajes comerciales por todo el mediterráneo, Egipto, Siria, Sicilia, Grecia..., para entablar contacto y discutir con los matemáticos más notables de la época y para descubrir y estudiar a fondo los Elementos de Euclides, que tomará como modelo de estilo y de rigor.

De su deseo de poner en orden todo cuanto había aprendido de aritmética y álgebra, y de brindar a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado, nace, en 1202, el *Liber Abaci,* la primera summa matemática de la Edad Media.

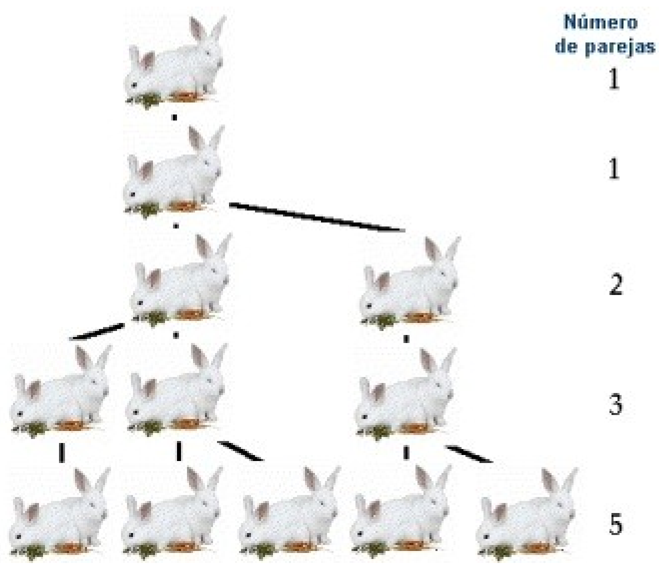
En él aparecen por primera vez en Occidente, las nueve cifras hindúes y el signo del cero. Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas claras para realizar operaciones con estas cifras tanto con números enteros como con fracciones, pero también proporciona la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.

Pero Fibonacci es más conocido entre los matemáticos por una curiosa sucesión de números:

1; 1; 2; 3, 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89....

que colocó en el margen de su Liber abaci junto al conocido "problema de los conejos" que más que un problema parece un acertijo de matemáticas recreativas. El problema en lenguaje actual diría:

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?.



En este gráfico vemos que el número de parejas a lo largo de los meses coincide con los términos de la sucesión.

Veamos con detalle estos números: **1; 1; 2; 3, 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89, 144....**

donde cada número (como Fibonacci lo hizo notar) resulta de sumar los dos que le anteceden. Al cabo de doce meses tendremos 377 pares de conejos.

Su fórmula general es una función recursiva de término general

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0; \\ 1 & \text{si } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Esta sucesión ha tenido intrigado a matemáticos durante siglos, en parte a causa de su tendencia a presentarse en los lugares más inapropiados y por el hecho de que el cociente entre cada término y el anterior se va acercando cada vez más a un número muy especial, ya conocido por los griegos y aplicado en sus esculturas y sus templos: el número áureo 1.618039....

Aparte de que esta sucesión tiene varias propiedades interesantes, como que se puede formar cualquier número natural mediante la suma de términos de la sucesión, sin que ninguno se repita, lo más curioso de esta sucesión es su presencia en la naturaleza. La sucesión de Fibonacci está muy ligado a la vida y estos hechos lo demuestran:

Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que cumple con esta sucesión. El hecho es que los zánganos, el macho de la abeja, no tiene padre (1), pero sí que tiene una madre (1, 1), dos abuelos, que son los padres de la reina (1, 1, 2), tres bisabuelos, ya que el padre de la reina no tiene padre (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5), ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8) y así sucesivamente, cumpliendo con la sucesión de Fibonacci.

En la mano humana también se encuentra esta recurrencia, la longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales y la longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales.

El número de pétalos de una flor es generalmente un término de Fibonacci. Hay flores con 2 pétalos, 3, 5, 8, 13, 21, 34, pero muy rara vez es un número que no esté en esta sucesión.
La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.

La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
La relación entre las divisiones vertebrales.
La relación entre las articulaciones de las manos y los pies.
En las espirales de los girasoles.

En las espirales de las piñas.

La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a. C..

En los violines, la ubicación de las efes (los "oídos", u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.

El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Da Vinci, entre otros.

Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitruvio y en otras obras de Leonardo da Vinci.

En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý.

Como cosa curiosa de la sucesión de Fibonacci podemos destacar que el número de Fibonacci F(n+1) da el número de maneras para fichas de dominó 2 x 1 de cubrir un tablero de ajedrez de medidas 2 x n.

Juego del 11

Se refiere a un truco de cálculo relámpago muy poco conocido.

"Vuélvase de espaldas, y pídale a un amigo que escriba un par de enteros positivos cualesquiera (uno debajo del otro), que lo sume y obtenga un tercero, que debe escribir debajo del segundo; que sume los dos últimos números y obtenga un cuarto, prosiguiendo de esta forma hasta tener una columna de diez números."

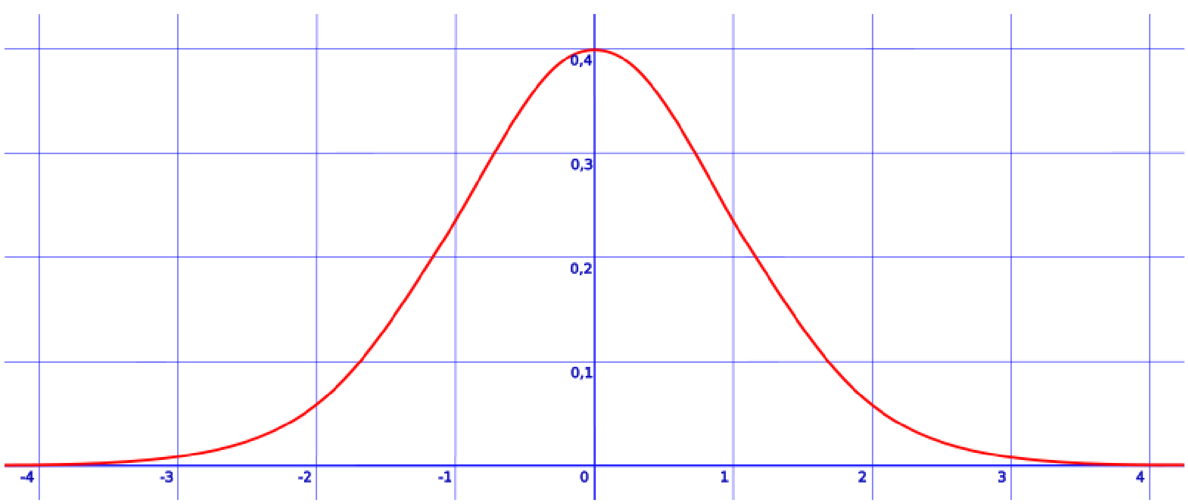
Es decir, ha de escribir los primeros diez números de la sucesión de Fibonacci, donde cada término es suma de los dos que le preceden, exceptuando los dos primeros, que son arbitrarios. Hecho esto, usted se vuelve, traza una raya por debajo de los diez sumandos, e inmediatamente empieza a escribir la suma.

La clave consiste en multiplicar por 11el séptimo de los números a sumar, operación que de manera fácil se realiza mentalmente. Supongamos que el séptimo número sea 928. Así al multiplicar 11 por 928 obtenemos la cifra 10.208 la cual asombrosamente es el resultado que se obtiene al sumar los 10 términos conseguidos anteriormente por el compañero. Pareciera una acto de magia, claro que ninguna persona en la clase en ese momento sabe cuál es el truco, por decirlo de esa manera, creando así gran asombro e interés en los alumnos por descubrir cómo hizo el profesor para saber cuál sería el resultado.

Martin Gardner pregunta: ¿Sabrá el lector demostrar que la suma de los diez primeros números de una sucesión de Fibonacci es siempre 11 veces el séptimo término? Notemos así, cómo este famoso autor a través de la lúdica nos conduce a conocer una de las tantas propiedades de dicha sucesión captando la atención de la clase de forma amena, entretenida y divertida donde el estudiante pone su máximo interés por descubrir cuál es el secreto y seguramente captará, entenderá y aprenderá mucho mejor este capítulo y quizás descubra por sí mismo cuál es la demostración de esta propiedad.

Distribución Normal

La *Campana de Gauss* es la representación gráfica de la ecuación matemática que corresponde a una distribución normal.



La distribución normal, también llamada distribución de Gauss o distribución gaussiana, es la distribución de probabilidad que con más frecuencia aparece en estadística y teoría de probabilidades. Esto se debe a dos razones fundamentalmente:

Su función de densidad es simétrica y con forma de campana, lo que favorece su aplicación como modelo a gran número de variables estadísticas.

Es, además, límite de otras distribuciones y aparece relacionada con multitud de resultados ligados a la teoría de las probabilidades gracias a sus propiedades matemáticas.

La función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ (M) es la media y σ(sigma) es la desviación estándar (σ^2 es la varianza).

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana.

La importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal:

- Caracteres morfológicos de individuos
- Caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco
- Caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos
- Caracteres psicológicos como el cociente intelectual
- Nivel de ruido en Telecomunicaciones
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes
- Valores estadísticos muestrales como la media

Cabe destacar que se pretende que los alumnos digieran de manera más rápida nuevos conceptos y éste se obtiene presentándoles distintas aplicaciones de estos nuevos objetos matemáticos, así como la importancia y aplicabilidad en la vida real, incentivándolos de esta manera a posteriores estudios.

Combinatoria y el Binomio de Newton

Los coeficientes de los términos del desarrollo de cualquier potencia de un binomio los da en seguida el siguiente triángulo llamado *"Triángulo de Pascal"*.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Los números del triángulo reciben el nombre de números combinatorios.

En la fila 3 tenemos 4 números combinatorios: C3,0=1 ,C3,1= 3, C3,2= 3, C3,3=1. El número combinatorio Cn,m representa el número de grupos distintos de m elementos que se pueden formar a partir de n objetos, de forma que cada grupo se diferencie de otro en algún elemento (combinaciones de n elementos tomados de m en m). Por ejemplo, ¿cuántas delegaciones de 11 miembros se pueden formar a partir de un grupo de 20 personas? La respuesta es C20,11. Para calcular el número basta construir 21 filas del triángulo de Pascal y fijarnos en el número que ocupa el lugar 12 (hemos empezado a contar los elementos de cada fila por el elemento 0 y las filas por la fila 0).

El cálculo también se puede hacer utilizando la fórmula siguiente:

$$C_{n,m}=n!m!n-m! \quad (1)$$

En el triángulo de Pascal aparecen los números triangulares (1, 3, 6, 10,...), tetraédricos (1,4,10,20,35,56,...), los números de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,......), etc.

Se han estudiado multitud de propiedades numéricas del triángulo, criterios de divisibilidad, algoritmos para calcular restos al dividir por un número concreto, etc. Este triángulo es atribuido por algunos matemáticos a Tartaglia.

Descomposición Radioactiva

Los núcleos atómicos de ciertos isótopos modifican espontáneamente su estructura fueron identificados con una propiedad a la que llamamos radiactividad. Su naturaleza puede ser de dos tipos:

- *Radioactividad natural*: Es la que manifiestan los isótopos que se encuentran en la naturaleza.
- *Radiactividad artificial o inducida:* Es la que ha sido provocada por transformaciones nucleares artificiales.

Un personaje importante en el desarrollo de las investigaciones que giraron alrededor de la radioactividad fue Wilhelm Röntgen, gracias a su descubrimiento de los rayos X. Sin embargo, aunque la radioactividad no es algo nuevo, no fue sino hasta que en 1896 Becquerel descubrió que ciertas sales de uranio emitían radiaciones espontáneamente. Bequerel hizo varios experimentos mediante el cual pretendía determinar primero, por qué las placas fotográficas se velaban pese a estar envueltas en papel negro, pero ante la presencia de las sales de uranio. Realizó experimentos con el material en diferentes condiciones obteniendo en todos los casos la misma intensidad; con sus análisis encontraba que esta propiedad no dependía de la forma ni de la composición química en la que se encontraba los átomos del cuerpo radioactivo.

El trabajo de Becquerel fuero rápidamente seguidos por los trabajos de dos investigadores mas: Pierre Curie y Marie Sklodowska, que son generalmente identificados como los esposos Curie. Aunque sus trabajos no fueron los primeros, sin duda alguna marcaron una importantísima labor en el conocimiento de estas investigaciones, como producto de ello obtienen el premio Nobel al lado de Bequerel en 1903, mas aun, después de la muerte de Pierre, Marie Curie trabajaría en investigación acerca de los fenómenos que se encuentran alrededor de la radioactividad, investigaciones que le constaría la vida.

Uno de los puntos importantes de los trabajos de los esposos Curie fue el descubrimiento de otro tipo de elementos radioactivos tales como el Torio y el Polonio en julio de 1898 y el Radio descubierto en diciembre del mismo año. Posteriormente Marie Curie deduciría que la radioactividad era una propiedad atómica, que se origina en el núcleo de los átomos, producto de observar que la intensidad de la radiación emitida era proporcional a la cantidad de uranio presente.

Desde entonces ha sido común llamarle radiación a toda energía que se propaga en forma de onda a través del espacio. De esta forma existe una clasificación desde la luz visible a las ondas de radio y de televisión como radiación conocida como radiación no ionizante.

Otra clasificación la forma la radiación ionizante la cual va desde la luz ultravioleta a los rayos X o la energía fotónica.

Existen dos tipos de radiaciones ionizantes:

- Electromagnética, constituida por rayos α, β, γ (los cuales serán abordados a continuación), rayos X o de Röntgen y los rayos ultravioleta
- La constituida por partículas subatómicas tales como electrones, neutrones, protones.
-

Efectos biológicos: Durante millones de años, los seres vivos hemos soportado la radiactividad natural de la corteza terrestre y de los rayos cósmicos. La exposición a altas dosis de radiación aumenta la tasa de cáncer y pueden producir otros trastornos de tipo genético. Los efectos de la radiactividad no siempre son perjudiciales ya que si empleamos la dosis y forma adecuada, la radiactividad tiene muchas utilidades en distintos campos:

- En medicina se utiliza para el tratamiento y diagnóstico del cáncer, el estudio de órganos y la esterilización del material quirúrgico.

- En la industria se emplean radiografías para examinar planchas de acero, soldaduras y construcciones.

- En química se emplea para investigar mecanismos de reacción y fabricar productos químicos.

Un uso curioso de la radiactividad: Uno de los numerosos usos de la radiactividad es la protección de las obras de arte. El tratamiento mediante rayos gamma permite eliminar los hongos, larvas, insectos o bacterias alojados en el interior de los objetos a fin de protegerlos de la degradación. Esta técnica se utiliza en el tratamiento de conservación y de restauración de objetos de arte, de etnología, de arqueología.

A continuación algunas biografías de personalidades que fueron de gran importancia en el desarrollo de éste proyecto.

Miguel de Guzmán Ozámiz

Matemático español, nace el 12 de enero de 1936 en la ciudad de Cartagena en el seno de una familia con gran interés en la ciencia. Ya de muy joven demostró una gran curiosidad por las Matemáticas, en especial por los temas más abstractos. Finaliza el bachillerato en 1952 y a pesar de ese interés por las Matemáticas inicia estudios de Ingeniería Industrial en Bilbao, decisión probablemente influenciada por la situación laboral de la época y lugar.

Viajes y estudio

Sin llegar a terminar la carrera, ingresa en la Compañía de Jesus, dejándola amistosamente en 1971. Estudió Humanidades y Filosofía en Munich(Alemania), licenciándose en 1961. Regresa a España y se licencia en Matemáticas y Filosofía en 1965. Hizo su tesis en la universidad de Chicago. Fueron años de gran actividad intelectual y docente que le llevó a ejercer de profesor en distintas universidades como la Washington University de Saint Louis, Princeton, Brasil, y Suecia. Gracias a estos viajes consiguió cierto dominio de las lenguas alemana, portuguesa, e italiana. Además hablaba inglés, francés, latín y griego.

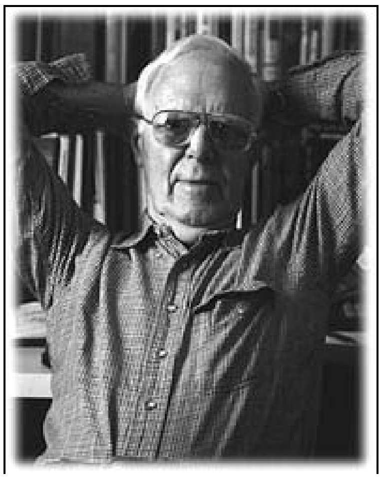
Trabajo y divulgación de las Matemáticas

Miguel de Guzmán regresa a España en 1969, año de grandes agitaciones sociales. Ingresa como agregado de la cátedra de Análisis Matemático en la *Universidad Autónoma de Madrid* hasta el año 1982 cuando alcanzó la cátedra de la misma donde permaneció dos años más. Es nombrado miembro de la Real Academia de las Ciencias en 1983, su discurso de recepción se tituló *Impactos del análisis armónico*. De 1991 a 1998 fue presidente del ICMI, Comisión Internacional de Instrucción Matemática. La mayor parte de su carrera docente transcurre en la *Universidad Complutense de Madrid*, como catedrático de esa universidad hasta su fallecimiento. Miguel de Guzmán posee en su honor un aula homónima dedicada a las matemáticas en dicha universidad.

En 1999 funda el proyecto *ESTALMAT (Estimulación del Talento Matemático)* en Madrid, con el fin de potenciar el desarrollo de las habilidades matemáticas en los jóvenes que demuestran interés por ello.

Recogiendo el legado de Miguel de Guzmán, la Real Sociedad Matemática Española propuso el establecimiento de una actividad anual de formación en materia de educación matemática que llevase su nombre y que fuese digna de su memoria, implicando en la misma a alguna organización de profesores de matemáticas. La *Asociación Gallega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA)* brindó desde muy pronto su colaboración para el desarrollo de esta Escuela que lleva funcionando anualmente desde el año 2005.

Martin Gardner



Martin Gardner nació en Tulsa, Oklahoma (Estados Unidos) el 21 de octubre de 1914. Estudió filosofía y después de graduarse se dedicó al periodismo.

Saltó a la fama gracias a su columna mensual *Juegos matemáticos*, publicada en la revista de divulgación científica *Scientific American* entre diciembre de 1956 y mayo de 1986. A lo largo de esos treinta años trató los temás más importantes y paradojas de la matemática moderna, como los algoritmos genéticos de John Holland o el juego de la vida de John Conway, con lo que se ganó un lugar en el mundo de la matemática merced a la evidente calidad divulgativa de sus escritos. Su primer artículo llevaba el título de *Flexágonos* y trataba en concreto sobre los hexaflexágonos; el último tuvo como tema los árboles de Steiner minimales.

Gardner también escribió una columna en la revista Skeptical Inquirer, dedicada a la investigación científica de los fenómenos paranormales, con el objetivo de poner en evidencia los fraudes. Además de sus libros sobre pasatiempos matemáticos y divulgación científica, ha escrito sobre filosofía (*Los porqués de un escriba filosófico*) y una versión comentada del clásico de Lewis Carroll *Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas* (*Alicia anotada*), así como numerosas revisiones de libros de otros autores.

Leonardo de Pisa

Fué el matemático más original y hábil de toda la Edad Media, pero buena parte de sus trabajos eran demasiado difíciles para ser bien comprendidos por sus contemporáneos. Hizo contribuciones a la aritmética, el álgebra y la geometría.

En el siglo XIII se produjo un despertar cultural y científico de gran relevancia. En matemáticas, buena parte de este avance se debió a la obra de un matemático y mercader italiano *Leonardo de Pisa* (1180-1250).Su padre, Guglielmo Bonaccio, era agente de comercio, emigró con su familia a Argelia, en lo que fue el primero de una serie de viajes que le llevarían a Egipto, Sicilia, Grecia y Siria, y Leonardo, aunque nacido en Pisa, fue educado inicialmente por maestros árabes que le pusieron al corriente de los muchos conocimientos matemáticos que poseían, heredados de los griegos a través de los matemáticos indios.

En contacto con estas culturas conoció las ventajas de sus métodos de numeración. Esto le llevó a publicar, en 1202, su obra más conocida, el *Liber Abaci* (Libro del Ábaco), que poco tiene que ver, en realidad, con el ábaco y que constituye, fundamentalmente, una colección de problemas aritméticos y algebraicos (diversos métodos de cálculo y la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado), junto con una apasionada defensa de la superioridad de los métodos de numeración de los árabes (notación posicional con las nueve cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 más el 0, el *céfiro* de los árabes, de donde provienes nuestras palabras *cero* y también *cifr*a). En 1228 publicó una segunda edición, ampliada y reelaborada, del *Liber Abac*i, aunque en su época no fue muy apreciada. La obra no apareció hasta el siglo XIX. El problema más famosos que aparece en el *Liber Abaci* es el siguiente:

En una granja hay, al principio del año, una pareja de conejos que acaban de nacer. Al cabo de dos meses, esta pareja está preparada para reproducirse. Produce cada mes una pareja de conejos que, al cabo de dos meses, está a su vez preparada para empezar a reproducirse, dando otra pareja cada mes. ¿Cuál es el número de parejas de conejos en la granja el día quince de cada mes del año?

Este problema da lugar a la llamada "sucesión de Fibonacci".

Carl Friedrich Gauss

Gauss nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Alemania. Gauss es uno de los matemáticos más grandes de la historia, conocido como *el príncipe de los matemáticos*.

A la edad de 7 años (o 10 según otras versiones) asombró a su profesor. Este profesor castigaba a sus alumnos haciéndoles sumar una serie de números. Una vez castigó a toda la clase a sumar desde el número 1 hasta el número 100. Gauss entregó el cálculo en un tiempo sorprendentemente breve con la respuesta correcta. El profesor le preguntó cómo lo había hecho. Gauss le dijo 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, siempre suman 101. Como son 50 sumas de 101, el total es 5050.

A los dieciséis años de edad ideó un método para deducir, de medidas hechas a partir de un punto terrestre, los elementos de la órbita de un planeta, calculando los del planeta Urano. Gauss no estaba seguro de su vocación: las matemáticas o la filología; pero tanto le gustaron sus resultados que se dedicó a las matemáticas.

En 1795 Gauss fue a estudiar a la Universidad de Göttingen, con una beca del Duque de Brunswick. Volvió a Brunswick donde obtuvo el título universitario que le habilitaba como matemático. El duque de Brunswick mantuvo a Gauss económicamente, pero le exigió que se doctorase en la Universidad de Helmstedt. La disertación de Gauss fue el teorema fundamental del álgebra.

En 1801 publicó su famoso libro Disquisiciones Aritméticas que consta de siete secciones, la última dedicada a la teoría de números. A principios de este año un astrónomo descubrió el planeta Ceres (en realidad, un asteroide), pero sólo pudo observar nueve grados de su órbita, antes de que se escondiese detrás del sol. Un astrónomo amigo de Gauss, publicó varias predicciones, incluyendo una de Gauss, de la posición en la que aparecería el planeta. La predicción de Gauss, difería bastante de las otras y sin embargo, fue la correcta. Gauss no dijo qué método había empleado para hacer la predicción pero se cree que utilizó el método de aproximación por mínimos cuadrados.

Fue el primero en utilizar el nombre de números complejos. Gauss definió a las matemáticas como *la reina de las ciencias*, y a la aritmética como *la reina de las matemáticas*. Gauss es considerado uno de los matemáticos más importantes de la historia de la humanidad

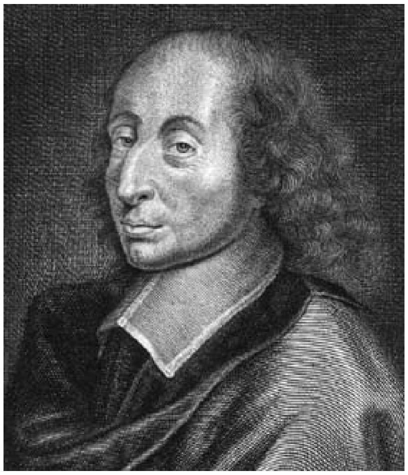
En 1818 le encargaron el trabajo de calcular la superficie geodésica del estado de Hannover. Gauss se interesó desde muy joven por la geometría no euclidea. Discutió el tema con Farkas Bolyai y otros, sin embargo no publicó nada porque creía que su reputación se pondría en entredicho. Más tarde, cuando Lobachevsky publicó su trabajo sobre el tema, dijo en una carta a Schumacher que él estaba convencido desde hacía 54 años (lo que supone que lo había pensado con 15 años).

Gauss había hecho algunos trabajos sobre los potenciales que fueron muy importantes para el desarrollo de la Física. En 1832 Gauss y Weber trabajaron sobre el magnetismo terrestre. El trabajo conjunto de ambos duró seis años y fue muy importante.

Los trabajos de Gauss son muchísimos y han tenido y tienen una influencia muy grande en la práctica totalidad de las ramas de la Física y las Matemáticas (Teoría de Números, Geometría Diferencial, Astronomía, Estadística, Magnetismo,...).

Gauss murió el 23 de febrero de 1855 en Göttingen, Hanover (Alemania).

Blaise Pascal



Nació en Clermont-Ferrand, Francia, en el año 1623, y se crió en el seno de una familia burguesa. A los nueve años se estableció, junto a su padre -Étienne Pascal- y su hermana -Jacqueline- en París. Su madre murió cuando tenía penas tres años.

De muy joven su padre lo inició en la geometría, su primera afición. Además lo introdujo en el círculo de Mersenne, la Academia, a la que él pertenecía. Allí Pascal, a los dieciséis años, redactó su "Ensayo sobre las cónicas", que contenía lo que hoy se conoce como teorema del hexágono de Pascal.

En colaboración con Fermat (matemático de reconocido prestigio) se ocupó de las propiedades del triángulo aritmético, que lleva su nombre, que da los coeficientes de los desarrollos de las sucesivas potencias de un binomio. Por el tratamiento que hizo de dicho triángulo se convirtió en uno de los fundadores del cálculo matemático de probabilidades. También fue el iniciador de la Teoría de Juegos.

Pascal además desarrolló el diseño y la construcción de la primera calculadora mecánica de la historia (1642-44). Esta máquina disponía de ocho ruedas y permitía efectuar sólo restas y sumas. Fue por esto que el mundo lo conoció.

Se interesó por la física, y en especial por la hidráulica, lo cual le sirvió para inventar la prensa hidráulica y la jeringa. En esta disciplina desarrolló además el principio que lleva su nombre. También descubrió que la presión en el interior de un fluido en reposo es la misma en todas las direcciones y demostró que la presión atmosférica es consecuencia del peso de aire. En 1647, debido a que se encontraba enfermo, fue aconsejado por los médicos a iniciar un periodo de distracción. Ya en 1646 había adoptado las doctrinas jansenistas, además se retiró a la abadía Port-

Royal. En 1654, empezó su experiencia mística, convencido de que el camino hacia Dios estaba en el cristianismo y no en la filosofía. Por esto pospuso su trabajo científico.

En su filosofía se puede advertir la influencia de Epicteto, Montaigne y Descartes. Escribió sus "Provinciales" (1657) en defensa de los jansenistas. Estas cartas fueron consideradas como modelo de prosa francesa. El éxito de las mismas se convirtió en una apología de la religión cristiana.

En 1658 Pascal regresó un poco al trabajo científico y elaboró su estudio de la cicloide, que resultó un importante estímulo en el desarrollo del cálculo infinitesimal. Afectado por la enfermedad murió en 1662, en París. Póstumamente se publicó "Pensamientos" (1669). Esta obra se trató de una recopilación de reflexiones acerca del sufrimiento humano y la fe en Dios.

Isaac Newton

Nació el 25 de Diciembre de 1642 (según el calendario Juliano y el 4 de Enero de 1643 según el calendario gregoriano vigente en toda Europa) en Woolsthorpe (Inglaterra) y murió el 23 de Marzo de 1727 en Kensington

Su padre murió tres meses antes de que naciera y su madre se volvió a casar cuando Isaac apenas tenía tres años, por lo que fue criado por su abuela. Esta separación le traumatizó.

No fue un niño prodigio. Nació sietemesino en una familia de campesinos. Tuvo problemas de salud y dificultades en los estudios. Como era débil físicamente no jugaba con los niños de su edad, escribía poesías, dibujaba y construía juguetes.
Sus primeros estudios los realizó en las escuelas situadas en los pueblos cercanos a donde vivía, a las que iba andando. En estos colegios no era muy buen estudiante (era el penúltimo de la clase). Con 17 años le sacaron del colegio para ayudar a la granja familiar, pero se pasaba la mayor parte del tiempo resolviendo problemas, experimentando e ideando modelos mecánicos. Como era un pésimo granjero, su madre y su tío decidieron que fuera al College Trinity de Cambridge donde ingresó en 1661. Tras su graduación en 1665, Isaac Newton se orientó hacia la investigación en Física y Matemáticas, con tal acierto que a los 29 años ya había formulado teorías que señalarían el camino de la ciencia moderna hasta el siglo xx; por entonces ya había obtenido una cátedra en su universidad (1669).

Suele considerarse a Isaac Newton uno de los protagonistas principales de la llamada «Revolución científica» del siglo XVII y, en cualquier caso, el padre de la mecánica moderna. No obstante, siempre fue remiso a dar publicidad a sus descubrimientos, razón por la que muchos de ellos se conocieron con años de retraso.

Newton coincidió con Leibniz en el descubrimiento del cálculo integral, que contribuiría a una profunda renovación de las Matemáticas; también formuló el teorema del binomio *(binomio de Newton).* Pero sus aportaciones esenciales se produjeron en el terreno de la Física.

Sus primeras investigaciones giraron en torno a la óptica: explicando la composición de la luz blanca como mezcla de los colores del arco iris, Isaac Newton formuló una teoría sobre la naturaleza corpuscular de la luz y diseñó en 1668 el primer telescopio de reflector, del tipo de los que se usan actualmente en la mayoría de los observatorios astronómicos; más tarde recogió su visión de esta materia en la obra *Óptica* (1703).

También trabajó en otras áreas, como la termodinámica y la acústica; pero su lugar en la historia de la ciencia se lo debe sobre todo a su refundación de la mecánica. En su obra más importante, *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), formuló rigurosamente las tres leyes fundamentales del movimiento: la primera ley de Newton o ley de la inercia, según la cual todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si no actúa sobre él ninguna fuerza; la segunda o principio fundamental de la dinámica, según el cual la aceleración que experimenta un cuerpo es igual a la fuerza ejercida sobre él dividida por su masa; y la tercera, que explica que por cada fuerza o acción ejercida sobre un cuerpo existe una reacción igual de sentido contrario.

En 1689 fue elegido miembro de la Cámara de los Lores, aunque no tenía nada que ver con la política. Al año siguiente se disuelve la cámara y Newton vuelve a su cátedra. En 1693, debido al exceso de trabajo (o a un autoenvenenamiento con uno de sus experimentos) se desplomó mentalmente. Derrumbe del que tardo meses en salir y desde entonces no fue el mismo genio que siempre había sido.
En 1696 fue nombrado inspector de la Casa de la Moneda y se encargó de la reforma del sistema de acuñaciones. En 1699 fue nombrado director de la misma. En 1703 fue elegido presidente de la Sociedad Real siendo reelegido cada año hasta su muerte. En 1722 le aparecen cálculos renales y poco después empezó a tener problemas respiratorios, por lo que sus últimos años los pasó con bastantes dolores, aunque los acepto con resignación y dignidad. Murió a los 84 años.

- Formuló el teorema general del binomio de Newton.
- Fundó el cálculo infinitesimal.

- Extendió la notación para exponentes negativos y racionales.
- Descubrió las tres leyes fundamentales del movimiento.
- Descubrió la Ley de la Gravitación Universal.
- Inventó el reloj de péndulo.
- Descubrió la naturaleza de los colores.
- Construyó el primer telescopio reflectante.
- Dedujo que la integración es el proceso inverso de la diferenciación.
- Descubrió la fórmula para obtener la fuerza centrífuga sobre un cuerpo que se mueve uniformemente en una trayectoria circular.

Anexos

Talleres, Exámenes y Trabajos

Primer Parcial

Matemáticas IV

Series y Sucesiones

1. Determine si las siguientes series son convergentes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ $(Use\ el\ Criterio\ de\ la\ Integral)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$ $(Use\ el\ Criterio$ Básico de Comparación)

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{5}{n^5+1}$ $(Diga\ Si\ es\ Condicional\ o$ absolutamente convergente)

2. **<u>Teorema:</u>** Una sucesión monótoma acotada es convergente. Demuestre que la suceción es convergente usando el teorema:

$$\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$$

3. Sea N el número de moscas machos esterilizados. Si el número de moscas esterilizadas en la población a los n días es:

$$N + (0,9)N + \ldots + (0,9)^{n-1}N$$

Y el objetivo a largo plazo del programa, es mantener 20.000 moscas machos esterilizados en la población. ¿ Cuántas moscas deben liberarse cada día?

¡SUERTE!

Segundo Parcial

Matemáticas IV

Integrales Impropias

1. Sea la función de la densidad exponencial

$$f(x) \begin{cases} ke^{-kx}, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Verifique que $f(x)$, es una función de densidad de Probabilidad.

Sugerencia: Demuestre que

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2. Para cierto tipo de bacterias, la función de densidad de probabilidad de modo que x horas es la vida de una bacteria elegida al azar está dada por:

$$\begin{cases} \frac{1}{60}e^{-x/60}, & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

Calcule:

- $P([15, 25]) = \displaystyle\int_{15}^{25} e^{-x/60}dx$ (Es decir, la probabilidad de que una bacteria elegida al azar viva entre 15 y 25 horas)
- $P([50, 100])$ (La probabilidad de que la bacteria viva menos de 50 horas)

3. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ discontinua. Calcule:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2 - 1}dx$$

¡SUERTE!

Tercer Parcial

Matemáticas IV

Serie de potencia

1. Encuentre el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia

$$(a)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}x^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{n+1}(x+2)^n$$

2. Demuestre la representación en serie de Mclaurin de la expresión dada y determine su radio de convergencia

$$f(x) = x^2e^x$$

3. Encuentre una representacion en serie de potencia para la expresión dada, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ Halle el intervalo de convergencia.

   Sugerencia: Use la siguiente igualdad

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \text{si} \quad |x| < 1$$

4. Demuestre que:

$$(a,b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad a^k b^{n-k}$$

   Para cualquier valor de a y b

¡SUERTE!

Examen Diferido

Matemáticas IV

Serie de potencia

1. Considere la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{x^{n+1}}^{2}}{n+1}$
   Halle su radio de convergencia

2. Sea f la función definida por la serie de potencias del ejercicio 1

   a) Determine el dominio de f

   b) Escriba la serie de potencias que derive a f' y obtenga su dominio.

3. Obtenga una representación en series de potencias de $tg^{-1}(x)$
   Sugerencias:
   $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2^n} + \ldots \text{Si} \quad |x| < 1$

4. Exprese como una series de potencias en x: $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
   Sugerencias:
   Use la serie del Binomio. (Teorema del Binomio)

5. Se tienen 7 libros y sólo 3 espacios en una biblioteca y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar tres libros elegidos, entre los siete dados, suponiendo que no existen razones para preferir alguno.

¡SUERTE!

1. Escriba los primeros cuatro elementos de las sucesiones dadas y calcule su límite si es que existe:

(a) $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}, \mathbb{R} = 1/2$

(b) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}, \mathbb{R} = \text{diverge}$

(c) $\left\{\dfrac{3-2n^2}{n^2+1}\right\}, \mathbb{R} = -2$

(d) $\left\{\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right\}, \mathbb{R} = 0$

(e) $\{\tan(n)\},$

(f) $\{\sin(n)\},$

(g) $\left\{\dfrac{n}{n+1} \quad \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\},$
$\mathbb{R} = \text{diverge}$

(h) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n\right\}, \mathbb{R} = e^{1/3}$
Sugerencia: $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{1/x} = e$

(i) $\{2^{\,1/n}\}, \mathbb{R} = 1$

(j) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n}\right\}, \mathbb{R} = 1$

(k) $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\},$

(l) $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}, \mathbb{R} = 0$

2. Diga si las siguientes sicesiones convergen o divergen.

(a) $\left\{\dfrac{3}{n+1}\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{4}{2n-1}\right\}$

(d) $\left\{\dfrac{8n}{2n+3}\right\}$

(e) $\left\{\dfrac{3n^2}{6n^2+1}\right\}$

(f) $\left\{\dfrac{n^2-1}{2+n^2}\right\}$

(g) $\left\{\dfrac{9-2n}{3+n}\right\}$

(h) $\left\{\dfrac{6n^5}{n^2+4}\right\}$

(i) $\{e^n\}$

(j) $\left\{\left(\dfrac{100}{10}\right)^n\right\}$

(k) $\left\{\left(\dfrac{100}{1000}\right)^n\right\}$,

(l) $\left\{\left(\dfrac{9+n}{2+n}\right)^{\dfrac{n^8+16}{n+4}}\right\}$

(m) $\left\{(n^2+1)^{n^3+2}\right\}$

(n) $\left\{\left(\dfrac{n^3+n^2+2}{n}\right)^{n^2+1}\right\}$

(ñ) $\left\{(n^5+n^3+8)^{1/n}\right\}$,

(o) $\left\{\left(\dfrac{n^8+1}{n^8+n^6}\right)^n\right\}$

(p) $\left\{\left(\dfrac{n^3+9}{n^3+n}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n+7}}\right\}$

(q) $\left\{\left(\dfrac{n^2+n^5}{n^5+5}\right)^{\sin(n)}\right\}$

3. Determine si las siguientes sucesiones son crecientes o decrecientes

(a) $\left\{\dfrac{4n-1}{3n+5}\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{2n-1)}{4n-1}\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$

(d) $\{\sin(n\pi)\}$

(e) $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$

(f) $\left\{\dfrac{1}{n+\sin^2(n)}\right\}$

(g) $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}$

(h) $\left\{\dfrac{n!}{5^{n+1}}\right\}$

(i) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$

(j) $\left\{\dfrac{n^2n!}{(n+1)^2}\right\}$

Tabla de Derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\ x^{n-1}(x)'$
$u+v$	$u'v+uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
e^x	$e^x(x)'$
$a^x(a=cher)$	$a^x\ln(a)(x)'$
$\ln(x)$	$1/x\ (x)'$
$\sin(x)$	$\cos(x)(x)'$
$\cos(x)$	$-\sin(x)(x)'$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)(x)'$
$\sin^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x)'$
$\cos^{-1}(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x)'$
$\tan^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x)'$

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^2 + 3$

$(b)\quad f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)}$

$(c)\quad f(x) = \dfrac{10x^5 + 4x^3 + -2x}{5x^3 + 4x^2 + 3}$

$(d)\quad f(x) = \dfrac{[\ln(x)]^3}{x}$

$(e)\quad f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

$(f)\quad f(x) = (1+3x)^3$

$(g)\quad f(x) = (e^x + x)^{2/x}$

$(h)\quad f(x) = \dfrac{\ln(x+e^x)}{3x}$

$(i)\quad f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

$(j)\quad f(x) = \sin(3x^2+1)$

$(k)\quad f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{x}$

$(l)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

$(m)\quad f(x) = \tan(5x)$

$(n)\quad f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

$(\tilde{n})\quad f(x) = \sin(\pi x)$

$(o)\quad f(x) = \sin(2x)\cos(x)$

2. Calcular las derivadas de los siguientes funciones:

(a) $3 + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{3}{4^{n-1}} + \ldots$

(b) $3 + \dfrac{3}{-4} + \ldots + \dfrac{3}{(-4)^{n-1}} + \ldots$

(c) $1 + \dfrac{(-1)}{\sqrt{5}} + \ldots + \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \ldots$

(d) $1 + \dfrac{e}{3} \ldots + \left(\dfrac{e}{3}\right)^{n-1} + \ldots$

(e) $0,37 + 0,000628 + \ldots + \dfrac{628}{(1000)^n} \ldots$

(f) $0,628 + 0,000628 + \ldots + \dfrac{628}{(1000)^n} \ldots$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, 3^{n-1}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$

(j) $\dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{5.6} + \ldots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} \ldots$

(k) $\dfrac{(-1)}{1.2} + \dfrac{(-1)}{2.3} + \ldots + \dfrac{(-1)}{n(n+1)} \ldots$

(l) $\dfrac{5}{1.2} + \dfrac{5}{2.3} + \ldots + \dfrac{5}{n(n+2)}$

(m) $3 + \dfrac{3}{2} + \ldots + \dfrac{3}{n} + \ldots$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$

(ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right)$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3} \right)$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

3. Exprese el decimal periódico como una serie infinita y encuentre el número racional que representa:

   $(a)\quad 0,\overline{23}$ $\qquad (b)\quad 0,\overline{4653}$ $\qquad (c)\quad 0,\overline{571}$ $\qquad (d)\quad 1,\overline{234}$

4. Problemas de Aplicación:

   (a) Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 10mts. En cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. Calcule la distancia total que recorre la pelota antes de quedar en reposo.

   (Rpta30)

   (b) La trayectoria de cada oscilación después de la primera, del disco de un péndulo es $0,93$ de la trayectoria de la oscilación anterior (de un lado a otro). Si la trayectoria de la primera obscilación fuera de 56cm y la resistencia del aire lleva eventualmente al péndulo al reposo ¿Qué distancia recorre el disco del péndulo antes de alcanzar el reposo?

   (c) Los lados de un triángulo equilátero miden 4 unidades. Se construye otro triángulo equilátero dibujado segmentos de recta que unen los puntos medios de los ladoa del primer triángulo. Si éste proceso puede repetirse un número ilimitado de veces ¿Cuál es el perimetro total de todos los triángulos que se forman?

   (d) En un programa para radicar una plaga se liberan cada dia N moscas machos esterelizados y el 90 % de ellos sobreviven al finalizar el día.

   (i) Demuestre que el número de moscas esterelizadas en la población a los n días es:

$$N + (0,9)N + \ldots + (0,9)N^{n-1}$$

(ii) Si el objeto a largo plazo del programa es mantener 20000 machos esterelizados en la población. ¿ Cuántas moscas deben liberarse cada día.

Matemáticas IV

Taller III

Series Infinitas

1. Use el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2},\ C$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7},\ D$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {\frac{1}{4+n}}^{3/2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n},\ D$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-5)},\ C$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}},\ D$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2. Use el criterio de comparación para determinar si la serie converge o diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1},\ C$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n},\ C$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n},\ C$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^n},\ C$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1},\ D$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{n^2},\ C$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4},\ D$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}},\ C$

3. Usando el criterio de la razón y de la raíz determine si las siguientes series convergen o divergen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}, C$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}, C$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}, \; C$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+e^n}, \; C$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}, C$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2}, \; C$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}, \; D$ (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \; C$

4. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}, \; CC$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}, \; CC$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{n^3+1}, \; AC$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{6})}{n^2}, \; AC$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}, \; D$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \; D$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}, \; AC$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}, \; CC$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{2n-5}, \; D$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-5)^n}, \; D$

1. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen cuando f es continua.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x/3}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x2^{-x}dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2^{-x}dx$ (f) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2e^{x}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{16+x^2}$ (j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(x)dx$

(k) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3dx}{x^2+9}$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2dx}$

2. Determine si las siguientes integrales son convergentes o divergentes cuando f no es continua

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$

(c) $\displaystyle\int_{-5}^{-3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ (d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$ (f) $\displaystyle\int_{-4}^1 \frac{dx}{(x+3)^3}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)dx$

(i) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)^{1/3}}$ (j) $\displaystyle\int_1^{+2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ (l) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}}$

((ñ)) $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{1-x}$ (l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(\sigma)d\sigma$

Encuentre el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+4}x^n,$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4}x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}x^n,$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n,$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}x^n$

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}x^n,$

(8) $\displaystyle\sum \frac{1}{4^n\sqrt{n}}x^n$

(9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}x^n,$

(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^{n+1}}{3^{2n}}x^n$

(11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n,$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}(x-2)^n$

(13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{n+1}(x-2)^n,$

(14) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}(x-5)^n$

(15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{3n}}(x+4)^n,$

(16) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}(x+3)^n$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{e^n}(x-e)^n,$

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n}(2x-1)^n$

(19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}(3x+4)^n,$

(20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad \frac{2n-1}{3n}x^n$

(21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}x^n,$

(22) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}(x-5)^n$

Matemáticas IV

Taller VI

Series de Potencias

1. Encuentre una representación en serie de potencias para la expresión dada y determine el intervalo de convergencia

   $(a)\quad \dfrac{1}{1-x}\qquad\qquad (b)\quad \dfrac{1}{1-x}$

   $(c)\quad \dfrac{x^2+1}{x-1}\qquad\qquad (d)\quad \dfrac{x}{2-3x}$

2. Encuentre la representación en serie de Mclaurin de la expresión dada y determine su radio de convergencia

   $(a)\quad e^{-x}\qquad\qquad (b)\quad e^{2x}\qquad\qquad (c)\quad x^2e^x$

   $(d)\quad xe^{-2x}\qquad\qquad (e)\quad x^2\sin x\qquad\qquad (f)\quad \cos x^2$

3. Sea S_5 el conjunto de 5 frutas distintas:

   $$S_5 = \{1\ \text{Manzana}\ ,1\ \text{Piña}\ ,1\ \text{Mora}\ ,1\ \text{Pera},\ 1\ \text{Durazno}\}$$

   Representados por la siguiente notación:

   [Ma] := Manzana , [Pi] := Piña [Mo] := Mora [D] := Durazno [Pe] := Pera

   (a) ¿ De Cuántas maneras se pueden escoger 2 frutas de dichos conjuntos? (Escoger todas las maneras)

   (b) ¿ De Cuántas formas pueden ordenarse los elementos del conjunto S_5 Justifique Su Repuesta

4. Demuestre que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad a^k b^{n-k}$, para cualquier valor de a y b

1. Una población de 35000 pájaros vive en tres islas, Cada año, 10 % de la población de la isla A emigra a la isla B, 20 % de la población de la isla B emigra a la isla C y 5 % de la población de la isla C emigra a la isla A. Sean A_n, B_n y C_n,las cantidades de las aves que hay en el año n en las islas A, B, y C respectivamente, antes de la imigración:

   (a) Demuestre que:

   $$A_{n+1} = 0,9\ A_n\ +\ 0,05\ C_n$$
   $$B_{n+1} = 0,1\ A_n\ +\ 0,80\ B_n$$
   $$C_{n+1} = 0,95\ C_n\ +\ 0,20\ B_n$$

   (b) Suponiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$ existen, Calcule el número de pájaros que habrá en cada isla dentro de muchos años.

2. Determine si la serie alternante converge o diverge (Use el Criterio de Series Alternantes)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n^2 - 2}$$

3. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$$

4. <u>Teorema:</u> Una sucesión monótoma acotada es convergente

   a) Demuestre que la sucesión es convergente empleando el teorema

$$\left(\frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right)$$

b) Encuentre un ejemplo de una sucesión que sea acotada y converge pero no es monótona.

5. Demuestre que si una serie $\sum a_n$ absolutamente convergente entonces $\sum a_n$ es convergente.

Matemáticas IV

Segundo Trabajo

Integrales Impropias

1. Diga si la siguiente integral impropia converge o diverge

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1-\sin(x)}}$$

2. Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}dx$ converge y que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1}dx$ diverge

3. Demuestre que la función de densidad exponencial definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx}, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   es una función de densidad de probabilidad

4. La transformada de Fourier es útil para resolver algunas ecuaciones diferenciales. La transformada cosenoidal de fourier de una función f está dada por

$$F \subset [f(x)] = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(5x)dx$$

   Para todo número real s para el que converge la integral impropia.
   Calcule $F \subset [e^{-ax}]$ para $a > 0$

5. Sea l la recta coordenada con el origen 0 en el centro de la tierra. La fuerza de gravedad ejercida en un punto sobre L a una distancia x de 0, está dada por $f(x) = k/x^2$, donde $k = cher$. Calculeel trabajo requerido para enviar a un objecto con peso de 100 libras fuerza (lbf), desde la superficie de la tierra hasta un punto fuerza de su campo de atracción gravitatoria, a lo largo de la recta l. Use 6400Km como el valor del radio de la tierra.

1. Utilice el criterio de la raíz a fin de determinar los valores de x para los cuales la serie de potencias es convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$$

2. Sea

$$\begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t}, & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

   a) Determine que f es continua en 0

   b) Obtenga una representación en serie de potencias de $\int_0^x f(t)dt$

   c) Determine su radio de convergencia

   d) Obtenga la representacion en series de potencias de: $\dfrac{e^x - 1}{x}$, Al diferenciar término a término la serie anterior demuestre que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)! = 1}$$

3. **a)** Determine los 3 primeros términos diferentes de 0 de la serie de McLaurin para $\tan(x)$

   b) Utilice la respuesta (a) y la integración término a término para obtener los 3 primeros términos diferentes de 0 de la serie de McLaurin para $\ln(\sin(x))$

4. **a)** Exprese $\sqrt[4]{1+x^2}$ como una serie de potencias en x, obteniendo primero una serie de potencias para $\sqrt[4]{1+x}$ y reemplazando después x por x^2

   b) Use el resultado de (a) para encontrar el valor aproximado de $\int_0^{1/2} \sqrt[4]{1+x^2}dx$

5. Encuentre la representación en serie de McLaurin de las siguientes funciones:

$$(a) \quad e^x \qquad\qquad (b) \quad \ln(1+x) \qquad\qquad (c) \quad \tan^{-1}(x)$$

Bibliografía

Apostol T. *Cálculo*, Editorial Reverté S.A, volumen II, México, 1967.

Boyce,W.E & DiPrima,R.C. *Elementos de Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera*, Editorial Noriega Limusa, Séptima edición, México, 1993.

Cuestiones de Física. *Biografía de Karl Friedrich Gauss* [en línea]. Yahoo! España, GeoCities. Última actualización, 03/11/2001. [Consulta: Noviembre, 2007] <http://es.geocities.com/cuestionesdefisica/Gauss.htm>

El Prisma. *Ecuaciones Diferenciales – Historia* [en línea]. Venezuela, última actualización 02/06/2008.[Consulta:Enero,2008]. <http://www.elprisma.com/apuntes/curso.asp?id=3924>

Formación del Profesorado. *La Sucesión de Fibonacci* [en línea]. Gobierno de España. Ministerio de Educación, Política Social y Deporte. Madrid, 2005. [Consulta: Mayo,2008] http://www.formacion.cnice.mec.es/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm

Gardner, M. Miscelanea Matemática, Salvat Editores S.A, Barcelona, 1986.

Guadalupe,M & Tamayo, R. *Descomposición Radiactiva* [en línea]. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). [Consulta: Enero,2008]. <http://www.sagan-gea.org/hojared_radiacion/paginas/Radiactividad.html>