Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional

Caracterizaciones de espacios de Hilbert a través de sus subespacios bidimensionales

María Pino

Requisito Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. Diómedes Bárcenas

Mérida-Venezuela
2008

Dedicatoria

A mis padres, hermanos y sobrinos.

Agradecimientos

A Dios y la Virgen por brindarme la fuerza y la fé para lograr mis sueños.

Al Dr. Diómedes Bárcenas por su compresión y paciencia para enseñar. Gracías por todo lo que aprendi.

A los Doctores Olga Porras y José Giménez, por su valiosa colaboración y correcciones oportunas en nuestro trabajo.

A Yessica Villamizar y Eduardo Juárez gracías por siempre estar presente.

ÍNDICE

Resumen

En este trabajo se pone de relieve la importancia de la Geometría Elemental en ciertos tópicos del Análisis Funcional. Específicamente, además de presentar el Teorema de Jordan - von Neumann, el cual afirma que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si su norma satisface la Regla del Paralelogramo, hacemos una investigación documental para probar que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si la intersección de la esfera unitaria con cualquier plano que pase por el origen es una elipse.

Introducción

El objetivo de esta monografía es mostrar de manera autocontenida y accesible a cualquier estudiante del último año de la Licenciatura de Matemática, la utilidad de algunos aspectos de la Geometría Elemental en otras disciplinas matemáticas como Análisis Funcional y Álgebra Lineal, siguiendo los lineamientos sugeridos por Gao [7] y Bárcenas [1].

Para una mejor comprensión de este trabajo, hemos dividido el mismo en tres capítulos:

En el capítulo 1 se presentan los aspectos de Geometría Elemental que reusltan indispensables para el desarrollo del trabajo. A saber: La elipse y su ecuación cuadrática asociada [9] y la Regla del Paralelogramo [6].

En el capítulo 2 se estudian las formas cuadráticas y sus relaciones con los objetos geométricos estudiados en el capítulo 1 , específicamente, se demuestra que existe la correspondencia $1-1$ entre formas cuadráticas positivamente definidas y producto interno en $\mathbb{R}^n$; y en el caso en que $n = 2$, se demuestra que también hay una correspondencia $1-1$, entre formas cuadráticas positivamente definidas y elipses. Además por considerarlas de interés en sí mismos se presentan varias caracterizaciones de formas cuadráticas positivamente definidas en función de matrices y determinantes.

Este capítulo nos hemos apoyado básicamente en [11] complementado con [8]; las relaciones entre formas cuadráticas y producto interno están bien estudiadas en [3] mientras que la prueba del teorema 2,7 está influenciada por [2].

En el capítulo 3 se demuestra el famoso Teorema de Jordan - von Neumann, el cual establece que la norma de un espacio normado es inducida por un producto interno si y sólo si satisface la Regla del Paralelogramo.

Dos consecuencias importantes se obtienen del Teorema de Jordan - von Neumann:

1. $L^p[0,1]$ es un espacio de Hibert si y sólo si $p = 2$.

2. Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si el corte de la esfera unitaria con un subespacio bidimensional es una elipse.

La consecuencia 2 es el objetivo central de este trabajo.

El capítulo lo hemos entresacado de la monografía de Nieto [10] excepto el teorema 3.7 el cual se puede demostrar siguiendo la exposición de cualquier libro de Teoría de Medida (ver por ejemplo [5]).

CAPÍTULO 1

Preliminares Geométricos

El objetivo de este capítulo consiste en presentar algunos resultados fundamentales de la geometría, útiles en el desarrollo de nuestro trabajo, tales como lo es la Regla del Paralelogramo; de la cual presentaremos una demostración en la que se utiliza el Teorema de Stewart; también hablaremos sobre elipses, su definición, representación geométrica y la ecuación cuadrática asociada a la ecuación de una elipse.

1.1. Regla del Paralelogramo

En Geometría existen muchos resultados que pueden ser estudiados en los cursos de matemáticas elementales, uno de ellos es el Teorema del Coseno, del cual se deduce el Teorema de Stewart, como una aplicación casi directa de dicho resultado.

El Teorema de Stewart fue planteado en 1746 por M. Stewart aunque proba-

blemente fue descubierto por Arquímedes alrededor del año 300 a.c; la primera demostración que se conoce fue realizada por Robert Simson en 1751 (ver [4], página 6).
En todo este trabajo, $\overline{AB}$ denotará el segmento determinado por los puntos A y B, y AB la longitud de dicho segmento.

Definición 1.1 *Consideremos un triángulo ABC, un punto de la recta que contiene un lado del triángulo ABC se llama* ***punto de Menelao*** *de ese lado, si no es un vértice del triángulo.*

Si el punto de Menelao está entre dos vértices, entonces lo llamaremos **punto de Menelao interior**; en caso contrario, lo llamaremos **punto de Menelao exterior**.

Definición 1.2 *Una* ***ceviana*** *es el segmento que une el vértice opuesto con un punto de Menelao de ese lado; este punto de Menelao se llama* ***pie de ceviana.***

Diremos que la ceviana es **interior** o **exterior** si el correspondiente punto de Menelao es interior o exterior respectivamente.

A continuación presentaremos un gráfico ilustrativo de las definiciones anteriormente presentadas.

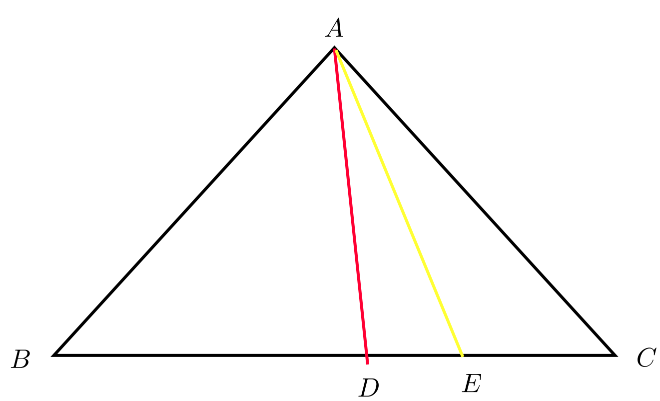


Figura 1

En la Figura 1, D es un punto de Menelao interior del triángulo ABC y E es un punto de Menelao exterior del triángulo ABD. El segmento $\overline{AD}$ es una ceviana interior del triángulo ABC y el segmento $\overline{AE}$ es una ceviana exterior del triángulo ABD.

Teorema 1.1 (Teorema de Stewart) *Si $\overline{AD}$ es una ceviana interior del triágulo ABC que determina en el lado opuesto $\overline{BC}$ los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ con $AD = d$, $BD = m$ y $DC = n$, entonces*

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$$

Demostración:

Considere el triángulo ABC de la figura 2

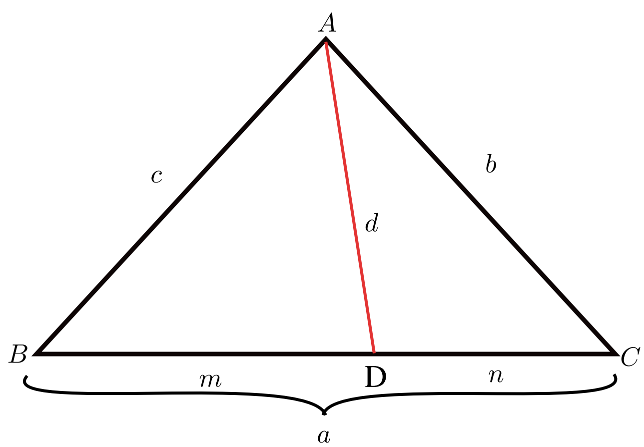


Figura 2

Por hipótesis se tiene que $BC = a$, $AC = b$, y $AB = c$. En consecuencia $m+n=a$.

Luego, utilizando el teorema del coseno en los triángulos ABD y ACD se tiene que:

$$c^2 = m^2 + d^2 + 2md \cos \angle ADB \tag{1.1}$$

y

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nd \cos \angle ADC. \tag{1.2}$$

Note que los ángulos ADB y ADC son suplementarios; en consecuencia sus cosenos difieren solamente en el signo; por lo tanto,

$$c^2 = m^2 + d^2 + 2md \tag{1.3}$$

y

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd; \tag{1.4}$$

multiplicando la ecuación (1.3) por n, la ecuación (1.4) por m, y sumando ambas ecuaciones término a término se obtiene que:

$$\begin{aligned} nc^2 + mb^2 &= nm^2 + mn^2 + nd^2 + md^2 \\ &= (m+n)(nm + d^2) \\ &= a(d^2 + mn) \end{aligned}$$

♣

Teorema 1.2 (Regla del Paralelogramo) *En un paralelogramo la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.*

Demostración:

Considere el paralelogramo $ABCD$, donde las diagonales AC y BD se cortan en el punto O (ver figura 3)

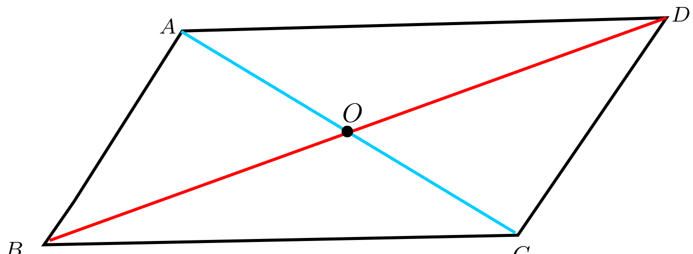


Figura 3

Note que el segmento $\overline{AO}$ es una ceviana interior del triángulo ABD; luego aplicando el Teorema de Stewart a la ceviana $\overline{AO}$ se tiene que

$$AB^2OD + AD^2BO{=}BD(AO^2 + ODBO);$$

pero los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes y paralelos, por lo tanto se tiene que los triángulos ABC y ADC son congruentes; además los triángulos AOB y COD también son congruentes, por lo tanto,
$BD = 2OB = 2OD$
y
$OA = \frac{1}{2}AC$
luego,

$$AB^2\frac{BD}{2} + AD^2\frac{BD}{2} = BD\left(\frac{1}{4}AC^2 + \frac{BD}{2}\frac{BD}{2}\right)$$

es decir,

$$AB^2 + AD^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2};$$

en consecuencia,

$$2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2. \tag{1.5}$$

Usando una vez más la congruencia de los lados opuestos de un paralelogramo se tiene,

$$AB = DC$$

y

$$AD = BC;$$

así,

$$AB^2 = CD^2$$

y

$$AD^2 = BC^2;$$

en consecuencia,

$$2AB^2 = AB^2 + CD^2 \tag{1.6}$$

y

$$2AD^2 = AD^2 + BC^2 \tag{1.7}$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (1.6) y (1.7) en la ecuación (1.5), se tiene que la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales, es decir;

$$AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

♣

1.2. Elipses

Como se percatará el lector, la noción de elipse ocupará un lugar prepoderante en el presente trabajo. De hecho nuestro objetivo principal es mostrar como dicha noción permite interrelacionar Geometrá Análitica, Álgebra Lineal y Análisis Funcional en el siguiente teorema:

Un espacio de Banach X es un epacio de Hilbert si y sólo sí la intersección de la esfera unidad con cualquier plano que pasa por el origen es una elipse.

Esta curva se catapultó en el siglo $XVII$, cuando Kepler $(1571-1630)$ descubrió en 1609 que las órbitas de los planetas en su movimiento sideral son elipses con el sol en uno de los focos.

En término de Geometría Euclideana, una elipse se define como sigue:

Definición 1.3 *Una elipse es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados* ***focos****, es constante.*

A fin de facilitar nuestro estudio definiremos algunos elementos componentes de la elipse.

Definición 1.4 *La recta que contiene los focos de la elipse se llama **eje focal** y los puntos de la elipse que cortan al eje focal se llaman **vértices**. El segmento que une los vértices se llama **eje mayor** de la elipse, el punto medio del eje mayor se llama **centro** de la elipse, la recta perpendicular al eje de la elipse que pasa por el centro se llama **eje normal**; el segmento que une los puntos de corte de la elipse con el eje normal se llama **eje menor**. Estos elementos se ilustran en la figura* 5.

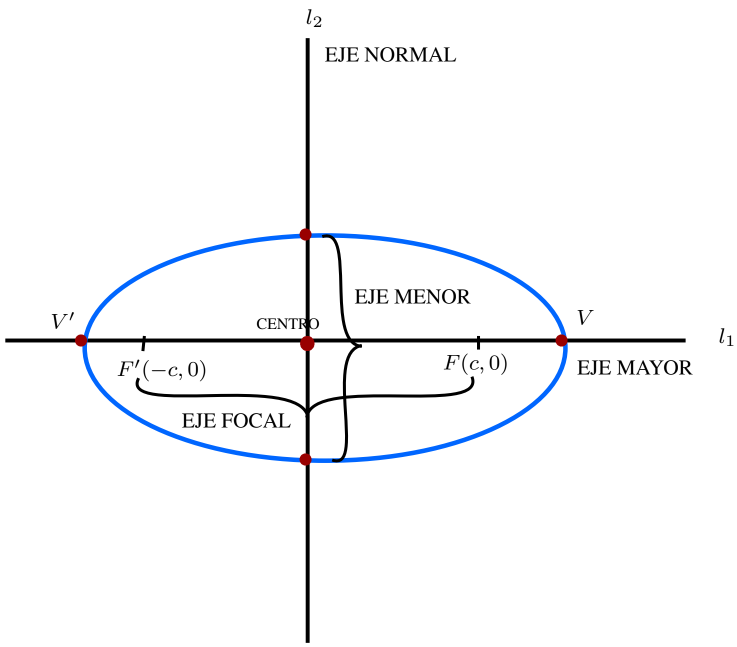


Figura 5

En términos de Geometría Análitica, la elipse adquiere una forma algebraica que tiene por ende consecuencias que resultan la razón de ser de este trabajo.

Teorema 1.3 *Una elipse de centro* (h, k) *y ejes paralelos a los ejes de coordenadas puede ser descrita mediante la ecuación de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{1.8}$$

Haciendo los cálculos algebraicos en la fórmula (1.8), se observa que una elipse con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados puede ser descrita mediante la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.9}$$

donde,

$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2h, \quad E = 2a^2k \quad \text{y} \quad F = b^2 + a^2k^2 - a^2b^2,$

con

$CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0.$

Recíprocamente, si se completa cuadrados en la ecuación (1.9) mediante convenientes manipulaciones algebraicas puede obtenerse una ecuación de la forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}. \tag{1.10}$$

Si

$$\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} \neq 0$$

y hacemos

$$M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2},$$

entonces la fórmula (1.9) puede escribirse en la forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{MC} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{MA} = 1 \tag{1.11}$$

Si A, C y M son positivos, lo cual quiere decir que $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$, entonces la ecuación (1.11) representa una elipse de centro $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C}\right)$ y ejes paralelos a los ejes coordenados.

En resumen, se tiene lo siguiente:

Teorema 1.4 *Si los coeficientes A y C son positivos y $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$, entonces la ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa la ecuación de una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados y centro $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C}\right)$.

Hasta el presente hemos considerado elipses con los ejes paralelos a los ejes coordenados y las respectivas ecuaciones cuadráticas (ver definición (1.5)) asociadas a dicha elipse, las cuales tienen como denominador común que el coeficiente de xy es igual a cero; es decir, cuando la elipse tiene los ejes paralelos a los ejes coordenados y es representada algebraicamente por la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.12}$$

entonces $B = 0$.

Es natural preguntarse si una ecuación cuadrática de la forma,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.13}$$

con $B \neq 0$ puede representar la ecuación de una elipse.

La respuesta es afirmativa, pues haciendo el cambio de coordenadas,

$$x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \tag{1.14}$$

$$y = x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \tag{1.15}$$

al escoger θ adecuadamente de forma tal que

$$tg2\theta = \frac{B}{A - C}, \qquad si \qquad A \neq C$$

y

$$\theta = 45^{\text{o}} \qquad si \qquad A = C.$$

En términos algebraicos las ecuaciones (1.14) y (1.15) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

con este nuevo sistema de coordenadas se observa que la ecuación (1.12) se transforma en

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

la cual representa la ecuación de una elipse si $B^2 - 4AC < 0$, A y C tienen el mismo signo y $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$.

Definición 1.5 *Una ecuación de la forma*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde $a, b, \cdots, f$ *son números reales y al menos* a, b, c *no es cero se denomina* ***ecuación cuadrática en*** x ***e*** y.

Note que toda elipse tiene asociada una ecuación cuadrática que satisface las siguientes condiciones:

a) A y C tienen el mismo signo.

b) $B^2 - 4AC < 0$

c) $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$

Recíprocamente, si una ecuación cuadrática satisface las condiciones anteriores, entonces ella es la ecuación de una elipse.

CAPÍTULO 2

Elipses y Álgebra Lineal

En el capítulo precedente hablamos sobre la importancia geométrica y análitica de la elipse, resaltamos el hecho de que toda ecuación de una elipse tiene asociada una ecuación cuadrática. Partiendo de este punto estableceremos un enlace entre Geometría Análitica y Álgebra Lineal.

En todo este capítulo consideramos espacios vectoriales reales.

2.1. Resultados básicos del Álgebra Lineal

En esta sección presentaremos algunos resultados básicos que son útiles, en el desarrollo de nuestro trabajo; no daremos demostración de dichos resultados pues nuestro interes es sólo recordarlos para hacer más fácil la lectura del trabajo.

Definición 2.1 *Sea A una matriz $m \times n$. La **transpuesta de** A, denotada por A^T, es la matriz $n \times m$, que se obtiene al intercambiar filas por columnas.*
Es decir,

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad para \quad todo \quad i, j$$

Definición 2.2 *Sea A una matriz $n \times n$ entonces A es una **matriz simétrica** si $A^T = A$.*

En el caso en que $n = 2$, toda matriz simétrica es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Definición 2.3 *Sea A una matriz $n \times n$. Un **autovalor** de A es un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$Ax = \lambda x,$$

para algún $x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

*Diremos que x es un **autovector** de A asociado a λ.*

Definición 2.4 *Sea E un espacio vectorial real. La aplicación*

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle \quad de \quad E \times E \quad en \quad \mathbb{R}$$

*se llama **producto interno**, si para cualesquiera $x, y, z \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:*

a) $\langle x, x \rangle > 0 \quad si \quad x \neq 0$

b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *(simetría)*

c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ *(linealidad).*

Teorema 2.1 (Desigualdad Cauchy - Schwarz) *Sea V un espacio real con producto interno. Si $x, y \in V$ entonces,*

$$\left| \langle x, y \rangle \right| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$$

Definición 2.5 *Un conjunto de vectores* $x_1, \ldots, x_n$ *se dice que es **linealmente independiente**, si la relación* $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ *donde* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \ldots, n$ *implica que* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Definición 2.6 *Sea* V *un espacio vectorial y* X *un subconjunto de* V. *La intersección de todos los subespacios de* V *que contienen a* X *se llama el **subespacio generado por*** X *y se denota* $gen(X)$

Definición 2.7 *Un espacio vectorial* V *es finitamente generado si existe un número fintito de vectores* $v_1, \ldots, v_n$ *tales que* $gen(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$. *En este caso, decimos que los vectores* $v_1, \ldots, v_n$ ***generan a*** V.

Definición 2.8 *Una familia de vectores linealmente independientes* $v_{i \in F}$ *de un espacio vectorial* V *es una **base** de* V, *si los* v_i *generan todo* V, *es decir, si cada* $v \in V$ *se expresa como combinación lineal finita de* (v_i):

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ *son escalares únicos.*

Definición 2.9 *Sea* V *un espacio vectorial con producto interno. Los vectores* $x, y \in V$ *son **ortogonales** si* $\langle x, y \rangle = 0$.

Definición 2.10 *Sea* V *un espacio vectorial con producto interno. Un conjunto de vectores* $v_1, \ldots, v_k$ *de* V *es ortogonal si* $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ *para todo* $i \neq j$. *Si además cada uno de los vectores tiene norma* 1 *entonces* $v_1, \ldots, v_k$ *son **ortonormales**.*

Teorema 2.2 *Sea* V *un espacio vectorial con producto interno. Si* $v \in V$ *es una combinación lineal de los vectores ortonormales* $u_1, \ldots, u_k$ *entonces,*

1. $v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_k \rangle u_k$;

2. $\langle v, v\rangle = |\langle v, u_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, u_k\rangle|^2$

Teorema 2.3 (Gram - Schmidt) *Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores linealmente independientes en un espacio con producto interno V. Entonces existen vectores $u_1, \ldots, u_k$ ortonormales en V tales que:*

$$gen(v_1, \ldots, v_k) = gen(u_1, \ldots, u_k)$$

Proposición 2.1 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, entonces V tiene una base ortonormal.*

Teorema 2.4 *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita m y n respectivamente. Supongamos que $\mathbf{B}$ es una base de V y $\mathcal{C}$ es una base de W. Para $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(V, W)$ existe una única matriz A $m \times n$, tal que:*

$$[\mathrm{T}(V)]_{\mathcal{C}} = A[v]_{\mathbf{B}} \quad para \quad todo \quad v \in V.$$

Definición 2.11 *La matriz A $m \times n$ que asociamos a la transformación lineal $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(V, W)$ en el teorema anterior se llama **matriz de** T **respecto a las bases** $\mathbf{B}$ **y** $\mathcal{C}$. La denotamos por $A = [\mathrm{T}]_{\mathbf{B}\mathcal{C}}$.*

Definición 2.12 *En una matriz, el primer elemento de la diagonal distinto de cero, de cualquier fila o columna que se vaya a eliminar se llama **pivote**.*

Definición 2.13 *Una matriz A $n \times n$, asociada a un operador lineal T, sobre un espacio V con producto interno, es positivamente orientada si,*

$$\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0 \quad para \quad todo \quad x \neq 0$$

Observación: La **eliminación gaussiana** consiste en tansformar mediante operaciones lineales entre filas a: $Ax = b$ en $Lx = c$ o en $Ux = d$ donde, L es la matriz triangular inferior y U es la matriz triangular superior.

2.2. Formas Cuadráticas

En esta sección se darán algunas definiciones como producto interno, forma cuadrática, entre otras. Demostraremos que toda ecuación cuadrática tiene asociada una forma cuadrática y si la forma cuadrática es positivamente definida, entonces ella determina un producto interno. El recíproco también es válido, es decir, todo producto interno tiene asociada una forma cuadrática positivamente definida.

Definición 2.14 *Una aplicación $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* ***forma cuadrática*** *si, existen escalares $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, tales que*

$$Q(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Es fácil ver que toda forma cuadrática satisface

a) *Simetría $Q(x, y) = Q(y, x)$*

b) *Linealidad $Q(\alpha x + \beta y, z) = \alpha Q(x, z) + \beta Q(y, z)$.*

Si además, la forma cuadrática satisface $Q(x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, decimos que la forma cuadrática es ***positivamente definida****.*

Definición 2.15 *Dada cualquier ecuación cuadrática*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{2.1}$$

la ***forma cuadrática asociada a la ecuación*** (2.1) *viene dada por*

$$Q\big((x, y), (x, y)\big) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Proposición 2.2 *Toda forma cuadrática positivamente definida determina un producto interno.*

Demostración:

Considere la aplicación

$$Q^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Q^*(x,y) = \langle x,y \rangle \longrightarrow Q(x,y).$$

Una forma cuadrática positivamente definida; probaremos que Q^* define un producto interno.

En efecto,

a) $\langle x,x \rangle = Q(x,x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$

b) $\langle x,y \rangle = Q(x,y) = Q(y,x) = \langle y,x \rangle$

c) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = Q(\alpha x + \beta y, z) = \alpha Q(x,z) + \beta Q(y,z).$

Por lo tanto, toda forma cuadrática positivamente definida define un producto interno. ♣

El recíproco también se cumple, es decir, todo producto interno define una forma cuadrática positivamente definida; la demostración se obtiene mediante un razonamiento análogo al anterior.

Proposición 2.3 *Toda forma cuadrática positivamente definida determina la ecuación de una elipse y recíprocamente.*

Demostración:

Por la definición (2.12) sabemos que toda ecuación cuadrática

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

tiene asociada una forma cuadrática, la cual es

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

a y c tienen el mismo signo, $b^2 - 4ac < 0$ y $cd^2 + ae^2 - 4acf > 0$.
Por hipótesis, la forma cuadrática es positivamente definida, por lo tanto, ella define un producto interno y a su vez el producto interno tiene asociada la ecuación de una elipse. ♣

El recíproco se obtiene usando el teorema (1.3) del capítulo 1.

2.3. Matrices, Determinantes y Formas Cuadráticas

En la sección precedente se vio que toda ecuación cuadrática tiene asociada una forma cuadrática. En esta sección se demostrará que toda forma cuadrática tiene asociada una matriz y en el caso de que la forma cuadrática sea positivamente definida, entonces la matriz asociada a ella es simétrica. Estos hechos se usan para expresar diferentes relaciones del producto interno, entre ellas: los autovalores de la matriz asociada son positivos, el determinante es positivo y la matriz es orientada positivamente. Recordemos que, a pesar de ser todos estos resultados válidos en espacios de dimensión finita, para lograr nuestros propósitos nos concentraremos en espacios bidimensionales.

Definición 2.16 *Una matriz simétrica es postitivamente definida si*

$$x^{\mathrm{T}} A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Proposición 2.4 *Una matriz simétrica A tiene una factorización simétrica*

$$A = LDL^{\mathrm{T}}$$

Proposición 2.5 *Para $X = (x, y)$ y $f(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ una forma cuadrática, entonces f se puede escribir en su forma matricial como*

$$f(X) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Demostración:

Considere $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ donde,

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Probaremos que $f(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

En efecto,

$$\begin{aligned} f(X) &= X^{\mathrm{T}}AX \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa + yb & xb + yc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (xa + yb)x + (xb + yc)y \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

♣

Observación: El resultado precedente nos dice que toda forma cuadrática tiene asociada una matriz simétrica. A saber:

Proposición 2.6 *Sea A una matriz simétrica* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

de forma cuadrática $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

a) *A es definida positiva.*

b) $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

c) *El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q((x, y)) = 1\}$ es una elipse.*

Demostración:

Note que:

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \tag{2.2}$$

$a \Rightarrow b$.

Sea A una matriz simétrica 2×2 definida positiva, es decir,

$$x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 0 & b + 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a > 0 \end{aligned}$$

luego, como $Q(1, 0) = a$, se tiene que $Q(1, 0) > 0$.

Por otro lado usando la ecuación (2.1) se tiene que,

$$\begin{aligned} aQ\left(\frac{-b}{a}, 1\right) &= a\left[a\left(\frac{-b}{a} + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}\right] \\ &= ac - b^2 \end{aligned}$$

lo cual significa que, $ac - b^2 = aQ\left(\dfrac{-b}{a}, 1\right) > 0$, por lo tanto, $ac - b^2 > 0$.

$b \Rightarrow a$.

Sean $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, esto implica que

$$Q(x, y) = a\left[\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right] > 0 \quad \forall (x, y) \neq 0$$

lo cual significa que $Q(x, y) > 0$, por lo tanto, A es una matriz simétrica 2×2 positivamente definida.

$b \Rightarrow c$

Supongamos que $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Queremos probar que $Q(x, y) = 1$ representa la ecuación de una elipse para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lo cual implica probar que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ es la ecuación de una elipse.

Por la proposición (2.3) , sabemos que toda forma cuadrática positivamente definida determina la ecuación de una elipse.

El recíproco es válido, pues la ecuación de una elipse debe cumplir con esas condiciones, es decir, $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. ♣

Definición 2.17 *El* ***producto euclídeo*** *en* $\mathbb{R}^2$ *de dos vectores* x *e* y *se define por*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

donde, $x = (x_1, x_2)$ *y* $y = (y_1, y_2)$

Definición 2.18 *Sea* $\langle , \rangle$ *un producto interno en* $\mathbb{R}^n$*; la función*

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \langle x, x\rangle$$

se llama ***forma cuadrática asociada al producto interno*** $\langle , \rangle$

Resumiendo lo visto anteriormente, se tiene que si una forma cuadrática es positivamente definida entonces, ella tiene asociada una matriz simétrica positivamente definida. A continuación se darán algunas caracterizaciones de las **matrices simétricas positivamente definidas**.

Teorema 2.5 *Sea A una matriz simétrica, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$, *es decir, A es positivamente definida.*

b) *Todos los autovalores de A son positivos.*

c) *Todas las submatrices A_k tienen determinantes positivos.*

d) *Ccada pivote d_i de A (sin intercambio de filas) cumple con que $d_i > 0$.*

Demostración:

Considere una matriz A $n \times n$ simétrica.

$a \Longrightarrow b$

Suponga que $x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$. Probaremos que todos los autovalores son positivos.

Tomemos x_i, con $i = 1, \ldots, n$ un autovector unitario, entonces $Ax_i = \lambda_i x_i$.

Así,

$$x_i^T A x_i = x_i^T \lambda_i x_i = \lambda_i$$

pues $x_i^T x_i = 1 \; \forall \; i = 1, \ldots, n$.

La hipótesis se cumple para todo $x \neq 0$, en particular se cumple para el autovector x_i, por lo tanto, $x_i^T A x_i > 0$, lo cual significa que $\lambda_i > 0 \; i = 1, \ldots, n$.

De esta manera todos los autovalores son positivos.

$b \Longrightarrow a$

Suponga que todos los autovalores son positivos, probaremos que

$x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Como las matrices simétricas tienen un conjunto de autovectores ortonormales $\{x_1, \ldots, x_n\}$, dicho conjunto es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces x se puede escribir como una combinación lineal de dichos vectores, es decir,

$$x = C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n, \qquad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

entonces,

$$Ax = C_1 A x_1 + \ldots + C_n A x_n = C_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + C_n \lambda_n x_n$$

por ortogonalidad y la normalización, se tiene que:

$$x_i^{\mathrm{T}} x_i = 1$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}} A x &= (C_1 x_1^{\mathrm{T}} + \ldots + C_n^{\mathrm{T}} x_n)(C_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + C_n \lambda_n x_n) \\ &= C_1^2 \lambda_1 + \ldots + C_n^2 \lambda_n \end{aligned}$$

usando la hipótesis $\lambda_i > 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$x^{\mathrm{T}} A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Ahora se prueba la equivalencia $c \iff d$, la cual se realiza en tres pasos usando la condición (a).

$a \Longrightarrow c$

Supongamos que $x^{\mathrm{T}} A x > 0 \quad \forall x \neq 0$. Sabemos que todos los autovalores son positivos, entonces

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n > 0$$

Finalmente, para probar que las submatrices A_k tienen determinantes positivos basta con verificar que si A es positivamente definida, entonces A_k también lo es, lo cual, consiste en tomar los valores cuyas últimas $n-k$ componentes sean ceros.

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}} A x &= \begin{pmatrix} x_k^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x_k^{\mathrm{T}} A_k x_k \end{aligned}$$

Como $x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \ \forall \ x \neq 0$, entonces en particular $x_k^{\mathrm{T}}A_kx_k > 0 \ \forall \ x_k \neq 0$.

De esta manera, la condición (a) se cumple para todas las submatrices A_k, por lo tanto, con un razonamiento análogo al anterior se concluye que A_k tiene determinante positivo.

Así, $$a \Longrightarrow c \qquad (2.3)$$

$c \Longrightarrow d$.

Sabemos que existe una relación directa entre los números $det(A_k)$ y los pivotes, pues el $k-$ ésimo pivote d_k es precisamente,

$$d_k = \frac{det(A_k)}{det(A_k - 1)};$$

si todos los determinantes son positivos, entonces todos los pivotes son positivos, y para las matrices positivamente definidas no se necesita intercambiar filas para la realización de eliminación gaussiana con pivoteo.

Así, $$c \Longrightarrow d \qquad (2.4)$$

usando las implicaciones (2.3), (2.4) y haciendo uso de la transitividad, se tiene que

$$a \Longrightarrow d$$

$d \Longrightarrow a$

Supongamos que todos los pivotes son positivos, demostraremos que

$$x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Esto fue lo que se realizó para el caso de matriz 2×2 al completar el cuadrado (ver Teorema 1.4 del capítulo 1).

Probar este resultado para matrices n x n, la eliminación gaussiana de una matriz simétrica, la triangular superior U es la transpuesta de la triangular inferior L por lo tanto,

$$A = LDU$$

se transforma en

$$A = LDL^{\mathrm{T}}.$$

Así,

$$d \Longrightarrow a.$$

♣

Teorema 2.6 *Sea A una matriz 2×2. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *La matriz A es simétrica y positivamente definida.*

b) *La matriz A es simétrica y tiene autovalores positivos.*

c) *La matriz A es simétrica y positivamente orientada.*

d) *La matriz A tiene determinante positivo.*

Demostración: Sea A una matriz 2×2

$a \Longrightarrow c$

Sea A una matriz 2×2 simétrica y positivamente definida. Probaremos que A es positivamente orientada, es decir,

$$\langle \mathrm{T}x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Si $det(A) = det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$,

entonces,

$$ac - b^2 > 0$$

Así, si $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{T}x &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + bx_1 & bx_1 + cx_2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T}x, x\rangle &= \langle (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2), (x_1, x_2)\rangle \\ &= (ax_1 + bx_2)x_1 + (bx_1 + cx_2)x_2 \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 > 0; \end{aligned}$$

por ser ésta la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la cual es positiva por el teorema (2.5) y la proposición (2.5).

Recíprocamente, si $\langle \mathrm{T}x, x\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$, entonces, la forma cuadrática $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y en consecuencia la matriz T es positivamente definida.
Esto prueba la equivalencia entre (a) y (c)
Las otras tres equivalencias están contenidas en la proposición (2.5) y el teorema (2.5) ♣

En el siguiente teorema se usarán resultados conocidos del Álgebra Lineal como: el proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt y que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tiene asociada una matriz $n \times n$, los cuales fueron estudiados en la sección (2.1).

Teorema 2.7 *Si $E = \mathbb{R}^n$ un espacio con producto interno $(,)$ y $\langle , \rangle$ denota el producto interno euclideo*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

entonces existe una matriz T tal que $(x, y) = \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle$

Demostración:

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base ortonormal en $(\mathbb{R}^n, (,))$. Tal base existe por el proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt; sea $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canónica de $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$.

Definamos la aplicación

$$S : (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, (,))$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

S es un aplicación lineal con $Se(_i) = x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

Como S aplica una base de $\mathbb{R}^n$ sobre otra base de $\mathbb{R}^n$, resulta que S es una biyección lineal y por tanto invertible. Sea

$$\mathbb{T} = S^{-1}.$$

Entonces,

$$\mathrm{T} : (\mathbb{R}^n, (,)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$$

es una transformación lineal invertible.

Sea A la matriz cuadrada asociada a la transformación lineal T. Entonces A es una matriz invertible y si

$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ y $y = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$

se tiene que,

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{i=1}^{n} a_i A x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \\ &= (a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Ay &= \sum_{i=1}^{n} b_i A x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \\ &= (b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

Así,

$$\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad .$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j}^{n} a_i b_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle = (x, y)$$

♣

Recíprocamente, consideremos a $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ y T una matriz invertible. Definamos $(x, y) = \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle$.

Probemos que (x, y) define un producto interno

a) $(x, x) = \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle = \mathrm{T}\langle x, x\rangle > 0 \ \forall \ x \neq 0$

b) Simetría $(x, y) = \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle = \langle \mathrm{T}y, \mathrm{T}x\rangle = (y, x)$

c) Linealidad

$$\begin{aligned}
(\alpha x + \beta y, z) &= \langle \mathrm{T}(\alpha x, \beta y), \mathrm{T}z\rangle \\
&= \langle \alpha \mathrm{T}x + \beta \mathrm{T}y, \mathrm{T}z\rangle \\
&= \alpha\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}z\rangle + \beta\langle \mathrm{T}y, \mathrm{T}z\rangle \\
&= \alpha(x, z) + \beta(y, z).
\end{aligned}$$

Terminamos el capítulo dando un resumen sobre lo estudiado entre Elipses y Álgebra Lineal, el cual realizamos de la siguiente manera.

La elipse, curva conocida desde la antiguedad griega, admite cada una de las siguientes descrpciones algebraicas:

a) La ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa la ecuación de una elipse si A y C tienen el mismo signo, $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$ y $B^2 - 4AC < 0$.

b) La forma cuadrática $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es positiva defnida si $Q(x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, es simétrica y se cumple la linealidad.

c) La forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ definida positiva tiene asociada una matriz 2×2 simétrica.

d) La forma cuadrática $ax^2+bxy+cy^2$ positivamente definida determina un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

e) La matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tiene determinante positivo.

f) La matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es positivamente definida.

g) La matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tiene autovalores positivos.

h) La matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tiene orientación positiva.

i) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x \rangle = 1\}$ representa una elipse, donde T es una matriz invertible 2×2

En el próximo capítulo utilizaremos estos resultados particularmente el ítem d), junto con la Regla del Paralelogramo para obtener valiosa información en Análisis Funcional como:

Un espacio normado real es prehilbertiano si y sólo si la intersección de su esfera unidad con cualquier plano que pasa por el origen es una elipse.

CAPÍTULO 3

Caracterizaciones de Espacios de Hilbert

En el presente capítulo usaremos los resultados de los capítulos precedentes para obtener nuestro resultado principal y así caracterizar espacios de Hilbert a través de sus subespacios bidimensionales.

3.1. Preliminares.

A continuación presentaremos algunas definiciones y resultados básicos del Análisis que serán útiles para el desarrollo del capítulo.

Definición 3.1 *Un espacio X es* ***prehilbertiano*** *si X es un espacio vectorial provisto de un producto interno.*

Definición 3.2 *Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial. Una aplicación que hace corresponder a cada valor $x \in \mathbb{E}$ el número real $\|x\|$, se llama una* ***norma*** *de $\mathbb{E}$ si, y sólo si, verifica los siguientes axiomas.*

a) $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{E}$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in \mathbb{E}$

Un **espacio normado** es un par $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\mathbb{E}$.

Definición 3.3 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, la **norma euclideana** de x es el número real $\|x\|$ denotado por*

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

donde, como es usual, $\langle , \rangle$ denota el producto inteno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.1}$$

Observaciones:

a) El par $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ se llama **espacio euclideo.**

b) El producto interno se definió en el capítulo 2 (ver definición (2.4). Dicho esto probaremos que:

Proposición 3.1 *Si $\langle , \rangle$ es un producto interno en un espacio vectorial real X, entonces*

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Demostración: Sea $\langle , \rangle$ un producto interno.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle - \|y\|^2 \\
&= 4\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

♣

Proposición 3.2 (Desigualdad de Cauchy - Schwarz) *Sean x e y vectores en un espacio prehilbertiano; se cumple que*

$$\Big|\langle x, y\rangle\Big| \leq \|x\|\|y\|.$$

La igualdad se cumple si y sólo si x e y son vectores linealmente dependientes.

Demostración:

a) Si x e y son vectores linealmente independientes, entonces

$$0 < \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2|\lambda|^2$$

Tomando $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$,
tenemos que,

$$0 \leq \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} + \|y\|^2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

b) Supongamos x e y son vectores linealmente dependientes, entonces uno de ellos es múltiplo del otro, luego se tiene $x = \mu y$, así

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| &= |\langle \mu x, y\rangle| \\ &= |\mu|\|y\|^2 \\ &= (|\mu|\|y\|)\|y\| \\ &= \|x\|\|y\| \end{aligned}$$

♣

Un ejemplo importante de espacio normado es $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ $(1 \leq p < \infty)$, donde

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

El espacio $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ se denota también por l_p^n.

Definición 3.4 *Una **distancia** en un conjunto X es una función*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones:

a) $d(x, y) > 0 \ \forall \ x \neq y$, $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(**Desigualdad Triangular.**)*

Definición 3.5 *Un **espacio métrico** es un par* (M, d)*, formado por el conjunto no vacío* M *y una métrica* d *sobre* M.

Observaciones: Dado un espacio vectorial $\mathbb{E}$, recordemos que si tenemos una norma $\|.\|$ definida sobre $\mathbb{E}$, siempre es posible definir una métrica sobre $\mathbb{E}$. Si consideramos la función definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall \, x, y \in \mathbb{E}$$

d es una métrica en $\mathbb{E}$, en consecuencia, todo espacio normado es un espacio métrico.

Definición 3.6 *Diremos que una norma $\|.\|$ proviene de un producto interno $\langle , \rangle$ si $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, para algún producto interno $\langle \ , \rangle$*

Observación: Todo espacio prehilbertiano puede considerarse un espacio normado y por tanto es un espacio métrico, con la métrica definida por la norma proveniente de un producto interno.

Definición 3.7 *En* $\mathbb{R}^2$ *la métrica euclídea se define como*

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde, $x = (x_1, x_2)$ *y* $y = (y_1, y_2)$

Proposición 3.3 *En un espacio prehilbertiano, la norma satisface la Regla del Paralelogramo.*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

♣

Definición 3.8 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y sea* $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ *y* $x_o \in M$*. Decimos que* $\{x_n\}$ ***converge*** *a* x_o *y lo denotamos como* $\{x_n\} \to x_o$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_o) = 0$*.*
En otras palabras, decimos que $\{x_n\} \to x_o$ *si y solo si* $\forall\, \xi > 0 \quad \exists\, n_o \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_o) < \xi$, $\forall\ n > n_o$.

Definición 3.9 *Sea* $(M, \|.\|)$ *un espacio normado y sea* $\{x_n\} \subseteq \mathrm{M}$*. Se dide que* $\{x_n\}$ *es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *(*N *depende de* ϵ*) tal que*

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \ \ si \ \ m \geq N \ \ y \ \ n \geq N$$

Definición 3.10 *Un espacio métrico* M *es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy es convergente en* M*.*

Definición 3.11 *Un espacio* $(M, \|.\|)$ *y completo con la métrica inducida por la norma se llama* ***espacio de Banach****.*

Definición 3.12 *Un espacio* M *prehilbertiano completo se llama* ***espacio de Hilbert.***

3.2. Espacios l_p^2 y $L^p[a,b]$

Aquí estudiaremos los espacios l_p^2, es decir, los espacios de dimensión 2 con la norma p, daremos algunos ejemplos de espacios que no son de Hilbert. Hablaremos en particular del espacio $L^2[a,b]$ aprovechando las caraterísticas de la norma en $L^2[a,b]$ para hacer este estudio en el contexto de espacios de Hilbert; los cuales siguen de importancia a los espacios de Banach en el Análisis Funcional.

Observación: $\mathcal{C}[I]$ representa el espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo I, finito o infinito de la recta real con las operaciones

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 3.13 *Para* $1 \leq p < \infty$*, el espacio de sucesiones* $\left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$ *con la norma* p *definida por:*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p \text{ es denotado por } l_p.$$

l_p *es un espacio de Banach de infinitas dimensiones para* $1 \leq p < \infty$

Definición 3.14 *$L_p([a,b])$, la clase de funciones Lebesgue integrables de potencia p en el intervalo $[a,b]$ con la norma*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$d_p(f,g) = \|f - g\|_p$$

donde $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de Lebesgue integrables.

A continuación daremos algunos ejemplos de espacios normados no prehilbertianos.

Ejemplo 3.1 *El espacio $(l_1^2, \|.\|_1)$ no es un espacio prehilbertiano, donde la norma se define como*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \text{ para } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En efecto, es fácil ver que $\|.\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.
Sean $x = (1,0)$, $y = (0,1)$. Luego $\|x\| = \|y\| = 1$, y $\|x+y\| = \|x-y\| = 2$.
Así,
$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$
mientras que
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$
y por tanto no se cumple la Regla del Paralelogramo (proposición (3.3)). ♣

Proposición 3.4 *El espacio $\mathcal{C}[a,b]$ no es un espacio prehilbertiano, con la norma definida por*

$$\|x\| = max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\}$$

Demostración: Probaremos que la norma definida por

$$\|x\| = max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\}, \text{ no proviene de un producto interno.}$$

Para probar que la norma no proviene de un producto interno, basta con probar que la norma no satisface la Regla del Paralelogramo.

Tomemos.

Las funciones x, $y \in C[a,b]$, definidas así: $\forall t \in [a,b]$, $x(t) = 1$, $\quad y(t) = \dfrac{(t-a)}{b-a}$. Es fácil ver que $\quad \|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\quad x(t) + y(t) = 1 + \dfrac{(t-a)}{b-a}$

y

$x(t) - y(t) = 1 - \dfrac{(t-a)}{b-a}$

Así,

$\|x+y\| = 2$, $\|x-y\| = 1$

Por lo tanto,

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$ y $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$.

De aquí se concluye que la norma no proviene de un producto interno, por lo tanto no es un espacio prehilbertiano. ♣

En $L^p[a,b]$ $1 \leq p < \infty$, la desigualdad triangular toma la siguiente forma:

Teorema 3.1 (Desigualdad de Minkowski) *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones medibles con* $|f|^p$ *y* $|g|^p$*, Lebesgue integrable. Entonces* $|f+g|^p$ *es integrable y*

$$\left(\int_{[a,b]} |f+g|^p dt\right) \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p dt\right) + \left(\int_{[a,b]} |g|^p dt\right)$$

Teorema 3.2 (Desigualdad de Hölder) *Sean* $f, g \in (1, +\infty)$ *con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < \infty$*. Entonces si* $f \in L^p[a,b]$ *y* $g \in L^q[a,b]$ *Lebesgue integrable, se tiene que* $f, g \in L^p[a,b]$ *y*

$$\int_{[a,b]} |fg| \leq \left[\int_{[a,b]} |f|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{[a,b]} |g|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Proposición 3.5 *La norma* $L^2[0,1]$ *proviene del producto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

donde, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

Demostración:

a) $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} > 0 \ \forall \ f(t) \neq 0$

b) $\|\lambda f\|_2 = \langle \lambda f, \lambda f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |\lambda f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2$

c) Por la Desigualdad de Minkowski resulta la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_2 &= \langle f+g, f+g \rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_2 + \|g\|_2
\end{aligned}$$

♣

Probemos que $\langle f, g \rangle$ de la proposición precedente está bien definida, es decir, basta verificar que $\langle f, g \rangle$ es un número real para todo f, $g \in L^2[0,1]$.
Esto resulta de la desigualdad de Hölder, pues

$$\langle f, g \rangle = \left(\int_0^1 |fg|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Con esto hemos probado que el espacio $L^2[0,1]$ es un espacio de Hilbert.

3.3. Teorema de Jordan - von Neumann

Daremos la demostración del Teorema de Jordan - von Neumann y algunas aplicaciones.

Definición 3.15 *Una función f entre dos espacios vectoriales E y F se llama* ***aditiva*** *si $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall\ x, y \in E$.*

Proposición 3.6 *Sean E y F espacios vectoriales normados reales y $f : E \longrightarrow F$ una función aditiva. Si f es continua, entonces es lineal.*

Demostración: Como f es aditiva, para probar la continuidad de f, basta probar que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in E \quad y \quad \lambda \quad \text{fijo.}$$

De la aditividad de f se tiene que
$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$, lo cual implica que $f(0) = 0$ y este hecho a su vez implica que

$$f(x) = -f(-x) \tag{3.2}$$

puesto que,

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x).$$

De nuevo por la aditividad de f se tiene que

$$f(2x) = 2f(x)$$

y por recurrencia se demuestra que

$$f(nx) = nf(x) \tag{3.3}$$

para cada número natural n; este hecho junto con (3.5) muestra que

$$f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

De aquí se deduce que

$$f(x) = \frac{1}{n} f(nx) \quad \forall n \in \mathbb{E}$$

Si tomamos $y = \dfrac{1}{n}x$ vemos que

$$\frac{1}{n} f(x) = f\left(\frac{1}{n}x\right);$$

y en consecuencia para cada número racional $r = \dfrac{m}{n}$ con m y n enteros, se tiene que

$$f(rx) = rf(x) \tag{3.5}$$

Si λ es irracional, entonces existe una sucesión r_n de números racionales tal que

$$r_n \longrightarrow \lambda;$$

así

$$r_n f(x) \longrightarrow \lambda f(x)$$

$$f(r_n x) \longrightarrow \lambda f(x)$$

pero por la continuidad de f se tiene también que

$$f(r_n x) \longrightarrow f(\lambda x);$$

y por la unidad del límite, se concluye que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. ♣

Teorema 3.3 *Sean E y F espacios normados reales. Si $f : E \longrightarrow F$ es aditiva y existe $r > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M \ \forall \ x \in \mathbf{B}_r(0)$, entonces f es continua y en consecuencia es lineal.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y escojamos δ de forma que para algún entero positivo p suficientemente grande se cumple que $\dfrac{M}{p} < \epsilon$ y $0 < \delta < \dfrac{r}{p}$.
Como f es aditiva, se tiene que si $\|x - y\| < \delta$, entonces

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{1}{p}\|f(p(x-y))\| \leq \frac{1}{p}\|f(p(x-y))\|. \tag{3.6}$$

Ahora bien,
$\|p(x-y)\| = p\|x-y\| < p\delta < p\frac{r}{p} < r$
y por lo tanto, se tiene que

$$p(x-y) \in \mathbf{B}_r(0)$$

y así por (3.9)

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{p}\|f(p(x-y))\| \leq \frac{1}{p}M < \epsilon,$$

de aquí se obtiene que f es continua. Siendo que además f es aditiva, la linealidad es consecuencia de la proposición (3.10). ♣

Teorema 3.4 (Teorema de Jordan - von Neumann) *Si en un espacio X normado la norma satisface la Regla del Paralelogramo, entonces la norma proviene de un producto interno.*

Demostración: Definamos $(x,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$. Veamos que (x,y) define un producto interno en X

a) $(x,x) = \frac{1}{4}[\|2x\|^2] = \|x\|^2 > 0 \ \forall \ x \neq 0$

b) Probemos que $(x,y) = (y,x)$

$$\begin{aligned} (x,y) &= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \\ &= \frac{1}{4}[\|y+x\|^2 - \|(-1)(-x+y)\|^2] \\ &= \frac{1}{4}[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2] \\ &= (y,x). \end{aligned}$$

c) Aditividad $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x+y}{2},z\right) &= \frac{1}{4}\left[\left\|\frac{(x+y)}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{(x+y)}{2}-z\right\|^2\right]\\
&= \frac{1}{16}\left[\left\|(x+y)+2z\right\|^2-\left\|x+y-2z\right\|^2\right]\\
&= \frac{1}{16}\left[2\left\|x+z\right\|^2+2\left\|y+z\right\|^2-2\left\|x-z\right\|^2-2\left\|y-z\right\|^2\right.\\
&+ \left.\left\|x-y\right\|^2-\left\|x-y\right\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}[(x,z)+(y,z)]
\end{aligned}$$

lo cual muestra que,

$$\left(\frac{x+y}{2},z\right)=\frac{1}{2}[(x,z)+(y,z)]$$

Si $y=0$ entonces $(y,z)=0$, pues

$$(y,z)=\frac{1}{4}\left[\left\|y+z\right\|^2-\left\|y-z\right\|^2\right]=\frac{1}{4}\|z\|^2-\|z\|^2,$$

se tiene que

$$\frac{1}{2}(x,z)=\left(\frac{x}{2},z\right)$$

y por lo tanto,

$(x, z) = 2\left(\dfrac{x}{2}, z\right).$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
(x+y, z) &= 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right)\\
&= 2\frac{1}{2}[(x,z) + (y+z)]\\
&= (x,z) + (y,z)
\end{aligned}$$

y esto implica que $(,)$ es aditiva en la primera variable.
En forma análoga se prueba la aditividad de $(,)$ en la segunda variable. En conclusión $(,)$ es aditiva para probar la linealidad de $(,)$, basta probar que f es continua, luego se obtiene la linealidad mediante la proposición (3.10).
Fijemos z y consideremos la aplicación

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (x, z)$$

Sabemos que f es aditiva. Si $x \in \mathbf{B}_1(0)$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \frac{1}{4}\left[\left\|x+z\right\|^2 + \left\|x-z\right\|^2\right]\\
&\leq \frac{1}{4}\left[\left(\|x\| + \|z\|\right)^2 + \left(\|x\| + \|z\|\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|z\|\right)^2\\
&< 1 + \|z\|^2,
\end{aligned}$$

lo cual implica que f es acotada en $\mathbf{B}_1(0)$ y al ser aditiva por el teorema (3.10), f es continua siendo f aditiva y continua por la proposición (3.10) implica que f es lineal. ♣

Proposición 3.7 (Aplicación del Teorema de Jordan - von Neumann) $L^p[0,1]$ *es un espacio de Hilbert si y sólo si* $p = 2$

Demostración: Supongamos que $L^p[0,1]$ es un espacio de Hilbert, luego $L^p[0,1]$ tiene, por definición de espacio de Hilbert, la norma proviene de un producto interno y por lo tanto satisface la Regla del Paralelogramo, en consecuencia,

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\Bigg(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\Bigg) \ \forall \ f, g \in L^p[0,1].$$

Sea E un conjunto medible en $[0,1]$ con $\mu(E) = \dfrac{1}{2}$ y pongamos $f = \chi_E$ y $g = 1 - \chi_E$; luego, haciendo los cálculos rutinarios se muestra que
$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2$
y
$\|f\|_p^2 = \|g\|_p^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}$.

Aplicando la Regla del Paralelogramo, se tiene que

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\Bigg(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\Bigg)$$

$$2 = 2\Bigg(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}\Bigg)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{2}{p}} = 1$$

luego,

$1 - \dfrac{2}{p} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{p} = 1 \Longleftrightarrow p = 2$

La prueba del recíproco fue obtenida en la (proposición 3.5). ♣

Proposición 3.8 (Aplicación del Teorema de Jordan - von Neumann) *Un espacio normado real de dimensión $n \geq 2$ es prehilbertiano si y sólo si, cada plano que pasa por el origen interseca la esfera unidad en una elipse.*

Demostración: Sea X un espacio normado real de dimensión $n \geq 2$.

$\Longrightarrow$) Suponga que X es un espacio prehilbertiano y considere u y v vectores linealmente independientes en X. Entonces, probaremos que cada plano que pasa por el origen interseca la esfera unidad en una elipse, para esto basta demostrar que el conjunto

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|xu + yv\| = 1\right\} \text{ es una elipse.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|xu + yv\|^2 &= \langle xu + yv, xu + yv\rangle \\
&= \|x\|^2\langle u, u\rangle + 2xy\langle u, v\rangle + \|y\|^2\langle v, v\rangle
\end{aligned}$$

como u y v son linealmente independientes $u \neq 0$ y $v \neq 0$, y así se tiene que $\|u\|^2 > 0$ y $\|v\|^2 > 0$; además por la desigualdad de Schwarz se concluye que

$$\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 > 0$$

por lo tanto, el conjunto B representa la ecuación de una elipse.

$\Longleftarrow$) Considere u y v vectores linealmente independientes en X. Suponga que el conjunto

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|xu + yv\| = 1\right\} \quad \text{es una elipse}$$

es decir, que cada plano que pasa por el origen interseca la esfera unidad en una elipse. Probaremos que X es un espacio prehilbertiano. Para ello basta demostrar que la norma en X satisface la Regla del paralelogramo aplicando el Teorema de Jordan von Neumann.

Considere la ecuación de una elipse,

$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, con $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$ (ver capítulo 2 proposición (2.5)).

Tome α_1 y α_2 dos números reales no ambos nulos, los cuales cumplen que:

$\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\| > 0$,

y

$$\left\|\frac{\alpha_1 u}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|} + \frac{\alpha_2 v}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|}\right\|^2 = 1;$$

lo cual es posible porque u y v son linealmente independientes; de ello se tiene que

$$\left(\frac{\alpha_1 u}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v}, \frac{\alpha_2 v}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v}\|\right) \in B$$

pues $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|xu + yv\| = 1\right\}$

por lo tanto,

$$a\frac{\alpha_1^2}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|^2} + 2b\frac{\alpha_1\alpha_2}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|^2} + c\frac{\alpha_2^2}{\|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|^2} = 1;$$

es decir,

$$a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2 = \|\alpha_1 u + \alpha_2 v\|^2 \tag{3.7}$$

lo cual implica que,

$a = \|u\|^2$ (tomando $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$ de la ecuación (3.7))

y

$c = \|v\|^2$ (tomando $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 1$ de la ecuación (3.7))

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= (\|u\|^2 + 2b\langle u, v\rangle + \|v\|^2) + (\|u\|^2 - 2b\langle u, v\rangle + \|v\|^2) \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \end{aligned}$$

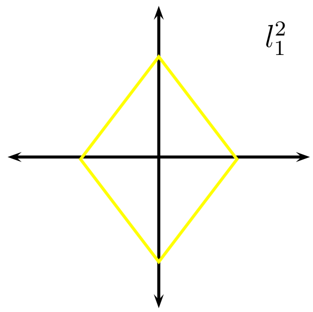
Pues los vectores u y v son linealmente independientes, con esto se prueba que la norma satisface la Regla del Paralelogramo; y usando el Teorema de Jordan - von Neumann concluimos que X es un espacio Prehilbertiano. ♣

A continuación daremos algunos ejemplos de espacios normado que no son de Hilbert pues su esfera unidad no es una elipse.

Ejemplo 3.2 *La esfera unidad en el espacio* $(l_1^2, \|.\|_1)$*, no es una elipse; pues*

$$\begin{aligned} S &= \{x \in l_1^2 : \|x\|_1 = 1\} \\ &= \left\{x \in l_1^2 : \sum_{i=1}^{2} |x_i| = 1\right\} \\ &= \left\{x \in l_1^2 : |x_1| + |x_2| = 1\right\} \end{aligned}$$

por tanto es un rombo.

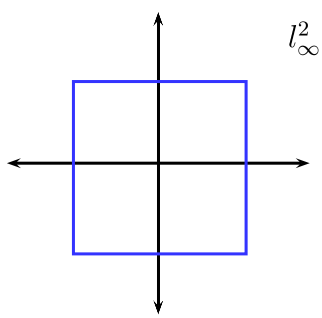


♣

Ejemplo 3.3 *La esfera unidad en el espacio* (l_∞^2)*, no es una elipse; pues*

$$\begin{aligned} S &= \{x \in l_\infty^2 : \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \left\{ x \in l_\infty^2 : max_{i \in I}\{|x_i|\} = 1 \right\} \end{aligned}$$

de aqui se tiene que es un cuadrado.



♣

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bárcenas D. , *El Plano de Minkowski y Geometría de espacios de Banach*, Notas de Matemáticas N^o 243,2 (2) (2006) (17-35).

[2] Berberian S.K, *Linear Algebra*, Oxford University Press, Oxford New York (1982).

[3] Cotlar M and R Cignoli, *An Introduction to Functional Analysis*, North Holland, Ámsterdam, New York (1974).

[4] Coxeter H.S.M. and Greitzere S.L, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America. New Mathematical Library, N^o 19, 1967

[5] Dudley R, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks, Pacific Grove, California (1989).

[6] Durán D, *Geometría Euclideana*, VI Talleres de Formación Matemática, Universidad de Carabobo, Valencia - Venezuela (2006).

[7] Gao J, *An Application of Elementary Geometry in Functional Analysis*, The College, Math Journal, 28 (1997)(39- 43).

[8] Howard Anton, *Introducción al Álgebra Lineal*, Limusa, México (1989).

[9] Lehman C.H, *Geometría Análitica*, Limusa México (1995).

[10] Nieto J. L, *Introducción a los espacios de Hilbert*, Eva V. Chesneau, Canadá (1978).

[11] Strang G. , *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, México, Bogotá, Caracas (1982).