Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Mérida - Venezuela

ESTABILIDAD DE ALGUNOS PROCESOS ITERATIVOS DE CIERTAS APLICACIONES CONTRACCIONES

Br. Lisandro Useche

Tutor: Jose R. Morales

Diciembre, 2007

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal de este capitulo es dar un breve repaso de algunos conceptos, propiedades y resultados necesarios para el desarrollo satisfactorio de este trabajo. Los resultados que enunciaremos son ampliamente conocidos pues son resultados clásicos del análisis y la topología, por lo tanto, en la mayoría de los casos omitiremos sus respectivas demostraciones, para los interesados en dichas demostraciones pueden consultar cualquier libro sobre el tema, en especial [1],[2] y [3].

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1 *Una **métrica** en un conjunto no vacío* M*, es una función* $d : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow [0, +\infty)$ *que asocia a cada par de elementos* $x, y \in \mathrm{M}$ *un numero real positivo* $d(x, y)$*, llamado distancia del punto* x *al punto* y*, de modo que*

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetría)*

iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Desigualdad Triangular)*

*Un **espacio métrico** es un par* (M, d)*, formado por el conjunto no vacío* M *y una metríca* d *sobre* M.

Ejemplo 1.1

Sea $\mathrm{M} \neq \phi$ *y consideremos* $d : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida por*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \neq y \\ \\ 0 \quad si \quad x = y \end{cases}$$

Es claro que d *es una metríca sobre* M. *Llamada* ***métrica discreta****. El par* (M, d) *es un espacio metríco llamado* ***espacio métrico discreto****.*

Ejemplo 1.2

Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y considere* $d : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por*

$$d(x,y) = |x - y| \qquad \forall\ x, y \in M$$

Nuevamente, es claro que d *es una metríca sobre* M *llamada* ***metríca usual****, así el par* (M, d) *es un espacio metríco*

Ejemplo 1.3

Sea $\mathrm{M} = C[a,b]$ *el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo* $[a,b]$ *y considere* $d_\infty : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por*

$$d_\infty(f,g) = sup\{d(f(x), g(x)) : x \in [a,b]\}$$

Nuevamente, es claro que d *es una metríca sobre* M *llamada* ***metríca uniforme****, así el par* (M, d_∞) *es un espacio metríco*

Definición 1.2 *Sea* (M, d) *un espacio metríco y sean* $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ *y* $x_o \in M$*. Decimos que* $\{x_n\}$ ***converge*** *a* x_o *y lo denotamos como* $\{x_n\} \to x_o$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_o) = 0$

En otras palabras decimos que $\{x_n\} \to x_o$ *si y solo si* $\forall\, \xi > 0 \quad \exists\, n_o \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_o) < \xi$*,* $\forall\ n > n_o$

Definición 1.3 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en* (M, d). *Se dice que* $\{x_n\}$ *es una **sucesión de Cauchy** en* M *si* $\forall\, \xi > 0 \quad \exists\, n_o \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \xi$, $\forall n, m > n_o$

En este caso lo denotaremos por $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$

Definición 1.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico. Decimos que* M *es **completo** si toda sucesión de Cauchy en* M *converge a un punto de* M.

Proposición 1.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico completo. Entonces,* $\{x_n\} \subset (\mathrm{M}, d)$ *es una sucesión de Cauchy* $\Leftrightarrow \{x_n\}$ *es convergente en* M.

Ejemplo 1.4
El espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *es completo.*

Ejemplo 1.5
El espacio $(0, 1) \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ *no es completo.*

Definición 1.5 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *una función. Entonces* T *es una función.*

i. ***Continua** en un punto* $x_o \in \mathrm{M}$ *si* $\forall\, \xi > 0 \quad \exists \delta > 0$ *tal que, si* $y \in \mathrm{M}$ *y* $d(x_o, y) < \delta \Rightarrow \rho(T(x_o), T(y)) < \xi$

ii. ***Continua** en* M, *si* T *es continua* $\forall x \in \mathrm{M}$

Ejemplo 1.6
La funcuión constante es continua.

Ejemplo 1.7
La funcuión identidad es continua.

Ejemplo 1.8
Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida por*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ -1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

No es continua en todo $\mathbb{R}$.

Definición 1.6 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *una función. Se dice que* T *es* ***uniformemente continua*** $(U.C)$ *si,* $\forall\, \xi > 0 \quad \exists \delta(\xi) > 0$ *tal que,* $\forall\ x, y \in \mathrm{M}$ *y* $d(x, y) < \delta(\xi) \Rightarrow \rho(T(x), T(y)) < \xi$

Ejemplo 1.9
La función constante y la función identidad son funciones uniformemente continuas.

Ejemplo 1.10
La función $\mathrm{T} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$T(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

no es uniformemente continua.

Proposición 1.2 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *una función. Entonces, si* T *es uniformemente continua* $\Rightarrow T$ *es continua.*

Definición 1.7 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *una función. Se dice que* T *es una* ***aplicación Lipschitziana*** *si existe una constante* $\alpha \geq 0$ *tal que*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathrm{M}$$

Ejemplo 1.11
La función $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *definida por*

$$T(x) = x^2, \quad \forall\ x \in [0, 1]$$

es una aplicación Lipschitziana.

Proposición 1.3 *Sean* (M, d) *y* (N, ρ) *espacios métricos y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *una función Lipschitziana, entonces* T *es uniformemente continua.*

Definición 1.8 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (M, d), se dice que $\{x_n\}$ es una **sucesión α-contracción** si existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Lema 1.1 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión α-contracción en (M, d), entonces $\{x_n\}$ es Cauchy en (M, d)*

Demostración:

Observemos que de (1.1) se tiene que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$

Por desigualdad triangular tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)$$

por lo tanto por (1.2),

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + d(x_{n+1}, x_m)$$

Así aplicando nuevamente desigualdad triangular se obtiene

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

luego, por (1.2) se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_1, x_0)$$

por lo tanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)[1 + \alpha + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1-n}]$$

tomando $k = m - 1 - n$ tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k} \alpha^i$$

como $\sum_{i=0}^{k} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$ *por ser una serie convergente entonces*

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

por otra parte como $\alpha \in (0,1)$ *y* $k+1 = m-n > 0$ *entonces* α^n *convergen a* 0 *por lo tanto,*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

luego, por la definición (1.3) $\{x_n\}$ *es de Cauchy.*

♣

Lema 1.2 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión* α*-contracción en* (M, d) *completo, entonces* $\{x_n\}$ *converge a un punto de* (M, d)*.*

Demostración:

Por el lema (1.1) $\{x_n\}$ *es de Cauchy y como* (M, d) *es un espacio métrico completo, por la proposición* (1.1) *se tiene que* $\{x_n\}$ *converge a un punto de* M.

♣

1.2. Espacios Normados

Definición 1.9 *Sea* E *un espacio vectorial, una aplicación que hace corresponder a cada valor* $x \in \mathrm{E}$ *el numero real* $\|x\|$*, se llama una* ***norma*** *de* E *si y solo si verifica los siguientes axiomas.*

i. $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathrm{E}$

iii. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in \mathrm{E}$

Un ***espacio normado*** *es un par* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *donde* $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* E

Ejemplo 1.12 *Consideremos* l_p^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, *es el espacio que consiste de todas las n-uplas* $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *donde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, l_p^n *con la norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

es un espacio normado.

Ejemplo 1.13
Consideremos l_∞^n, *el espacio vectorial de todas las n-uplas* $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, *donde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, l_∞^n *con la norma*

$$\|x\|_\infty = sup\{|\alpha_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

es un espacio normado.

Observación:

Dado un espacio vectorial E, recordemos que si tenemos una norma $\|\cdot\|$ definida sobre E, siempre es posible definir una métrica sobre E, consideremos la función definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in E$$

es una métrica en E, en consecuencia, todo espacio normado es un espacio métrico.

Capítulo 2

Aplicaciones Contracciones

En este capitulo nuestro objetivo es dar las definiciones de las diferentes aplicaciones contracciones en las cuales vamos a basar el presente trabajo.

Además daremos las relaciones existentes entre tales definiciones y veremos algunos ejemplos de dichas relaciones.

2.1. Aplicaciones Contracciones que Implican Continuidad

Definición 2.1 $(Banach, 1922)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. *Entonces, se dice que* T *es una* ***contracción de Banach****,* $(B - contraccion)$*, si existe un* $0 \leq \alpha < 1$ *tal que*

$$d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathrm{M}$$

Ejemplo 2.1
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$*, con la métrica usual y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación definida por*

$$T(x) = \frac{1}{2}x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Es claro que T *es una aplicación contracción de Banach.*

Definición 2.2 $(Edelstein, 1962)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. *Entonces, se dice que* T *es una* ***aplicación contráctil*** *,* $(E - contraccion)$*, si para todo* $x, y \in \mathrm{M}$ *con* $x \neq y$

$$d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) < d(x, y)$$

Ejemplo 2.2
Sea $\mathrm{M} = [0, +\infty)$ *y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación, definida por*

$$T(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}$$

es facíl probar que T *satisface*

$$\forall\ x, y \in \mathrm{M}\ con\ x \neq y,\ |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

por lo que T *es una E-contracción.*

Definición 2.3 $(Freundenthal - Hurewicz, 1936)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. *Entonces, se dice que* T *es una aplicación* ***no-expansiva*** *si para todo* $x, y \in \mathrm{M}$

$$d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq d(x, y)$$

Ejemplo 2.3
Sea $\mathrm{M} = [0, 1]$ *y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación, definida por*

$$T(x) = 1 - x, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}$$

es facíl probar que, T *es una aplicación no-expansiva.*

El siguiente resultado nos muestra la relación existente entre algunas de las aplicaciones contracciones definidas anteriormente.

Lema 2.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación . Entonces B-contracción* $\Rightarrow$ *E-contracción* $\Rightarrow$ *no-expansiva* $\Rightarrow$ *Lischitz* $\Rightarrow$ *U.C* $\Rightarrow$ *Continua.*

Ejemplo 2.4
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación definida por*

$$T(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}$$

entonces:

i. T *es una función continua*

ii. T *es una E-contracción*

iii. T *no es una B-contracción*

por lo tanto, E-contracción $\not\Rightarrow$ *B-contracción.*

Ejemplo 2.5
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación definida por*

$$T(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{M}$$

entonces:

i. T *es continua*

ii. T *es una E-contracción*

iii. T *no es una B-contracción*

iv. T *no es una aplicación no-expansiva*

por lo tanto, E-contracción $\not\Rightarrow$ *B-contracción y E-contracción* $\not\Rightarrow$ *no-expansiva.*

Ejemplo 2.6
Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación definida por*

$$T(x) = \cos(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{M}$$

entonces:

i. T es continua

ii. T es no-expansiva

iii. T no es B-contracción

por lo tanto, no-expansiva $\nRightarrow$ B-contracción.

Observación:

De acuerdo al lema 2.1 se tiene que, las aplicaciones B-contracción, E-contracción y las no-expansivas son funciones uniformemente continuas.

2.2. Aplicaciones Contracciones que no Implican Continuidad

Parece natural plantearnos la interrogante, ¿existen funciones que satisfacen algunas condiciones contracción que no impliquen la continuidad de la función?

Esta interrogate fue respondida de forma positiva por R. Kannan [4],quien introdujo una aplicación que cumple cierta condición contractiva pero, que tal aplicación no es una función continua.

Siguiendo la definición de Kannan, mucho artículos fueron dedicados a obtener varias clases de aplicaciones contractivas que no requieren de la continuidad de la aplicación ver por ejemplo, Rus [5],[6] y sus referencias, Taskovic [7], Rhoades [8], Chatterjea [9].

Definición 2.4 $(R.\ Kannan, 1968)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, se dice que* T *es una aplicación* ***tipo Kannan*** $(K_1 - contraccin)$ *si existe un* $\alpha \in [0, 1)$*, tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(x, T(x)) + d(y, T(y))], \quad \forall\, x, y \in \mathrm{M}$$

Definición 2.5 $(S.\ Chatterjea, 1972)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, se dice que* T *es una aplicación* ***tipo Chatterjea*** $(K_2 - contraccin)$ *si existe un* $\beta \in [0, 1)$*, tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \beta[d(x, T(y)) + d(y, T(x))], \quad \forall\, x, y \in \mathrm{M}$$

Ejemplo 2.7
Existe una función T *que es* K_1*-contracción pero no es* K_2*-contracción. Además* T *no es continua*

En efecto consideremos la función $T : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$*, definida por*

$$T(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & si \quad x \in (-1, 1) \\ \\ 0 & si \quad x = -1 \ o \ x = 1 \end{cases}$$

entonces:

i. T *no es continua*

ii. T *es una* K_1*-contracción*

iii. T *no es una* K_2*-contracción*

de lo anterior podemos concluir que, K_1*-contracción* $\nRightarrow$ K_2*-contracción y*
K_1*-contracción* $\nRightarrow$ *B-contracción.*

Ejemplo 2.8
Existe una función T que es K_2-contracción pero no es K_1-contracción. Además T no es continua.

En efecto consideremos la función $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad x \in [0, 1) \\ \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

entonces:

i. *T no es continua*

ii. *T es una K_2-contracción*

iii. *T no es una K_1-contracción*

de lo anterior podemos concluir que, K_2-contracción $\not\Rightarrow$ K_1-contracción y K_2-contracción $\not\Rightarrow$ B-contracción.

Ejemplo 2.9
Existe una función T que es una B-contracción pero no es una K_1-contracción.

En efecto consideremos la función $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, definida por

$$T(x) = \frac{x}{2}, \quad \forall\, x, y \in [0, 1]$$

entonces:

i. *T es una B-contraccón*

ii. *T no es una K_1-contracción*

de lo anterior podemos concluir que, B-contracción $\not\Rightarrow$ K_1-contracción.

Ejemplo 2.10
Existe una función T que es una B-contracción pero no es una K_2-contracción.

En efecto consideremos la función $T : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, definida por

$$T(x) = \frac{x}{2}, \quad \forall\, x, y \in [-1,1]$$

entonces:

i. T es una B-contraccón

ii. T no es una K_2-contracción

de lo anterior podemos concluir que, B-contracción $\not\Rightarrow$ K_2-contracción.

2.3. Operador de Zamfirescu

De acuerdo a los ejemplos de la sección anterior podemos concluir que las K_1-contracciones, K_2-contracciones y las B-contracciones respectivamente son nociones independientes, también puede verse Rhoades [10].

En el año de 1972, T. Zamfirescu [11] combinando las definiciones de B-contracción, K_1-contracción y K_2-contracción introdujo una nueva clase de operador contracción.

Definición 2.6 $(T.\ Zamfirescu, 1972)$
Sea (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, se dice que* T *es un* ***operador de Zamfirescu*** $(Z-operador)$*, si existen* $\mathrm{a,b,c} \in \mathbb{R}$ *con* $\mathrm{a} \in (0, 1)$ *y* $\mathrm{b,c} \in (0, 1/2)$ *tales que, para cada par de puntos* $\mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$*, al menos una de las siguientes condiciones se cumple*

z_1. $d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{a}d(\mathrm{x,y})$

z_2. $d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}[d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})) + d(\mathrm{y}, T(\mathrm{y}))]$

z_3. $d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}[d(\mathrm{x}, T(\mathrm{y})) + d(\mathrm{y}, T(\mathrm{x}))]$

Proposición 2.1 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una* K_1*-contracción. Entonces* T *satisface las siguientes propiedades:*

i. existe un $\mathrm{b} \in [0, 1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

ii. existe un $\mathrm{b} \in [0, 1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{y}, T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

Demostración:
Como T *es una* K_1*-contracción, por definición existe* $\mathrm{b} \in [0, 1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}[d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})) + d(\mathrm{y}, T(\mathrm{y}))], \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

i. por desigualdad triangular

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}[d(\mathrm{y,x}) + d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})) + d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y}))]$$

donde

$$(1-\mathrm{b})d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}d(\mathrm{x,y}) + 2\mathrm{b}d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x}))$$

así tenemos que

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

ii. nuevamente, por desigualdad triangular

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}\{[d(\mathrm{x,y})+d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))]+[d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))+d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y}))]\}$$

donde

$$(1-\mathrm{b})d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{b}d(\mathrm{x,y})+2\mathrm{b}d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))$$

así tenemos que

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\,d(\mathrm{x,y})\ +\frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\,d(\mathrm{y},T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y}\in \mathrm{M}$$

♣

Proposición 2.2 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $T:\mathrm{M}\longrightarrow \mathrm{M}$ *una* K_2*-contracción. Entonces* T *satisface las siguientes propiedades:*

i. existe un $\mathrm{c}\in[0,1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{x,y})\ +\frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{x},T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y}\in \mathrm{M}$$

ii. existe un $\mathrm{c}\in[0,1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{x,y})\ +\frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{y},T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y}\in \mathrm{M}$$

Demostración:
Como T *es una* K_2*-contracción, por definición existe* $\mathrm{c}\in[0,1/2)$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}[d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))+d(\mathrm{x},T(\mathrm{y}))],\ \forall\ \mathrm{x,y}\in \mathrm{M}$$

i. por desigualdad triangular

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}\{[d(\mathrm{y,x})+d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))]+[d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))+d(T(\mathrm{y}),T(\mathrm{x}))]\}$$

donde

$$(1-\mathrm{c})d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}d(\mathrm{x,y})+2\mathrm{c}d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))$$

así tenemos que

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{x,y})\ +\frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\,d(\mathrm{x},T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y}\in \mathrm{M}$$

ii. nuevamente, por desigualdad triangular

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}\{[d(\mathrm{x,y}) + d(\mathrm{y},T(\mathrm{x})) + d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y}))] + [d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))]\}$$

donde

$$(1-\mathrm{c})d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \mathrm{c}d(\mathrm{x,y}) + 2\mathrm{c}d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))$$

así tenemos que

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x,y})\ + \frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{y},T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

♣

Proposición 2.3 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $T:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}$ *un* Z*-operador. Entonces, existe un* $\delta\in(0,1)$ *tal que,*$\forall$ x,y $\in$ M *se cumple:*

i. $d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + 2\delta d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))$

ii. $d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + 2\delta d(\mathrm{y},T(\mathrm{x}))$

Demostración:

i. Como T *es un* Z*-operador entonces* T *satisface* z_1 *y* z_2*, y por las proposiciones* $(2.1, i)$ *y* $(2.2, i)$ *obtenemos.*

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y})\ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))$$

y

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x,y})\ + \frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))$$

además, como T *también satisface* z_1*, tenemos que*

$$d(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + 2\delta d(\mathrm{x},T(\mathrm{x}))$$

donde

$$\delta = max\left\{\mathrm{a}, \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}, \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\right\}$$

y es claro que $\delta\in(0,1)$.

ii. Análogamente por las proposiciones $(2.1, ii)$ *y* $(2.2, ii)$ *obtenemos.*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{y}, T(\mathrm{x}))$$

y

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{y}, T(\mathrm{x}))$$

nuevamente,como T *también satisface* z_1*, tenemos que*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + 2\delta d(\mathrm{y}, T(\mathrm{x}))$$

donde

$$\delta = max\left\{\mathrm{a}, \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}, \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\right\}$$

y es claro que $\delta \in (0, 1)$.

♣

2.4. Aplicación Contracción Débil

La siguiente definición fue atribuida a **Vasile Berinde** por algunos autores [11],[12], pero V. Berinde [13] le asigna la paternidad de dicha definición **M. O. Osilike** [17] junto con V. Berinde también coinciden **O. M. Olantiwo-O. O. Owojori-C. O. Imora** [14].

Definición 2.7 *Sea* (M, d) *un espacio métrico, una función* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *es llamada* ***contracción débil*** *o* (δ, L)***-contracción*** *si existe* $\delta \in (0, 1)$ *y algún* $L \geq 0$ *tal que*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + L d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

Observación:

Consideramos importante acotar que, debido a la simetría de la distancia de la (δ, L)**-contracción** implícitamente incluye la siguiente noción dual

$$d(T(x), T(y)) \leq \delta d(x,y) + L d(x, T(y)), \quad \forall\ x,y \in M$$

el siguiente resultado nos permite obtener ejemplos de (δ, L)-contracción

Proposición 2.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, si* T *es una B-contracción* $\Rightarrow$ T *es una* (δ, L)*-contracción.*

Demostración:
Si T *es una B-contracción entonces tomando* $\delta = \mathrm{a}$ *y L=0, obtenemos*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \delta d(\mathrm{x,y}) + L d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x})), \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$$

. Así, queda demostrado que T *es una* (δ, L)*-contracción.* ♣

Proposición 2.5 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, si* T *es una* K_1*-contracción* $\Rightarrow$ T *es una* (δ, L)*-contracción.*

Demostración:
Si Si T *es una* K_1*-contracción entonces, por la proposición* $(2.1, i)$*. obtenemos*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}\, d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x}))$$

donde $\mathrm{b} \in [0, 1/2)$ *y* $\mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$*. Por lo tanto, tomando*

$$\delta = \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}} \quad y \quad L = \frac{2\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}}$$

como $\mathrm{b} \in [0, 1/2)$ *es fácil ver que* $\delta \in [0, 1)$ *y* $L \geq 0$*. Así hemos demostrado que* T *es una* (δ, L)*-contracción.* ♣

Proposición 2.6 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *una aplicación arbitraria. Entonces, si* T *es una* K_2*-contracción* $\Rightarrow$ T *es una* (δ, L)*-contracción.*

Demostración:
Si T *es una* K_2*-contracción entonces, por la proposición* $(2.2, i)$*. obtenemos*

$$d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})) \leq \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x,y}) \ + \frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}\, d(\mathrm{x}, T(\mathrm{x}))$$

donde $\mathrm{c} \in [0, 1/2)$ *y* $\mathrm{x,y} \in \mathrm{M}$*. Por lo tanto, tomando*

$$\delta = \frac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}} \quad y \quad L = \frac{2\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}}$$

como $\mathrm{c} \in [0, 1/2)$ *es fácil ver que* $\delta \in [0, 1)$ *y* $L \geq 0$*. Así hemos demostrado que* T *es una* (δ, L)*-contracción.* ♣

Capítulo 3

Procesos Iterativos

En este capitulo nuestro interés es analizar los diferentes procesos iterativos que nos permiten aproximar los puntos fijos de las aplicaciones definidas en el capitulo anterior.
También estamos interesados en estimar el error por defecto y exceso de la aproximación y la velocidad de convergencia de dichos procesos iterativos.
En concreto analizaremos los procesos iterativos de **Picard, Mann e Ishikawa.**

3.1. Procesos Iterativos

En primer lugar veamos que se entiende por un proceso iterativo

Definición 3.1 *Un* ***proceso iterativo*** *es la composición de un elemento consigo mismo en forma repetitiva partiendo de un punto x_o dado.*
En términos matemáticos . Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ una aplicación dada y $x_o \in \mathrm{M}$. Entonces la sucesión iterada esta definida por

$$x_{n+1} = F(T, x_n),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $x_o \in \mathrm{M}$ es el punto inicial dado y F una función arbitraria.

Entre los procesos iterativos mas conocidos tenemos.

Definición 3.2 *(C.E.Picard)*
Sea (M, d) *un espacio métrico completo y* $T : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *un operador dado. Sea* $x_o \in \mathrm{M}$ *un punto arbitrario. Entonces, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ *definida por*

$$x_n = F(T, x_{n-1}) = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

es llamada ***iteración de Picard*** *o* ***proceso iterativo de Picard.***

Definición 3.3 *(W. R. Mann, 1953)*
Sea $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *un espacio lineal normado y* $T : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *un operador dado. Sea* $x_o \in \mathrm{E}$ *un punto arbitrario y* $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ *una sucesión de numeros reales. Entonces, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$ *definida por*

$$x_{n+1} = F(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

es llamada ***iteración de Mann*** *o* ***proceso iterativo de Mann.***

Definición 3.4 *(S. Ishikawa, 1974)*
Sea $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *un espacio lineal normado y* $T : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *un operador dado. Sea* $x_o \in \mathrm{E}$ *un punto arbitrario y* $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$ *una sucesión de numeros reales. Entonces, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$ *definida por*

$$F(T, x_n) = \begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(y_n) & , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) & , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.3}$$

es llamado ***iteración de Ishikawa*** *o* ***proceso iterativo de Ishikawa.***

Observaciones:

i. Si $\alpha_n \equiv 1$ en (3.2) se obtiene el proceso iterativo de Picard.

ii. Si $\beta_n \equiv 0$ en (3.3) se obtiene el proceso iterativo de Mann.

Ejemplo 3.1

Existen aplicaciones contracciones a las cuales el proceso iterativo de Picard no converge a su respectivo punto fijo.
En efecto, consideremos $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$T(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{x}, \quad \forall\, \mathrm{x} \in [0,1]$$

es fácil probar que T *es una aplicación no-expansiva, cuyo único punto fijo es* $\mathrm{x} = 1/2$.

Sea $x_o = \mathrm{a}$ *un punto arbitrario de* $[0,1]$ *con* $\mathrm{a} \neq 1/2$*, aplicando el proceso iterativo de Picard*

$$\begin{aligned} x_1 &= T(x_o) = T(\mathrm{a}) = 1 - a \\ x_2 &= T(x_1) = T^2(\mathrm{a}) = 1 - (1 - \mathrm{a}) = \mathrm{a} \\ x_3 &= T(x_2) = T^3(\mathrm{a}) = 1 - \mathrm{a} \\ &\vdots \end{aligned}$$

obtenemos la sucesión $\{1 - \mathrm{a}, \mathrm{a}, 1 - \mathrm{a}, \ldots\}$ *la cual no converge a* $1/2$.

Ejemplo 3.2

Existen aplicaciones contracciones a las cuales el proceso iterativo de Mann no converge a su respectivo punto fijo.
En efecto, consideremos $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$T(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & si \quad \mathrm{x}{=}0 \ \text{ o } \ \mathrm{x}{=}1 \\ \\ 1 & si \quad 0 < \mathrm{x} < 1 \end{cases}$$

T *posee un punto fijo único* $\mathrm{x} = 0$*, aplicando el proceso iterativo de Mann, con* $\alpha_n = 1/(n+1)$ *y* $0 < x_o < 1$.

$$\begin{aligned} x_1 &= T(x_o) = 1 \\ x_2 &= 1/2(x_1) + 1/2T(x_1) = (1/2)\cdot 1 + (1/2)\cdot 0 = 1/2 \\ x_3 &= 2/3(x_2) + 1/3T(x_2) = (2/3)\cdot 1/3 + (1/3)\cdot 1 = 2/3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

obtenemos la sucesión $\{1, 1/2, 2/3, \dots, n/n+1\}$ *la cual converge a* 1

3.2. Teoremas del Punto Fijo

Teorema 3.1 *(Principio de contraccion de Banach, (P.C.B))*
Sea $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *un espacio lineal normado completo (Espacio de Banach) y* $T : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *una B-contracción (con* $d(u,v) = \|u - v\|$*).*

i. *La iteración de Picard asociada a* T*, es decir, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$ *definida por*

$$x_x = T(x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge a x^**, para cualquier punto* $x_o \in \mathrm{E}$.

ii. $F_T = \{x^*\}$*, es decir,* T *posee un único punto fijo.*

iii. *El anterior y posterior error estimado*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_o, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_{n-1}, x_n), \quad n =, 1, 2, \dots$$

iv. *La velocidad de convergencia de la iteración de Picard esta dada por*

$$d(x_n, x^*) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

v. *La iteración de Mann asociada a* T*, es decir, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$ *definida por* (3.2) *converge fuertemente a el único punto fijo de* T.

vi. *La iteración de Ishikawa asociada a* T*, es decir, la sucesión* $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$ *definida por* (3.3) *converge fuertemente a el único punto fijo de* T.

Demostración: