República Bolivariana de Venezuela
Universidad de Los Andes
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional

Una Generalización del Principio de Contracción de Banach

Hiliana Carolina Angulo Uspin

Requisito Especial de Grado
en la modalidad Seminario-Monografía
para optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Carlos A. Di Prisco.

Mérida-Venezuela
Mayo, 2008

Índice general

Introducción

El principio de contracción de Banach establece que una contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo. Claramente el hecho de que la función sea una contracción implica que la función es continua, más aún, es uniformemente continua. Una vez dicho lo anterior, cabe plantearnos las siguientes preguntas ¿Qué pasaría si debilitamos la hipótesis con respecto al hecho de que la función sea contracción? ¿ Habría una condición más débil que garantice la existencia de un único punto fijo? Precisamente la respuesta a esta pregunta es lo que se conoce como la generalización del principio de contracción de Banach el cual enunciaremos a continuación.

Teorema: (Generalización del principio de contracción de Banach (GPCB))
Sea (X, d) un espacio métrico completo con $X \neq \phi$, y sea $T : X \longrightarrow X$ una aplicación. Dado $0 < M < 1$, y J un entero positivo, supongamos que para cada par de puntos $x, y \in X$

$$\text{mín}\,\{d(T^k x, T^k y) \,:\, 1 \leq k \leq J\} \leq M\, d(x, y).$$

Entonces T tiene un punto fijo.

El objetivo de este trabajo es demostrar la generalización del pricipio de contracción de Banach cuando la función T es continua siguiendo la demostración del artículo [3].

Para ello una de las herramientas principales que usaremos es una consecuencia directa de uno de los teoremas fundamentales en la Teoría Combinatoria, el Teorema de Ramsey que establece lo siguiente:

Sea A un conjunto infinito. Sea $k \in \mathbb{N}$. Si partimos el conjunto de todos los subconjuntos de A que tienen exactamente n elementos en k clases, entonces existe $H \subset A$, H infinito tal que todos los subconjuntos de H que tienen n elementos están en una misma clase.

Con la finalidad de presentar nuestro objetivo de forma clara al lector, el trabajo ha sido dividido en cuatro capítulos para facilitar su compresión.

Un resumen de lo que se verá a continuación es lo siguiente:

Capítulo 1: Consta de conceptos preliminares con respecto a la teoría de espacios métricos que serán usados en los capítulos posteriores. Se enuncia y se demuestra el principio de contracción de Banach.

Capítulo 2: Contiene demostraciones de resultados de gran importancia en la teoría combinatoria, como son el principio de las casillas y el Teorema de Ramsey. Se demuestra una proposición de la teoría de grafos, consecuencia de este último que es fundamental para el desarrollo de nuestro objetivo.

Capítulo 3: Se demuestra la generalización del principio de contracción de Banach para funciones continuas. La demostración presentada aquí es del artículo [4].

Capítulo 4: Contiene ejemplos y comentarios con respecto al caso general de la GPCB donde no se exige la continuidad de la función.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera sección se hará referencia a algunas definiciones y resultados que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. Los resultados de esta sección estan presentados sin sus respectivas demostraciones ya que son resultados clásicos del análisis y la topología. Los interesados en dichas demostraciones pueden consultar cualquier libro sobre el tema, por ejemplo [8] o [3].

En la segunda sección abordaremos una parte de lo que encierra la teoría del punto fijo para una función de un espacio métrico en sí mismo, y en consecuencia enunciaremos y demostraremos algunos de los resultados clásicos de esta teoría como es el Principio de Contracción de Banach.

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1 *Sean X un espacio vectorial real y $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que $\|\cdot\|$ es una norma sobre X si se cumple las siguientes condiciones:*

1. $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \forall\, x \in X$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall\, x, y \in X$

El par $(X, \|\cdot\|)$ se llama un espacio normado, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma sobre X.

Definición 1.2 *Sean X un conjunto no vacío y sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que d es una métrica o distancia sobre X si satisface los siguientes condiciones:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad \forall\, x, y \in X$

2. $d(x,y) = d(y,x), \qquad \forall\, x, y \in X$

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \qquad \forall\, x, y, z \in X$

El par (X,d) es un espacio métrico donde E es un conjunto no vacío y d una métrica en X.

Ejemplos:

(a) Sea $X = \mathbb{R}$ y $d(x,y) = |x-y|$, d es una métrica en $\mathbb{R}$ que llamaremos Métrica usual de $\mathbb{R}$

(b) Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $d((x_1,x_2);(y_1,y_2)) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$, d es una métrica en $\mathbb{R}^2$ que llamaremos la métrica euclidea.

(c) Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \|x-y\|$. Se dice que la métrica d es inducida por la norma.

Definición 1.3 *Sea X un espacio métrico. $A \subset X$ es acotado si existe $M \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq M \quad \forall\, x, y \in A$.*

Proposición 1.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es acotado*

2. *Para cada $x_0 \in X$ existe $M \geq 0$ (dependiente de x_0) tal que $d(x,x_0) \leq M$, $\forall\, x \in A$*

3. *Existe $x_0 \in X$ y $M \geq 0$ tales que $d(x,x_0) \leq M$*

Proposición 1.5 *Sea X un espacio normado con norma $x \to \|x\|$. Entonces $A \subset X$ es acotado (en la métrica inducida) si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para cada $x \in A$.*

Definición 1.6 *Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ en X es convergente a un elemento $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero $N \geq 0$ tal que:*

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon, \quad si \quad n > N$$

Definición 1.7 *La composición $f \circ \phi$, de una sucesión $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ con una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ será llamada una subsucesión de f. Si denotamos a f por $\{x_n\}_n$, entonces $f \circ \phi$ es denotada por $\{X_{\phi_{(n)}}\}$. La notación usual para $f \circ \phi$ es $\{X_{n_k}\}_k$, donde $n_k = \phi(k)$.*

Claramente toda sucesión es una subsucesión de ella misma.

Definición 1.8 *Una sucesión* $\{x_n\}$ *de* (X, d) *se dice de Cauchy si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* $N \geq 0$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *si* $n, m > N$.

Lema 1.9 *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión en un espacio métrico* X. *Si* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a_{j+1})$ *es convergente, entonces* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración Sea $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d(a_j, a_{j+1})$ el $n-$ésimo término de la sucesión de sumas parciales correspondiente a la serie $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a_{j+1})$. Por hipótesis tenemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a_{j+1})$ es convergente. Llamemos S el número de convergencia, así

$$S_n \longrightarrow S \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $S - S_n < \varepsilon$, si $n \geq N$. Luego, $S - S_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} d(a_j, a_{j+1}) < \varepsilon$.

Como $d(a_k, a_m) < \displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} d(a_j, a_{j+1})$ para todo $k, m \geq n+1$; entonces $d(a_k, a_m) < \varepsilon$ para todo $k, m \geq N+1$. De esta manera, queda demostrado que $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Definición 1.10 *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si toda sucesión de Cauchy en* X *converge a un punto de* X.

Definición 1.11 *Sean* X, E *espacios métricos. Diremos que* $f : X \longrightarrow E$ *es continua en* $x_0 \in X$, *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ *para todo* x *tal que* $d(x, x_0) < \delta$.

Proposición 1.12 *Sean* X, E *espacios métricos una aplicación* $f : X \longrightarrow E$ *es continua en* x_0 *si, y sólo si,* $\{f(x_n)\}$ *converge a* $f(x_0)$ *para cada sucesión* $\{x_n\}$ *convergente a* x_0.

Definición 1.13 *Sean* X, M *dos espacios métricos y* $f : X \longrightarrow M$ *una función, decimos que* f *es uniformemente continua si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$, *tal que* $\forall\, x, y \in X$ *si* $d(x, y) < \delta$, *entonces* $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ejemplo: La función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es continua, pero no es uniformemente continua.

1.2. Contracciones y Puntos fijos

Definición 1.14 *Sea $T : X \longrightarrow X$ una aplicación de un conjunto en si mismo. Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de la aplicación T si $Tx = x$.*

Definición 1.15 *Sea (X, d) un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación arbitraria. Entonces se dice que T es una contracción de Banach ($B-$contracción) si existe $M \in \mathbb{R},\ 0 < M < 1$ tal que para todo $x, y \in X$.*

$$d(Tx, Ty) \leq M\, d(x, y)$$

Observación: Geométricamente esto quiere decir que al aplicar T a cualesquiera dos puntos del espacio se obtiene dos puntos que están más cerca entre si que los puntos originales donde el factor de acercamiento es igual para todos los pares. Claramente una función que sea $B-$contracción es una función uniformemente continua.

Definición 1.16 *Se dice que T es una aplicación contractil, ($E-$contracción) si para cada $x, y \in M,\ (x \neq y)$*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

Definición 1.17 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión contracción, si para algún $0 < \alpha < 1$, se tiene que $d(x_{n+1}, x_n) < \alpha\, d(x_n, x_{n-1})$, para cualquier índice natural $n \geq 2$.*

Proposición 1.18 *(Propiedad de las contracciones)*

Si $\{x_n\}$ es una sucesión contracción de constante α, se cumplen las siguientes desigualdades:

1. *Comparando dos términos consecutivos con los dos primeros términos*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1), \quad \forall\, n \geq 2$$

2. *Dos términos cualesquiera con los dos primeros términos*

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1), \quad \text{para cada} \quad m > n$$

Demostración

1. La relación es cierta para $n = 2$, se refiere a la condición de la contracción para $n = 2$. Es decir, se cumple,

$$d(x_3, x_2) \leq \alpha\, d(x_2, x_1)$$

Supongamos que la relación es cierta para $n > 2$. Demostremos la validez de la relación para el sucesor $n + 1$, es decir debemos mostrar la validez de la relación,

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n\, d(x_2, x_1)$$

De la hipótesis contractiva y de la hipótesis inductiva para n se cumple

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = \alpha\, d(x_{n+1}, x_n) < \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) = \alpha^n\, d(x_2, x_1)$$

2. Para $m > n$, se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$$

luego, usando 1 se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_2, x_1)$$

sacando factor común α^{n-1} se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}) d(x_2, x_1)$$

luego, $d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left(\dfrac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1)$

Afirmación $1 - \alpha^{m-n} < 1$.

En efecto, $\alpha^n, \alpha^m > 0$ pues $0 < \alpha < 1$. Entonces, $\alpha^n - \alpha^m < \alpha^n$, y por lo tanto,

$$\frac{\alpha^n - \alpha^m}{\alpha^n} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha^m}{\alpha^n} < 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha^{m-n} < 1.$$

Así, $d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left(\dfrac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1) \leq \dfrac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1)$. ■

Proposición 1.19 *Toda sucesión que es contracción es una sucesión de Cauchy*

Demostración Si $\{x_n\}$ es una contracción, entonces existe $0 < \alpha < 1$ que cumple, $d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$, para cada índice $n \geq 2$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos mostrar que existe $N \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$

De la proposición 1.18 en 2 tenemos

$$d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \quad \text{para cada índice} \quad m > n.$$

Como la sucesión $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \longrightarrow 0$, existe un índice natural N que cumple, $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \varepsilon$, para cada índice $n \geq N$.

Así para cada par de índices $p, q \geq N$, si $p < q$ se tiene $d(x_q, x_p) < \frac{\alpha^{p-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \varepsilon$, es decir, $\{x_n\}$ es de Cauchy. ■

Los llamados Teoremas de punto fijo son aquellos que garantizan, bajo ciertas condiciones, la existencia de algún punto fijo de una función. Hay varios de estos teoremas, y muy diferentes entre si, uno de ellos es el Principio de Contracción de Banach, cuyas aplicaciones son notables en la mayoría de los teoremas de existencia, tales como los de la función inversa y la función implícita, soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales de diversa especie. A continuación enunciaremos y demostraremos ese principio.

Teorema 1.20 *(Principio de Contracción de Banach)*

Consideremos un espacio métrico (X, d) donde $X \neq \phi$. Supongamos que X es completo. Sea $T : X \longrightarrow X$ una contracción en X, entonces T tiene un punto fijo.

Demostración Construiremos una sucesión $\{x_n\}$ y mostraremos que es de Cauchy y por lo tanto que es convergente en X por ser X completo, y entonces probaremos que este límite x es un punto fijo de T y T no tiene otros puntos fijos. Esta será la idea de la prueba.

Sea $x_0 \in X$, calculemos secuencia $x_1, x_2, \ldots$ de una relación de la forma:

$$x_{n+1} = T x_n.$$

Esto es que nosotros escogemos un $x_0 \in X$ y determinamos sucesivamente $x_1 = T x_0,\ x_2 = T x_1, \ldots$

Afirmación: $\{x_n\}$ es una sucesión contracción. En efecto, $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq M\, d(x_n, x_{n-1})$.

Luego, por proposición 1.19 $\{x_n\}$ es de Cauchy, y entonces, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x \in X$ cuando $n \to \infty$.

A continuación mostraremos que x es punto fijo de la aplicación T.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
d(x,Tx) &\leq d(x,x_m) + d(x_m,Tx) \quad \text{para cualquier } m \\
d(x,Tx) &\leq d(x,x_m) + d(Tx_{m-1},Tx) \\
&\leq d(x,x_m) + \alpha(x_{m-1},x)
\end{aligned}
$$

tomando límite cuando $m \to \infty$, se concluye: $d(x,Tx) = 0$, por lo tanto $Tx = x$.

De esta manera queda demostrado que x es punto fijo de T.

Veamos que x es el único punto fijo de T.

En efecto, supongamos que $\exists\, y \in X,\ x \neq y$ tal que $Ty = y$

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq M\, d(x,y), \quad \text{de donde}$$

$d(x,y) = 0$, por lo tanto $x = y$ (contradicción). ■

De esta manera queda demostrada la unicidad del punto fijo x.

En lo que sigue, mostraremos que las condiciones de completitud y contracción son esenciales para la validez del teorema precedente.

Ejemplo: Consideremos (X,d) el subespacio métrico de $\mathbb{R}$, dado por $X = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica usual. Claramente X no es completo. Tomando $0 < M < 1$, definimos la función $f : X \longrightarrow X$ tal que $\forall\, x \in X,\ f(x) = Mx$.

$$|f(x) - f(y)| = M|x-y|, \quad \forall\, x,y \in X$$

f es claramente una contracción y sin embargo, no admite punto fijo alguno.

Ejemplo: Consideremos el espacio métrico completo $X = [1,+\infty)$ con la métrica usual.

Sea $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$$f(x) - f(y) = x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = x - y\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$$

De donde $|f(x) - f(y)| = |x-y|\left(1 - \dfrac{1}{xy}\right) < |x-y|, \quad \forall\, x,y \in [1,+\infty)$ con $x \neq y$.

Claramente f es una función contráctil y sin embargo, dado que $f(x) > x \quad \forall\, x \in X,\ f$ no tiene punto fijo.

Corolario 1.21 *Sea $f : X \longrightarrow X$, (X,d) un espacio métrico completo. Si para algún número natural $n \geq 1$ la función f^n es una contracción, entonces f admite un punto fijo único.*

Demostración Designemos por $g = f^n$. Existe un número real M con $0 < M \leq 1$, tal que

$$d(g(x), g(y)) \leq M(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

En virtud del teorema anterior, existe un único punto $x \in X$ con $g(x) = x$. Por otra parte, notese que:

$$g \circ f = f^{n+1} = f \circ g$$

de donde $f(x) = f(g(x)) = g(f(x))$.

Se verifica entonces que:

$$d(x, f(x)) = d(g(x), g(f(x))) \leq M\, d(x, f(x)),$$

lo cual implica que $d(x, f(x)) = 0$, es decir, $x = f(x)$, ya que $0 < M < 1$.

De esta manera concluimos que x también es punto fijo de f.

Veamos que x es el único punto fijo de f.

En efecto, si para algún $y \in X$, se tiene $f(y) = y$, necesariamente $g(y) = y$, de donde $y = x$, por la unicidad del punto fijo de g. ■

Finalizamos esta sección con un ejemplo que muestra puede haber una función f tal que f^n es una contracción para algún $n > 1$ y sin embargo f no lo es.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ -x/4 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x) - f(y)| = |-2x + 2y| = 2|x - y| \quad \text{si} \quad x, y > 0$$

Así queda claro que, $d(f(x), f(y)) = 2d(x, y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0$

Por lo tanto f no es una contracción. Por otro lado tenemos que

$$f(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ \\ \dfrac{-2f(x)}{4} & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

De donde tenemos que $f^2(x) = -\dfrac{x}{2}\ \forall\, x \in X$, claramente f^2 es una contracción.

Capítulo 2

El teorema de Ramsey

En este capítulo demostraremos uno de los teoremas más importantes de la teoría combinatoria y luego una de sus aplicaciones a la teoría de grafos. Para obtener más información sobre este tema se puede consultar [1] o [2].

2.1. Demostración del teorema de Ramsey

Primero presentamos un resultado preliminar muy sencillo.

Proposición 2.1 *(Principio del casillero)*
Sea A un conjunto infinito. Sea $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Sea $C : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, existe un conjunto infinito $H \subseteq A$ tal que C es de valor constante en H.

Demostración Dividamos a A en k partes de la siguiente manera:

$$\{a \in A : C(a) = 1\}, \{a \in A : C(a) = 2\}, \ldots, \{a \in A : C(a) = k\}$$

Como $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a \in A : C(a) = i\}$ y A es un conjunto infinito existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\{a \in A : C(a) = j\}$ es un conjunto infinito, pues de lo contrario A sería la unión finita de conjuntos finito y por lo tanto A sería finito. Pongamos $H = \{a \in A : C(a) = j\}$. ■

Definición 2.2 *Sea A un conjunto, y $n \in \mathbb{N}$. Usaremos la siguiente notación:* $A^{[n]} = \{b \subseteq A : |b| = n\}$

Antes de dar la demostración general del teorema de Ramsey, presentamos la siguiente proposición que es un caso particular del teorema.

Proposición 2.3 *Sea A un conjunto infinito, $n, k \in \mathbb{N}$, $2 \geq n \geq 1$, $k \geq 2$ para toda $C : A^{[2]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ existe $B \subseteq A$, B infinito tal que C es constante en $B^{[2]}$.*

Demostración

Definiremos dos sucesiones $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente manera.

Sea $a_1 \in A$, dividimos $A - \{a_1\}$ en k partes

$$\{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = 1\}$$

$$\{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = 2\}$$

$$\vdots$$

$$\{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = k\}$$

Como $A - \{a_1\}$ es un conjunto infinito y $A - \{a_1\} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} \{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = j\}$

Por el principio de las casillas, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = i\}$ es un conjunto infinito.

Llamemos $B_1 = \{a \in A - \{a_1\} \,:\, C(\{a, a_1\}) = i\}$.

Sea $a_2 \in B_1$. Tomamos $B_1 - \{a_2\}$ y dividámoslo en $k-$partes.

$$\{a \in B_1 - \{a_2\} \,:\, C(\{a, a_2\}) = 1\}$$

$$\{a \in B_1 - \{a_2\} \,:\, C(\{a, a_2\}) = 2\}$$

$$\vdots$$

$$\{a \in B_1 - \{a_2\} \,:\, C(\{a, a_2\}) = k\}$$

Por el mismo razonamiento anterior, $\exists\, i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que:

$\{a \in B_1 - \{a_2\} \,:\, C(\{a, a_2\}) = i\}$ es un conjunto infinito. Llamemos B_2 a este conjunto.

De manera sucesiva podemos definir $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$

Sea $a_{m+1} \in B_m$. Tomemos $B_m - \{a_{m+1}\}$ y dividámoslo en k partes

$$\{a \in B_m - \{a_{m+1}\} \,:\, C(\{a, a_{m+1}\}) = 1\}$$

$$\{a \in B_m - \{a_{m+1}\} \,:\, C(\{a, a_{m+1}\}) = 2\}$$

$$\vdots$$

$$\{a \in B_m - \{a_{m+1}\} \,:\, C(\{a, a_{m+1}\}) = k\}$$

Como $B_m - \{a_{m+1}\}$ es un conjunto infinito, nuevamente por el principio de las casillas $\exists\, i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que:

$\{a \in B_m - \{a_{m+1}\} \,:\, C(\{a, a_{m+1}\}) = i\}$ es un conjunto infinito. Llamemos B_{m+1} a este conjunto.

De manera inductiva hemos costruido las sucesiones $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ con la siguiente propiedad:

1. Para todo m, $B_{m+1} \subset B_m$,

2. Para cada m, $\exists\, i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $C(\{a_m, a_l\}) = i, \quad \forall\, l > m$.

Dado m, sea $j(m) \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\forall\, l > m, \quad C(\{a_m, a_l\}) = j(m)$. Por el principio de las casillas, existe $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ y $1 \leq i_0 \leq k$ tal que $i_0 = j(n_i)$ para todo i.

Finalmente, poniendo $B = \{a_{n_i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $\forall\, b \in B^{[2]}, \quad C(b) = i_0$. ■

Teorema 2.4 *(Teorema de Ramsey, [6])*

Sea A un conjunto infinito. Para todo n, si $C : A^{[n]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ entonces existe $H \subset A$, H infinito, tal que C es constante en $H^{[n]}$.

Demostración Haremos la demostración por inducción en n. Para $n = 1$ el enunciado es el principio de las casillas, y el caso $n = 2$ se verificó en la proposición anterior.

Supongamos que el teorema es válido para n. Queremos ver que dado

$$d : A^{[n+1]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\},$$

existe $H \subset A$, tal que d es constante en $H^{[n+1]}$.

Fijemos $a_0 \in A$, y sea $B_0 = A - \{a_0\}$. Claramente B_0 es un conjunto infinito.

Definamos una función b_0 de la siguiente manera: $b_0 : {B_0}^{[n]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, y $b_0(b) = i \Leftrightarrow d(b \cup \{a_0\}) = i$.

Por hipótesis inductiva, $\exists\, B_1 \subset B_0$, infinito, tal que b_0 es constante en ${B_1}^{[n]}$.

Sea $a_1 \in B_1$, claramente $a_1 \neq a_0$ y $B_1 - \{a_1\}$ es un conjunto infinito. Definamos una función b_1 de la siguiente manera:

$b_1 : (B_1 - \{a_1\})^{[n]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ y $b_1(b) = i \Leftrightarrow d(b \cup \{a_1\}) = i$.

Por hipótesis inductiva $\exists\, B_2 \subset B_1$, tal que b_2 es constante en ${B_2}^{[n]}$. Sea $a_2 \in B_2$.

Supongamos que hemos definido $a_0, a_1, \ldots, a_m$ y $B_0, B_1, \ldots, B_m$. Definamos $b_m : (B_m - \{a_m\})^{[n]} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ de la manera siguiente:

$$b_m(b) = i \Leftrightarrow d(b \cup \{a_m\}) = i.$$

Por hipótesis inductiva, existe $B_{m+1} \subset B_m - \{a_m\}$ infinito tal que b_m es constante en $(B_{m+1})^{[n]}$. Sea $a_{m+1} \in B_{m+1}$

De manera inductiva hemos construido las sucesiones $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ y $\{B_m\}_{m=0}^{\infty}$ con las siguientes propiedades: $\forall\, m$, la función d es constante en $\{a_m, b_0, \ldots, b_{m-1}\} \quad \forall\, b_0, \ldots, b_{m-1} \in B_{m+1}$.

En particular la función d es constante en

$$\{\{a_m, a_{k_0}, \ldots, a_{k_{m-1}}\} : k_0, \ldots, k_{m-1} > m\},$$

ya que por construcción tenemos que para todo m, $B_{m+1} \subset B_m$ y $a_m \in B_m$.

Dado m, sea $j(m) \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\forall\, k_0, \ldots, k_{m-1} > m$
$d(\{a_m, a_{k0}, \ldots, a_{k_{m-1}}\}) = j(m)$.

Por el principio de las casillas, existe $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $M = \{m : j(m) = i_0\}$ es un conjunto infinito.

Finalmente, tomamos $H = \{a_m : m \in M\}$. ■

2.2. Una aplicación a la teoría de grafos

Recordemos primero la definición de grafo.

Definición 2.5 *Un grafo G es un par $G = (X, A)$, donde X es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman vértices y A es un conjunto de pares no ordenados de vértices a los que llamaremos lados, o arcos.*

Usaremos también los siguientes conceptos.

Definición 2.6 *Dos vértices x, y de un grafo $G = (X, A)$ se dicen adyacentes si forman un lado, es decir, si $\{x, y\} \in A$.*

Definición 2.7 *Sea $G = (X, A)$ un grafo. Un camino en el grafo G es una sucesión de vértices tal que términos consecutivos de la sucesión son adyacentes, es decir, si $x_1, x_2, x_3, \ldots$ forman un camino, entonces $\{x_k, x_{k+1}\} \in A \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 2.8 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Sea $G = (\mathbb{N}, A)$ un grafo tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ con $|B_k| = m$, $\forall\, k$ y $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$*

Supongamos además que, si $\{a, b\} \in A$ entonces $\exists\, l, r \in \mathbb{N}$ con $l \neq r$ tal que $a \in B_l$ y $b \in B_r$.

Supongamos también que, dados n bloques distintos $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}$ $\exists\{a, b\} \in A$ tal que $a \in B_{i_k}$, $b \in B_{i_l}$ para algún $1 \leq k, l \leq n$, con $k \neq l$. Entonces existe un camino infinito en G que no visita a un bloque más de una vez.

Demostración Enumeremos los bloques como $B_0, B_1, \ldots$, y enumeremos los vértices de cada bloque B_i como $v(i,1), v(i,2), \ldots, v(i,m)$.

Dados dos bloques B_i, B_j; Como $|B_i| = |B_j| = m$, existen m^2 formas de conectar un elemento del bloque B_i con un elemento del bloque B_j. Por lo tanto tomaremos m^2 colores que podemos usar para colorear pares $\{x,y\} \in \mathbb{N}^{[2]}$.

Sea $R = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq m\} \cup \{0\}$, un conjunto. Claramente $|R| = m^2 + 1$.

Dados $\{x,y\} \in \mathbb{N}^{[2]}$, coloreamos $\{x,y\}$ con alguno de los m^2+1 colores como definiremos a continuación.

Definamos la función $h : \mathbb{N}^{[2]} \longrightarrow R$ de la siguiente manera:

Dado $\{x,y\} \in \mathbb{N}^{[2]}$ con $x < y$, si existe un par (i,j) tal que $\{v(x,i), v(y,j)\} \in A$, ponemos $h(\{x,y\})$ igual a uno de esos pares; en caso contrario, $h(\{x,y\}) = 0$.

Por el Teorema de Ramsey para $n = 2$, existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que h es constante en $H^{[2]}$.

Claramente, el color constante no puede ser 0 pues esto contradice el hecho de que dados n bloques, por lo menos hay dos de ellos que estan conectados, es decir hay un arco formado por un elemento de uno de los bloques y un elemento de otro.

Luego, $\exists\, i,j : 1 \leq i,j \leq m$ tal que $\forall \{a,b\} \in H^{[2]}$, $h(\{a,b\}) = (i,j)$

El conjunto H es infinito, listemos sus elementos en el orden natural,

$$H = \{n_1, n_2, \ldots\}$$

Describimos un camino como el que queremos en el orden en que son recorridos los vértices, con i, j.

$$v(n_1,i), v(n_4,j), v(n_3,i), v(n_6,j), v(n_5,i), v(n_8,j), v(n_7,i), \ldots$$

En notación más general el camino esta dado por:

$$\{\{v(n_{2k+1},i); v(n_{2k+4},j)\} : k = 0,1,\ldots\} \cup \{v(n_{2k+1},i); v(n_{2k+2},j)\} : k = 1,\ldots\}$$

Observación: Note que si $i = j$, claramente

$$v(n_1,i), v(n_2,i), v(n_3,i), v(n_4,i), \ldots$$

forman un camino infinito como el que queremos.

Capítulo 3

Generalización del principio de la contracción de Banach

En este capítulo daremos la demostración de una generalización del principio de la contracción de Banach para funciones continuas haciendo uso del resultado sobre grafos del capítulo 2. Para esto seguimos el artículo [4]

Lema 3.1 *Sea (X, d) un espacio métrico, $0 < M < 1$, J un entero, y sea $T : X \longrightarrow X$ una aplicación que satisface:*

$$\forall\, x, y \in X \;\; \text{mín}\{d(T^k x, T^k y) \,:\, k = 1, 2, \ldots, J\} \leq M\, d(x, y).$$

Entonces para todo $x \in X$ existe una subsucesión acotada de $\{T^n x \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$, denotada por $\{T^{n_i} x \,:\, i = 1, 2, \ldots\}$ tal que $n_{i+1} - n_i \leq J$.

Demostración Sea $x \in X$. Sea $c = \text{máx}\{d(x, T^k x) \,:\, k = 1, 2, \ldots, J\}$. Mostraremos que podemos construir una sucesión de naturales, llamémosla $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, y existe $R \in \mathbb{R}$ tales que $d(x, T^{n_i} x) < R$.

Sea $n_1 = 1$. Dado que $0 < 1 - M < 1$, claramente tendremos que: $d(x, Tx) \leq c < \dfrac{c}{1-M}$. Procediendo inductivamente, supongamos que: $d(x, T^{n_i} x) < \dfrac{c}{1-M}$.

Por hipótesis tenemos que para algún $1 \leq k \leq J$, $d(T^k x, T^{k+n_i} x) \leq M\, d(x, T^{n_i} x)$ luego, si consideremos nuestra hipótesis inductiva, nos queda que para algún $1 \leq k \leq J$, $d(T^k x, T^{k+n_i} x) \leq M\, d(x, T^{n_i} x) < \dfrac{CM}{1-M}$

Por desigualdad triangular, se tiene:

$$\begin{aligned} d(x, T^{k+n_i}x) &\leq d(x, T^k x) + d(T^k x, T^{k+n_i}x) \\ &< C + \frac{MC}{1-M} = \frac{C}{1-M}. \end{aligned}$$

Poniendo $n_{i+1} = n_i + k$ y $R = \dfrac{C}{1-M}$, queda demostrado que $\{T^{n_i}x \,:\, i = 1, 2, \ldots\}$ es una subsucesión acotada con $n_{i+1} - n_i = k \leq J$ ■

Teorema 3.2 *(Generalización del Principio de contracción de Banach (GPCB))*
Sea (X, d) un espacio métrico con $X \neq \phi$. Supongamos que X es completo. Sea $T : X \longrightarrow X$ una aplicación, y sea $0 < M < 1$. Sea J un entero positivo. Supongamos que para cada par de puntos $x, y \in X$,

$$\text{mín}\{d(T^k x, T^k y) \,:\, 1 \leq k \leq J\} \leq M\, d(x, y).$$

Entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración Sea $x \in X$. Sea $\langle i, k\rangle = d(T^i x, T^k x)$. Por el lema 3.1, existe una subsucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que,

$$\langle 0, n_i\rangle \leq R \quad \text{y} \quad n_{i+1} - n_i \leq J.$$

Aplicando la hipótesis de la GPCB para cada par $(x, T^{n_i}x)$ resulta en una sucesión $\{q_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ (Una para cada i) tal que $\langle q_{ij}, n_i + q_{ij}\rangle \leq kM^j$ y $q_{ij+1} - q_{ij} \leq J$.

Esto es lo siguiente:

Dado i, consideremos las J primeras iteraciones del par $(x, T^{n_i}x)$, las cuales listaremos a continuación:

x	$T^{n_i}x$
Tx	$T^{n_i+1}x$
T^2x	$T^{n_i+2}x$
$\vdots$	$\vdots$
$T^r x$	$T^{n_i+r}x$
$\vdots$	$\vdots$
$T^J x$	$T^{n_i+J}x$

Donde r es el valor tal que:

$$\min\{d(T^k x, T^{n_i+k}x) \,:\, 1 \leq k \leq J\} = d(T^r x, T^{n_i+r}x).$$

Llamemos $q_{i1} = r$. Consideremos el par $(T^{q_{i1}}x, T^{n_i+q_{i1}}x)$ y listemos sus primeras J iteraciones:

$$\begin{array}{cc}
T^{q_{i1}}x & T^{n_i+q_{i1}}x \\
\hline
T^{q_{i1}+1}x & T^{n_i+q_{i1}+1}x \\
T^{q_{i1}+2}x & T^{n_i+q_{i1}+2}x \\
\vdots & \vdots \\
T^{q_{i1}+p}x & T^{n_i+q_{i1}+p}x \\
\vdots & \vdots \\
T^{q_{i1}+J}x & T^{n_i+q_{i1}+J}x
\end{array}$$

Donde p es el valor tal que:

$$\min\{d(T^{q_{i1}+k}x, T^{n_i+q_{i1}+k}x) \,:\, 1 \leq k \leq J\} = d(T^{q_{i1}+p}x, T^{n_i+q_{i1}+p}x).$$

Llamemos $q_{i2} = q_{i1} + p$. Consideremos el par $(T^{q_{i2}}x, T^{n_i+q_{i2}}x)$ y listemos también sus primeras J iteraciones:

$$\begin{array}{cc}
T^{q_{i2}}x & T^{n_i+q_{i2}}x \\
\hline
T^{q_{i2}+1}x & T^{n_i+q_{i2}+1}x \\
T^{q_{i2}+2}x & T^{n_i+q_{i2}+2}x \\
\vdots & \vdots \\
T^{q_{i2}+m}x & T^{n_i+q_{i2}+m}x \\
\vdots & \vdots \\
T^{q_{i2}+J}x & T^{n_i+q_{i2}+J}x
\end{array}$$

Donde m es el valor tal que

$$\min\{d(T^{q_{i2}+k}x, T^{n_i+q_{i2}+k}x) \,:\, 1 \leq k \leq J\} = d(T^{q_{i2}+m}x, T^{n_i+q_{i2}+m}x).$$

LLamemos $q_{i3} = q_{i2} + m$.

De esta manera aseguramos que $q_{ij+1} - q_{ij} \leq J$.

De manera sucesiva tenemos, en general, que haciendo inducción sobre j nos queda: $d(T^{q_{ij}}x, T^{q_{ij}+n_i}x) \leq M^j R$, es decir, $\langle q_{ij}, q_{ij} + n_i \rangle \leq M^j R$ para cada índice i.

Para $q = q_{ij}$, entonces, $j \geq [q/J] \geq \dfrac{q}{J} - 1$ pues $q_{ij} \leq Jj$.

De lo cual se tiene que $M^j \leq M^{\frac{q}{J}-1}$ ya que $0 < M < 1$. De donde queda que: $\langle q_{ij}, n_i + q_{ij} \rangle \leq RM^{\frac{q}{J}-1} = R_0 Q^q$

Donde $R_0 = \dfrac{R}{M}$ y $Q = M^{\frac{1}{J}} < 1$.

Decimos que un entero q esta representado si hay infinitos enteros i para los cuales $\langle q, n_i + q \rangle \leq R_0 Q^q$. Si q es representado y $\langle q, n_i + q \rangle \leq R_0 Q^q$ decimos que i es representante de q

Observación: Si q está en infinitas sucesiones $\{q_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, entonces q esta representado.

Si A es un conjunto de enteros, $r(A) = \{q : q \in A,\ q \text{ es representado}\}$ y $R(A) = \{i : \exists\, q \in r(A), \text{ tal que } i \text{ es representante de } q\}$.

Ahora, sea A un conjunto de J enteros consecutivos. Como $q_{ij+1} - q_{ij} \leq J$, se tiene que para cada una de las sucesiones $\{q_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ hay por lo menos un $q \in A$ que pertenece a la sucesión, es decir, $q = q_{ij}$ para algún j.

Como A es un conjunto finito y tenemos infinitas sucesiones $\{q_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, por el principio de las casillas, por lo menos hay un miembro de A que está en infinitas sucesiones $\{q_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, es decir, hay por lo menos un miembro de A que está representado.

Luego, para infinitos i, existe $q \in A$ tal que i es representante de q.

Por el razonamiento anterior se demuestra que existe $I_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo i, $i \geq I_0$, i es representante de algún $q \in A$. Esto es equivalente a decir que no existe un conjunto infinito de índices i' para los cuales i' no es representante de algún $q \in A$.

De nuevo, sea A un conjunto de J enteros consecutivos. Sea $\lambda(A) = \max\{A\} + n_{I_0}$, donde I_0 se obtiene como en la linea anterior.

Afirmación: $\forall\, m \geq \lambda(A)$ algún entero de la forma $n_i + q$ con $q \in A$ y i representante de q se encuentra en el conjunto $\{m, m+1, \ldots, m+2J-1\}$.

En efecto, consideremos el conjunto $NQ(A) = \{n_i + q : q \in r(A) \text{ y } i \text{ es representante de } q\}$.

Sea $m \geq \lambda(A)$. Como $NQ(A)$ no es acotado $\exists\, t \in NQ(A) : t \geq m$. Sea j el primer índice tal que $q + n_j \in NQ(A)$ y $q + n_j \geq m$. Como $q + n_j \geq \max\{A\} + n_{I_0},\ j > I_0$, luego $j - 1 \geq I_0$

Sea $q' + n_{j-1} \in NQ(A)$. Por como esta definido $q + n_j$, claramente se tiene que

$$q' + n_{j-1} < m \tag{3.1}$$

Por otro lado, tenemos que

$$(q + n_j) - (q' + n_{j-1}) = (q - q') + (n_j + n_{j-1}) \leq 2J \tag{3.2}$$

De 3.1 y 3.2 se tiene que $\forall\, m \geq \lambda(A),\ \exists\, P \in NQ(A) \,:\, P \in \{m, \ldots, m+2J-1\}$

Observamos que si $A_1, \ldots, A_{2J+1}$ son conjuntos disjuntos de J enteros consecutivos, entonces si $a = \max\{\lambda(A_k) \,:\, k = 1, 2, \ldots, 2J+1\}$ y $m \geq a$. Cualquier conjunto $\{m, m+1, \ldots, m+2J-1\}$ contiene un entero en común a dos conjuntos $NQ(A_j)$ y $NQ(A_k)$ con $j \neq k,\ 1 \leq k, j \leq 2J+1$

Particionando la sucesión $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$ en bloques de tamaño $2J$, por el razonamiento anterior, para cada bloque de tamaño $2J$, $\exists\, i, j$ con $i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq 2J+1$ tales que $NQ(A_j) \cap NQ(A_i) \neq \phi$

Sea $U = \{n \,:\, \exists\, i, j \text{ con } i \neq j,\, 1 \leq i, j \leq 2J+1 \text{ y } n \in NQ(A_j) \cap NQ(A_i)\}$,

y sea $I = \{(i, j) : i \neq j,\, 1 \leq i, j \leq 2J+1\}$

Sea $f : U \longrightarrow I$ una función que tiene por regla asignar a cada elemento $n \in U$ el primer elemento $(i, j) \in I$ (en el orden lexicográfico de I), tal que $n \in NQ(A_j) \cap NQ(A_i)$.

Como $|I| = \binom{2J+1}{2} < \infty$, por el principio de las casillas tenemos que existe $(k, l) \in I$ tal que $\{n \in U \,:\, f(n) = (k, l)\}$ es infinito. Esto es que $\exists\, k, l$ con $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq 2J+1$ tales que $NQ(A_l)$ y $NQ(A_k)$ tienen infinitos términos en común. Luego, si $n \in NQ(A_l) \cap NQ(A_k)$, $n = n_i + q = n_p + q'$ con $q \in A_l$, $q' \in A_k$ y i, p sus respectivos representantes.

Consideremos una partición de los números naturales en bloques de tamaño J, de naturales consecutivos. Poniendo para cada k

$$B_k = \{(k-1)J+1, (k-1)+J+2, \ldots, kJ\}$$

Miremos los naturales como los vértices de un grafo que definiremos a continuación. Dos vértices q, q' en bloques distintos B_j y B_k respectivamente estan conectados por un arco, si hay infinitos enteros los cuales pueden ser expresados de la forma $n_i + q$ y $n_p + q'$ con i, p representantes de q y q' respectivamente.

El argumento anterior muestra que para cualquier colección de $2J+1$ bloques, hay un arco cuyos extremos están en dos de esos bloques. Entonces, por el Lema 2.2 (con $n = 2J+1$y $m = J$) existe un camino infinito en el grafo que contiene a lo sumo un elemento de cada bloque B_k

Sea $\{r_j \,:\, j = 1, 2, \ldots\}$ una lista de los vértices de este camino tal que $\forall\, j,\ \{r_j, r_{j+1}\}$ es un arco.

A continuación seleccionaremos dos subsucesiones de enteros $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ con las siguientes propiedades:

1. Si $r_j \in B_k,\ r_j + s_j,\, r_j + t_j \in NQ(B_k)$

2. $r_j + t_j = r_{j+1} + s_{j+1}$

3. $r_j + s_j + J < r_{j+1} + s_{j+1}$

Esto lo hacemos del modo siguiente:

Si $r_1 \in B_k$. Fijemos $r_1 + n_j \in NQ(B_k)$ tal que $r_1 + n_j > J$. Llamemos $s_1 = n_j$. Por como está definido $\{r_j : j = 1, 2, \ldots\}$ como r_1, r_2 forman el arco $\{r_1, r_2\}$, existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = r_1 + n_i = r_2 + n_k$.

Sea $n > r_1 + s_1 + J$, con $n = r_1 + n_p = r_2 + n_l$. Llamemos $n_p = t_1$, $n_l = s_2$.

Luego se cumple:

1. $r_1 + s_1$, $r_1 + t_1 \in NQ(B_k)$
2. $r_1 + t_1 = r_2 + s_2$
3. $r_1 + s_1 + J < r_2 + s_2$

Supongamos que hemos definido $\{s_i\}_{i=1}^{k+1}$ y $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ y se cumple:

1. Si $r_k \in B_p$, $r_k + s_k$, $r_k + t_k \in NQ(B_p)$
2. $r_k + t_k = r_{k+1} + s_{k+1}$
3. $r_k + s_k + J < r_{k+1} + s_{k+1}$

Si $r_{k+1} \in B_h$, por construcción tenemos que $r_{k+1} + s_{k+1} \in NQ(B_h)$. Como r_{k+1}, r_{k+2} forman un arco $\{r_{k+1}, r_{k+2}\}$, existen infinitos n tal que $n = r_{k+1} + n_s = r_{k+2} + n_u$. Fijemos $n > r_{k+1} + s_{k+1} + J$ con $n = r_{k+1} + n_x = r_{k+2} + n_u$.

Definimos $t_{k+1} = n_x$, y $s_{k+2} = n_u$. Luego, $r_{k+1} + t_{k+1} \in NQ(B_h)$, $r_{k+1} + t_{k+1} = r_{k+2} + s_{k+2}$, y $r_{k+1} + s_{k+1} + J < r_{k+2} + s_{k+2}$.

De esta manera queda demostrado que podemos construir las subsucesiones $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ que cumplen con las propiedades 1,2,3.

Consideremos la secuencia de iterados con exponente $r_j + s_j$. Por como definimos $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, tenemos que:

$$\langle r_j + s_j, r_{j+1} + s_{j+1} \rangle = \langle r_j + s_j, r_j + t_j \rangle$$

Notemos que si tenemos $\langle q, n_i + q \rangle \leq R_0\, Q^q$ y $\langle q, n_j + q \rangle \leq R_0\, Q^q$ para $i \neq j$, por la desigualdad triangular tendremos que:

$$\langle n_i + q, n_j + q \rangle \leq \langle n_i + q, q \rangle + \langle q, n_j + q \rangle \leq 2R_0\, Q^q \tag{3.3}$$

Por definición de $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, tenemos que para todo j,

$$\langle r_j, r_j + s_j \rangle \leq R_0 Q^{r_j} \text{ y } \langle r_j, r_j + t_j \rangle \leq R_0 Q^{r_j};$$

luego, de (3.3) se tiene que

$$\langle r_j + s_j, r_{j+1} + s_{j+1}\rangle = \langle r_j + s_j, r_j + t_j\rangle \leq 2R_0\, Q^{r_j}.$$

Así, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\langle r_j + s_j, r_{j+1} + s_{j+1}\rangle \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2R_0\, Q^{r_j}$.

Como $0 < Q < 1$ se tiene que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} 2R_0\, Q^{r_j}$ es convergente por lo tanto $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\langle r_j + s_j, r_{j+1} + s_{j+1}\rangle$ es convergente.

Para todo j, llamemos $m_j = r_j + s_j$; luego, como $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\langle r_j + s_j, r_{j+1} + s_{j+1}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} d(T^{m_j}x, T^{m_{j+1}}x)$ es convergente. Por el Lema (1.9), $\{T^{m_j}x\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X, por lo tanto existe $z \in X$ tal que

$$T^{m_j}x \longrightarrow z \ \text{ cuando } j \to \infty.$$

Dado que T es continua, para $1 \leq i \leq J$ se tiene que $T^{m_j+i}x \longrightarrow T^i z$. Definamos $L_i = T^i z$ para $0 \leq i \leq J$.

Mostraremos que $L_{i+1} = L_i$ para algún $i < J$, pues dado que $T(L_i) = L_{i+1}$, entonces quedaría demostrado que L_i es un punto fijo de T.

Consideremos al par (Tx, x), aplicando la hipótesis de la GPCB, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_1 \leq J$ tal que,

$$d(T^{k_1+1}x, T^{k_1}x) \leq M\, d(Tx, x)$$

A continuación, consideremos al par $(T^{k_1+1}x, T^{k_1}x)$, aplicando nuevamente la hipótesis de la GPCB, $\exists\, k_2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_2 \leq J$ tal que

$$d(T^{k_2+k_1+1}x, T^{k_2+k_1}x) \leq M\, d(T^{k_1+1}x, T^{k_1}x),$$

usando la desigualdad anterior, nos queda:

$$d(T^{k_2+k_1+1}x, T^{k_2+k_1}x) \leq M^2\, d(Tx, x)$$

Continuando de esta manera obtenemos una sucesión $k_1, k_2, \ldots$, tal que $\forall\, i$, $1 \leq k_i \leq J$ haciendo inducción sobre l, se tiene que:

$$d(T^{(\sum_{t=1}^{l} k_t)+1}x, T^{\sum_{t=1}^{l} k_t}x) \leq M^l\, d(Tx, x), \qquad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Sea $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ como definimos anteriormente

Sea P_1 el menor tal que $\sum\limits_{t=1}^{P_1} k_t \geq m_1$. Sea $i_1 = \sum\limits_{t=1}^{P_1} k_t - m_1$ (se tiene, $0 \leq i_1 \leq J-1$), $\sum\limits_{t=1}^{P_1} k_t < m_2$, ya que $m_2 - m_1 > J$ y $0 \leq k_{p_1} \leq J$. Así, como $d(T^{(\sum_{t=1}^{P_1} k_t)+1}x, T^{\sum_{t=1}^{P_1} k_t}x) \leq M^{P_1}\, d(Tx, x)$

$$d(T^{m_1+i_1+1}x, T^{m_1+i_1}x) \leq M^{P_1}\, d(Tx, x)$$

Supongamos que hemos definido P_j y i_j tales que

$$m_j \leq \sum_{t=1}^{P_j} k_t < m_{j+1},\ i_j = \sum_{t=1}^{P_j} k_t - m_j.$$

Sabemos que $d(T^{\sum_{t=1}^{P_j} k_t+1}x, T^{\sum_{t=1}^{P_j} k_t}x) \leq M^{P_j}\, d(Tx, x)$
luego, $d(T^{m_j+i_j+1}x, T^{m_j+i_j}x) \leq M^{P_j}\, d(Tx, x)$
Veamos que podemos definir P_{j+1} tal que

$$m_{j+1} \leq \sum_{t=1}^{P_{j+1}} k_t < m_{j+2}$$

Por hipótesis inductiva, tenemos que $\sum\limits_{t=1}^{P_j} k_t < m_{j+1}$

Sea P_{j+1} el primero tal que $m_{j+1} \leq \sum\limits_{t=1}^{P_{j+1}} k_t$.

Luego, para $P_{j+1}-1$ se tiene que $\sum\limits_{t=1}^{P_{j+1}-1} k_t < m_{j+1}$ (Por definición de P_{j+1}) así $\sum\limits_{t=1}^{p_{j+1}} k_t = \sum\limits_{t=1}^{p_{j+1}-1} k_t + k_{P_{j+1}}$ como $m_{j+2} - m_{j+1} > J$ y $1 \leq k_t \leq J \quad \forall\, t \in \{1, 2, \ldots\}$ finalmente tenemos que $\sum\limits_{t=1}^{p_{j+1}} k_t < m_{j+2}$ definimos $i_{j+1} = \sum\limits_{t=1}^{p_{j+1}} k_t - m_{j+1}$ como

$$d\left(T^{\sum_{t=1}^{p_{j+1}} k_t+1}x, T^{\sum_{t=1}^{p_{j+1}} k_t}x\right) \leq M^{P_{j+1}} d(Tx, x)$$

entonces, $d(T^{m_{j+1}+i_{j+1}+1}x, T^{m_{j+1}+i_{j+1}}x) \leq M^{P_{j+1}} d(Tx, x)$

De esta manera queda demostrado que:
$\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, i_j \in \mathbb{N}$, $0 \leq i_j \leq J-1$ tal que

$$d(T^{m_j+i_j+1}x, T^{m_j+i_j}x) \leq M^{P_j} d(Tx, x).$$

Aplicando el principio de las casillas, $\exists\, v \in \mathbb{N}$ con $0 \leq v \leq J-1$ y $i_j = v$ para infinitos valores de j.

Para estos valores de j para los cuales $i_j = v$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d(L_v, L_{v+1}) &\leq d(L_v, T^{m_j+v}x) + d(T^{m_j+v}x, T^{m_j+v+1}x) + d(T^{m_j+v+1}x, L_{v+1}) \\ &\leq d(L_v, T^{m_j+v}x) + M^{P_j} d(x, Tx) + d(T^{m_j+v+1}x, L_{v+1}) \\ &= d(T^v z, T^{m_j+v}x) + M^{P_j} d(x, Tx) + d(T^{m_j+v+1}x, L_{v+1}) \end{aligned}$$

es decir,

$$d(L_v, t^{v+1}z) \leq d(T^v z, T^{m_j+v}x) + M^{P_j} d(x, Tx) + d(T^{m_j+v+1}x, T^{v+1}z)$$

Como cada uno de los tres sumandos tiende a cero cuando $j \to \infty$, entonces

$$d(L_v, L_{v+1}) = 0.$$

Por lo tanto, $L_v = L_{v+1}$, es decir,

$$T^v z = T^{v+1} z = T(T^v z)$$

Finalmente concluimos que $T^v z$ es un punto fijo de T. ∎

Capítulo 4

A manera de conclusión

En la introducción de nuestro trabajo se enuncia la generalización del principio de contracción de Banach. Vimos que aún cuando las hipótesis de la GPCB garantizan la existencia de un punto fijo, esto no implica continuidad de la función. Motivados por estas observación y haciendo un breve examen de la situación diseñamos este capítulo para presentar dos ejemplos que brindan información interesante que ayudarán a comprender un poco más el ambiente en el que estamos trabajando.

El ejemplo 2 está tomado del artículo [7], y muestra que la hipótesis de la GPCB no implica la continuidad de la función ni de sus iteraciones. El ejemplo 1 es una adaptación del ejemplo 2 que usamos para probar que la hipótesis, con $J = 2$, tampoco implica la continuidad de la función. Para este ejemplo hay un subespacio donde la función y todas us iteraciones son contracciones.

Ejemplo 1: Sea $X = \{n : n = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ consideremos la métrica usual. Definamos $T : X \longrightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0 \\ T(n) &= \frac{1}{2n+1} \\ T(1/n) &= n \qquad \text{si} \quad n \quad \text{es par} \\ T(1/n) &= \frac{1}{2n+5} \qquad \text{si} \quad n \quad \text{es impar} \end{aligned}$$

Fijemos $M = 1/2$. Es fácil ver que para cada par $x, y \in X$,

$$\min\{d(T^2x, T^2y)\,,\, d(Tx, Ty)\} \leq \frac{1}{2}d(x, y)$$

Por otro lado tenemos que $\{\frac{1}{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente.

Más aún, $\frac{1}{2k} \longrightarrow 0$, si $k \to \infty$.

Como $T(1/2k) = 2k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Claramente $T(1/2k) \not\longrightarrow 0$

Lo cual nos lleva a concluir que T no es una función continua, y sin embargo T satisface la hipótesis de la GPCB con $\mathcal{J} = 2$.

Consideremos $X' = \{1/n \,:\, n \;\text{ es un número impar}\} \subseteq X \quad LuegoT|_{X'}(1/n) = \frac{1}{2n+5}$. Es fácil ver que $T|_{X'} : X' \longrightarrow X'$ es una contracción en el subespacio X' de X. Asimismo por como definimos T tendremos que $T^2, T^3, T^4, \ldots$ son contracciones en el espacio X

Lo anterior nos conduce a la siguiente pregunta: ¿ La hipótesis del GPCB implica que dado $\mathcal{J}$, existe $1 \leq k \leq \mathcal{J}$ tal que T^k es una contracción en algún subespacio del espacio en el que estemosd trabajando?

Veamos el siguiente ejemplo que nos dará la repuesta a esta pregunta.

Ejemplo 2: Sea $X = \{n \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{1/n \,:\, n = 2, 3, 4, \ldots\}$. Definamos $T : X \longrightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T(0) &= 0 \\
T(n) &= 1/(3n^4+1), \quad n = 1, 2, \ldots \\
T(1/n) &= n, \qquad\qquad\quad n = 0 \qquad\quad (mod\ 3) \\
T(1/n) &= 1/(3n^4+2), \quad n = 1 \qquad\quad (mod\ 3) \\
T(1/n) &= 1/(3n^4+3), \quad n = 2 \qquad\quad (mod\ 3)
\end{aligned}$$

Por un razonamiento similar el del ejemplo anterior se puede verificar que T no es una función continua.

Fijemos $J = 3,\; M = 1/3$. Consideremos la métrica usual.

Verifiquemos que $\forall\, x, y \in X$:

$$\min\{d(T^k x, T^k y) \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3} d(x, y)$$

Analicemos los siguientes casos

Caso 1: Sea $x \geq 1/2,\; y \in X$ claramente $|x - y| \geq 1/2$

(i) Sea $y > 1/2$, luego

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \left|\frac{1}{3x^4+1} - \frac{1}{3y^4+1}\right| \\ d(T^2x,T^2y) &= \left|\frac{1}{3(3x^4+1)^4+2} - \frac{1}{3(3x^4+1)^4+2}\right| \\ d(T^3x,T^3y) &= \left|\frac{1}{3(3(3x^4+1)^4+2)^4+3} - \frac{1}{3(3(3x^4+1)^4+2)^4+3}\right| \end{aligned}$$

En cualquiera de los tres casos se tiene:

$$d(T^kx,T^ky) = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{n_1(k)} - \frac{1}{n_2(k)}\right|,$$

con $n_1(k)$, $n_2(k)$ valores dependientes de los denominadores de la $k-$ésima iteración que estemos trabajando

Por otro lado como $\left|\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right| \leq \frac{1}{2} \quad : \forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0,1\}$

Entonces, $\text{mín}\{|T^kx - T^ky| \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}$

Así, $\text{mín}\{|T^kx - T^ky| \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3}|x-y|$

(ii) Sea $y \leq 1/2$, es decir, $y = \frac{1}{p}$ con $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $p = 0 \bmod 2$

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \left|\frac{1}{3x^4+1} - P\right| \\ d(T^2x,T^2y) &= \left|\frac{1}{3(3x^4+1)^4+2} - \frac{1}{3P^4+1}\right| \\ d(T^3x,T^3y) &= \left|\frac{1}{3(3(3x^4+1)^4+2)^4+3} - \frac{1}{3(3P^4+1)+2}\right| \end{aligned}$$

En los casos de $k = 2, 3$ tendremos que:

$$d(T^kx,T^ky) = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{n_1(k)} - \frac{1}{n_2(k)}\right|,$$

con $n_1(k)$, $n_2(k)$ valores dependientes de los denominadores de la $k-$ésima iteración que estemos trabajando con $k > 1$
Como $d(Tx, Ty) > d(T^k x, T^k y)$ para $k = 2, 3$
Por un razonamiento similar al caso anterior tendremos que

$$\text{mín}\{d(T^k x, T^k y) \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3}\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}|x - y|.$$

2. Si $p = 1$ mod 3

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \left|\frac{1}{3x^4 + 1} - \frac{1}{3P^4 + 2}\right| \\ d(T^2x, T^2y) &= \left|\frac{1}{3(3x^4 + 1)^4 + 2} - \frac{1}{3(3P^4 + 2)^4 + 3}\right| \\ d(T^3x, T^3y) &= \left|\frac{1}{3(3(3x^4 + 1)^4 + 2)^4 + 3} - 3(3P^4 + 2)^4 + 3\right| \end{aligned}$$

En los casos $k = 1, 2$ tendremos que:

$$d(T^k x, T^k y) = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{n_1(k)} - \frac{1}{n_2(k)}\right|,$$

con $n_1(k)$, $n_2(k)$ valores dependientes de los denominadores de $k-$ésima iteración que estemos trabajando.
Como $d(T^3x, T^3y) > d(T^k x, T^k y)$ para $k = 1, 2$
Por razonamiento similar a (1) tendremos que:

$$\text{mín}\{|T^k x - T^k y| \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

3. Si $p = 2$ mod 3. Se resuelve de manera analoga a las anteriores.

Caso II: $y < x < \frac{1}{2}$ Supongamos que $x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{j}$
En general, se tiene que $|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{j}\right| \geq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n^2 + n}$
Analicemos los siguientes casos:

(i) Sea $x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{j}$ con $n = 0$ mod 3, $j = 0$ mod 3

$$\begin{aligned} Tx &= n & Ty &= j \\ T^2x &= \frac{1}{3n^4+1} & T^2y &= \frac{1}{3j^4+1} \\ T^3x &= \frac{1}{3(3n^4+1)^4+2} & T^3y &= \frac{1}{3(3j^4+1)^4+2} \end{aligned}$$

Es claro que $T^kx \leq \dfrac{1}{3n^4}$ para $k = 2, 3$ así como también $T^ky \leq \dfrac{1}{3j^4}$ para $k = 2, 3$.

Más aún como $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{j}$, $T^ky = \dfrac{1}{3n^4}$ para $k = 2, 3$.

Finalmente tendremos que para $k = 2, 3$

$$\frac{|T^kx - T^ky|}{|x-y|} \leq \frac{1/3n^4}{1/n^2+n} = \frac{n+1}{3n^3} < \frac{1}{3}$$

Es decir, $|T^kx - T^ky| \leq \dfrac{1}{3}|x-y|$ para $k = 2, 3$

Como $|Tx - Ty| \geq \{|T^2x - T^2y|, |T^3x - T^3y|\}$

Entonces, $\text{mín}\{|T^kx - T^ky| \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq |x-y|$

Por un razonamiento similar al anterior tendremos que para los casos

(ii) $x = \dfrac{1}{n},\ y = \dfrac{1}{j}$ con $n = 1 \bmod 3,\ y = 1 \bmod 3$

(iii) $x = \dfrac{1}{n},\ y = \dfrac{1}{j}$ con $n = 2 \bmod 3,\ j = 2 \bmod 3$ se verifica que

$$\text{mín}\{|T^kx - T^ky| \,:\, 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3}|x-y|$$

(iv) Sea $x = \dfrac{1}{n},\ n = 0 \bmod 3$ y $y = \dfrac{1}{j}$ con $j = 1 \bmod 3$

$$\begin{aligned} Tx &= n & Ty &= \frac{1}{3j^4+2} \\ T^2x &= \frac{1}{3n^4+1} & T^2y &= \frac{1}{3(3j^4+2)^4+3} \\ T^3x &= \frac{1}{3(3n^4+1)^4+2} & T^3y &= 3(3j^4+2)^4+3 \end{aligned}$$

Es claro que $T^2x \leq \frac{1}{3n^4}$, así como $T^2y \leq \frac{1}{3j^4}$. Nuevamente, como $\frac{1}{n} > \frac{1}{j}$ entonces $T^2y \leq \frac{1}{3n^4}$

De modo que:

$$\frac{|T^2x - T^2y|}{|x-y|} \leq \frac{1/3n^4}{1/n^2+n} < \frac{1}{3}$$

Es decir $|T^2x - T^2y| \leq \frac{1}{3}|x-y|$

Como $\text{mín}\{|T^kx - T^ky| : 1 \leq k \leq 3\} = |T^2x - T^2y| \leq \frac{1}{3}|x-y|$

Se verifica lo que queriamos

Por un razonamiento similar al anterior tendremos que en general para los casos: $x = \frac{1}{n}$, $n = k_1 \bmod 3$ y $y = \frac{1}{j}$ $j = k_2 \bmod 3$ con $k_1 \neq k_2$ y $0 \leq k_1, k_2 \leq 2$ $\exists i \in \{1,2,3\}$ tal que

$$\text{mín}\{|T^kx - T^ky| : 1 \leq k \leq 3\} = |T^ix - T^iy| \leq \frac{1}{3}|x-y|$$

De esta manera concluimos que $\forall\, x, y \in X$ con $x, y < \frac{1}{2}$ y $x \neq y$

$$\text{mín}\{|T^kx - T^ky| : 1 \leq k \leq 3\} \leq \frac{1}{3}|x-y|$$

$\blacksquare$

Caso III: Para finalizar fijemos $y = 0$ y consideremos $x \in X$ con $x \neq 0$. Por definición de T, tenemos que $T(0) = 0$, luego:

$$|T^k x - T^k y| = |T^k x - T^k 0| = |T^k x - 0|$$

Analicemos los siguientes casos:

1. Sea $x > 1/2$. Por definición de T sabemos que $\exists\, k\,:\, 1 \leq k \leq 3$ tal que $T^k x \leq \dfrac{1}{3x^4}$. Luego, $T^k x \leq \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x}{3}$
   Así $|T^k x - T^k y| = |T^k x - 0| = T^k x \leq \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}|x - 0|,\ \forall\, x > 1/2$.

2. Sea $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$. Supongamos $x = \dfrac{1}{j}$. Nuevamente por la definición de T sabemos que $\exists\, k\,:\, 1 \leq k \leq 3$ tal que $T^k x \leq \dfrac{1}{3j^4}$. Luego, $T^k x \leq \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{j} = \dfrac{1}{3}x$
   Así $|T^k x - T^k y| = |T^k x - 0| = T^k x \leq \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}|x - 0|,\ \forall\, x$ con $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$

De esta manera queda verificado que T satisface las hipótesis de la GPCB.

Por definición de T $\nexists\, k$ con $1 \leq k \leq 3$ tal que $T^k : X \longrightarrow X$ sea una contracción ya que $\forall\, k\ \exists\, x, y$ con $x = 1/q,\ y = 1/p$ tal que $T^k x = q$ y $T^k y = p$. Por lo tanto $\nexists\, M,\ 0 < M < 1$ tal que $|q - p| \leq M \left| \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} \right|$.

X es un conjunto infinito que puede ser dividido en 4 conjuntos infinitos y disjuntos entre si cuya unión con el cero da todo el espacio X. Estas clases son:

1. $\{n\,:\, n = 1, 2, \ldots\}$
2. $1/n$ con $n = 0$ mod 3
3. $1/n$ con $n = 1$ mod 3
4. $1/n$ con $n = 2$ mod 3

Por este hecho y por la definición de T, si existiera $X' \subsetneq X$, infinito tal que $T : X' \longrightarrow X'$, necesariamente X' tiene que contener infinitos elementos de cada una de las clases anteriormente descritas, luego por un razonamiento similar al anterior concluimos que $\nexists\, k$ con $1 \leq k \leq 3$ tal que $T^k : X' \longrightarrow X'$ sea una contracción. Con esto queda respondida la pregunta que se expuso inicialmente.

La demostración del Principio Generalizado de la Contracción de Banach para una función cualquiera a diferencia de la GPCB para una función continua, además de requerir algunos cálculos adicionales, hace uso de versiones más fuertes de algunos conceptos que fuerón utilizados en la demostración presentada en el capítulo 3. Sin embargo el razonamiento usado en la demostración de la GPCB para una función cualquiera y el razonamiento usado en la demostración de la GPCB para una función continua son muy similares. Es por ello que decimos omitir su demostración pero es conveniente hacer del conocimiento del lector interesado que la misma esta presentada en forma detallada en [4].

Bibliografía

[1] Di Prisco, C. A., Combinatoria: Un panorama de la teoría de Ramsey.

[2] Graham, R., B. Rothschild and J. Spencer, Ramsey Theory. Wiley, 1980.

[3] Marsden, J., Elementary classical analysis. W. H. Freeman and Company, 1974.

[4] Merryfield, J, Rothschild, B. and Stein, J. D., An application of Ramsey's theorem to the Banach contraction principle. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2001) 927-933

[5] Merryfield, J and J.D. Stein, Jr., A generalization of the Banach Contraction Principle. *J. Math. Annal. Appl.* **273** (2002) 112-120.

[6] Ramsey, F. P. , On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **30** (1930), 264-286.

[7] J. R. Jachymski, B. Schroder and J.D. Stein, A connection between fixed-point theorems and tiling problems. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **87** (1999) 273-286.

[8] Tineo, A., Topología de espacios métricos. Kariñá Editores, Mérida, 1995.