Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Algunos espacios topológicos universales

Emiro Alexander Quintero

Requisito Especial de Grado
Modalidad Seminario-Monografía
Para Optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. Carlos Uzcátegui

Mérida-Venezuela
2008

Dedicatoria

A mi madre y hermanos

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por darme la fe y fortaleza en los momentos más difíciles, guiando siempre mi camino.

A mi Madre y Hermanos les doy gracias por contar con ustedes en todo momento y por el apoyo incondicional que siempre me han brindado.

Agradezco enormemente a mi Tutor, al Profesor Carlos Uzcátegui, quien sin objeción alguna mostró toda la disposición, prestando todo su mayor esfuerzo para que esta Tesis de Grado culminara con éxito.

A la Profesora Ivany Lozano por tanta ayuda y confianza.

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes, por abrir sus puertas y permitir mi formación profesional con sus excelentes profesores.

Al CDCHT por el apoyo económico prestado al proyecto (código) C-1538-07-05-F.

Emiro Alexander Quintero

Índice

INTRODUCCIÓN

*Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que un espacio X es **universal** para $\mathcal{C}$ si cumple con las siguientes condiciones:*

i) $X \in \mathcal{C}$.

ii) *Todo espacio topológico en $\mathcal{C}$ es homeomorfo a un subespacio de X.*

En este trabajo estudiaremos la existencia de espacios universales para ciertas clases de espacios topológicos. Nos enfocaremos en tres ejemplos.

*Un espacio topológico (T, τ) se dice que es **ordenado** si existe un orden lineal $<$ sobre T tal que $\tau = TO(<_T)$, donde $TO(<_T)$ denota la topología del orden (definida en el Capítulo 1). Llamaremos la **clase de los espacios topológicos ordenados y numerables** al siguiente conjunto:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}} = \{(T, \tau) : (T, \tau) \text{ es un espacio topológico ordenado y numerable}\}.$$

El primer ejemplo de espacio universal es el espacio de los números racionales. Demostraremos que $\mathbb{Q}$ es universal como espacio topológico ordenado y numerable. Para tal fin demostraremos el siguiente teorema:

Teorema: *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) *T es numerable,*

ii) *existe una inmersión topológica de T en $\mathbb{Q}$ que preserva el orden,*

iii) *T es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{Q}$,*

iv) *T es orden isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{Q}$.*

Con el cual alcanzaríamos nuestro primer objetivo.

Un espacio topológico (T, τ) *se dice que es* ***segundo numerable*** *si existe una base para* τ *numerable. Llamaremos la* ***clase de los espacios topológicos ordenados y segundo numerable*** *al siguiente conjunto:*

$$\mathcal{C}_2 = \{(T, \tau) : (T, \tau) \textit{ es un espacio topológico ordenado y segundo numerable}\}.$$

El segundo ejemplo de espacio universal es el espacio de los numeros reales. Demostraremos que $\mathbb{R}$ es universal como espacio topológico ordenado y segundo numerable. Para tal fin demostraremos el siguiente teorema:

Teorema: *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) T *es segundo numerable,*

ii) *existe una inmersión topológica de* T *en* $\mathbb{R}$ *que preserva el orden,*

iii) T *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}$*,*

iv) T *es orden isomorfo a un subconjunto de* $\mathbb{R}$*.*

Este Teorema provee el segundo ejemplo de espacio universal.

Un espacio topológico (T, τ) *se dice que es* ***separable*** *si existe un subconjunto* $D \subseteq T$ *denso y numerable. Llamaremos la* ***clase de los espacios topológicos ordenados y separables*** *al siguiente conjunto:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \{(T, \tau) : (T, \tau) \textit{ es un espacio topológico ordenado y separable}\}.$$

Por último, en el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ consideremos el orden lexicográfico y denotemos por $\mathbb{R}_0$ al espacio topológico ordenado resultante. El tercer ejemplo de espacio universal es el espacio $\mathbb{R}_0$. Primero demostraremos el siguiente resultado:

Teorema: *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) $(T, TO(<_T))$ *es separable,*

ii) *existe una inmersión topológica* h *de* $(T, TO^*(<_T))$ *en* $\mathbb{R}_0$ *que preserva el orden,*

iii) $(T, TO^*(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$*,*

iv) $(T, TO(<_T))$ *es orden isomorfo a un subconjunto de* $\mathbb{R}_0$*,*

v) $(T, TO^*(<_T))$ *es separable,*

donde $TO^*(<_T)$ *es una extension de* $TO(<_T)$ *cuya definición se puede ver en el Capítulo 1.*

Como consecuencia inmediata de este teorema, demostraremos que $\mathbb{R}_0$ es universal como espacio topológico ordenado y separable, en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato. Mas precisamente demostraremos el siguiente resultado:

Corolario: *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato. Entonces* $(T, TO(<_T))$ *es separable si, y sólo si,* $(T, TO(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$*.*

Con el cual alcanzaríamos nuestro tercer y último objetivo.

Para resumir, $\mathbb{R}_0$ es nuestro prototipo de un espacio ordenado separable, $\mathbb{R}$ es nuestro prototipo de un espacio ordenado segundo numerable y $\mathbb{Q}$ es nuestro prototipo de un espacio ordenado numerable.

Los resultados que estamos presentando en este trabajo están basados en el artículo [2]. El objetivo específico fué estudiar los teoremas sobre existencia de espacios universales ordenados presentados en ese trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1 *Una relación* $<$ *en un conjunto* X *se llama un* ***orden simple*** *o un* ***orden lineal*** *si cumple con las siguientes propiedades:*

i) Para cada par $x, y \in X$ *tal que* $x \neq y$ *se cumple* $x < y$ *ó* $y < x$.

ii) Para ningún $x \in X$ *se cumple la relación* $x < x$.

iii) Si $x < y$ *y* $y < z$ *entonces* $x < z$.

El par $(X, <)$ *se llama* ***conjunto linealmente ordenado***.

Definición 1.2 *Sean* $(X, <_X)$ *y* $(Y, <_Y)$ *dos conjuntos linealmente ordenados. Definimos la relación de orden* $<_{lex}$ *en* $A \times B$ *mediante:*

$$(a_1, b_1) <_{lex} (a_2, b_2) \quad \textit{si, y sólo si,} \quad a_1 <_A a_2 \quad \textit{ó} \quad a_1 = a_2 \quad \textit{y} \quad b_1 <_B b_2$$

Esta relación se denomina relación de ***orden lexicográfico*** *sobre* $A \times B$.

Ejemplo 1.3 *Para el producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$, *la relación de orden* $<_{lex}$ *en* $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *viene dada por*

$$(a_1, b_1) <_{lex} (a_2, b_2) \quad \textit{si, y sólo si,} \quad a_1 < a_2 \quad \textit{ó} \quad a_1 = a_2 \quad \textit{y} \quad b_1 = 0,\ b_2 = 1,$$

donde $<$ *es la relación de orden usual de* $\mathbb{R}$.

Definición 1.4 *Sean* $(X,<)$ *un conjunto con una relación de orden lineal, donde* X *es un conjunto no vacío. Sea* $\mathcal{B}$ *la colección de todos los conjuntos de la siguiente forma:*

i) *Todos los intervalos abiertos* $(a,b)_X = \{x \in X : a < x < b\}$ *con* $a,b \in X$. *Si este conjunto es vacío,* a *se denomina* ***predecesor inmediato*** *de* b, *y* b ***sucesor inmediato*** *de* a.

ii) *Todos los intervalos de la forma* $[a_0,b)_X = \{x \in X : a_0 \leq x < b\}$ *con* $a_o, b \in X$, *donde* a_0 *es el elemento más pequeño (si lo hay) de* X.

iii) *Todos los intervalos de la forma* $(a,b_0]_X = \{x \in X : a < x \leq b_0\}$ *con* $a, b_0 \in X$, *donde* b_0 *es el elemento más grande (si lo hay) de* X.

La colección $\mathcal{B}$ *es una base para una topología sobre* X, *que se llama* ***topología de orden*** *y que denotaremos por* $TO(<_X)$.

Otra forma equivalente de definir la topología de orden es considerar la colección $\mathcal{S}$ de todos los conjuntos de la siguiente forma:

i) Todos los intervalos de la forma $(a,+\infty)_X = \{x \in X : x > a\}$, donde $a \in X$.

ii) Todos los intervalos de la forma $(-\infty,b)_X = \{x \in X : x < b\}$, donde $b \in X$.

La colección $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de orden.

Definición 1.5 *Sean* $(X,<)$ *un conjunto con una relación de orden lineal, donde* X *es un conjunto no vacío. Sea* $\mathcal{B}$ *la colección de todos los conjuntos de la siguiente forma:*

i) *Todos los intervalos abiertos* $(a,b)_X = \{x \in X : a < x < b\}$ *con* $a,b \in X$.

ii) *Todos los intervalos de la forma* $[a_0,b)_X = \{x \in X : a_0 \leq x < b\}$ *con* $a_o, b \in X$, *donde* a_0 *es el elemento más pequeño (si lo hay) de* X.

iii) *Todos los intervalos de la forma* $(a, b_0]_X = \{x \in X : a < x \leq b_0\}$ *con* $a, b_0 \in X$*, donde* b_0 *es el elemento más grande (si lo hay) de* X*.*

iv) *Todos los intervalos de la forma* $(a, b]_X = \{x \in X : a < x \leq b\}$ *con* $a, b \in X$*, donde* b *es un elemento que no tiene predecesor inmediato en* X*.*

La colección $\mathcal{B}$ *es una base para una topología sobre* X*, que se llama* ***topología de orden ampliada*** *y que denotaremos por* $TO^*(<_X)$*. El espacio topológico* $(X, TO^*(<_X))$ *se llama* ***espacio topológico ordenado ampliado****.*

Otra forma equivalente de definir la topología de orden ampliada es considerar la colección $\mathcal{S}$ de todos los conjuntos de la siguiente forma:

i) Todos los intervalos de la forma $(a, +\infty)_X = \{x \in X : x > a\}$, donde $a \in X$.

ii) Todos los intervalos de la forma $(-\infty, b)_X = \{x \in X : x < b\}$, donde $b \in X$.

iii) Todos los intervalos de la forma $(-\infty, b]_X = \{x \in X : x \leq b\}$, donde $b \in X$ es un elemento que no tiene predecesor inmediato en X.

La colección $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de orden ampliada.
Es fácil observar que la topología de orden ampliada contiene a la topología de orden en X, es decir; $TO(<_X) \subseteq TO^*(<_X)$.

Definición 1.6 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*. La topología* $\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$ *se llama* ***topología del subespacio****.*

Proposición 1.7 *Sean* $(X, <)$ *un conjunto linealmente ordenado y* $A \subseteq X$*. Entonces* $TO(<_A) \subseteq \mathcal{T}_A$*.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} \in TO(<_A)$ y analicemos los casos posibles:

`CASO 1`: Si $\mathcal{U} = (a, +\infty)_A$, con $a \in A$, entonces tenemos

$$\mathcal{U} = \{x \in A : a < x\} = (a, +\infty)_X \cap A,$$

de donde es claro que $(a,+\infty)_X \cap A \in \mathcal{T}_A$, por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_A$.

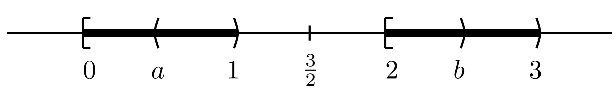
`CASO 2`: Si $\mathcal{U} = (-\infty, b)_A$, con $b \in A$, entonces tenemos

$$\mathcal{U} = \{x \in A : x < b\} = (-\infty, b)_X \cap A,$$

de donde es claro que $(-\infty, b)_X \cap A \in \mathcal{T}_A$, por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_A$. ■

Observación 1.8 *La proposición anterior nos dice que un abierto de la topología del orden es un abierto de la topología del subespacio, pero el siguiente ejemplo demostrara que el recíproco no siempre es cierto, es decir; existe un ejemplo en el cual* $\mathcal{T}_A \nsubseteq TO(<_A)$.

Ejemplo 1.9 *Consideremos el conjunto ordenado* $(\mathbb{Q}, <)$, *donde* $<$ *es la relación de orden usual de* $\mathbb{Q}$. *Sea* $A = (\,[0,1) \cup [2,3)\,) \cap \mathbb{Q}$ *y* $a, b \in A$ *tales que* $a < 2 < b$.



Primero observemos que $(a,b)_A \in TO(<_A)$ *y*

$$(a,b)_A = \{x \in A : a < x < b\} = (\,[a,1) \cup [2,b)\,) \cap \mathbb{Q} = (a,b) \cap A,$$

por lo tanto $(a,b)_A \in \mathcal{T}_A$. *Sin embargo, es claro que* $[2,b) \cap \mathbb{Q} = (\frac{3}{2}, b) \cap A \in \mathcal{T}_A$, *pero no existe un intervalo abierto* $(a,b)_A \in TO(<_A)$ *tal que* $2 \in (a,b)_A$ *y* $(a,b)_A = [2,b) \cap \mathbb{Q}$, *por lo tanto* $\mathcal{T}_A \nsubseteq TO(<_A)$.

Definición 1.10 *Dos conjunto ordenados* $(X, <_X)$ *y* $(Y, <_Y)$ *son* ***orden isomorfo*** *si existe una biyección* $f : X \longrightarrow Y$ *tal que* $x <_X y$ *si, y sólo si,* $f(x) <_Y f(y)$ *para todo par de elementos* $x, y \in X$. *En este caso diremos que* f *es un* ***isomorfismo de orden***.

Definición 1.11 *Sea* $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\rho)$ *una función de un espacio topológico en otro y uno a uno.* f *se llama* ***homeomorfismo*** *si* f *y* f^{-1} *son funciones continuas.*
Otra forma de definir un homeomorfismo es decir que es una función biyectiva $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\rho)$ *tal que* $f(\mathcal{U})$ *es abierto si, y sólo si,* $\mathcal{U}$ *es abierto.*

Proposición 1.12 *Sea* $f:(X,<_X)\longrightarrow(Y,<_Y)$ *un isomorfismo de orden. Entonces* $f:(X,TO(<_X))\longrightarrow(Y,TO(<_Y))$ *es un homeomorfismo que preserva el orden.*

Demostración: Basta observar que para todo $a,b\in X$ se tiene:

$$\begin{aligned} f[(a,b)_X] &= f[\{x\in X : a<_X x<_X b\}\,] \\ &= \{f(x)\in Y : f(a)<_Y f(x)<_Y f(b)\} \\ &= (f(a),f(b))_Y \end{aligned}$$

■

Proposición 1.13 *Sea* $f:(X,<_X)\longrightarrow(Y,<_Y)$ *un isomorfismo de orden. Entonces* $f:(X,TO^*(<_X))\longrightarrow(Y,TO^*(<_Y))$ *es un homeomorfismo que preserva el orden.*

Demostración: Como la topología de orden ampliada contiene a la topología de orden, gracias a lo Proposición 1.12 sólo nos restaría por demostrar que $(a,b]_X\in TO^*(<_X)$ si, y sólo si, $f[(a,b]_X]\in TO^*(<_Y)$ y para ello basta observar que para todo $a,b\in X$, donde b es un elemento que no tiene predecesor inmediato se tiene:

$$\begin{aligned} f[(a,b]_X] &= f[\{x\in X : a<_X x\leq_X b\}\,] \\ &= \{f(x)\in Y : f(a)<_Y f(x)\leq_Y f(b)\} \\ &= (f(a),f(b)]_Y \end{aligned}$$

Por último , como b es un elemento que no tienen predecesor inmediato y f es un isomorfismo de orden, es claro que $f(b)$ tampoco tiene predecesor inmediato. ■

Definición 1.14 *Se dice que* $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\rho)$ *es una* ***inmersión topológica*** *si* $f:(X,\tau)\longrightarrow(f(X),\rho_{f(X)})$ *es un homeomorfismo.*

Definición 1.15 *Un subconjunto* D *de un espacio topológico* (X,τ) *se dice que es* ***denso*** *en* (X,τ) *si* $cl_{\tau}(D)=X$.

Proposición 1.16 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico segundo numerable. Entonces* (X,τ) *es separable.*

Demostración: Supongamos que (X,τ) es un espacio topológico segundo numerable y sea $\{B_n\}$ una base numerable para τ. De cada elemento B_n de la base, elijamos un punto x_n. Sea D el conjunto formado por todos los x_n. Es claro que $cl_{\tau}(D)\subseteq X$, por lo tanto sólo nos restaría por probar que $X\subseteq cl_{\tau}(D)$. En efecto, sea $x\in X$. Para cada elemento B_k de la base $\{B_n\}$ tal que $x\in B_k$ es claro que $B_k\cap D\neq\emptyset$ (pues $x_k\in B_k\cap D$), por lo tanto $x\in cl_{\tau}(D)$ y así concluimos que $X\subseteq cl_{\tau}(D)$. ■

Observación 1.17 *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}$. *El conjunto* $\overline{A}$ *denotara la clausura de* A *con la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y el conjunto* $A^{'}$ *denotara el conjunto de todos los puntos límites de* A *con la topología usual de* $\mathbb{R}$.

Definición 1.18 *Sea* $A\subseteq\mathbb{R}$. *Entonces* $\mathbb{R}\backslash\overline{A}=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(q_\alpha,r_\alpha)$, *donde* (q_α,r_α) *son disjuntos dos a dos. Diremos que* (q_α,r_α) *es un* ***intervalo complementario*** *de* $\overline{A}$.

Definición 1.19 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X. *Por una* ***desconexión*** *de* A *entenderemos dos abiertos* U *y* V *de* X *tales que*

i) $U\cap A\neq\emptyset$,

ii) $V \cap A \neq \emptyset$,

iii) $A \cap U \cap V = \emptyset$ *y*

iv) $A \subseteq U \cup V$.

Si $A \subseteq X$ *no posee desconexión decimos que* A *es* ***conexo***.

Capítulo 2

Espacios ordenados numerables

En este capítulo nuestro objetivo es demostrar que $\mathbb{Q}$ es universal como espacio topológico ordenado y numerable. Mas precisamente demostraremos el siguiente teorema:

Teorema: *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) *T es numerable,*

ii) *existe una inmersión topológica de T en $\mathbb{Q}$ que preserva el orden,*

iii) *T es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{Q}$,*

iv) *T es orden isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{Q}$.*

Con el cual alcanzaríamos nuestro objetivo en este capítulo.
Para ello, primero daremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad.

Lema 2.1 *Sea* $(E, <_E)$ *un conjunto numerable y linealmente ordenado. Entonces existe un isomorfismo de orden* $\widetilde{f} : (E, <_E) \longrightarrow (A, <)$*, donde* $A \subseteq \mathbb{Q}$ *y* $<$ *es la relación de orden usual de* $\mathbb{Q}$.

Demostración: Sea $(E, <_E)$ un conjunto numerable y linealmente ordenado. Añadiremos a E los puntos $-\infty$ e ∞, donde $-\infty$ es menor que cualquier elemento de E e ∞ es mayor que cualquier elemento de E.
Construiremos una función $\widetilde{f}$ de $E \cup \{-\infty, \infty\}$ en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera: Enumeremos $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y denotemos por E_n al conjunto $\{-\infty, \infty\} \cup \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Sea $\widetilde{f}(-\infty) = -1$, $\widetilde{f}(\infty) = 1$ y $\widetilde{f}(e_1) = 0$. Definamos $\widetilde{f}(e_n)$ por inducción sobre n. Supongamos que $\widetilde{f}$ es una función que preserva el orden de E_{n-1} en $\widetilde{f}(E_{n-1})$. Hagamos

$$\widetilde{f}(e_n) = \frac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{2}$$

donde $a <_E e_n <_E b$, con a y b puntos consecutivos del conjunto E_{n-1} (tales a y b existen pues E_{n-1} es un conjunto ordenado y finito). De aquí es claro que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}$ preserva el orden en E_n y como $\{E_n\}$ es creciente (pues $E_n \subseteq E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) entonces es obvio que la extensión de $\widetilde{f}$ a todo E es una función que preserva el orden.
Finalmente, es fácil observar que $\widetilde{f} : (E, <_E) \longrightarrow (\widetilde{f}(E), <)$ es un isomorfismo de orden.

$\blacksquare$

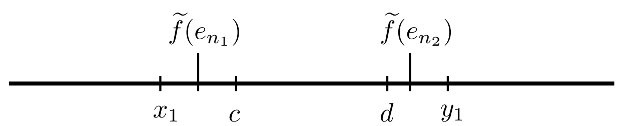
Lema 2.2 *Sea* (c, d) *un intervalo complementario y acotado de* $\overline{\widetilde{f}(E)}$*. Entonces* $c \in \widetilde{f}(E)$ *y* $d \in \widetilde{f}(E)$.

Demostración: La prueba la haremos por reducción al absurdo.
Supongamos que $c \notin \widetilde{f}(E)$ ó $d \notin \widetilde{f}(E)$ y analicemos los casos posibles.

`CASO 1`: Si $c, d \notin \widetilde{f}(E)$.
Sean $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < c < d < y_1$ y $y_1 - x_1 < 2(d - c)$. Como (c, d) es un intervalo complementario de $\overline{\widetilde{f}(E)}$, entonces $c, d \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ y como $c, d \notin \widetilde{f}(E)$

tendríamos $c, d \in \widetilde{f}(E)'$, de aquí es fácil observar que (x_1, c) y (d, y_1) contienen infinitos elementos de $\widetilde{f}(E)$.

Sean $\quad n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : x_1 < \widetilde{f}(e_n) < c\} \quad$ y $\quad n_2 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : d < \widetilde{f}(e_n) < y_1\}$.



Afirmación 2.3 *Existen dos puntos consecutivos* a *y* b *en* $\{e_n : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\}$ *tales que* $\widetilde{f}(e_{n_1}) \leq \widetilde{f}(a) < c$ *y* $d < \widetilde{f}(b) \leq \widetilde{f}(e_{n_2})$.

En efecto, supongamos que $n_1 < n_2$, en este caso es claro que $(d, \widetilde{f}(e_{n_2})) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\} = \emptyset$ y $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\}$ puede o no ser vacío.
Como $(d, \widetilde{f}(e_{n_2})) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\} = \emptyset$, tomemos $b = e_{n_2}$. Por otro lado, si $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\} \neq \emptyset$, como $\{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\}$ es un conjunto finito y linealmente ordenado, el conjunto $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\}$ tiene un elemento máximo que denotaremos por $\widetilde{f}(e_k)$ y tomando $a = e_k$ es suficiente.
Por último, si $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq n_2\} = \emptyset$, tomando $a = e_{n_1}$ es suficiente.
De forma análoga se demuestra el caso en que $n_1 > n_2$. Así concluiría la prueba de la Afirmación 2.3.

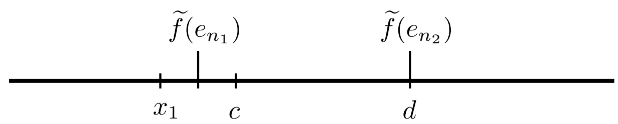
$$\begin{aligned} \text{Ahora sea} \quad m &= \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \widetilde{f}(a) < \widetilde{f}(e_n) < \widetilde{f}(b)\} \\ &= \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : a < e_n < b\}. \end{aligned}$$

Como $e_m \in (a, b)$, por la construcción de $\widetilde{f}$ tenemos $\widetilde{f}(e_m) = \dfrac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{2}$.
Por otro lado, es claro que $\widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a) < y_1 - x_1$ y como $y_1 - x_1 < 2(d - c)$ obtenemos $\widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a) < 2(d - c)$, por lo tanto $\dfrac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{2} \in (c, d)$, es decir; $\widetilde{f}(e_m) \in (c, d)$, lo cual junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción.

`CASO 2`: Si $d \in \widetilde{f}(E)$.
Sea $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 < c < d$ y $d - x_1 < 2(d - c)$. Como $d \in \widetilde{f}(E)$ entonces

existe $e_{n_2} \in E$ tal que $\widetilde{f}(e_{n_2}) = d$. Por otro lado, como (c,d) es un intervalo complementario de $\overline{\widetilde{f}(E)}$ es claro que $c \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ y como $c \notin \widetilde{f}(E)$ tenemos $c \in \widetilde{f}(E)'$, de aquí es fácil observar que (x_1, c) contiene infinitos elementos de $\widetilde{f}(E)$.

Sea $n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : x_1 < \widetilde{f}(e_n) < c\}$.



Afirmación 2.4 *Existen un punto a en $\{e_n : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\}$ tal que $f(e_{n_1}) \leq \widetilde{f}(a) < c$ y, a y $b = e_{n_2}$ son dos puntos consecutivos del conjunto $\{e_n : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\}$.*

En efecto, si $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\} \neq \emptyset$, como $\{\widetilde{f}(e_n) : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\}$ es un conjunto finito y linealmente ordenado, el conjunto $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\}$ tiene un elemento máximo que denotaremos por $\widetilde{f}(e_k)$ y tomando $a = e_k$ es suficiente. Si $(\widetilde{f}(e_{n_1}), c) \cap \{\widetilde{f}(e_n) : n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}\} = \emptyset$, tomando $a = e_{n_1}$ es suficiente. Así concluiría la prueba de la Afirmación 2.4.

$$
\begin{aligned}
\text{Ahora sea} \quad m &= \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \widetilde{f}(a) < \widetilde{f}(e_n) < \widetilde{f}(b)\} \\
&= \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : a < e_n < b\}.
\end{aligned}
$$

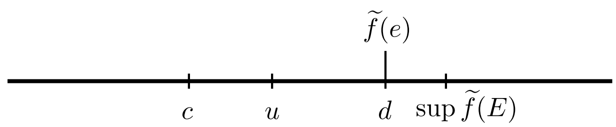
Como $e_m \in (a,b)$, por la construcción de $\widetilde{f}$ tenemos $\widetilde{f}(e_m) = \dfrac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{2}$.
Por otro lado tenemos que $\widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a) < d - x_1$ y como $d - x_1 < 2(d-c)$ tenemos $\widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a) < 2(d-c)$, por la tanto $\dfrac{\widetilde{f}(a) + \widetilde{f}(b)}{2} \in (c,d)$, es decir; $\widetilde{f}(e_m) \in (c,d)$, lo cual junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción.

`CASO 3`: Si $c \in \widetilde{f}(E)$.
Se demuestra por un razonamiento análogo al del caso 2. ■

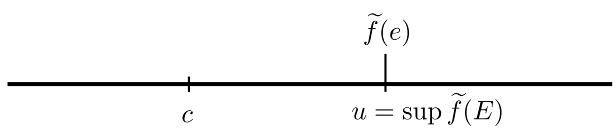
Lema 2.5 *Sean* $c \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ *y* $u \in \mathbb{R}$ *con* $\sup \widetilde{f}(E) \geq u > c$. *Entonces existe un* $e \in E$ *con* $\widetilde{f}(e) > c$ *y* $\{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < u\}$.

Demostración: Si $\widetilde{f}(E) \cap (c, u) \neq \emptyset$, es claro que existe $e \in E$ tal que $\widetilde{f}(e) \in \widetilde{f}(E) \cap (c, u)$ con lo cual el resultado seria inmediato.
Si $\widetilde{f}(E) \cap (c, u) = \emptyset$, analicemos los casos posibles.

`CASO 1`: Supongamos que $u < \sup \widetilde{f}(E)$. Sea $d \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ tal que $u < d \leq \sup \widetilde{f}(E)$ y (c, d) es un intervalo complementario y acotado de $\overline{\widetilde{f}(E)}$. Por el Lema 2.2 sabemos que $d \in \widetilde{f}(E)$, y tomando $\widetilde{f}(e) = d$ es suficiente.



`CASO 2`: Supongamos que $u = \sup \widetilde{f}(E)$, como $\widetilde{f}(E) \cap (c, u) = \emptyset$ tenemos $\overline{\widetilde{f}(E)} \cap (c, u) = \emptyset$, así (c, u) es un intervalo complementario y acotado de $\overline{\widetilde{f}(E)}$. Por el Lema 2.2 sabemos que $u \in \widetilde{f}(E)$, y tomando $\widetilde{f}(e) = u$ es suficiente.



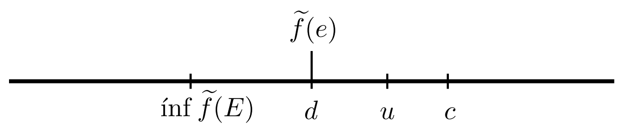
■

Lema 2.6 *Sean* $c \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ *y* $u \in \mathbb{R}$ *con* $\inf \widetilde{f}(E) \leq u < c$. *Entonces existe un* $e \in E$ *con* $\widetilde{f}(e) < c$ *y* $\{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t > \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t > u\}$.

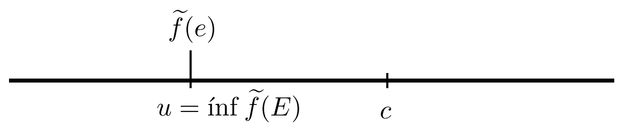
Demostración: Si $\widetilde{f}(E) \cap (u, c) \neq \emptyset$, es claro que existe $e \in E$ tal que $\widetilde{f}(e) \in \widetilde{f}(E) \cap (u, c)$ con lo cual el resultado seria inmediato.
Si $\widetilde{f}(E) \cap (u, c) = \emptyset$, analicemos los casos posibles.

`CASO 1`: Supongamos que $\inf \widetilde{f}(E) < u$ y sea $d \in \overline{\widetilde{f}(E)}$ tal que $\inf \widetilde{f}(E) \leq d < u$ y

(d, c) es un intervalo complementario y acotado de $\overline{\widetilde{f}(E)}$. Por el Lema 2.2 sabemos que $d \in \widetilde{f}(E)$ y tomando $\widetilde{f}(e) = d$ es suficiente.



CASO 2: Supongamos que $u = \text{ínf}\,\widetilde{f}(E)$, como $\widetilde{f}(E) \cap (u, c) = \emptyset$ tenemos $\overline{\widetilde{f}(E)} \cap (u, c) = \emptyset$, así (u, c) es un intervalo complementario y acotado de $\overline{\widetilde{f}(E)}$. Por el Lema 2.2 sabemos que $u \in \widetilde{f}(E)$ y tomando $\widetilde{f}(e) = u$ es suficiente.



$\blacksquare$

El proximo Lema es la clave de la demostración del Teorema.

Lema 2.7 *Sea* $(E, <_E)$ *un conjunto numerable y linealmente ordenado, y* $\widetilde{f} : (E, <_E) \longrightarrow (\widetilde{f}(E), <)$ *el isomorfismo de orden construido en el Lema 2.1. Entonces* $TO(<_{\widetilde{f}(T)}) = \mathcal{T}_{\widetilde{f}(T)}$.

Demostración: Por la proposición 1.7 es claro que $TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \subseteq \mathcal{T}_{\widetilde{f}(T)}$. Sólo nos restaría por probar que $\mathcal{T}_{\widetilde{f}(T)} \subseteq TO(<_{\widetilde{f}(T)})$.
Sea $a \in \mathbb{Q}$. Debemos probar que

$$(-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \quad \text{y} \quad (a, +\infty)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}).$$

Primero demostraremos que $(-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \in TO(<_{\widetilde{f}(T)})$ y esto es equivalente a probar que $\forall c \in (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T)\ \exists \mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \left[c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T)\right]$.
En efecto, sea $c \in (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T)$, y analicemos los casos posibles:

`CASO 1:` Si $a \leq \sup \widetilde{f}(T)$, es claro que $c < a \leq \sup \widetilde{f}(T)$. Aplicando el Lema 2.5 con $u = a$ sabemos que existe un $e \in T$ tal que $\widetilde{f}(e) > c$ y

$$\{t \in \widetilde{f}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(T)} : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(T)} : t < a\},$$

de aquí es claro que

$$\{t \in \widetilde{f}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \widetilde{f}(T) : t < a\},$$

es decir;

$$(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T),$$

y tomando $\mathcal{U} = (-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(T)}$, es claro que

$$\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \quad \text{y} \quad c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T).$$

`CASO 2:` Si $\sup \widetilde{f}(T) < a$, es claro que $c \leq \sup \widetilde{f}(T) < a$.

i) Si $c < \sup \widetilde{f}(T)$, aplicando el Lema 2.5 con $u = \sup \widetilde{f}(T)$, sabemos que existe un $e \in T$ tal que $\widetilde{f}(e) > c$ y

$$\{t \in \widetilde{f}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(T)} : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(T)} : t < \sup \widetilde{f}(T)\},$$

de aquí es claro que

$$\{t \in \widetilde{f}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \widetilde{f}(T) : t < \sup \widetilde{f}(T)\},$$

es decir;

$$(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(T)} \subseteq (-\infty, \sup \widetilde{f}(T))_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T). \tag{2.1}$$

Por otro lado, como $\sup \widetilde{f}(T) < a$ es claro que $(-\infty, \sup \widetilde{f}(T))_{\mathbb{Q}} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}}$, por lo tanto

$$(-\infty, \sup \widetilde{f}(T))_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T). \tag{2.2}$$

Luego, por (2.1) y (2.2) obtenemos:

$$(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T)$$

y tomando $\mathcal{U} = (-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(T)}$ es claro que

$$\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \quad \text{y} \quad c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T).$$

ii) Si $c = \sup \widetilde{f}(T)$, es claro que $\sup \widetilde{f}(T) \in \widetilde{f}(T)$. Luego tomando $\mathcal{U} = (-\infty, c]_{\widetilde{f}(T)}$ tenemos $\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{f}(T)})$ y $c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T)$.

Para demostrar que $(a, +\infty)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \in TO(<_{\widetilde{f}(T)})$, debemos probar que $\forall c \in (a, +\infty)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \; \exists \mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{f}(T)}) \; \left[c \in \mathcal{U} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{f}(T) \right]$ y la demostración es análoga al caso anterior tomando $\inf \widetilde{f}(T)$ en lugar de $\sup \widetilde{f}(T)$, invirtiendo las desigualdades y utilizando el Lema 2.6. ■

Teorema 2.8 *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) T es numerable,

ii) existe una inmersión topológica de T en $\mathbb{Q}$ que preserva el orden,

iii) T es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{Q}$,

iv) T es orden isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Demostración: Primero observemos que $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.
Por otro lado observemos que $ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo y así demostrar todas las equivalencias del teorema sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.

En efecto, sea $\widetilde{f}:(T,<_T)\longrightarrow(\widetilde{f}(T),<)$ la función de la construcción hecha en el Lema 2.1 (con T en lugar de E). Por la Proposición 1.12 tenemos $\widetilde{f}:(T,TO(<_T))\longrightarrow(\widetilde{f}(T),TO(<_{\widetilde{f}(T)}))$ es un homeomorfismo que preserva el orden y usando el Lema 2.7 tenemos que $\widetilde{f}:(T,TO(<_T))\longrightarrow(\widetilde{f}(T),\mathcal{T}_{\widetilde{f}(T)})$ es un homeomorfismo que preserva el orden. ∎

Observación 2.9 *Observemos que todo este largo trabajo se ha hecho con la finalidad de conseguir un homeomorfismo* $\widetilde{f}:(T,TO(<_T))\longrightarrow(\widetilde{f}(T),\mathcal{T}_{\widetilde{f}(T)})$ *con el cual hemos logrado alcanzar nuestro objetivo en este capítulo, ya que cualquier función no serviría para tal fin. Por ejemplo, si consideramos el conjunto linealmente ordenado* $(T,<)$*, donde* $T=([0,1)\cup[2,3))\cap\mathbb{Q}$ *y* $<$ *es la relación de orden usual de* $\mathbb{R}$*. Para la función* $f:(T,TO(<_T))\longrightarrow(T,\mathcal{T}_T)$ *dada por* $f(x)=x$ *es claro por la Proposición 1.7 que* f *es una función abierta, sin embargo, por el ejemplo 1.9 es claro que* f *no es una función continua, por lo tanto* f *no es un homeomorfismo.*

Capítulo 3

Espacios ordenados segundo numerables

En este capítulo nuestro objetivo es demostrar que $\mathbb{R}$ es universal como espacio topológico ordenado y segundo numerable. Mas precisamente demostraremos el siguiente teorema:

Teorema: *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) *T es segundo numerable,*

ii) *existe una inmersión topológica de T en $\mathbb{R}$ que preserva el orden,*

iii) *T es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$,*

iv) *T es orden isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Con el cual alcanzaríamos nuestro objetivo en este capítulo.
Para ello, primero daremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad.

Lema 3.1 *Sea T un conjunto linealmente ordenado. T es segundo numerable si, y sólo si, T es separable y existe a lo sumo una cantidad numerable de predecesores y de sucesores inmediatos en T.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que T es segundo numerable, entonces por la Proposición 1.16 sabemos que T es separable. Sea $\{U_n\}$ una base para T, y sean a y b dos puntos consecutivos en T tales que a es predecesor inmediato de b en T. Es claro que $(a,b)_T = \emptyset$, por lo tanto $(-\infty, b)_T = (-\infty, a]_T$, y de aquí obtenemos que $(-\infty, a]_T$ es un intervalo abierto en T. Por lo tanto existe un abierto $U_{n_a} \in \{U_n\}$ tal que $a \in U_{n_a} \subseteq (-\infty, a]_T$, de donde es claro que a es el elemento más grande de U_{n_a}.
Es fácil observar que si a' es otro predecesor inmediato en T y distinto de a, entonces $U_{n_a} \neq U_{n_{a'}}$ y de este hecho es fácil demostrar que la función que envía a cada predecesor inmediato a en U_{n_a} es una inyección y con ello se demuestra que existe a lo sumo una cantidad numerable de predecesores inmediatos en T.
Por un razonamiento análogo se demuestra que existe a lo sumo una cantidad numerable de sucesores inmediatos en T.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que T es separable (es decir; T posee un subconjunto denso y numerable D) y que existe a lo sumo una cantidad numerable de predecesores y sucesores inmediatos en T. Denotemos por E al conjunto formado por D, también por todos los sucesores y predecesores inmediatos en T, y por el primer y último elemento de T (si existen).

Afirmación 3.2 *La familia numerable de intervalos*

$$\mathcal{B} = \{(e,e')_T : e, e' \in E\} \cup \{(e, b_o]_T : e \in E\} \cup \{[a_o, e)_T : e \in E\}$$

donde a_0 es el elemento más pequeño (si existe) de T y b_0 es el elemento más grande (si existe) de T, es una base para T.

Sean $a, b \in T$. Debemos probar:

i) $\forall x \in (a,b)_T \ \exists (e,e')_T \in \mathcal{B} \ [x \in (e,e')_T \subseteq (a,b)_T]$,

ii) $\forall x \in [a_0,b)_T \ \exists [a_0,e)_T \in \mathcal{B} \ [x \in [a_0,e)_T \subseteq [a_0,b)_T]$ y

iii) $\forall x \in (a,b_0]_T \ \exists (e,b_0]_T \in \mathcal{B} \ [x \in (e,b_0]_T \subseteq (a,b_0]_T$.

En efecto,

i) Sea $x \in (a,b)_T$. Para hallar el punto e analicemos los caso posibles.

`CASO 1:` Si $(a,x)_T \neq \emptyset$, sabemos que existe $e \in E$ tal que $a <_T e <_T x$.

`CASO 2:` Si $(a,x)_T = \emptyset$, entonces $a, x \in E$, y en este caso tomamos $e = a$.

Por un razonamiento análogo al anterior hallamos el punto e'.

ii) Sea $x \in [a_0,b)_T$. Si $x \in (a_0,b)_T$, por *i)* el resultado es inmediato. Si $x = a_0$ analicemos los caso posibles.

`CASO 1:` Si $(a_0,b)_T \neq \emptyset$, sabemos que existe $e \in E$ tal que $a_0 <_T e <_T b$, por lo tanto $x \in [a_0,e)_T \subseteq [a_0,b)_T$.

`CASO 2:` Si $(a_0,b)_T = \emptyset$, entonces $a_0, b \in E$, y en este caso tomando $e = b$ tenemos $x \in [a_0,e)_T \subseteq [a_0,b)_T$.

iii) Sea $x \in (a,b_0]_T$. Se demuestra por un razonamiento análogo al de *ii)*.

■

Lema 3.3 *Sea T un espacio linealmente ordenado y segundo numerable. Entonces existe un isomorfismo de orden $\widetilde{g} : (T, <_T) \longrightarrow (A, <)$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$ y $<$ es la relación de orden usual de $\mathbb{R}$.*

Demostración: Supongamos que T es un espacio linealmente ordenado y segundo numerable. Por el Lema 3.1 sabemos que T es separable (es decir; T posee un subconjunto denso y numerable D) y que existe a lo sumo una cantidad numerable de sucesores y de predecesores inmediatos en T.

Denotemos por E al conjunto formado por D, también por todos los sucesores y predecesores inmediatos en T, y por el primer y último elemento de T (si existen).
Sea $\widetilde{f}$ la función construida en la demostración del Lema 2.1.
Para cada $x \in T \backslash E$ sea

$$A_x = \{t \in E : x <_T t\} \quad \text{y} \quad B_x = \{t \in E : t <_T x\}.$$

Observemos lo siguiente:

i) Si $x \in T \backslash E$ afirmamos que la distancia entre los conjuntos $\widetilde{f}(A_x)$ y $\widetilde{f}(B_x)$ es cero. De lo contrario $\widetilde{f}(A_x)$ tendría ínfimo d y $\widetilde{f}(B_x)$ tendría supremo c tales que $c < d$ y $(c,d)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{f}(E) = \emptyset$. Por lo tanto $(c,d)_{\widetilde{f}(E)}$ sería un intervalo complementario de $\widetilde{f}(E)$ y por el Lema 2.2 tendríamos que $c, d \in \widetilde{f}(E)$, por lo tanto existirían $a, b \in T$ tales que $c = \widetilde{f}(a)$ y $d = \widetilde{f}(b)$, y

$$(a,b)_T \cap E = \emptyset. \tag{3.1}$$

Es claro que $x \in (a,b)_T$.

Afirmación 3.4 $(a,x)_T = \emptyset$.

La prueba la haremos por reducción al absurdo.
Supongamos que $(a,x)_T \neq \emptyset$, entonces existriría $t \in E$ tal que $t \in (a,x)_T$. Como $(a,x)_T \subseteq (a,b)_T$ tendríamos $t \in (a,b)_T$, por lo tanto $(a,b)_T \cap E \neq \emptyset$, lo cual junto con (3.1) llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto tiene que cumplirse $(a,x)_T = \emptyset$ con lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.4.

Por último observemos que de la afirmación anterior es claro que a y x son puntos consecutivos en T, por lo tanto $x \in E$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues $x \in T \backslash E$.

ii) Si $x \in T \backslash E$ afirmamos que $\widetilde{f}(B_x)$ no tiene elemento máximo y $\widetilde{f}(A_x)$ no tiene elemento mínimo. Pues si c es el máximo elemento de $\widetilde{f}(B_x)$ tendríamos que $(\widetilde{f}^{-1}(c), x)_T = \emptyset$ (pues de lo contrario, si $(\widetilde{f}^{-1}(c), x)_T \neq \emptyset$ necesariamente existiría $t \in E$ tal que $\widetilde{f}^{-1}(c) <_T t <_T x$, de donde es claro que $t \in B_x$ y $c < \widetilde{f}(t)$. Por lo tanto $\widetilde{f}(t) \in \widetilde{f}(B_x)$ y $c < \widetilde{f}(t)$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues estamos suponiendo que c es el máximo elemento de $\widetilde{f}(B_x)$). Por lo tanto x sería un sucesor inmediato en T. Así $x \in E$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues $x \in T \backslash E$.

Por otro lado, si suponemos que d es el mínimo elemento de $\widetilde{f}(A_x)$ tendríamos que $(x, \widetilde{f}^{-1}(d))_T = \emptyset$ (pues de lo contrario, si $(x, \widetilde{f}^{-1}(d))_T \neq \emptyset$ necesariamente existiría $t \in E$ tal que $x <_T t <_T \widetilde{f}^{-1}(d)$, de donde es claro que $t \in A_x$ y $\widetilde{f}(t) < d$, por lo tanto $\widetilde{f}(t) \in \widetilde{f}(A_x)$ y $\widetilde{f}(t) < d$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues estamos suponiendo que d es el mínimo elemento de $\widetilde{f}(A_x)$) y por lo tanto x sería un sucesor inmediato en T, así $x \in E$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues $x \in T \backslash E$.

Observemos que de *i)* y *ii)* obtenemos que para todo $x \in T \backslash E$ se tiene

$$\sup \widetilde{f}(B_x) = \text{ínf}\, \widetilde{f}(A_x)$$

Ahora extenderemos $\widetilde{f}$ a una función $\widetilde{g}$ de T en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x)\,, & \text{sí} \quad x \in E \\ \\ \text{ínf}\, \widetilde{f}(A_x)\,, & \text{sí} \quad x \in T \backslash E \end{cases}$$

Afirmación 3.5 $\widetilde{g}$ *es una función que preserva el orden de* T *en* $\mathbb{R}$.

En efecto, sean $x, y \in T$ tales que $x <_T y$ y analicemos los casos posibles.

`CASO 1:` Si $x, y \in E$, como $\widetilde{f}$ es una función que preserva el orden se tiene que $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x) < \widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y)$.

`CASO 2`: Si $x \in E$ y $y \in T \backslash E$. En este caso es claro que $(x,y)_T \neq \emptyset$ (pues en caso contrario x y y serían puntos consecutivos, por lo tanto $y \in E$ con lo cual llegaríamos a una contradicción). Por lo tanto existe $t \in E$ tal que $t \in (x,y)_T$, es decir $x <_T t <_T y$. De aquí es claro que $t \in B_y$ y $\widetilde{f}(x) < \widetilde{f}(t)$, por lo tanto $\widetilde{f}(t) \in \widetilde{f}(B_y)$ y $\widetilde{f}(x) < \widetilde{f}(t)$. Así $\widetilde{f}(x) < \widetilde{f}(t) \leq \sup \widetilde{f}(B_y)$, es decir; $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x) < \sup \widetilde{f}(B_y) = \widetilde{g}(y)$.
De forma análoga se demuestra que $\widetilde{g}(x) < \widetilde{g}(y)$ si $x \in T \backslash E$ y $y \in E$.

`CASO 3`: Si $x, y \in T \backslash E$. En este caso es claro que $(x,y)_T \neq \emptyset$ (pues en caso contrario x y y serían puntos consecutivos, por lo tanto $x, y \in E$ con lo cual llegaríamos a una contradicción) por lo tanto existe $t \in E$ tal que $t \in (x,y)_T$, es decir $x <_T t <_T y$ y por $ii)$ tenemos $\widetilde{g}(x) < \widetilde{g}(t) < \widetilde{g}(y)$, con lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.5.
Por último es fácil observar que la función $\widetilde{g} : (T, <_T) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), <)$ es un isomorfismo de orden.

$\blacksquare$

Lema 3.6 *Sea T un espacio linealmente ordenado y segundo numerable, y sea $\widetilde{g} : (T, <_T) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), <)$ el isomorfismo de orden de la función construida en el Lema 3.3. Entonces*

i) $TO(<_{\widetilde{g}(T)}) = \mathcal{T}_{\widetilde{g}(T)}$

ii) Para todo $c \in \widetilde{g}(T)$ y todo $a \in \mathbb{R}$ con $c < a$, existe $e \in T$ con $c < \widetilde{g}(e)$ tal que
$$(-\infty, \widetilde{g}(e))_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T).$$

iii) Para todo $c \in \widetilde{g}(T)$ y todo $a \in \mathbb{R}$ con $a < c$, existe $e \in T$ con $\widetilde{g}(e) < c$ tal que
$$(\widetilde{g}(e), +\infty)_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T).$$

Demostración:

i) Por la proposición 1.7 es claro que $TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \subseteq \mathcal{T}_{\widetilde{g}(T)}$. Sólo nos restaría por probar que $\mathcal{T}_{\widetilde{g}(T)} \subseteq TO(<_{\widetilde{g}(T)})$.
Sea $a \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$$(-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \quad \text{y} \quad (a, +\infty)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}).$$

Primero demostraremos que $(-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \in TO(<_{\widetilde{g}(T)})$ y esto es equivalente a probar que $\forall c \in (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)\ \exists \mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{g}(T)})\ [c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)]$.
En efecto, sea $c \in (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$.

Afirmación 3.7 *Si* $c \in \widetilde{g}(T)$, *entonces* $c \in \overline{\widetilde{f}(E)}$.

a) Si $c = \widetilde{g}(y)$ con $y \in E$ tenemos $c = \widetilde{g}(y) = \widetilde{f}(y)$, por lo tanto $c \in \widetilde{f}(E)$, con lo cual concluímos que $c \in \overline{\widetilde{f}(E)}$.

b) Si $c = \widetilde{g}(y)$ con $y \in T \backslash E$ tenemos $c = \widetilde{g}(y) = \sup \widetilde{f}(B_y)$. Por otro lado, como $B_y \subseteq E$ tenemos $\widetilde{f}(B_y) \subseteq \widetilde{f}(E)$, por lo tanto $\overline{\widetilde{f}(B_y)} \subseteq \overline{\widetilde{f}(E)}$, por lo tanto $c \in \overline{\widetilde{f}(B_y)} \subseteq \overline{\widetilde{f}(E)}$ con lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.7.

Ahora analicemos los casos posibles.

`CASO 1:` Si $a \leq \sup \widetilde{f}(E)$.
Es claro que $c < a \leq \sup \widetilde{f}(E)$. Como $c, a \in \mathbb{R}$ y $a \neq c$ sabemos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $c < b < a \leq \sup \widetilde{f}(E)$ y aplicando el Lema 2.5 con $u = b$ sabemos que existe un $e \in E$ tal que $c < \widetilde{f}(e)$ y

$$\{t \in \widetilde{f}(E) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < b\},$$

de aquí es claro que

$$\{t \in \widetilde{f}(E) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \widetilde{f}(E) : t < b\}, \tag{3.2}$$

es decir;

$$(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(E)} \subseteq (-\infty, b)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{f}(E). \tag{3.3}$$

Afirmación 3.8 $\{t \in \widetilde{g}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \widetilde{g}(T) : t \leq b\}$, *es decir;* $(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (-\infty, b]_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$.

En efecto, sea $t \in (-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{g}(T)}$, entonces tenemos $t \in \widetilde{g}(T)$ y $t < \widetilde{f}(e)$.

a) Si $t = \widetilde{g}(y)$ con $y \in E$ tenemos $\widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y) = t < \widetilde{f}(e)$ y de (3.2) obtenemos que $t < b$, luego como $t \in \widetilde{g}(T)$ tenemos $t \in (-\infty, b]_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$.

b) Si $t = \widetilde{g}(y)$ con $y \in T \backslash E$ tenemos $\sup \widetilde{f}(B_y) = \widetilde{g}(y) = t < \widetilde{f}(e)$, por lo tanto , para todo $s \in \widetilde{f}(B_y)$ es claro que $s < \widetilde{f}(e)$, así $\widetilde{f}(B_y) \subseteq (-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{f}(E)}$ y de (3.3) obtenemos $\widetilde{f}(B_y) \subseteq (-\infty, b)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{f}(E)$, de aquí es claro que $t = \sup \widetilde{f}(B_y) \leq b$, luego, como $t \in \widetilde{g}(T)$ tenemos $t \in (-\infty, b]_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$, con lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.8.

Por último, como $b < a$ tenemos $(-\infty, b]_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$ y por la afirmación 3.8 es claro que

$$(-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$$

y tomando $\mathcal{U} = (-\infty, \widetilde{f}(e))_{\widetilde{g}(T)}$, tenemos

$$\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \quad \text{y} \quad c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T).$$

`CASO 2`: Si $\sup \widetilde{f}(E) < a$.
Por la afirmación 3.7 es claro que $c \leq \sup \widetilde{f}(E) < a$.

a) Si $c < \sup \widetilde{f}(E)$ aplicando el Lema 2.5 con $u = \sup \widetilde{f}(E)$ sabemos que existe un $e \in E$ tal que $c < \widetilde{f}(e)$ y

$$\{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \overline{\widetilde{f}(E)} : t < \sup \widetilde{f}(E)\}.$$

Afirmación 3.9 $\{t \in \widetilde{g}(T) : t < \widetilde{f}(e)\} \subseteq \{t \in \widetilde{g}(T) : t < \sup \widetilde{f}(E)\}$, *es decir;* $(-\infty, \widetilde{f}(e)\,)_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (-\infty, \sup \widetilde{f}(E))_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$.

Es claro que ésta contención es inmediata.
Por último, como $\sup \widetilde{f}(E) < a$ tenemos

$$(-\infty, \sup \widetilde{f}(E))_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$$

y por la afirmación 3.9 es claro que

$$(-\infty, \widetilde{f}(e)\,)_{\widetilde{g}(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)$$

y tomando $\mathcal{U} = (-\infty, \widetilde{f}(e)\,)_{\widetilde{g}(T)}$, tenemos

$$\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \quad \text{y} \quad c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T).$$

b) Si $c = \sup \widetilde{f}(E)$.
Primero observemos que $\widetilde{f}(E) = \widetilde{g}(E) \subseteq \widetilde{g}(T)$, por lo tanto tenemos

$$\sup \widetilde{f}(E) \leq \sup \widetilde{g}(T), \tag{3.4}$$

Ahora denotemos por $CS\widetilde{f}(E)$ al conjunto de todas las cotas superiores de $\widetilde{f}(E)$ y $CS\widetilde{g}(T)$ al conjunto de todas las cotas superiores de $\widetilde{g}(T)$.

Afirmación 3.10 $CS\widetilde{f}(E) \subseteq CS\widetilde{g}(T)$.

Sea $d \in CS\widetilde{f}(E)$. Debemos probar que $d \in CS\widetilde{g}(T)$ y esto es equivalente a demostrar que $\widetilde{g}(x) \leq d \quad \forall x \in T$.
En efecto, sea $x \in T$ y analicemos los casos posibles

$b.1)$ Si $x \in E$ tenemos que $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x)$ y como $d \in CS\widetilde{f}(E)$ es claro que $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x) \leq d$.

$b.2)$ Si $x \in T \backslash E$. Como $B_x \subseteq E$ es claro que $\widetilde{f}(B_x) \subseteq \widetilde{f}(E)$, por lo tanto $\sup \widetilde{f}(B_x) \subseteq \sup \widetilde{f}(E)$ y como $d \in CS\widetilde{f}(E)$ es claro que $\widetilde{g}(x) = \sup \widetilde{f}(B_x) \leq \sup \widetilde{f}(E) \leq d$, con lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.10.

De la afirmación 3.10 obtenemos que

$$\sup \widetilde{g}(T) \leq \sup \widetilde{f}(E). \tag{3.5}$$

Por último, de (3.4) y (3.5) obtenemos que $c = \sup \widetilde{g}(T) = \sup \widetilde{f}(E)$ y como $c \in \widetilde{g}(T)$ tomando $\mathcal{U} = (-\infty, c]_{\,\widetilde{g}(T)}$ tenemos

$$\mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \quad \text{y} \quad c \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T).$$

Para demostrar que $(a, +\infty)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \in TO(<_{\widetilde{g}(T)})$, debemos probar que $\forall c \in (a, +\infty)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T) \ \exists \mathcal{U} \in TO(<_{\widetilde{g}(T)}) \ [c \in \mathcal{U} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}} \cap \widetilde{g}(T)]$ y la demostración es análoga al caso anterior tomando $\inf \widetilde{f}(E)$ en lugar de $\sup \widetilde{f}(E)$, invirtiendo las desigualdades y utilizando el Lema 2.6.

$ii)$ La demostración aparece de forma implícita en la demostración de $i)$, considerando que $\widetilde{g}(e) = \widetilde{f}(e)$ para todo $e \in E$.

$iii)$ Se demuestra por un razonamiento análogo al de $ii)$.

$\blacksquare$

Teorema 3.11 *Sea T un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) T *es segundo numerable,*

ii) existe una inmersión topológica de T *en* $\mathbb{R}$ *que preserva el orden,*

iii) T *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}$*,*

iv) T *es orden isomorfo a un subconjunto de* $\mathbb{R}$*.*

Demostración: Primero observemos que $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.
Por otro lado observemos que $ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo y así demostrar todas las equivalencias del teorema sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.

En efecto, sea $\widetilde{g} : (T, <_T) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), <)$ la función construida en el Lema 3.3. Por la Proposición 1.12 tenemos $\widetilde{g} : (T, TO(<_T)) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), TO(<_{\widetilde{g}(T)}))$ es un homeomorfismo que preserva el orden y usando el Lema 3.6 tenemos que $\widetilde{g} : (T, TO(<_T)) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), \mathcal{T}_{\widetilde{g}(T)})$ es un homeomorfismo que preserva el orden.

■

Observación 3.12 *Por último observemos que el Teorema 3.11 nos dice que todo conjunto ordenado y segundo numerable es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}$*, sin embargo no todos los subespacios de* $\mathbb{R}$ *son ordenados y el siguiente ejemplo ilustrará este hecho.*

Ejemplo 3.13 *Consideremos el conjunto* $Z = \{-1\} \cup (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$*. Demostraremos que no existe ningún orden lineal sobre* Z *cuya topología del orden sea igual a la topología del subespacio de* Z*. La demostración la haremos por reducción al absurdo.*
Supongamos que $\prec$ *es un orden lineal sobre* Z *tal que* $TO(\prec_Z) = \tau_Z$*, donde* τ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$ *(para esta demostración, la relación de los intervalos con sub-índice* Z *se refiere a la relación del nuevo orden* $\prec$*).*

Observemos que $M = Z\backslash\{-1\}$ *es conexo respecto a* τ_Z, *por lo tanto* M *es conexo respecto a* $TO(\prec_Z)$ *(pues* $TO(\prec_Z) = \tau_Z$*).*

Afirmación 3.14 $\forall z \in M(z \prec -1)$ *ó* $\forall z \in M(-1 \prec z)$.

En efecto, pues en caso contrario, es decir; si existieran $z_1, z_2 \in M$ *tales que* $z_1 \prec -1 \prec z_2$ *se tendría que* $(-\infty, -1)_Z$ *y* $(-1, +\infty)_Z$ *separarían a* M, *es decir;* M *sería un conjunto disconexo con lo cual llegaríamos a una contradicción (pues* M *es conexo) y así termina la prueba de la Afirmación 3.14.*
Ahora analicemos los casos posibles.

`CASO 1:` *Supongamos que* $M \prec \{-1\}$, *es decir;* $-1 = \max(Z, \prec)$.
Primero observemos que $\{-1\}$ *es abierto con respecto a* τ_Z *(pues* $\{-1\} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \cap Z \in \tau_Z$ *) y como* $\tau_Z = TO(\prec_Z)$ *tenemos que* $\{-1\} \in TO(\prec_Z)$, *es decir;* $\{-1\}$ *es abierto con respecto a* $TO(\prec_Z)$, *por lo tanto sabemos que existe un* $p \in M$ *tal que* $(p, -1]_Z = \{-1\} \in TO(\prec_Z)$ *y de aquí es claro que* $(p, -1)_Z = \emptyset$, *por lo tanto* $p = \max(M, \prec)$.
Observemos que si quitamos un punto de un intervalo abierto de $(\mathbb{R}, \tau)$ *obtenemos dos intervalos abiertos no vacíos y disjuntos de* $(\mathbb{R}, \tau)$, *y recordemos que todo intervalo abierto de* $(\mathbb{R}, \tau)$ *es conexo, por lo tanto tenemos que* $(0,1)\backslash\{p\} = M\backslash\{p\} = A \cup B$, *donde* A *y* B *son dos intervalos abiertos no vacíos, disjunto y conexos de* $(\mathbb{R}, \tau)$.

Afirmación 3.15 $A \prec B$ *ó* $B \prec A$.

En efecto, pues de lo contrario, es decir; si existieran $a_1, a_2 \in A$ *y* $b \in B$ *tales que* $a_1 \prec b \prec a_2$, *de aquí se tendría que* $(-\infty, b)_Z$ *y* $(b, +\infty)_Z$ *separarían a* A, *es decir; A sería un conjunto disconexo con lo cual llegaríamos a una contradicción (pues* A *es un conjunto conexo). De forma análogo llegaríamos a una contradicción si suponemos que existen* $b_1, b_2 \in B$ *y* $a \in A$ *tales que* $b_1 \prec a \prec b_2$ *con lo cual terminaría la prueba de la Afirmación 3.15.*

Ahora supongamos que $A \prec B$, *entonces para todo* $b \in B$ *es claro que* $(b,p)_Z \subseteq B$. *Por otro lado tenemos que* $(b,-1)_Z = (b,p]_Z$ *(pues* $(p,-1)_Z = \emptyset$ *), por lo tanto* $(b,p]_Z$ *es abierto y como* $\{p\} \cup B = (b,p]_Z \cup B$ *tenemos* $\{p\} \cup B$ *es abierto en* M, *y como* $M = (\{p\} \cup B) \cup A$ *es claro que* $\{\{p\} \cup B, A\}$ *separan a* M, *por lo tanto* M *es un conjunto disconexo con lo cual llegaríamos a un contradicción pues* M *es un conjunto conexo.*

Análogamente, si suponemos que $B \prec A$, *entonces para todo* $a \in A$ *es claro que* $(a,p)_Z \subseteq A$. *Por otro lado tenemos que* $(a,-1)_Z = (a,p]_Z$ *(pues* $(p,-1)_Z = \emptyset$ *), por lo tanto* $(a,p]_Z$ *es abierto y como* $\{p\} \cup A = (a,p]_Z \cup A$ *tenemos* $\{p\} \cup A$ *es abierto en* M, *y como* $M = (\{p\} \cup A) \cup B$ *es claro que* $\{\{p\} \cup A, B\}$ *separan a* M, *por lo tanto* M *es un conjunto disconexo con lo cual llegaríamos a un contradicción pues* M *es un conjunto conexo.*

`CASO 2`: *Supongamos que* $\{-1\} \prec M$, *es decir;* $-1 = \text{mín}(Z,\prec)$.
Por un razonamiento análogo al del caso 1 llegaremos a una contradicción con lo cual terminaría la prueba en este ejemplo.

Capítulo 4

Espacios ordenados separables

En el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ consideremos el orden lexicográfico y denotemos por $\mathbb{R}_0$ al espacio topológico ordenado resultante. En este capítulo nuestro objetivo es demostrar que $\mathbb{R}_0$ es universal como espacio topológico ordenado y separable en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato. Para tal fin demostraremos es siguiente Teorema:

Teorema: *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) $(T, TO(<_T))$ *es separable,*

ii) *existe una inmersión topológica* h *de* $(T, TO^*(<_T))$ *en* $\mathbb{R}_0$ *que preserva el orden,*

iii) $(T, TO^*(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$*,*

iv) $(T, TO(<_T))$ *es orden isomorfo a un subconjunto de* $\mathbb{R}_0$*,*

v) $(T, TO^*(<_T))$ *es separable.*

Y como consecuencia inmediata del Teorema anterior obtenemos es siguiente resultado:

Corolario: *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato. Entonces* $(T, TO(<_T))$ *es separable si, y sólo si,* $(T, TO(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$.

Con el cual alcanzaríamos nuestro objetivo en este Capítulo.

La idea de la construcción de la inmersión topológica h es usar un subconjunto S de T tal que la topológia de S sea segundo numerable, de tal forma que podamos usar el Teorema 3.11 y hallar una inmersión topológica $\widetilde{g}$ de S en $\mathbb{R}$ que preserva el orden. Luego, para todo $x \in S$ definimos $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ y finalmente veremos que h puede ser extendida a todo T con las propiedades requeridas.
Ahora comenzaremos a demostrar los Lemas preliminares necesarios.

Lema 4.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}_0$. Entonces el espacio ordenado $(S, TO(<_S))$ es separable y el subespacio* $(S, \mathcal{T}_S)$ *también es separable.*

Demostración:
Si demostramos que $(S, \mathcal{T}_S)$ es separable, automáticamente obtenemos que $(S, TO(<_S))$ también lo es, pues $TO(<_S) \subseteq \mathcal{T}_S$.
Para demostrar que $(S, \mathcal{T}_S)$ es separable debemos probar que S posee un subconjunto denso y numerable, es decir; debemos probar que S posee un subconjunto numerable D tal que para todo $(x, y)_S \neq \emptyset$ con $x, y \in S$ se tiene $(x, y)_S \cap D \neq \emptyset$.
Para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ con $r_1 < r_2$ seleccionemos un punto (que denotaremos por P_{r_1,r_2}) en el intervalo $((r_1, 0), (r_2, 0))_S$ (si existe). Denotemos por

$$P = \{P_{r_1,r_2} : \ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, \ r_1 < r_2\},$$

$$\begin{aligned} J = \{a \in \mathbb{R} : \quad & (a, 0) \in S \text{ es un punto aislado en S por la izquierda} \\ & \text{o} \\ & (a, 1) \in S \text{ es un punto aislado en S por la derecha}\}. \end{aligned}$$

Sea D al conjunto formado por P, también por todos los puntos de la forma

(a, i), donde $i \in \{0, 1\}$ y $a \in J$ y, por el máximo y el mínimo elemento de S (si existen).
Primero demostraremos que D es un conjunto numerable. Es claro que P es un conjunto numerable. Por lo tanto, sólo nos restaría por demostrar que J es un conjunto numerable. La demostración la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que J no es numerable. Denotemos por

$$B = \{a \in J : \ a \text{ es punto de acumulación de } J\}.$$

Afirmación 4.2 B *es no numerable.*

La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que B es numerable. Observemos que todo punto en el conjunto $J \backslash B$ es un punto aislado. Por lo tanto para todo $a \in J \backslash B$ existirían $r_a, s_a \in \mathbb{Q}$ tal que $(r_a, s_a)_{\mathbb{R}} = \{a\}$.
Denotemos por

$$I = \{(r_a, s_a)_{\mathbb{R}} : \ r_a, s_a \in \mathbb{Q} \ \wedge \ (r_a, s_a)_{\mathbb{R}} = \{a\}\},$$

de donde es claro que I es un conjunto numerable.
Ahora si consideremos la función $\varphi : J \backslash B \longrightarrow I$ dada por $\varphi(a) = (r_a, s_a)_{\mathbb{R}}$. Es fácil verificar que φ es una función biyectiva, con lo cual llegaríamos a una contradicción pues es claro que φ es una función que tiene como domínio un conjunto no numerable y como rango un conjunto numerable. Así termina la prueba de la Afirmación 4.2.
Ahora denotemos por B_i al conjunto de todos los puntos de acumulación por izquierda contenidos en B y B_d al conjunto de todos los puntos de acumulación por derecha contenidos en B. Es claro que $B = B_i \cup B_d$.

Afirmación 4.3 $B_i \cap B_d \neq \emptyset$.

La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $B_i \cap B_d = \emptyset$. Como B es no numerable sabemos que B_i ó B_d es no numerable. Sin perdida de generalidad supongamos que B_i es no numerable.

Observemos que todo $a \in B_i$ es punto de acumulación por la izquierda y no por la derecha. Por la tanto, para todo $a \in B_i$ existe $\delta_a > 0$ tal que $(a, a+\delta_a)_{\mathbb{R}} = \emptyset$. Por otro lado es claro que para todo $\beta > 0$ se tiene $(a-\beta, a)_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. De estos dos hechos se sigue que para todo $a \in B_i$ existe $\beta_a > 0$ tal que los intervalos $(a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ son disjuntos dos a dos. Denotemos por

$$A = \{(a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}} :\ a \in B_i \ \wedge\ (a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}} \neq \emptyset \text{ son disjuntos dos a dos}\}.$$

Por otro lado (como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$) para todo $(a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}} \in A$ tomemos un único $r_a \in \mathbb{Q}$ tal que $r_a \in (a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}}$. Denotemos por

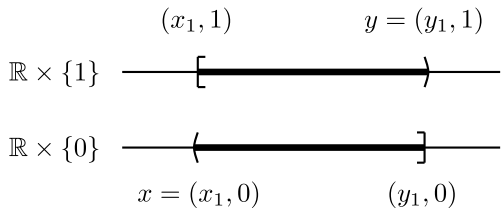
$$I = \{r_a :\ r_a \in \mathbb{Q} \ \wedge\ r_a \in (a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}}\}$$

Es claro que I es un conjunto numerable y que A es un conjunto no numerable. Ahora si consideremos la función $\varphi : A \longrightarrow I$ dada por $\varphi[(a-\beta_a, a)_{\mathbb{R}}] = r_a$. Es fácil verificar que φ es una función biyectiva, con lo cual llegaríamos a una contradicción pues es claro que φ es una función que tiene como domínio un conjunto no numerable y como rango un conjunto numerable. Así termina la prueba de la Afirmación 4.3.

Para finalizar observemos que de las afirmaciones 4.2 y 4.3 tenemos que existe $a \in B$ tal que $a \in B_i \cap B_d$, es decir; existe un punto a de acumulación por la izquierda y por derecha contenido en B, con lo cual llegaríamos a una contradicción pues dicho elemento no puede estar en J. Así concluimos que J es numerable.

Por útimo veamos que D es denso en S. Sean $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}_0$ con $x <_{lex} y$ tal que $(x, y)_S \neq \emptyset$. Analizaremos sólo uno de los casos posibles y el resto de los casos se analizan de forma análoga.

Si $x = (x_1, 0)$ y $y = (y_1, 1)$. Como $x <_{lex} y$ es claro que $x_1 \leq y_1$, sin embargo no es posible que $x_1 = y_1$ pues en caso contrario se tendría que $(x, y)_S = \emptyset$ lo cual junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto tiene que cumplirse que $x_1 < y_1$. Gráficamente tenemos:



Observemos que:

i) Si $(x,y)_S \backslash \{(x_1,1),(y_1,0)\} \neq \emptyset$.
Tomemos $x_1 < r_1 < r_2 < y$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. En este caso sabemos que existe $P_{r_1,r_2} \in P \subseteq D$ tal que $P_{r_1,r_2} \in ((r_1,0),(r_2,0))_S \subseteq (x,y)_S$.

ii) Si $(x,y)_S = \{(x_1,1),(y_1,0)\}$.
En este caso es claro que $(x_1,1),(y_1,0) \in J \subseteq D$.

■

Lema 4.4 *Sea* $(T,<_T)$ *un espacio linealmente ordenado y separable. Entonces existe un isomorfismo de orden* $h:(T,<_T) \longrightarrow (A,<_{lex})$*, donde* $A \subseteq \mathbb{R}\times\{0,1\}$ *y* $<_{lex}$ *es la relación de orden lexicográfico sobre* $\mathbb{R}\times\{0,1\}$.

Demostración: Sea $(T,<_T)$ un espacio linealmente ordenado y separable. Denotemos por E_0 a un subconjunto denso y numerable de T. Sea

$$\begin{aligned} E = \{ \; & x \in T : x \in E_0 \text{ ó } x \text{ es un sucesor inmediato o un predecesor inmediato} \\ & \text{de un elemento de } E_0 \; \}. \end{aligned}$$

Es claro que E es un subconjunto denso y numerable de T. Sea

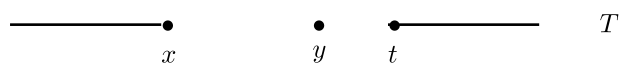
$$T_1 = \{t \in T : t \text{ tiene un predecesor inmediato pero no un sucesor inmediato en } T\}$$

y $T_2 = T \backslash T_1$.
Primero veamos algunas afirmaciones que nos serán de gran utilidad para la demostración de Lema.

Afirmación 4.5 *Si* $(x,y)_T = \emptyset$ *y* $x \in T,\ y \in E$. *Entonces* $x \in E$.

En efecto, analicemos los casos posibles:

$i)$ Si $y \in E \backslash E_0$.
Observemos que bajo estas hipótesis no puede existir $t \in E_0$ tal que $(y,t)_T = \emptyset$, pues en caos contrario se tendría que $(x,t)_T = \{y\}$. Gráficamente tendríamos:



Como $(x,t)_T \neq \emptyset$ y E_0 es un conjunto denso en T, existe $e \in E_0$ tal que $e \in (x,t)_T = \{y\}$. De aquí es claro que $e = y$. Por lo tanto $y \in E_0$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues $y \in E \backslash E_0$.
Por lo tanto tienen que cumplirse que existe $t \in E_0$ tal que $(t,y)_T = \emptyset$. De este hecho, necesariamente tiene que cumplirse que $t = x$, pues en caso contrario se tendría $x <_T t$ ó $t <_T x$.

$i.1)$ Si $x <_T t$, como $t <_T y$ se tendría $(x,y)_T \neq \emptyset$ con lo cual, junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción.

$i.2)$ Si $t <_T x$, como $x <_T y$ se tendría $(t,y)_T \neq \emptyset$ con lo cual llegaríamos a una contradicción pues $(t,y)_T = \emptyset$.

Así concluimos que $x = t \in E_0 \subseteq E$.

$ii)$ Si $y \in E_0$.
Por hipótesis tenemos $(x,y)_T = \emptyset$ y como $y \in E_0$ es claro que $x \in E$.
Con lo cual termina la prueba de la Afirmación 4.5.

Afirmación 4.6 *Si* $y \in T_1 \cap E,\ x \in T$ *y* $(x, y)_T = \emptyset$*. Entonces* $x \in T_2 \cap E$*.*

En efecto, como $(x, y)_T = \emptyset$ y $y \in E$, por la afirmación 4.5 tenemos $x \in E$. Por otra parte, como $(x, y)_T = \emptyset$ es claro que $x \in T_2$. Así concluimos que $x \in T_2 \cap E$, con lo cual termina la prueba de la Afirmación 4.6.

A continuación demostraremos que T_2 es un espacio segundo numerable. Para ello, por el Lema 3.1 basta probar que T_2 es un espacio separable y que existe a lo sumo una cantidad numerable de sucesores y de predecesores inmediatos en T_2.

Primero demostraremos que T_2 es separable y esto es equivalente a demostrar que T_2 posee un subconjunto denso y numerable.

Denotemos por $S = T_2 \cap E$ y

$$A = \{(u, w)_{T_2} : u, w \in T_2,\ (u, w)_{T_2} \neq \emptyset\ \wedge\ (u, w)_{T_2} \cap S = \emptyset\}.$$

De cada intervalo de A tomemos un elemento y se lo añadimos al conjunto S. También añadiremos el primer y el útimo elemento de T_2 (si existen). Denotemos por D al conjunto resultante.

Primero demostraremos que D es un conjunto denso en T_2. En efecto, sean $u, w \in T_2$ tales que $(u, w)_{T_2} \neq \emptyset$. De aquí es claro que $(u, w)_T \neq \emptyset$ y como E es un conjunto denso y numerable en T sabemos que existe $e \in E$ tal que $e \in (u, w)_T$. Ahora analicemos los casos posibles.

`CASO 1:` Si $e \in T_2$.

Como $u <_T e <_T w$ y $e \in T_2$ es claro que $e \in (u, w)_{T_2}$. Luego, como $e \in S$ es claro que $(u, w)_{T_2} \cap S \neq \emptyset$. Por lo tanto $(u, w)_{T_2} \cap D \neq \emptyset$.

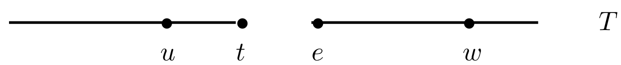
`CASO 2:` Si $e \in T_1$.

En este caso es posible que $(u, w)_{T_2} \cap S = \emptyset$. Sin embargo, sabemos que existe $z \in D$ y $z \in (u, w)_{T_2}$, es decir; $(u, w)_{T_2} \cap D \neq \emptyset$.

Ahora demostraremos que D es un conjunto numerable. Como S es un conjunto numerable, basta demostrar que A es un conjunto numerable. Para ello, primero veamos el siguiente resultado.

Afirmación 4.7 *Si* $(u,w)_{T_2} \cap S = \emptyset$, *entonces* $u \in S$.

La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $u \notin S$. Como $(u,w)_{T_2} \neq \emptyset$ tenemos que $(u,w)_T \neq \emptyset$. Por lo tanto sabemos que existe $e \in E$ tal que $e \in (u,w)_T$. En este caso es claro que $e \notin T_2$ pues en caso contrario, por el mismo razonamiento hecho en el Caso 1 llegaríamos a una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto $e \in T_1$. De este hecho se sigue que existe $t \in T$ tal que $(t,e)_T = \emptyset$. Además es claro que $t \in T_2$. Gráficamente tendríamos:



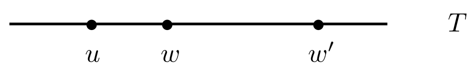
Es claro que $t \in [u,w)_{T_2}$. Por otro lado, como $e \in T_1 \cap E$ y $(t,e)_T = \emptyset$, por la afirmación 4.6 tenemos $t \in S$ y como $u \notin S$ es claro que $t \neq u$. De este hecho se sigue que $t \in (u,w)_{T_2}$. Por lo tanto $t \in (u,w)_{T_2} \cap S$ con lo cual junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto tiene que cumplirse que $u \in S$, con lo cual termina la prueba de la Afirmación 4.7.

Afirmación 4.8 *El conjunto*

$$A = \{(u,w)_{T_2} : u,w \in T_2,\ (u,w)_{T_2} \neq \emptyset \ \wedge \ (u,w)_{T_2} \cap S = \emptyset\}$$

es numerable.

Para demostrar que A es numerable, basta demostrar que la función que envía a cada intervalo $(u,w)_{T_2} \in A$ en $u \in S$ es inyectiva y esto es equivalente a demostrar que para todo $u \in S$ y $(u,w)_{T_2}, (u,w')_{T_2} \in A$ se tiene $(u,w)_{T_2} = (u,w')_{T_2}$.
La prueba la haremos por reducción al absurdo.
Sean $u \in S$ y $(u,w)_{T_2}, (u,w')_{T_2} \in A$. Supongamos que $(u,w)_{T_2} \neq (u,w')_{T_2}$ y sin perdida de generalidad supongamos que $w <_T w'$. Gráficamente tendríamos:



Como $(w,w')_{T_2} \subseteq (u,w')_{T_2}$ y $(u,w')_{T_2} \cap S = \emptyset$ tenemos $(w,w')_{T_2} \cap S = \emptyset$ y por la afirmación 4.7 tendríamos $w \in S$. Luego, como $w \in (u,w')_{T_2}$ tendríamos que $(u,w')_{T_2} \cap S \neq \emptyset$ lo cual junto con la hipótesis llegaríamos a una contradicción. Por un razonamiento análogo al anterior llegaríamos a una contradicción si suponemos que $w' <_T w$, con lo cual terminaría la prueba de la afirmación 4.8.

Ahora demostraremos que existe a lo sumo una cantidad numerable de sucesores y de predecesores inmediatos en T_2.
Sean $u, w \in T_2$ tal que $(u,w)_{T_2} = \emptyset$. Es fácil demostrar que en T_2, w es el único sucesor inmediato de u. Por lo tanto demostrando que existe a lo sumo una cantidad numerable de predecesores inmediatos en T_2, automáticamente estaríamos demostrando que que existe a lo sumo una cantidad numerable de sucesores inmediatos en T_2. En efecto, analicemos los caso posibles:

`CASO I`: Si $(u,w)_T = \emptyset$.
Como $(u,w)_T = \emptyset$, para que $w \in T_2$, debe existir un $t \in T$ tal que $(w,t)_T = \emptyset$. De este hecho es claro que $(u,t)_T = \{w\}$. Por lo tanto $(u,t)_T \neq \emptyset$ y como E es un conjunto denso en T sabemos que existe $e \in E$ tal que $e \in (u,t)_T = \{w\}$. De aquí es claro que $e = w$. Por lo tanto $w \in E$.
Por otro lado, como $(u,w)_T = \emptyset$ y $w \in E$, por la afirmación 4.5 tenemos que $u \in E$.

`CASO II`: Si $(u,w)_T \neq \emptyset$.
Como E es un conjunto denso en T, sabemos que existe $e \in E$ tal que $e \in (u,w)_T$.
Observemos que no es posible que $e \in T_2$, pues en caso contrario, como $u <_T e <_T w$ y $e \in T_2$ se tendría $e \in (u,w)_{T_2}$ con lo cual junto con la hipótesis

llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto tiene que cumplirse que $e \in T_1$. Por otro lado, como $(u,w)_{T_2} = \emptyset$ tenemos $(u,w)_{T_2} \cap S = \emptyset$ y por la afirmación 4.7 del caso 2 tenemos que $u \in S$.

Sea $\widetilde{g} : (T_2, <_T) \longrightarrow (\widetilde{g}(T_2), <)$ la función construida en la demostración de Lema 3.3. Extenderemos $\widetilde{g}$ a una función h de T en $\mathbb{R}_0$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} (\widetilde{g}(x), 0)\,, & \text{sí} \quad x \in T_2 \\ \\ (\widetilde{g}(t), 1)\,, & \text{sí} \quad x \in T_1 \quad \text{y} \quad (t,x)_T = \emptyset \end{cases}$$

Afirmación 4.9 *h es una función que preserva el orden de $(T, <_T)$ en $(\mathbb{R}_0, <_{lex})$.*

En efecto, sea $x, y \in T$ tales que $x <_T y$. Analicemos los caso posibles:

i) Si $x, y \in T_2$ es claro que $\widetilde{g}(x) < \widetilde{g}(y)$. Por lo tanto

$$h(x) = (\widetilde{g}(x), 0) <_{lex} (\widetilde{g}(y), 0) = h(y).$$

ii) Si $x, y \in T_1$. En este caso sabemos que existen $t_1, t_2 \in T_2$ tales que $(t_1, x)_T = \emptyset$ y $(t_2, y)_T = \emptyset$. Gráficamente tenemos:

de donde es claro que $t_1 <_T x \leq_T t_2 <_T y$. Por lo tanto $t_1 <_T t_2$ y como $t_1, t_2 \in T_2$ es claro que $\widetilde{g}(t_1) < \widetilde{g}(t_2)$. Por lo tanto

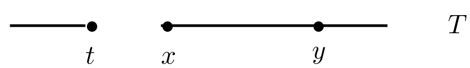
$$h(x) = (\widetilde{g}(t_1), 1) <_{lex} (\widetilde{g}(t_2), 1) = h(y).$$

iii) Si $x \in T_2$ y $y \in T_1$. En este caso sabemos que existe $t \in T_2$ tal que $(t, y)_T = \emptyset$. Gráficamente tenemos:

De aquí es claro que $x \leq_T t$ y como $x, t \in T_2$ tenemos $\widetilde{g}(x) \leq \widetilde{g}(t)$. De este hecho se sigue que

$$h(x) = (\widetilde{g}(x), 0) <_{lex} (\widetilde{g}(t), 1) = h(y).$$

iv) Si $y \in T_2$ y $x \in T_1$. En este caso sabemos que existe $t \in T_2$ tal que $(t, x)_T = \emptyset$. Gráficamente tenemos:



De aquí es claro que $t <_T y$ y como $t, y \in T_2$ tenemos $\widetilde{g}(t) < \widetilde{g}(y)$. De este hecho se sigue que

$$h(x) = (\widetilde{g}(t), 1) <_{lex} (\widetilde{g}(y), 0) = h(y).$$

Por último es fácil observar que la función $h : (T, <_T) \longrightarrow (h(T), <_{lex})$ es un isomorfismo de orden. ■

Lema 4.10 *Sea T_2 un espacio linealmente ordenado y segundo numerable, y sea $\widetilde{g} : (T_2, <_{T_2}) \longrightarrow (\widetilde{g}(T_2), <)$ el isomorfismo de orden de la función construida en el Lema 3.3 y $h : (T, <_T) \longrightarrow (h(T), <_{lex})$ el isomorfismo de orden de la función construida en el Lema 4.4. Entonces*

i) Para todo $v \in \mathbb{R}$ y todo $y \in T_2$ con $\widetilde{g}(y) < v$ existe $e \in T_2$ con $\widetilde{g}(y) < \widetilde{g}(e)$ tal que

$$(-\infty, h(e))_{h(T)} \subseteq (-\infty, (v, 0))_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

ii) Para todo $v \in \mathbb{R}$ *y todo* $x \in T_2$ *con* $v < \widetilde{g}(x)$ *existe* $e \in T_2$ *con* $\widetilde{g}(e) < \widetilde{g}(x)$ *tal que*

$$(h(e), +\infty)_{h(T)} \subseteq ((v, 0), +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

Demostración:

i) Sean $v \in \mathbb{R}$ y $y \in T_2$ tal que $\widetilde{g}(y) < v$. Por la parte *ii)* del Lema 3.6 sabemos que existe $e \in T_2$ tal que $\widetilde{g}(y) < \widetilde{g}(e)$ y

$$\{\widetilde{g}(w) \in \widetilde{g}(T_2) : \widetilde{g}(w) < \widetilde{g}(e)\} \subseteq \{\widetilde{g}(w) \in \widetilde{g}(T_2) : \widetilde{g}(w) < v\}$$

y esto es equivalente a decir que

$$\{w \in T_2 : \widetilde{g}(w) < \widetilde{g}(e)\} \subseteq \{w \in T_2 : \widetilde{g}(w) < v\}.$$

De aquí obtenemos

$$\{w \in h(T) : w <_{lex} (\widetilde{g}(e), 0)\} \subseteq \{w \in h(T) : w <_{lex} (v, 0)\},$$

es decir;

$$(-\infty, h(e))_{h(T)} \subseteq (-\infty, (v, 0))_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

ii) Sean $v \in \mathbb{R}$ y $x \in T_2$ tal que $v < \widetilde{g}(x)$. Por la parte *iii)* del Lema 3.6 sabemos que existe $e \in T_2$ tal que $\widetilde{g}(e) < \widetilde{g}(x)$ y

$$\{\widetilde{g}(w) \in \widetilde{g}(T_2) : \widetilde{g}(e) < \widetilde{g}(w)\} \subseteq \{\widetilde{g}(w) \in \widetilde{g}(T_2) : v < \widetilde{g}(w)\}$$

y esto es equivalente a decir que

$$\{w \in T_2 : \widetilde{g}(e) < \widetilde{g}(w)\} \subseteq \{w \in T_2 : v < \widetilde{g}(w)\}.$$

De aquí obtenemos

$$\{w \in h(T) : (\widetilde{g}(e), 0) <_{lex} w\} \subseteq \{w \in h(T) : (v, 0) <_{lex} w\},$$

es decir;

$$(h(e), +\infty)_{h(T)} \subseteq ((v, 0), +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

■

Lema 4.11 *Sea T un espacio topológico linealmente ordenado y separable, y sea $h : (T, <_T) \longrightarrow (h(T), <_{lex})$ el isomorfismo de orden de la función construida en el Lema 4.4.*

i) Si $x \in T$ no tiene predecesor inmediato en T y x no es el máximo ni el mínimo elemento en T, entonces

$$\{w \in h(T) : w \leq_{lex} h(x)\} = (-\infty, h(x)]_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

ii) Si $x \in T$ tiene predecesor inmediato $y \in T$ pero no tiene sucesor inmediato en T, y x no es el máximo elemento en T, entonces

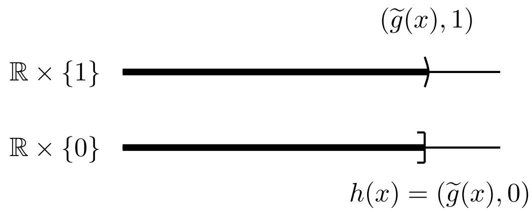
$$\{w \in h(T) : h(x) \leq_{lex} w\} = [h(x), +\infty)_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

iii) Si $x \in T$ tiene predecesor inmediato $y \in T$ y también sucesor inmediato $t \in T$ en T, entonces

$$\{h(x)\} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

Demostración:

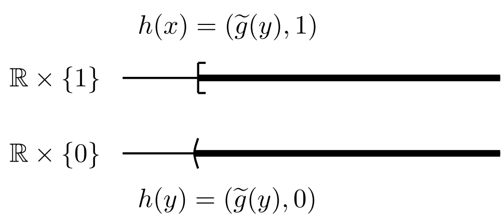
i) Observemos que $x \in T_2$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Gráficamente tenemos:



Como $x \in T$ no tiene predecesor inmediato y h es un isomorfismo de orden tenemos que $h(x)$ tampoco tiene predecesor inmediato. Por lo tanto es claro que

$$(-\infty, h(x)]_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

ii) Como $x \in T_1$ sabemos que existe $y \in T_2$ tal que $(y, x)_T = \emptyset$. Observemos que $h(x) = (\widetilde{g}(y), 1)$ y $h(y) = (\widetilde{g}(y), 0)$. Gráficamente tenemos:



Como $(h(y), h(x))_{\mathbb{R}_0} = \emptyset$ tenemos

$$[h(x), +\infty)_{h(T)} = (h(y), +\infty)_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

iii) En este caso es claro que $(y, t)_T = \{x\}$ y como h es un isomorfismo de orden tenemos

$$\{h(x)\} = (h(y), h(t))_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)}).$$

■

Lema 4.12 *Sea* T *un espacio topológico linealmente ordenado y separable, y sea* $h : (T, <_T) \longrightarrow (h(T), <_{lex})$ *el isomorfismo de orden construído en el Lema 4.4. Entonces* $TO^*(<_{h(T)}) = \mathcal{T}_{h(T)}$.

Demostración:

Afirmación 4.13 $TO^*(<_{h(T)}) \subseteq \mathcal{T}_{h(T)}$.

Como $TO(<_{h(T)}) \subseteq \mathcal{T}_{h(T)}$, para demostrar esta afirmación sólo nos faltaría demostrar que $(-\infty, h(e)]_{h(T)} \in \mathcal{T}_{h(T)}$, para todo $h(e) \in h(T)$ sin predecesor inmediato en $h(T)$.
En efecto, sea $h(e) \in h(T)$ tal que $h(e)$ no tiene predecesor inmediato en $h(T)$. Como h es un isomorfismo de orden, es fácil verificar que $e \in T_2$. Por lo tanto $h(e) = (\widetilde{g}(e), 0)$ y $(\widetilde{g}(e), 1) \in \mathbb{R}_0$. Ahora observemos que $((\widetilde{g}(e), 0), (\widetilde{g}(e), 1))_{\mathbb{R}_0} = \emptyset$ y de este hecho es claro que

$$(-\infty, h(e)]_{h(T)} = (-\infty, h(e)]_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) = (-\infty, (\widetilde{g}(e), 1))_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \in \mathcal{T}_{h(T)}$$

con lo cual termina la prueba de la afirmación 4.13.

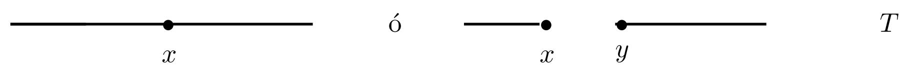
Afirmación 4.14 $\mathcal{T}_{h(T)} \subseteq TO^*(<_{h(T)})$.

Sea $a = (v, i)$, donde $i \in \{0, 1\}$ y $v \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$$(-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \in TO^*(<_{h(T)}).$$

Primero demostraremos que $(-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \in TO^*(<_{h(T)})$ y esto es equivalente a probar $\forall h(x) \in (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)\ \exists \mathcal{U} \in TO^*(<_{h(T)})\ [h(x) \in \mathcal{U} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)]$.
En efecto, sea $h(x) \in (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$ y analicemos los caso posibles.

`CASO 1`: Si $x \in T$ no tiene predecesor inmediato en T y x no es el máximo ni el mínimo elemento en T. Gráficamente tenemos:



donde $y \in T$ es el sucesor inmediato de $x \in T$ en T.
En este caso tenemos que $x \in T_2$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Como $h(x) <_{lex} a$ es claro que

$$\{w \in h(T) : w \leq_{lex} h(x)\} \subseteq \{w \in h(T) : w <_{lex} a\},$$

es decir;

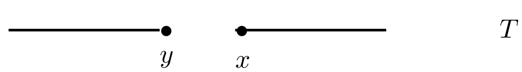
$$(-\infty, h(x)]_{h(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = (-\infty, h(x)]_{h(T)}$, por la parte $i)$ del Lema 4.11 tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 2`: Si $x \in T$ tiene predecesor inmediato $y \in T$ y x no es el máximo elemento en T. Analicemos los sub-casos posibles.

i) Si $x \in T$ no tiene sucesor inmediato en T. Gráficamente tenemos:



En este caso tenemos $x \in T_1$ y $y \in T_2$. Además $h(x) = (\widetilde{g}(y), 1)$. Como $(\widetilde{g}(y), 1) = h(x) <_{lex} a = (v, i)$ es claro que $\widetilde{g}(y) < v$. Luego, por la parte $i)$ del Lema 4.10 sabemos que existe $e \in T_2$ con $\widetilde{g}(y) < \widetilde{g}(e)$ (de aquí es claro que $h(x) = (\widetilde{g}(y), 1) <_{lex} (\widetilde{g}(e), 0) = h(e)$) tal que

$$(-\infty, h(e))_{h(T)} \subseteq (-\infty, (v, 0))_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

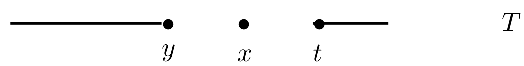
De este hecho se sigue que

$$h(x) \in (-\infty, h(e))_{h(T)} \subseteq (-\infty, (v,0))_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = (-\infty, h(e))_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

ii) Si $x \in T$ tiene sucesor inmediato $t \in T$ en T. Gráficamente tenemos:



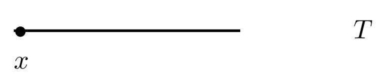
En este caso tenemos $x, y \in T_2$ y $t \in T$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Como $h(x) <_{lex} a$ es claro que

$$h(x) \in \{h(x)\} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = \{h(x)\}$, por la parte *iii*) del Lema 4.11 tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 3:` Si $x = \min T$. Gráficamente tenemos



Como $h(x) <_{lex} a$ es claro que

$$\{w \in h(T) : w \leq_{lex} h(x)\} \subseteq \{w \in h(T) : w <_{lex} a\},$$

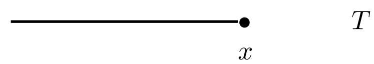
es decir;

$$(-\infty, h(x)]_{h(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

Por otro lado, como $x = \min T$ y h es un isomorfismo de orden tenemos $h(x) = \min h(T)$. De este hecho es claro que $h(x)$ no tiene predecesor inmediato. Por lo tanto $(-\infty, h(x)]_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)})$ y tomando $U = (-\infty, h(x)]_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 4:` Si $x = \max T$. Gráficamente tenemos



Como $h(x) <_{lex} a$ es claro que

$$\{w \in h(T) : w \leq_{lex} h(x)\} \subseteq \{w \in h(T) : w <_{lex} a\},$$

es decir;

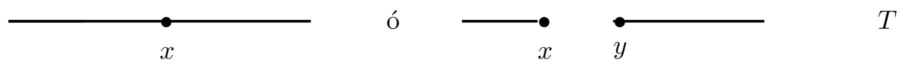
$$(-\infty, h(x)]_{h(T)} \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

Por otro lado, como $x = \max T$ y h es un isomorfismo de orden tenemos $h(x) = \max h(T)$. Por lo tanto $(-\infty, h(x)]_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)})$ y tomando $U = (-\infty, h(x)]_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

Ahora demostraremos que $(a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \in TO^*(<_{h(T)})$ y esto es equivalente a probar $\forall h(x) \in (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)\ \exists \mathcal{U} \in TO^*(<_{h(T)})\ [h(x) \in \mathcal{U} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)]$. En efecto, sea $h(x) \in (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$ y analicemos los caso posibles.

`CASO 1:` Si $x \in T$ no tiene predecesor inmediato en T y x no es el máximo ni el mínimo elemento en T. Gráficamente tenemos:



donde $y \in T$ es el sucesor inmediato de $x \in T$ en T.
En este caso tenemos que $x \in T_2$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Como $(v, i) = a <_{lex} h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$ es claro que $v < \widetilde{g}(x)$. Luego, por la parte $ii)$ del Lema 4.10 sabemos que existe $e \in T_2$ con $\widetilde{g}(e) < \widetilde{g}(x)$ (de aquí es claro que $h(e) = (\widetilde{g}(e), 0) <_{lex} (\widetilde{g}(x), 0) = h(x)$) tal que

$$(h(e), +\infty)_{h(T)} \subseteq ((v, 0), +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

De este hecho se sigue que

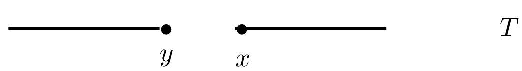
$$h(x) \in (h(e), +\infty)_{h(T)} \subseteq ((v, 0), +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T) \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = (h(e), +\infty)_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 2`: Si $x \in T$ tiene predecesor inmediato $y \in T$ y x no es el máximo elemento en T. Analicemos los sub-casos posibles.

$i)$ Si $x \in T$ no tiene sucesor inmediato en T. Gráficamente tenemos:



En este caso tenemos $x \in T_1$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(y), 1)$. Como $a <_{lex} h(x)$ es claro que

$$\{w \in h(T) : h(x) \leq_{lex} w\} \subseteq \{w \in h(T) : a <_{lex} w\},$$

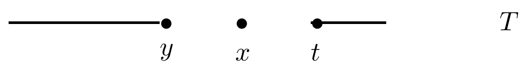
es decir;

$$[h(x),+\infty)_{h(T)} \subseteq (a,+\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = [h(x),+\infty)_{h(T)}$, por la parte ii) del Lema 4.11 tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a,+\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

ii) Si $x \in T$ tiene sucesor inmediato $t \in T$ en T. Gráficamente tenemos:



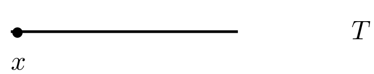
En este caso tenemos $x, y \in T_2$ y $t \in T$. Por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Como $a <_{lex} h(x)$ es claro que

$$h(x) \in \{h(x)\} \subseteq (a,+\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

y tomando $U = \{h(x)\}$, por la parte iii) del Lema 4.11 tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a,+\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 3`: Si $x = \min T$. Gráficamente tenemos



Como $a <_{lex} h(x)$ es claro que

$$\{w \in h(T) : h(x) \leq_{lex} w\} \subseteq \{w \in h(T) : a <_{lex} w\},$$

es decir;

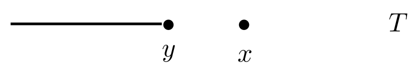
$$[h(x),+\infty)_{h(T)} \subseteq (a,+\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$$

Por otro lado, como $x = \min T$ y h es un isomorfismo de orden tenemos $h(x) = \min h(T)$. Por lo tanto $[h(x), +\infty)_{h(T)} \in TO^*(<_{h(T)})$ y tomando $U = [h(x), +\infty)_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

`CASO 4`: Si $x = \max T$.
Primero observemos que como $x = \max T$ y h es un isomorfismo de orden tenemos $h(x) = \max h(T)$. Ahora analicemos los sub-caso posibles:

i) Si $x \in T$ tiene predecesor inmediato $y \in T$.
Como $x = \max T$ es claro que x no tiene sucesor inmediato. Gráficamente tenemos:



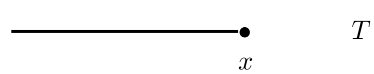
En este caso tenemos que $x \in T_1$ y $y \in T_2$, por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(y), 1)$ y $h(y) = (\widetilde{g}(y), 0)$. Es claro que $(h(y), h(x)]_{h(T)} = \{h(x)\}$ y como $h(x) \in (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T)$ tenemos

$$(h(y), h(x)]_{h(T)} = \{h(x)\} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

Luego, tomando $U = (h(y), h(x)]_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

ii) Si $x \in T$ no tiene predecesor inmediato. Gráficamente tenemos:



En este caso es claro que $x \in T_2$, por lo tanto $h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$. Como $(v, i) = a <_{lex} h(x) = (\widetilde{g}(x), 0)$ es claro que $v < \widetilde{g}(x)$. Por otro lado observemos que $x = \sup\{y \in T_2 : y <_T x\}$ y como $\widetilde{g}$ es un isomorfismo de orden tenemos $\widetilde{g}(x) = \sup\{\widetilde{g}(y) \in \widetilde{g}(T_2) : y <_T x\}$. Por lo tanto $\widetilde{g}(x)$ es un punto de acumulación por izquierda. De este hecho se sigue que existe $y \in T_2$ tal que $v < \widetilde{g}(y) < \widetilde{g}(x)$. De aquí es claro que

$$(v, i) <_{lex} (\widetilde{g}(y), 0) <_{lex} (\widetilde{g}(x), 0),$$

es decir; $a <_{lex} h(y) <_{lex} h(x)$. De este hecho es claro que

$$\{w \in h(T) : h(y) <_{lex} w \leq_{lex} h(x)\} \subseteq \{w \in h(T) : a <_{lex} w\},$$

es decir;

$$(h(y), h(x)]_{h(T)} \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T),$$

y tomando $U = (h(y), h(x)]_{h(T)}$ tenemos

$$U \in TO^*(<_{h(T)}) \quad \text{y} \quad h(x) \in U \subseteq (a, +\infty)_{\mathbb{R}_0} \cap h(T).$$

■

Teorema 4.15 *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado. Entonces son equivalentes:*

i) $(T, TO(<_T))$ *es separable,*

ii) *existe una inmersión topológica* h *de* $(T, TO^*(<_T))$ *en* $\mathbb{R}_0$ *que preserva el orden,*

iii) $(T, TO^*(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$*,*

iv) $(T, TO(<_T))$ *es orden isomorfo a un subconjunto de* $\mathbb{R}_0$*,*

v) $(T, TO^*(<_T))$ *es separable.*

Demostración: Primero observemos que $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow v) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.
Por otro lado observemos que $ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$ son inmediatas, por lo tanto para cerrar este ciclo y así demostrar todas las equivalencias del teorema sólo nos faltaría demostrar $i) \Rightarrow ii)$.

En efecto, sea $h : (T, <_T) \longrightarrow (h(T), <_{lex})$ la función construida en el Lema 4.4. Por la Proposición 1.13 tenemos $h : (T, TO^*(<_T)) \longrightarrow (h(T), TO^*(<_{\widetilde{g}(T)}))$ es un homeomorfismo que preserva el orden y usando el Lema 4.12 tenemos que $\widetilde{g} : (T, TO(<_T)) \longrightarrow (\widetilde{g}(T), \mathcal{T}_{h(T)})$ es un homeomorfismo que preserva el orden.

■

Observemos que si $(T, TO(<_T))$ es un espacio topológico ordenado en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato es fácil verificar que $TO(<_T) = TO^*(<_T)$, con lo cual obtenemos el siguiente resultado como consecuencia inmediata del Teorema 4.15.

Corolario 4.16 *Sea* $(T, TO(<_T))$ *un espacio topológico ordenado en el que cada elemento tiene un sucesor o un predecesor inmediato. Entonces* $(T, TO(<_T))$ *es separable si, y sólo si,* $(T, TO(<_T))$ *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbb{R}_0$.

■

Bibliografía

[1] James R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[2] F. S. Carter, *On order topologies and the real line*, Real Analysis Exchange 25 (1999-2000), no. 2,771-780.

[3] S. Willard. *General Topolopy.* Dover Publications, INC, 2004.