



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Facultad de Ciencias

Postgrado en Física Fundamental

Area de Caos y Sistemas Complejos

Modelos de dinámica social en redes coevolutivas

M. SC. JOSÉ LUIS HERRERA DIESTRA

Trabajo de grado presentado ante la Ilustre

Universidad de Los Andes

como requisito parcial para optar al título de:

Doctor en Física Fundamental

Tutor:

Dr. Mario Cosenza

Mérida, Julio de 2012

*Nature, it seems, is the popular game
for milliards and milliards and milliards
of particles playing their infinite game
of billiards and billiards and billiards*

PIET HEIN (1966)

La sabiduría consiste en conseguir los mejores fines con los mejores medios

FRANCIS HUTCHESON

De igual modo que una vela enciende a otra y así llegan a brillar millares de ellas, así enciende un corazón a otro y se iluminan miles de corazones.

LEV NICOLAIEVICH TOLSTOI

Agradecimientos

Esta tesis, no se podría haber llevado a cabo, sino hubiese sido por el apoyo de diversas instituciones y personas a las que quiero honrar a continuación.

Personas

A mi Tutor, quien ha sido y seguirá siendo un gran maestro. Quien a lo largo de todos estos años se ha convertido en un gran amigo.

A Kay Tucci, quien con mucha humildad y paciencia ha podido enseñarme a navegar por esos, a veces escabrosos, caminos de la herramienta computacional ISyS. Quien también se ha convertido en un gran amigo y colega.

A mi amigo, ex-compañero de cubículo Miguel Angel Escalona, quien con sus ánimos de aspirar grandezas, está llegando lejos. Muchas gracias por todas las conversaciones y momentos amenos que pudimos pasar, y a quien ahora le puedo decir que finalmente “he decidido empezar el doctorado”.

A todos mis compañeros caóticos; especialmente al camarada Gilberto Paredes, al pana Víctor Rodriguez, a Carlos Echeverria, y a Víctor Marquéz.

A mi esposa, quien definitivamente me ha tenido mucha paciencia y me ha dado mucho más de lo que he esperado, por sus interminables momentos conmigo, por su apoyo, por su amor.

A mi princesa Darelle, quien siempre ha sido un impulso para ser mejor. A mi hijo Luis David, quien me inspira cada día a enseñarle como ser un hombre de bien. A mis dos bebés, gracias por su amor.

Y por último, pero no por eso menos importante, gracias a Dios, ya que sin su ayuda y guía, estoy seguro que en este momento no estuviera escribiendo estas palabras. Tantas bendiciones han sido derramadas hacia mí y mi familia, que sólo puedo decir GRACIAS.

Instituciones

Al Ministerio de Ciencia y Tecnología (MCT), a través de la beca “Misión Ciencia”.

A la Universidad de Los Andes (ULA), y en especial al Postgrado en Física Fundamental. Al *Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico* (CDCHT) de la ULA y al *Centro de Estudios de Postgrado* (CEP). Al Departamento de Cálculo de la Facultad Ingeniería.

Resumen

Muchos sistemas en la Naturaleza se pueden describir como redes complejas de elementos dinámicos interactivos. En muchos casos, tanto las variables de estado de los elementos como las conexiones que representan las interacciones entre ellos, se influyen mutuamente y cambian en el tiempo. Estos sistemas se denominan *sistemas coevolutivos*. En esta Disertación se estudian varios aspectos de la relación entre la dinámica de los elementos y la topología de conectividad de una red. Como una aplicación de conceptos relacionados con redes complejas, se caracterizan las propiedades topológicas y se construyen los grafos de redes reales locales, provenientes de nuestro entorno en la Universidad de Los Andes: la red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería y la red de colaboraciones científicas del Grupo de Caos y Sistemas Complejos, del Centro de Física Fundamental. Se encuentra que la primera posee características de una red de pequeño mundo, y la segunda exhibe estructura modular o de comunidades. Se estudia la influencia de la topología de la red en un modelo de intercambio económico estratificado. Nuestros resultados sugieren que la reducción del tamaño de la vecindad de los agentes interactuantes puede favorecer una distribución más equitativa de riqueza en una economía estratificada.

Adicionalmente, se proponen dos modelos con dinámica coevolutiva: un modelo para la formación de opinión sujeto a campos globales, y un modelo para la propagación de epidemias tipo *SIR*. En el primer caso, se muestra que el comportamiento colectivo del sistema coevolutivo es similar bajo la influencia de un campo global externo o de un campo global autónomo. Este resultado muestra que bajo ciertas condiciones, el origen, externo o interno de una interacción global, es irrelevante; a nivel local los elementos no distinguen la naturaleza del campo. Se muestra que la dinámica coevolutiva es capaz de prevenir la homogenización del sistema impuesta por el campo global, a costa de la fragmentación de la red. En el caso del modelo epidemiológico (*SIR*) con dinámica coevolutiva, se observa que, a mayor tasa de transmisión de la enfermedad, mayor es el tiempo necesario para llegar al estado asintótico donde no hay nodos infectados. Este fenómeno se debe al proceso de recableado que ocurre en la red.

La contribución central de esta Tesis consiste en la construcción de un marco general con ingredientes mínimos para el estudio del fenómeno de coevolución en redes dinámicas. La coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos, el cambio de estado de los nodos, y el recableado de enlaces entre los nodos, los cuales pueden ocurrir con probabilidades independientes, P_r y P_c respectivamente. El proceso de recableado se analiza en términos de dos acciones básicas: desconexión y reconexión entre nodos, ambas basadas en un mecanismo de comparación de los estados de los nodos. Para un proceso de recableado dado, el comportamiento colectivo del sistema puede ser representado mediante cuatro parámetros. Para una dinámica simple de cambio de estado de los nodos, se encuentra que sólo las reconexiones entre nodos con estados similares pueden conducir a la fragmentación de la red. Se calculan las fronteras críticas para la transición de fragmentación en el espacio de parámetros (P_r, P_c) . Diferentes modelos coevolutivos pueden ser formulados mediante relaciones funcionales $P_c = f(P_r)$, que corresponden a diferentes curvas en el plano (P_r, P_c) . La ocurrencia de transiciones de fragmentación de la red, así como de transiciones de recombinación, pueden ser predichas utilizando nuestro esquema. En cierta región de parámetros, se encuentra un régimen donde la red exhibe estructura de comunidades. Estas estructuras corresponden a un estado supertransiente de la red, cuya persistencia en el tiempo aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. Nuestros resultados muestran que la dinámica coevolutiva puede explicar la emergencia de redes de comunidades, las cuales son ubicuas en la Naturaleza.

Índice

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Introducción	1
2. Redes Complejas.	7
2.1. Conceptos básicos.	8
2.2. Modelos básicos de redes complejas.	11
2.2.1. Redes con estructura de comunidad.	15
2.3. Investigación de redes reales locales.	15
2.3.1. Red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería.	17
2.3.2. Red de colaboraciones científicas (caóticos).	18
3. Efecto de la topología en un modelo de interacción económica estratificada	20
3.1. El modelo	21
3.2. Competencia entre interacciones locales y globales.	30
4. Sistemas Dinámicos Coevolutivos	33
4.1. Modelo de redes dinámicas adaptativas.	35
4.2. Transición de fase en la coevolución de redes y opiniones.	38
5. Modelos de sistemas coevolutivos	44
5.1. Un modelo coevolutivo de formación de opinión con campos globales.	44
5.2. Modelo de epidemias en redes coevolutivas.	49
6. Un modelo general para sistemas dinámicos coevolutivos	55

6.1. Proceso de recableado	56
6.2. Coevolución generalizada	58
7. Conclusiones	70
Bibliografía	74
Publicaciones	81

Para las personas creyentes, Dios está al principio. Para los científicos, está al final de todas sus reflexiones.

MAX PLANCK (1858-1947)



Introducción

El estudio de los comportamientos colectivos, o de las propiedades macroscópicas emergentes, tanto espaciales como temporales, en sistemas de elementos dinámicos no lineales interactivos, es objeto de mucho interés en la literatura científica contemporánea [1, 2]. Las observaciones recientes de comportamientos colectivos ordenados que surgen en una gran variedad de estos sistemas indican que estos comportamientos presentan características universales, las cuales no pueden derivarse a partir del conocimiento de las propiedades de los elementos constituyentes, ni mediante consideraciones estadísticas convencionales. Fenómenos como la formación espontánea de estructuras, organización y jerarquización, patrones espaciales, sincronización y oscilaciones colectivas, ondas espirales, segregación y diferenciación, formación y crecimiento de dominios y de interfases, etc., son ejemplos de procesos de auto-organización que ocurren en diversos contextos, tales como sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc. Avances teóricos, computacionales y experimentales en este campo están contribuyendo aceleradamente al surgimiento de una descripción unificada de la dinámica de estos sistemas. El concepto general de sistemas complejos se ha aplicado a estos conjuntos de elementos interactivos capaces de generar estructuras o funciones globales ausentes a nivel local [3–7].

El estudio de sistemas complejos ha irrumpido como un tema de enorme interés común entre científicos y profesionales de diversas especialidades, incluyendo las ciencias humanas, dando lugar a un intenso proceso de interdisciplinaridad y colaboración poco usual en épocas pasadas, y que extiende y solapa las fronteras de las ciencias tradicionales [8]. El empleo de conceptos y técnicas surgidas del estudio de sistemas complejos ha demostrado ser capaz de abordar problemas fuera de las fronteras tradicionales de disciplinas establecidas.

En el terreno de las aplicaciones de los conceptos de sistemas complejos a sistemas sociales, esta frontera de la ciencia contemporánea ha sido denominada *Sociodinámica* o *Sociofísica* [9]. En particular, el paradigma de sistemas complejos en el contexto de

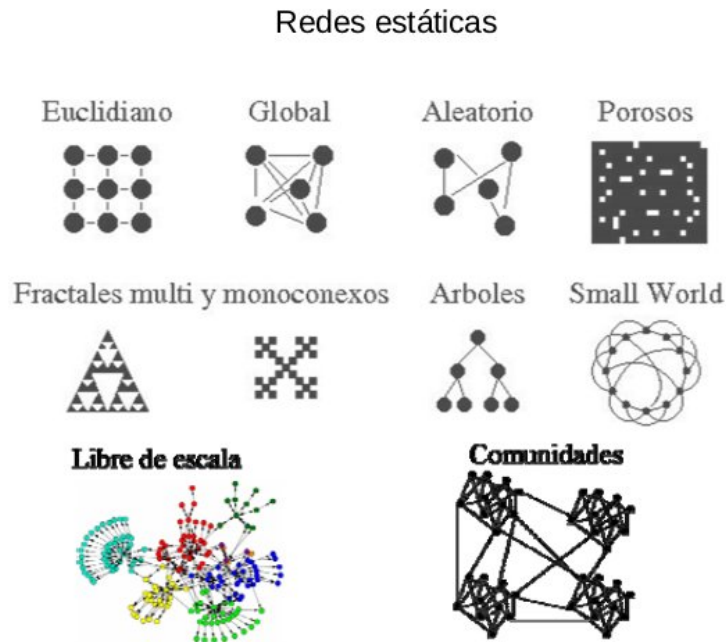
sistemas sociales supone que hay estructuras colectivas que emergen de las interacciones entre los agentes del sistema.

La investigación de las interrelaciones entre los elementos en sistemas complejos ha revelado la existencia de redes (*networks*) de conectividad subyacentes en todos estos sistemas, las cuales poseen propiedades y estructuras universales [10]. Se ha encontrado recientemente que sistemas tan diversos como la World Wide Web, Internet, redes de telecomunicaciones, propagación de epidemias y de virus informáticos, interacciones sociales, transacciones económicas, redes de distribución de bienes y servicios, corporaciones económicas, colonias de insectos, flujos metabólicos en células, neuronas en el cerebro, sistemas físicos, fisiológicos, evolutivos, etc., presentan estructuras de redes cuyas propiedades estadísticas y dinámicas son similares [11].

El estudio de las propiedades topológicas o de conectividad de las redes se remonta al famoso problema de los puentes de Königsberg, investigado por Leonard Euler en 1736, lo cual dio origen a la teoría de grafos [12]. Un grafo se define por un conjunto de nodos o nodos y un conjunto de conexiones entre ellos. El número de conexiones que posee un nodo se denomina el grado de ese nodo. El análisis de grafos se ha convertido en una herramienta crucial para entender el funcionamiento de las redes observadas en muchos sistemas complejos. El análisis de las redes sociales comenzó en la década de 1930 y se ha convertido en los últimos años en uno de los tópicos más activos de la investigación científica [13, 14]. El aumento en el poder de las computadoras y el acceso a la información digital ha provisto a los investigadores de una gran cantidad de datos y recursos computacionales para procesar y analizar estos datos. Como consecuencia, el tamaño de las redes reales que se pueden procesar actualmente ha crecido considerablemente, alcanzando los millones de elementos. La necesidad de manejar tan grandes cantidad de unidades ha contribuido al desarrollo de nuevas técnicas para analizar redes [14–19].

En general, los grafos que representan a los sistemas reales no son regulares; es decir, no tienen forma de mallas euclidianas; son objetos donde el orden coexiste con el desorden. El paradigma de un grafo desordenado es la red o grafo aleatorio, introducido por Paul Erdős y Albert Rényi [20]. En una red aleatoria, la probabilidad de que exista una conexión o enlace entre un par de nodos o vértices es igual para todos los posibles pares, y la distribución de enlaces entre los nodos tiene un valor medio bien definido. Las redes reales muestran inhomogeneidades, las cuales revelan un cierto nivel de orden y de organización. Se ha encontrado que sistemas muy diversos comparten una estructura de red de pequeño mundo (*small-world network*) [21], en la cual coexisten conexiones de corto y de largo alcance, tales que la distancia media entre nodos es mucho menor que el tamaño del sistema. La distribución de probabilidad de los grados es ancha, con una cola que usualmente sigue una ley de potencia: coexistencia de muchos nodos que poseen grado muy bajo con pocos nodos que poseen grado alto. Esta estructura se denomina red libre de escala (*scale-free network*) [22]. Las propiedades topológicas de las redes de pequeño mundo y de las redes libres de escala han sido bien comprendidas en los últimos años [10]. Recientemente, se ha descubierto que en muchas redes reales la distribución de enlaces es inhomogénea tanto global como localmente, con altas concentraciones de

enlaces entre grupos de nodos y baja concentración de enlaces entre diferentes grupos. Esta característica de las redes reales es llamada estructura modular o de comunidades (*community structure*) [23]. En contraste con las redes de pequeño mundo y las redes libres de escala, el estudio de los mecanismos que dan origen a estas estructuras de comunidades y su caracterización topológica y estadística, es un problema abierto que es foco de mucha actividad investigativa en la actualidad.



Redes dinámicas

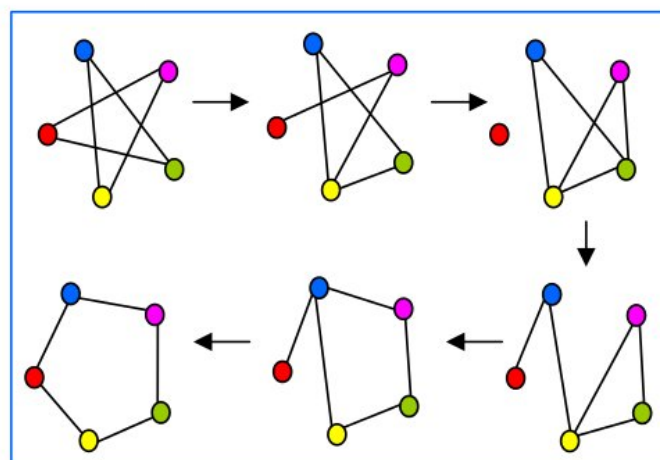


Figura 1

Figura 1.1: Ejemplos de redes.

Diversas topologías de redes, como las que se ilustran en la Figura 1.1, se han investigado como modelos dinámicos espaciotemporales para describir una variedad de fenómenos en sistemas complejos.

Procesos espaciotemporales en sistemas constituidos por múltiples elementos se han estudiado mayormente sobre redes estáticas; es decir, aquellas donde la topología de la conectividad es fija y solamente las variables de estado de los nodos varían en el tiempo. Sin embargo, muchos sistemas complejos reales pueden ser considerados como redes dinámicas, donde tanto las propiedades de los nodos, como las conexiones entre ellos, evolucionan en escalas temporales comparables. Estos sistemas se denominan *sistemas coevolutivos*: la dinámica de los elementos produce cambios en la estructura de conexión de la red, haciendo que la topología del sistema también varíe en el tiempo, lo cual a su vez afecta la evolución de los estados locales. En estos sistemas, las variables de estado de los elementos y la topología de conectividad de la red están mutuamente acopladas. Cabe notar que el término *sistemas adaptativos* también se ha empleado para denominar este tipo de sistemas, aunque es empleado con más frecuencia para referirse a sistemas sujetos a una influencia externa [24]. Adicionalmente, se acostumbra hablar de *plasticidad* de las conexiones en el contexto de sistemas neuronales [25].

Muchos sistemas biológicos son coevolutivos. Por ejemplo, se sabe que las neuronas en el cerebro pueden cambiar su estado local y la conectividad entre ellas con el tiempo. Igualmente, muchos flujos metabólicos de las proteínas, las redes de interacciones ecológicas, son sistemas coevolutivos [11]. Por otro lado, los procesos de formación de opinión y las redes sociales de individuos en una población evolucionan y se influyen mutuamente. La coevolución en sistemas sociales ha sido considerada recientemente en el contexto de la teoría de juegos [26, 27]. Sin embargo, el efecto de la coevolución en la ocurrencia de fenómenos colectivos y en la emergencia de las propiedades estadísticas y topológicas de las redes es un problema fundamental en el campo de los sistemas complejos cuyo estudio apenas comienza.

La presente Disertación se enfoca en el estudio de la relación entre topología de la red de conectividad y la dinámica de los elementos en el contexto de sistemas con dinámica de tipo social. Como una aplicación de los conceptos relacionados con redes complejas, caracterizamos las propiedades topológicas y construimos los grafos de redes reales locales, provenientes de nuestro entorno en la Universidad de Los Andes. Estudiamos la influencia de la topología en un modelo de interacción económica. Proponemos modelos coevolutivos para la formación de opinión sujetos a influencias globales y para la propagación de epidemias. Nuestro proceso de investigación nos ha llevado a abordar dos problemas fundamentales mencionados anteriormente: (1) cuáles procesos determinan la coevolución en un sistema, (2) qué mecanismos conducen a la formación de estructuras de comunidades en redes. En tal sentido, hemos desarrollado un modelo general para la coevolución de la topología y la dinámica en redes, con aplicaciones específicas en dinámica social.

Con el fin de exponer el proceso del desarrollo de nuestra investigación, hemos estructurado la presente Tesis de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se presenta una revisión de las propiedades topológicas y estadísticas de las redes complejas. Para mostrar la implementación práctica de los conceptos y herramientas que permiten caracterizar este tipo de redes, hemos caracterizado dos redes reales locales: (i) una red formada por los estudiantes de la Facultad e Ingeniería de la Universidad de Los Andes, y (ii) la red de colaboraciones científicas del Grupo de Caos y Sistemas Complejos, del Centro de Física Fundamental, en la Universidad de Los Andes. Hasta donde tenemos conocimiento, esta sería uno de los primeros trabajos sobre la caracterización de propiedades topológicas y estadísticas de redes sociales en nuestro país. Este estudio puede tener un interés general y puede resultar útil para muchos investigadores en diversas áreas.

Con el fin de estudiar la influencia de la topología en las propiedades colectivas de sistemas con dinámica social, en el **Capítulo 3** planteamos un modelo de intercambio económico estratificado sobre una red [28–30]. Este modelo es novedoso por cuanto la mayoría de modelos previos de intercambio económico no han considerado la ubicación espacial ni el alcance de la interacción entre agentes.

En el **Capítulo 4** presentamos una revisión del estado actual del tema de coevolución y de algunos modelos relevantes que se han propuesto en este campo. En particular, revisamos dos modelos coevolutivos que han recibido considerable atención: (i) uno de los primeros modelos de dinámica coevolutiva, introducido por Ito y Kaneko en el contexto de redes de mapas acoplados [31], y (ii) el modelo de Holme y Newman acerca de la coevolución de redes y formación de opiniones en un sistema social [32]. Estos modelos nos han proporcionado ideas fundamentales para elaborar el esquema general de sistemas coevolutivos que presentamos en esta Tesis.

En el **Capítulo 5** mostramos dos modelos de sistemas coevolutivos que hemos desarrollado. Proponemos un modelo coevolutivo de formación de opinión sujeto a la influencia de campos globales. Este modelo muestra que la dinámica coevolutiva puede prevenir la imposición del estado de un campo global a todos los agentes de un sistema. En este Capítulo también investigamos un modelo de propagación de epidemias tipo *SIR* con dinámica coevolutiva [33]. El estudio de este tipo de modelos puede ser importante para optimizar la utilización de recursos y evitar la propagación de epidemias en una sociedad.

El **Capítulo 6** contiene la contribución central de esta Tesis. Introducimos un esquema general para el estudio del fenómeno de coevolución de topología y dinámica en una red [34]. La idea fundamental radica en considerar que el fenómeno de coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos: el recableado de la red y el cambio de estado de los nodos. Estos procesos pueden ocurrir con velocidades o probabilidades independientes. Específicamente, analizamos el proceso general de recableado en términos de dos acciones básicas, desconexión y reconexión. Cualquier modelo coevolutivo puede entonces interpretarse como una relación funcional específica entre la probabilidad de cambio de estado y la probabilidad de recableado. Diversos modelos dinámicos coevolutivos, incluyendo los que han sido propuestos previamente por otros autores, pueden

describirse ahora como casos particulares dentro de este marco conceptual general. Por otro lado, este modelo de coevolución generalizada predice la formación de estructura de comunidades en la red como un estado supertransiente del sistema, en cierto rango de parámetros. Los resultados de este modelo nos han permitido un avance en la resolución de las preguntas de investigación planteadas.

Finalmente, en las **Conclusiones** se discuten los resultados obtenidos en esta Tesis y se plantean diversos problemas que quedan abiertos para su estudio futuro.

There is an urgent need to understand this “network society”. The global communication and information networks of the Internet and the World Wide Web are shaping novel cultural and institutional structures.

PHILIP BALL (CRITICAL MASS, 2004)

2

Redes Complejas.

La estructura de las interacciones entre elementos es un aspecto fundamental en el estudio de los sistemas complejos. Estas interacciones se pueden interpretar como redes de conectividad subyacentes en muchos sistemas [18, 21, 27, 35, 36]. Se ha descubierto que sistemas tales como la *World Wide Web*, el Internet, las redes de comunicación, los grupos sociales, sistemas económicos, corporaciones, flujos metabólicos en las células, las neuronas en el cerebro, etc., muestran estructuras topológicas y propiedades estadísticas comunes en sus redes de conectividad. En este respecto, el estudio de las propiedades de las redes de interacción en sistemas complejos constituye un nuevo paradigma en la Física Estadística contemporánea [15].

En los últimos años, se ha encontrado que la estructura de las redes de interacción de muchos sistemas no corresponde a la de redes regulares, ni a la de redes completamente aleatorias. Se ha empleado el término *redes complejas* para designar a las redes que poseen propiedades heterogéneas en su patrón de conectividad. Se ha descubierto la ubicuidad de ciertas propiedades en las redes complejas que describen las interacciones de muchos sistemas. El interés en la investigación de redes complejas creció exponencialmente [37–39] a raíz de la publicación del artículo de Watts y Strogatz [21], considerado como uno de los más influyentes en la literatura científica contemporánea (más de 16.000 citas según Google Scholar), donde se describe el llamado efecto *pequeño mundo*: la distancia media, o número de pasos, para ir de un elemento a otro cualquiera en un sistema, es mucho menor que el tamaño del sistema.

De manera general, una red es un conjunto de elementos, denominados *vértices* o *nodos*, que poseen conexiones entre ellos, las cuales son llamadas *enlaces*. Los nodos pueden corresponder a elementos dinámicos de un sistema, y los enlaces pueden representar relaciones o interacciones entre los nodos. La investigación actual en redes complejas se ubica en la intersección entre la Teoría de Grafos (iniciada por Leonard Euler) y la Mecánica Estadística. El hecho de que las redes complejas, se encuentren en una gran variedad de sistemas naturales y artificiales, proporciona a esta área de in-

investigación un carácter intrínsecamente interdisciplinario. Aunque sus orígenes pueden relacionarse con los trabajos pioneros en percolación y redes aleatorias por Flory [40], Rapoport [41] y Erdős y Rényi [20], la investigación de las redes complejas, desde el punto de vista de la Física, se ha enfocado en el estudio de sus propiedades estadísticas y topológicas. En particular, tres trabajos han contribuido de manera considerable al desarrollo del estudio de redes complejas: el artículo sobre redes de pequeño mundo de Watts y Strogatz [21]; la caracterización de los modelos libres de escala (scale-free), de Barabási y Albert [22]; y la identificación de estructuras de comunidades en muchos sistemas reales, realizada por Girvan y Newman [42]. Los físicos se han interesado en la formación, estructura y evolución de las redes complejas, así como también la influencia de la topología en problemas de Biología, Fisiología, Bioquímica Economía, Ciencias Computacionales, y en dinámica social, tales como formación de opinión, difusión cultural o competencia entre diversas lenguas [43]. Por otro lado, el interés en el tema de las redes complejas por parte del público general se evidencia en la publicación de numerosos libros divulgativos de gran receptividad en años recientes [9, 35, 44].

2.1. Conceptos básicos.

Como hemos dicho, una red está representada por un grafo. Un grafo G consiste en un par de conjuntos $G = \{P, E\}$, donde P es un conjunto de N nodos (o vértices) P_i donde $i \in [1, N]$ y E es el conjunto de los enlaces que conectan dos elementos de P . Las redes pueden ser dirigidas o no-dirigidas. En una red dirigida [45, 46], la interacción del nodo P_i al nodo P_j no implica una interacción del nodo P_j al nodo P_i . Por el contrario, cuando las interacciones son simétricas, se dice que la red es no-dirigida. Además, una red también puede ser pesada [47, 48]. El peso se define como un escalar que representa la intensidad de la interacción entre dos nodos. En una red no-pesada, todos los enlaces entre los nodos tienen el mismo peso o la misma intensidad, la cual, por lo general, se renormaliza en el valor 1.

Matriz de adyacencia.

La matriz de adyacencia de una red finita G con N vértices es la matriz $N \times N$, donde los términos fuera de la diagonal A_{ij} representan el número de enlaces o conexiones del nodo i al nodo j , y los términos de la diagonal A_{ii} , el número de autoconexiones del nodo i . Para cada grafo, existe una única matriz de adyacencia que lo representa (salvo permutaciones entre filas y columnas). En el caso especial de un grafo finito, la matriz de adyacencia es una matriz-(0, 1), con ceros en su diagonal. Si el grafo es no dirigido, la matriz de adyacencia es simétrica. La relación entre el grado y los autovalores y autovectores de la matriz de adyacencia es materia de estudio de la Teoría Espectral de Grafos.

Grado y distribución del grado.

El grado de un nodo i , denotado por k_i , es el número de enlaces adyacentes al nodo i ; es decir, el número total de vecinos más cercanos del nodo i en una red.

La distribución de grado $P(k)$ es la probabilidad de tener un nodo con grado k ; luego $P(k) = \langle N(k) \rangle / N$, donde $N(k)$ es el número de nodos con grado k en un grafo particular del ensamble estadístico y el numerador es el promedio de nodos con grado k . El promedio es sobre el ensamble estadístico completo. Algunas redes pueden ser de grado homogéneo, donde cada nodo i tiene el mismo número de conexiones, tales como las redes de tipo malla o regulares. Además, las redes pueden tener cierto grado de heterogeneidad en las conexiones de sus nodos; por ejemplo, en una red aleatoria, cada nodo está conectado con otro con probabilidad p . En este caso, la probabilidad $P(k)$ es una distribución binomial. Otro ejemplo, son las redes donde la distribución de grado sigue una ley de potencia: $P(k) \sim k^{-\gamma}$, donde γ es una constante. Tales redes son llamadas redes libres de escala.

Coeficiente de agrupamiento.

El coeficiente de agrupamiento mide con qué probabilidad los nodos en un grafo tienden a agruparse. La evidencia sugiere que, en la mayoría de las redes reales, y en particular en las redes sociales, los nodos tienden a crear grupos caracterizados por una alta densidad en sus conexiones. En redes reales, esta probabilidad tiende a ser mayor que la probabilidad promedio de conectar dos nodos de manera aleatoria [21, 49].

El coeficiente de agrupamiento local cuantifica los grupos exclusivos dentro de una vecindad, y se define como

$$C_i = \frac{2\varepsilon_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad 2.1$$

donde k_i es el grado del nodo i , y ε_i es el número de enlaces entre i y sus k_i vecinos. El coeficiente de agrupamiento de la red se define como el promedio sobre todos los nodos, tal que

$$C \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, \quad 2.2$$

donde N es el número total de nodos del sistema. El valor de C se puede interpretar como una medida de la probabilidad de que los vecinos de un nodo dado sean vecinos entre sí.

Diámetro.

El diámetro (D) de una red es la mayor distancia, contada en número de enlaces entre dos elementos de una red. Por ejemplo, una red globalmente acoplada (todos con

todos) tiene un diámetro $D = 1$.

Longitud característica.

La longitud característica l es el número promedio de enlaces a través del camino más corto entre todos los pares de nodos posibles de la red. Es una medida de la eficiencia del transporte de información sobre una red. La longitud característica l es una de las tres medidas principales en lo que se refiere a la topología de una red, junto con el coeficiente de agrupamiento C y la distribución de grado $P(k)$. La longitud característica puede depender del tamaño del sistema en formas no triviales. Las redes regulares (mallas) d -dimensionales muestran una longitud característica que escala con el tamaño del sistema como $l \sim N^{1/d}$; mientras que, las redes complejas están caracterizadas por una longitud característica que escala como $l \sim \ln(N)$.

Modularidad.

Una red puede tener una estructura no homogénea, formada por subconjuntos donde los nodos de un subconjunto están altamente conectados entre sí, mientras que un número mucho menor de enlaces conectan a subconjuntos diferentes. Una representación de esta estructura se muestra en la Figura 2.1.

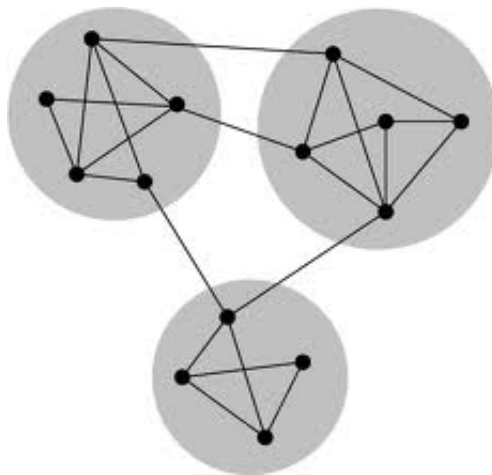


Figura 2.1: Ejemplo de una red con estructura de comunidad, formada por $N = 14$, dividida en 3 comunidades [50].

Se dice que este tipo de red, presentan estructuras modulares o de comunidades. La división modular de una red dada, puede ser caracterizada mediante diferentes criterios [23]. Una de las primeras medidas de modularidad fue introducida por Newman y

Girvan [50], definida como

$$Q(c) = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j), \quad 2.3$$

donde c es el número de comunidades que se proponen a priori, m es el número de enlaces totales de la red, A_{ij} es la matriz de adyacencia, k_i representa el grado del nodo i , y $\delta(c_i, c_j) = 1$ si los elementos i y j están en la misma comunidad, de lo contrario $\delta(c_i, c_j) = 0$.

El valor de Q obtenido con esta fórmula para una red aleatoria es $Q \approx 0.4$. Redes que presenten un valor de $Q > 0.4$ se dice que tienen estructura modular. Además de esta definición, se pueden encontrar algunas otras basadas en el mismo criterio [14].

En particular, se ha encontrado que las redes de interacciones sociales se caracterizan por poseer longitud característica pequeña, coeficiente de agrupamiento alto, distribución de grado no trivial y modularidad alta.

2.2. Modelos básicos de redes complejas.

En esta sección, presentamos una breve introducción a los tres modelos de redes más importantes que se encuentran en la literatura; a saber, las redes aleatorias tipo Erdős-Rényi [20], redes de pequeño mundo de Watts-Strogatz [21] y redes libres de escala de Barabási-Albert [22]. Además, revisaremos algunos ejemplos que presentan estructuras de comunidad.

Redes aleatorias tipo Erdős-Rényi.

La red aleatoria desarrollada por Rapoport [41], e independientemente por Erdős y Rényi [20], puede ser considerada como el modelo más básico de redes complejas. Consideremos una red con N nodos. Si todos los nodos están conectados entre sí, existen $N(N-1)/2$ posibles enlaces. Definamos p como la probabilidad de conectar un par de nodos. Entonces, el grado promedio de la red aleatorio resultante es

$$\langle k \rangle = p(N-1) = \frac{2M}{N}, \quad 2.4$$

donde M es el número de enlaces presentes en la red.

Cuando se trabaja en el límite de redes grandes ($N \rightarrow \infty$), $\langle k \rangle$ diverge si p permanece fijo. Por otro lado, p se escoge como una función de N para mantener $\langle k \rangle$ fijo: $p = \langle k \rangle / (N-1)$. Así, la probabilidad de escoger aleatoriamente un nodo con grado k es una distribución binomial

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad 2.5$$

Para valores de N grandes y $\langle k \rangle$ fijo, $P(k)$ se acerca a una distribución de Poisson con valor medio $\langle k \rangle$:

$$P(k) \approx \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}, \quad 2.6$$

la cual exhibe un máximo pronunciado para $k = \langle k \rangle$.

Modelo de pequeño mundo.

El concepto de red de pequeño mundo, tiene sus orígenes en el experimento social realizado por Milgram en 1967 [51], quien encontró que dos ciudadanos escogidos al azar en una gran población en Estados Unidos estaban conectados, en promedio, por seis conocidos.

Las redes de pequeño mundo han sido caracterizadas por Watts y Strogatz [52]. Ellos notaron que las redes podían ser clasificados de acuerdo a dos atributos estructurales independientes, que son el coeficiente de agrupamiento y la longitud característica. Los grafos netamente aleatorios, construidos de acuerdo al modelo de Erdős-Rényi, exhiben un valor pequeño de la longitud característica, junto con un valor pequeño del coeficiente de agrupamiento. Watts y Strogatz estudiaron muchas redes reales y encontraron que el valor de su longitud característica es pequeño, al igual que una red aleatoria, pero el valor del coeficiente de agrupamiento es mayor, en varios ordenes de magnitud, con respecto al valor correspondiente a una red aleatoria. Así, Watts y Strogatz propusieron un nuevo modelo de redes para describir redes reales, conocido en la actualidad como redes de pequeño mundo, con dos ingredientes (i) una longitud característica pequeña, y (ii) un coeficiente de agrupamiento grande.

Para construir una red de pequeño mundo, se comienza con una red regular periódica de N nodos, donde cada nodo está conectado con sus k vecinos más cercanos a cada lado, donde $N \gg k \gg \log(N) \gg 1$. Luego, cada enlace es recableado aleatoriamente con probabilidad p . Cuando $p = 0$, tenemos una red regular, donde la longitud característica l es grande. Cuando $p \rightarrow 1$, la red se convierte en una red aleatoria, donde l tiene un valor pequeño. Así, al cambiar el parámetro p , se observa una transición entre una red regular y una red aleatoria, como se muestra en la Figura 2.2.

Entre estos dos valores extremos del parámetro p , existe una región amplia, donde la longitud característica es pequeña y el coeficiente de agrupamiento es grande. El comportamiento de estas dos cantidades, en función del parámetro p , se puede observar en la Figura 2.3.

Entre los ejemplos más relevantes de redes de pequeño mundo, se puede mencionar dos estudios recientes acerca de redes sociales. La red de conversaciones a del MSN de Microsoft, tiene 240 millones de usuarios y mas de 30.000 millones de conversaciones; la longitud característica calculada para esta red es $l = 6.6$ [53]. Otro ejemplo, es la red de Facebook, con mas de 721 millones de usuarios y 69 billones de enlaces, cuya

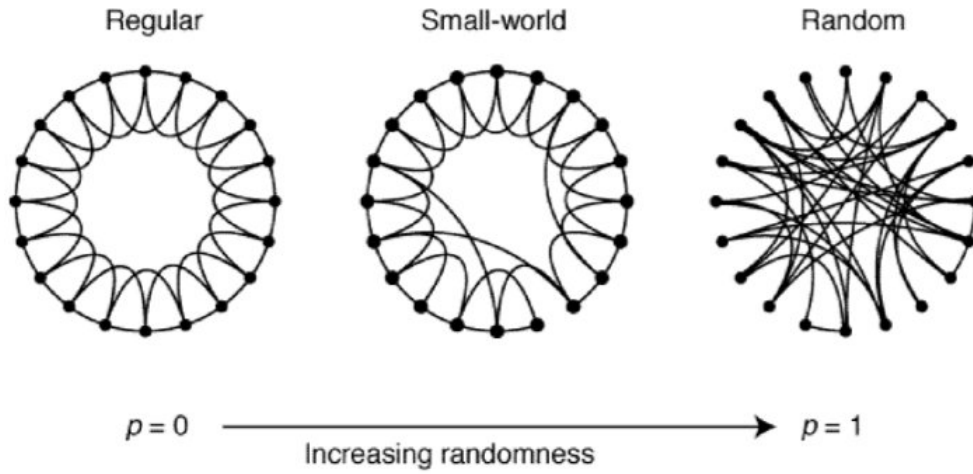


Figura 2.2: Procedimiento de recableado aleatorio propuesto por Watts y Strogatz para la creación de redes de pequeño mundo. $N = 20$, $k = 4$. Cuando $p = 0$ el anillo inicial permanece sin cambios; mientras p aumenta la red se desordena hasta que, para $p = 1$ se convierte en una red aleatoria. Figura tomada de [21]

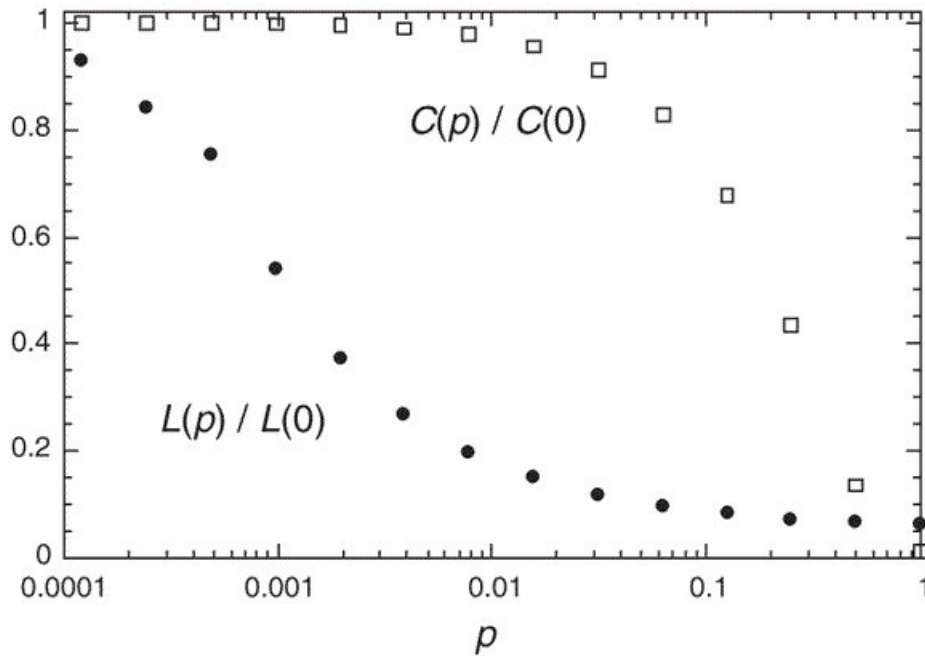


Figura 2.3: Longitud característica $l(p)$ y coeficiente de agrupamiento $C(p)$ para en modelo de Watts y Strogatz. Los datos están normalizados con $l(0)$ y $C(0)$, para una red regular. $N = 1000$ y $\langle k \rangle = 10$. Figura tomada de [21].

longitud característica es de $l = 4,74$ [54].

Redes libres de escala de Barabási-Albert.

Como mencionamos anteriormente, muchas redes reales poseen la propiedad de pequeño mundo. Sin embargo, resultados empíricos muestran que muchas redes de tamaño considerable también muestran evidencia de ser libres de escala; es decir, su distribución de grado sigue una ley de potencia $P(k) \sim k^{-\gamma}$, para valores grandes de k [15, 18]. Las leyes de potencia en redes aparecieron por primera vez en el artículo publicado por Barabási y Albert [22], quienes mostraron que la distribución del grado de muchas redes reales están caracterizadas por una distribución desigual en sus conexiones. En este tipo de redes, los nodos tienen un patrón aleatorio en sus conexiones, algunos nodos están altamente conectados, mientras otros sólo poseen unas pocas conexiones, como se muestra en la Figura 2.4.

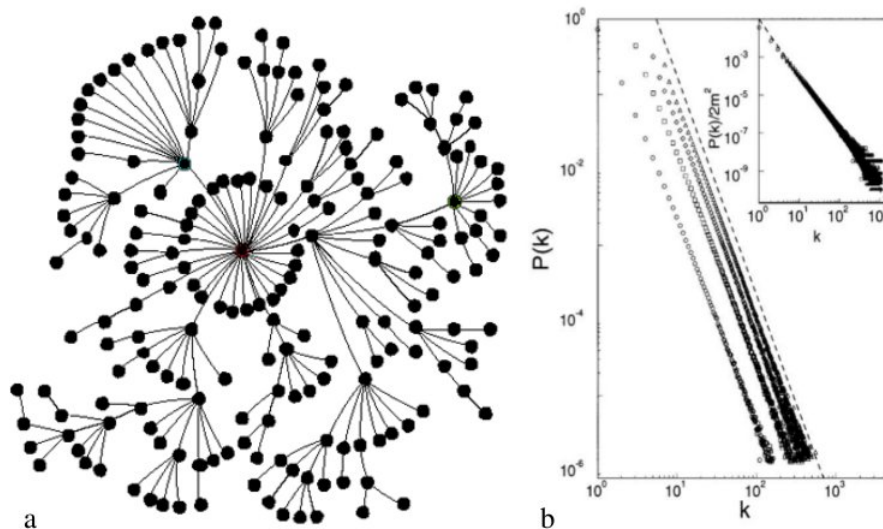


Figura 2.4: (a) Ejemplo de una red libre de escala de Barabási-Albert. (b) Distribución del grado para una red Barabási-Albert. $N = N_0 + t = 3^5$; con $N_0 = m = 1$ (círculos), $N_0 = m = 3$ (cuadrados), $N_0 = m = 5$ (diamantes), $N_0 = m = 7$ (triángulos). La pendiente de la línea punteada es $\gamma = 2.9$. Figura insertada: distribución re-escalada con m , $P(k)/2m^2$ para los mismos valores de parámetros. La pendiente de la línea punteada es $\gamma = 3$. Figura tomada de [15]

Con el propósito de reproducir este comportamiento observado en las redes reales, proponen un modelo simple con dos ingredientes principales:

- Crecimiento: Se comienza con pocos nodos, a saber N_0 nodos, conectados entre ellos. En cada paso, se añade un nodo que poseerá $m (\leq N_0)$ enlaces, que conectarán al nuevo nodo con m diferentes nodos, que se encuentran presentes en el sistema.

- Conexiones preferenciales (preferential attachment): Cuando el nuevo nodo escoja con quien establecerá conexión, se asume una probabilidad P , como la probabilidad de que el nuevo nodo se conecte con el nodo i , la cual depende de su grado k_i , tal que $\Gamma(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$. Luego de t iteraciones realizándose el paso anterior, se construye una red con $N = t + N_0$ nodos y $mt + \frac{N_0(N_0-1)}{2}$ enlaces. Las simulaciones numéricas muestran que esta red evoluciona hacia una distribución de grado correspondiente a una ley de potencia $P(k) \sim k^{-\gamma}$, con $\gamma \approx 3$. Véase la Figura 2.4.

Para comparar las Redes Complejas consideradas anteriormente, la Tabla 2.1 muestra un resumen de sus características más importantes.

Redes	Long. Carac. (l)	Coef. de Agrup. (C)	Dist. de Grado $P(k)$
Regular	$l \sim N^{1/d}$	$C \sim 1$	$P(k) = \delta(k - z)$
Aleatoria E-R	$l \sim \ln(N)$	$C \sim N^{-1}$	Poisson
Pequeño mundo	$l \sim \ln(N)$	$C \sim 1$	Exponencial
Escala libre B-A	$l \sim \frac{\ln(N)}{\ln(\ln(N))}$	$C \sim \frac{\ln(N)^2}{N}$	$P(k) \sim k^{-3}$

Tabla 2.1: Características de las redes complejas. N representa el número de nodos.

2.2.1. Redes con estructura de comunidad.

Recientemente, se ha descubierto que además de poseer características de pequeño mundo y de libertad de escala, muchas redes reales poseen estructura de comunidades o módulos. Las redes modulares son ubicuas en la naturaleza, como se muestra en la Figura 2.5. Particular importancia para las ciencias médicas tiene la construcción de la red de enfermedades humanas, la cual presenta estructura de comunidades [55]. Figura 2.6

A diferencia de las redes aleatorias, las redes de pequeño mundo y las redes libres de escala, no existe actualmente un modelo que logre explicar satisfactoriamente la formación de estructuras de comunidades en redes [23]. Una de las motivaciones de la presente tesis, es proponer un modelo general con ingredientes mínimos que permita explicar la emergencia de comunidades como el resultado de una dinámica coevolutiva en redes.

2.3. Investigación de redes reales locales.

Como parte del trabajo de investigación de esta tesis, hemos considerado importante aplicar los conceptos y herramientas de las redes complejas, al estudio de algunas redes presentes en nuestro entorno.

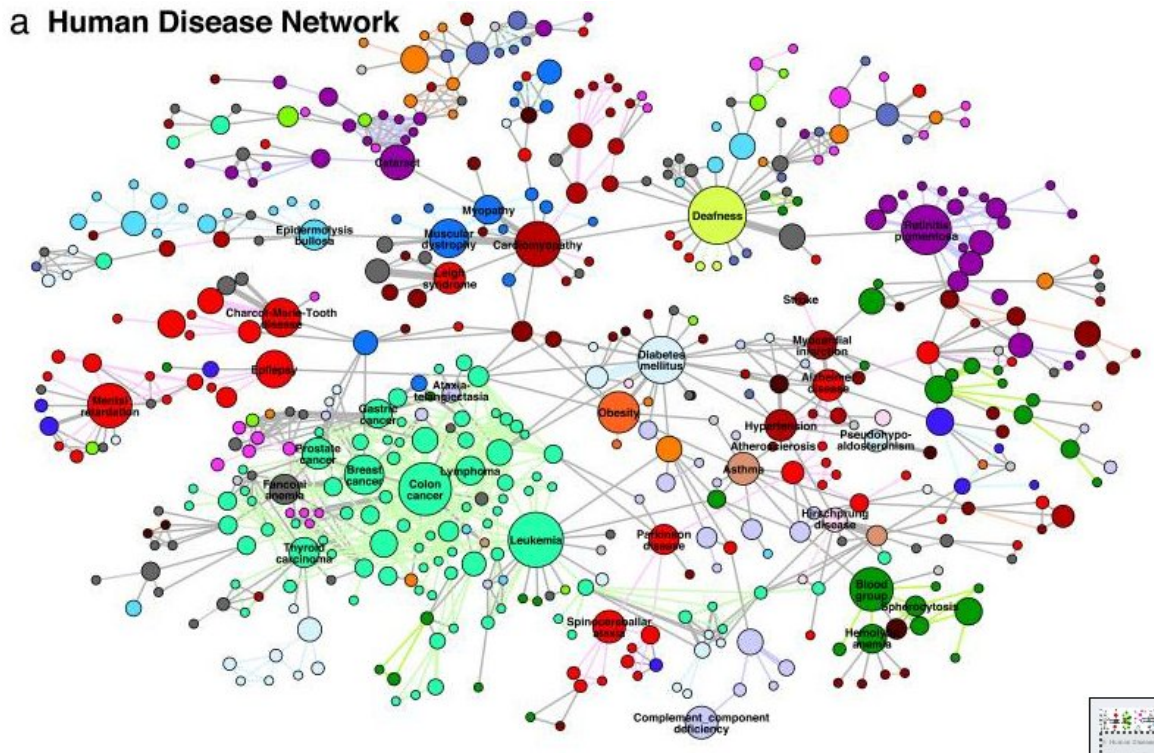


Figura 2.6: Red de enfermedades de barabasi.

2.3.1. Red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería.

Los datos necesarios para construir esta red, fueron proporcionados por la Oficina de Registros Estudiantiles de la Facultad de Ingeniería (OREFI), de la Universidad de Los Andes, en Mérida, Venezuela. Estos datos consisten en 9337 estudiantes que se han inscrito en la Facultad de Ingeniería, desde el año 1975 hasta el año 2009. Existen 418881 registros de las inscripciones de materia de estos estudiantes, en ese período.

Para construir la red, consideramos a cada estudiante como un nodo de la misma. La relación o enlace que hay entre dos nodos se establece si estos dos estudiantes se inscribieron en la misma materia, la misma sección y el mismo semestre. Es decir, dos estudiantes están conectados si alguna vez han visto una materia juntos.

Cabe destacar que esta coincidencia puede existir mas de una vez; sin embargo, el enlace se establecerá, cuando haya sucedido por lo menos una vez. Así, la red formada por los estudiantes de la Facultad de Ingeniería será no dirigida, en la que los enlaces no tiene peso.

La Tabla 2.2 muestra las características que obtuvimos de la red de estudiantes de Ingeniería así construida.

Al observar la Tabla 2.2, se evidencia que la red de estudiantes de Ingeniería tiene

	1973-2009	Aleatorio
Nodos (N)	9337	9337
Coef. Agrup. (C)	0.4843	0.054
Diámetro (D)	4	3.59
Long. Carac. (L)	1.9502	1.9462
Grado promedio (\hat{k})	500	500

Tabla 2.2: Características de la red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería, en comparación con una red aleatoria de tamaño similares.

características de una red de pequeño mundo.

Aunque se sale del ámbito de la presente Tesis, este resultado puede motivarnos a estudiar varios otros aspectos en esta red, como por ejemplo la propagación de información o de epidemias entre los estudiantes. Por otro lado, estos resultados han suscitado mucho interés entre profesores por su potencial para caracterizar la eficiencia de sistemas educativos, y la posibilidad de comparar diferentes instituciones y facultades.

Este estudio muestra una perspectiva novedosa para el estudio del rendimiento estudiantil y otros problemas de relevancia social.

2.3.2. Red de colaboraciones científicas (caóticos).

La construcción de la red de colaboraciones, se realizó utilizando como nodo a cada investigador que ha realizado una publicación científica con algún profesor o estudiante del grupo de Caos y Sistemas Complejos de la Facultad de Ciencias, llamados afectivamente como los “caóticos”. Aquí los enlaces se establecen, si ha habido una relación de coautoría entre dos nodos. Es decir; dos nodos están conectados si han publicado juntos al menos un artículo científico en una revista indexada. La Figura 2.7 muestra la representación de la red de caóticos. La red de caóticos será no dirigida, en la que los enlaces no tiene peso. Los datos fueron tomados de la página web del grupo (pagina del grupo).

Para esta red, se calcularon los atributos que la caracterizan, los cuales se pueden observar en la Tabla 2.3. Además de los atributos usuales, se encuentran las cantidades k_M , k_K y k_P , que son las respectivas conectividades de los profesores Mario Cosenza, Kay Tucci y Antonio Parravano.

N	C	D	L	\hat{k}	M	Q	k_M	k_K	k_P
83	0.711	5	2.4	4.25	136	0.510	40	26	23

Tabla 2.3: Características de la red de colaboraciones científicas del grupo de Caos y Sistemas Complejos.

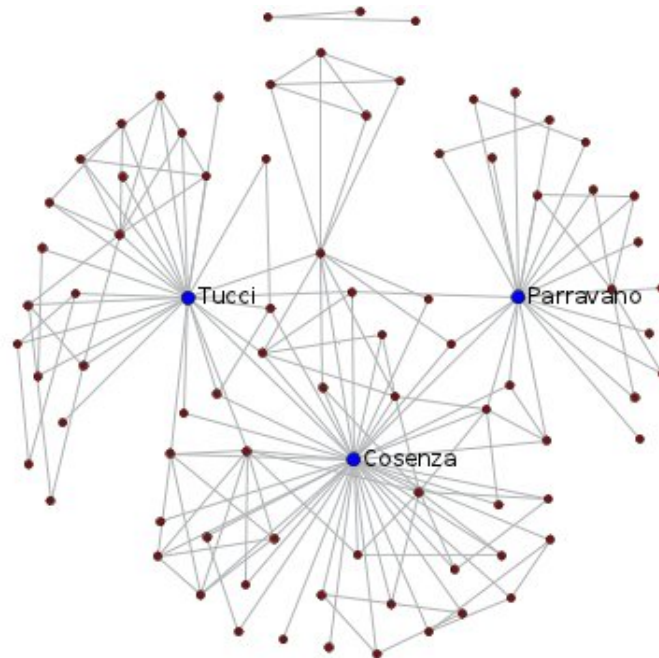


Figura 2.7: Red de colaboraciones científicas en el grupo de Caos y Sistemas Complejos, del Centro de Física Fundamental, de la Facultad de Ciencia, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Esta red posee estructura modular, lo que se evidencia por un valor de $Q = 0.510$, mayor que el correspondiente a una red aleatoria. Esta estructura se encuentra sustentada por tres nodos altamente conectados o *hubs*, alrededor de los cuales, se encuentran los otros nodos. Estos *hubs* son los profesores Mario Cosenza, Kay Tucci y Antonio Parravano. También, se observa que los nodos Tucci y Parravano, funcionan como agentes conectores entre diferentes comunidades. El nodo Tucci conecta la comunidad de Ingeniería con la comunidad caótica, mientras que el nodo Parravano conecta la comunidad de Astrofísicos con los caóticos. Este grafo ilustra cómo la estructura modular o de comunidades emerge en una red cuando existe cierto grado de tolerancia o amplitud de criterios, que en este caso se manifiesta en la interdisciplinariedad que se destaca en este grupo.

There are a number of morals to this story. Perhaps the most important is that your friends just aren't normal. No one's friends are.

MARK NEWMAN (2003)

3

Efecto de la topología en un modelo de interacción económica estratificada

Como una aplicación del estudio de redes complejas, en sistemas socioeconómicos, en este Capítulo, investigamos los efectos de la topología de la red, en el comportamiento colectivo de un sistema sujeto a una dinámica de intercambio económico estratificado. Presentamos nuestro modelo reciente [28], basado en la dinámica de interacción en una sociedad estratificada propuesta por Laguna *et al.* [56]. Adicionalmente, la inclusión de la noción de localidad nos permite emplear, en forma novedosa, conceptos provenientes del contexto de sistemas dinámicos espaciotemporales, en problemas de Econofísica.

La estratificación social, se refiere a la clasificación de individuos en grupos o clases, basadas en condiciones de poder o socioeconómicas compartidas en una sociedad [57]. Un atributo característico de las sociedades estratificadas, es que los individuos tienden a interactuar más frecuentemente con aquellos dentro de sus propios grupos. Esta tendencia se ha podido observar en endogamia de clases [58], comunidades y citas científicas [59], poblaciones biológicas [60], capital humano [61], formación de opinión [62], dinámica de epidemias [63], e intercambio económico entre bancos [64]. Recientemente, Laguna *et al.* [56] han estudiado los efectos de la estratificación social en la distribución de riquezas en un sistema de agentes económicos interactuantes. En ese modelo, los agentes se comportan como partículas en un gas, y su interacción con los demás agentes se lleva a cabo de manera aleatoria, de la misma manera que en la mayoría de los modelos que se han propuesto acerca de intercambio económico [65–67]. Sin embargo, muchos sistemas sociales y económicos reales pueden ser descritos como redes complejas, tales como redes de pequeño mundo, redes libres de escala [10, 21, 22]. Algunos pocos modelos han considerado dinámicas de interacción económica sobre redes regulares; por ejemplo, en [68, 69] se estudiaron los efectos de la topología de la red en la distribución de riquezas; mientras que Ausloos [70] propuso un modelo de mercado cerrado en una red fija con flujo libre de bienes y recursos.

3.1. El modelo

Consideramos una población de N agentes interactivos, ubicados en los nodos de una red de pequeño mundo, caracterizada por el parámetro de recableado p , según el algoritmo de construcción de Watts y Strogatz [21]. Comenzamos de un anillo regular con N nodos, donde cada nodo está conectado con sus k vecinos más cercanos (k es un número par), como se muestra en la Figura 3.1. Luego, cada conexión es recableada aleatoriamente, con probabilidad p en la red. Después del proceso de recableado, el número de agentes acoplados a cada nodo puede variar, pero el número total de enlaces en la red es constante e igual a $Nk/2$. Para $p = 0$ la red corresponde a una anillo regular, mientras que para $p = 1$ la red resultante es completamente aleatoria. Con este algoritmo, una red de pequeño mundo se forma para valores de p en un rango intermedio [21].

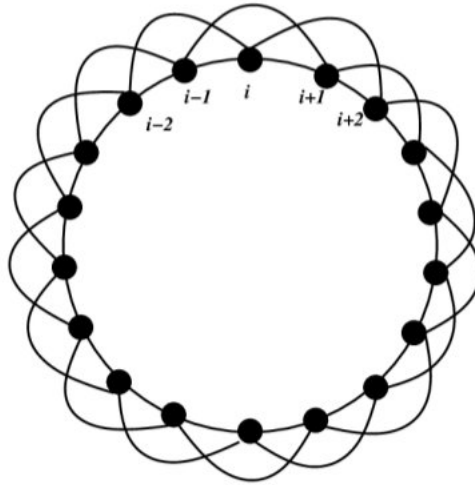


Figura 3.1: Red unidimensional con condiciones de borde periódicas. $N = 18$, $\bar{k} = 4$.

En un tiempo discreto t , un agente i ($i = 1, \dots, N$), está caracterizado por su riqueza $w_i(t) \geq 0$, y por un factor de aversión al riesgo β_i , que se mantiene fijo en el tiempo. Los valores de β_i son asignados a los agentes al comienzo de cada simulación de manera uniforme y aleatoria en el intervalo $[0, 1]$. La cantidad $(1 - \beta_i)$ mide la fracción de la riqueza que el agente i está dispuesto a arriesgar en una interacción económica [66, 71, 72]. Los valores iniciales de riqueza $w_i(0)$ se encuentran distribuidos de manera aleatoria en el intervalo $w_i(0) \in [0, W]$. Asumimos que la riqueza total del sistema, $W_T = \sum_i w_t(i)$, se conserva.

Por simplicidad, asumimos que la estratificación de clases económicas es uniforme; es decir, todas las clases tienen el mismo ancho, definido por el parámetro u . Así, los agentes i y j pertenecen a la misma clase económica si satisfacen la condición $|w_i(t) - w_j(t)| < u$.

Cuando hablamos de intercambio económico estratificado, nos referimos a que sólo puede existir interacción entre los agentes que pertenecen a la misma clase económica. Como consecuencia de estas interacciones, la riqueza de los agentes en el sistema cambiará.

Definimos la dinámica del sistema, en cada paso de tiempo t , por el siguiente algoritmo iterativo:

1. Escoja un agente i de manera aleatoria.
2. Escoja, de manera aleatoria, un agente $j \neq i$ del conjunto de vecinos del agente i , es decir, $j \in [i - k/2, i + k/2]$.

3. Verifique si los agentes i y j pertenecen a la misma clase económica, es decir,

$$|w_i(t) - w_j(t)| < u.$$

Repita los pasos (1) y (2) hasta que se cumpla la condición (3).

4. Calcule la cantidad de riqueza $\Delta w(t)$ a ser intercambiada por los agentes i y j , definida como

$$\Delta w(t) = \text{mín}[(1 - \beta_i)w_i(t); (1 - \beta_j)w_j(t)]. \quad 3.1$$

5. Calcule la probabilidad r de favorecer al agente con menor riqueza entre i y j en el tiempo t , definida como [56, 72]

$$r = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)}, \quad 3.2$$

donde el parámetro $f \in [0, 1/2]$.

6. Asigne la cantidad $\Delta w(t)$ con probabilidad r al agente con menor riqueza, y con probabilidad $(1 - r)$ al agente con mayor riqueza entre i y j .

El parámetro f describe la probabilidad de favorecer al más pobre de los dos agentes cuando interaccionan. Para $f = 0$, ambos agentes tienen la misma probabilidad de recibir la cantidad $\Delta w(t)$ en la interacción de intercambio, mientras que, para $f = 1/2$, el agente con menos riqueza tiene la más alta probabilidad de recibir esta cantidad. En una simulación típica, siguiendo las reglas de esta dinámica y, luego de un tiempo transiente, el sistema alcanza un estado estadísticamente estacionario donde la riqueza total W_T ha sido redistribuida entre los agentes.

La localización espacial de los agentes económicos interactivos nos permite establecer una analogía entre este sistema y un sistema dinámico espaciotemporal discreto, del tipo autómatas celulares o redes de mapas acoplados. La Figura 3.2 muestra los patrones espaciotemporales de la riqueza que resultan en una red caracterizada por $k = 2$ y $p = 0$, correspondientes a una red regular en una dimensión con condiciones de borde

periódicas. Al igual que muchos sistemas dinámicos espaciotemporales [73], esta red de agentes económicos puede exhibir tres estados básicos que dependen de los valores de parámetros: un estado estacionario, coherente o laminar (panel izquierdo), donde la riqueza de cada agente i se mantiene en un valor constante; un estado intermitente (panel central), caracterizado por la coexistencia de dominios coherentes e irregulares que evolucionan en el tiempo; y un estado turbulento (panel derecho) donde los valores de riqueza cambian de manera irregular tanto en el espacio como en el tiempo.

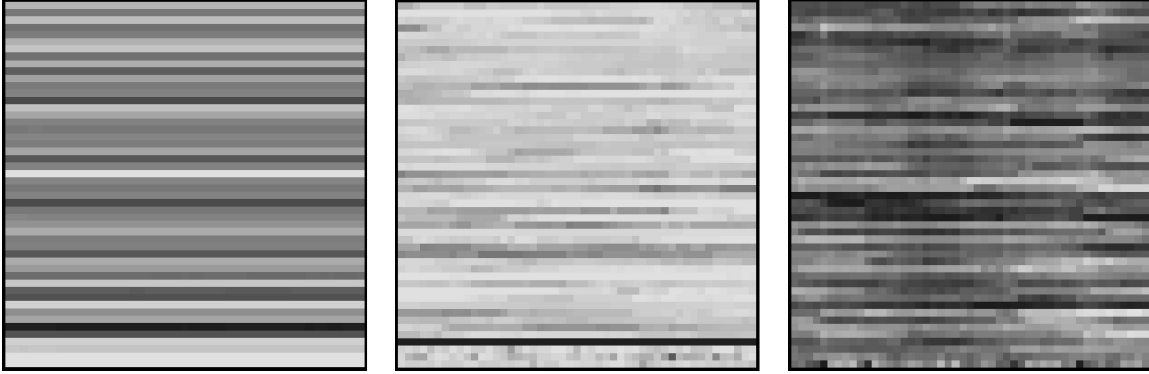


Figura 3.2: Patrones espaciotemporales en una red unidimensional con $k = 2$, $N = 50$ y $W = 1$, luego de un transiente de 5000 iteraciones. El eje vertical muestra la posición ordenada i de los agentes en la red, la cual se incrementa de abajo hacia arriba. El eje horizontal representa el tiempo, que se incrementa de izquierda a derecha. La evolución temporal de la riqueza $w_i(t)$ de los i agentes está representada por un código de colores. Estos colores van desde gris claro (agentes más pobres) a gris oscuro (agentes más ricos). Panel izquierdo: Estado laminar; $u = 10$, $f = 0.001$. Panel central: estado de intermitencia espaciotemporal; $u = 3$, $f = 0.4$. Panel derecho: Estado turbulento; $u = 30$, $f = 0.4$.

Para caracterizar la transición del estado laminar al estado turbulento, vía intermitencia espaciotemporal, empleamos el promedio de la cantidad de riqueza intercambia por unidad de tiempo, calculada para tiempos muy largos. A esta cantidad la llamamos *actividad del sistema* y la definimos como

$$A = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T \Delta w(t), \quad 3.3$$

donde τ es un tiempo transiente; es decir, el número de iteraciones que se descartan antes de tomar el promedio temporal. La fase laminar está asociada con valores de $A = 0$, donde no ocurren transacciones en el estado asintótico del sistema; mientras que la fase turbulenta está caracterizada por valores $A > 0$.

En nuestros cálculos, fijamos los siguientes valores de parámetros: $N = 10^4$, $T = 2 \times 10^4$, y $W = 1$. Tomamos $\tau = 10^8$, para el cual hemos verificado que el comportamiento estadístico del sistema es estacionario. Cada valor de las cantidades estadísticas es un promedio sobre 100 realizaciones de condiciones iniciales. La Figura 3.3(a) muestra la

actividad A del sistema en función del ancho de la clase económica u , para diferentes valores del parámetro f .

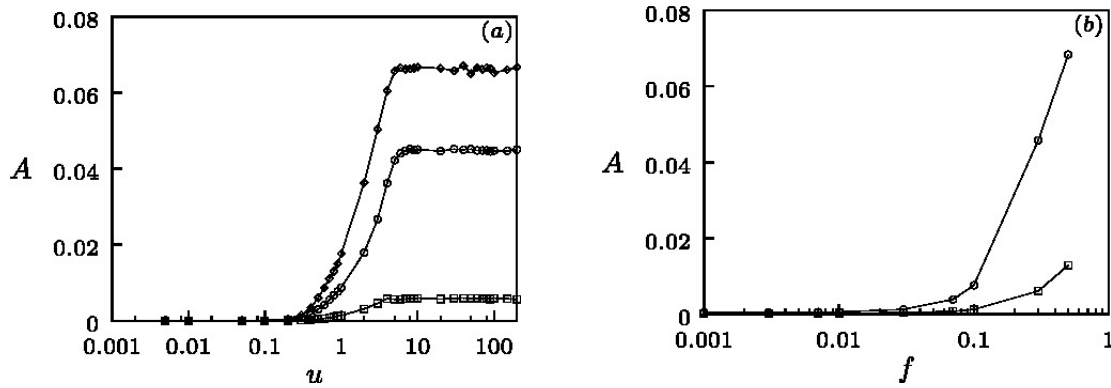


Figura 3.3: (a) Actividad del sistema en función de u en una red regular ($p = 0$) con $k = 4$, para diferentes valores de f . Las curvas corresponden a $f = 0.5$ (diamantes); $f = 0.3$ (círculos); y $f = 0.1$ (cuadrados). (b) Actividad en función de f en una red regular con $k = 4$, para $u = 1$ (cuadrados), y $u = 30$ (círculos).

La transición de la fase laminar a la fase turbulenta ocurre alrededor del valor $u \approx W = 1$ para todos los casos. Cuando $u = W$, los intercambios de riqueza pueden ocurrir en cada vecindad, y esto se refleja en el incremento de la actividad del sistema. Para $u > W$, continúan ocurriendo interacciones en todo el sistema, y la riqueza total intercambiada alcanza el valor máximo permitido por el parámetro f . Así, la actividad A en el sistema alcanza un valor casi constante en esta región, para un valor de f dado. Por otro lado, la Figura 3.3(b) muestra la actividad del sistema en función de f . El incremento en f aumenta la transferencia de riqueza desde los agentes más ricos hacia los agentes más pobres. Por lo tanto, la probabilidad de que agentes vecinos pertenezcan a la misma clase económica se incrementa, y como consecuencia también la probabilidad de intercambio de riqueza entre ellos. Como consecuencia, la actividad A del sistema aumenta al aumentar f .

Con el fin de explorar los efectos de la topología de la red subyacente sobre comportamiento colectivo del sistema, mostramos en la Figura 3.4(a) la actividad A en función del tamaño de la vecindad k en la red, para diferentes valores de u . El rango de interacciones locales, dado por k , tiene un efecto mínimo en la actividad.

Igualmente, la Figura 3.4(b) muestra la actividad A en función de la probabilidad de recableado en la red p , para $k = 4$. Vemos que la actividad en el sistema es afectada de manera mínima por las propiedades topológicas de la red, representadas por los parámetros k y p . Luego, la dinámica, expresada por los parámetros f y u , tienen un efecto más relevante en el comportamiento de la actividad A en el sistema, que la topología de la red subyacente.

Una variable importante en dinámica económica es el coeficiente de Gini, una can-

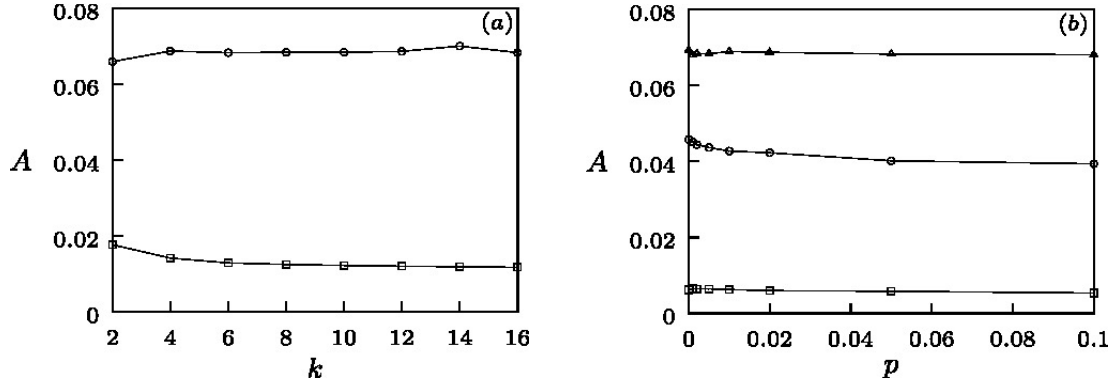


Figura 3.4: (a) Actividad en función de k , sobre una red regular con $p = 0$, y un valor fijo de $f = 0.5$, y para diferentes valores de $u = 1$ (cuadrados) y $u = 10$ (círculos). (b) Actividad en función de p , con $k = 4$, y para diferentes valores de $f = 0.5$ (triángulo), $f = 0.3$ (círculos) y $f = 0.1$ (cuadrados).

tividad estadística que mide el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en un sistema económico, definido como [74]

$$G(t) = \frac{1}{2N} \frac{\sum_{i,j=1}^N |w_i(t) - w_j(t)|}{\sum_{i=1}^N w_i(t)}. \quad 3.4$$

Una distribución de riqueza totalmente equitativa en el tiempo t , donde $w_i(t) = w_j(t)$, $\forall i, j$, conduce a un valor de $G(t) = 0$. El otro extremo, de total exclusión, donde un solo agente posee toda la riqueza del sistema, $\sum_{i=1}^N w_i(t)$, corresponde a un valor de $G(t) = 1$. La distribución uniforme aleatoria de riqueza usada como condición inicial tiene $G(0) \approx 0$, y el promedio de riqueza inicial por agente es de $w_i(0) = 0.5$. La Figura 3.5(a) muestra el coeficiente de Gini G en el estado asintótico del sistema como función del ancho de clase u , para diferentes valores del parámetro f .

Para valores pequeños de u , hay una pequeña probabilidad de interacción entre agentes vecinos, y por lo tanto, la distribución inicial de riqueza del sistema (donde $G \approx 0$) se mantiene. Al incrementar u , la transferencia de riqueza entre los agentes vecinos aumenta, produciendo una mayor redistribución de la riqueza, la cual se refleja en el incremento de G . Se puede observar que G alcanza su máximo valor alrededor de $u \approx W = 1$, cuando cada agente puede interactuar con todos sus vecinos en los primeros instantes de la simulación, y por lo tanto, ocurre una gran variación en la distribución de riqueza con respecto a la distribución inicial. Para valores de u más grandes, todas las interacciones locales están permitidas. En esta región, una redistribución de riqueza, debería ocurrir cuando la probabilidad f de favorecer a los más pobres se incrementa. Esto se observa en la Figura 3.5(a) como una disminución en los valores de G , para $u > W$. La Figura 3.5(b) muestra el coeficiente de Gini en función de la probabilidad f , para diferentes tamaños de vecindad k . Los valores de G permanecen casi constantes para valores de f pequeños, pero disminuyen para valores de f altos.

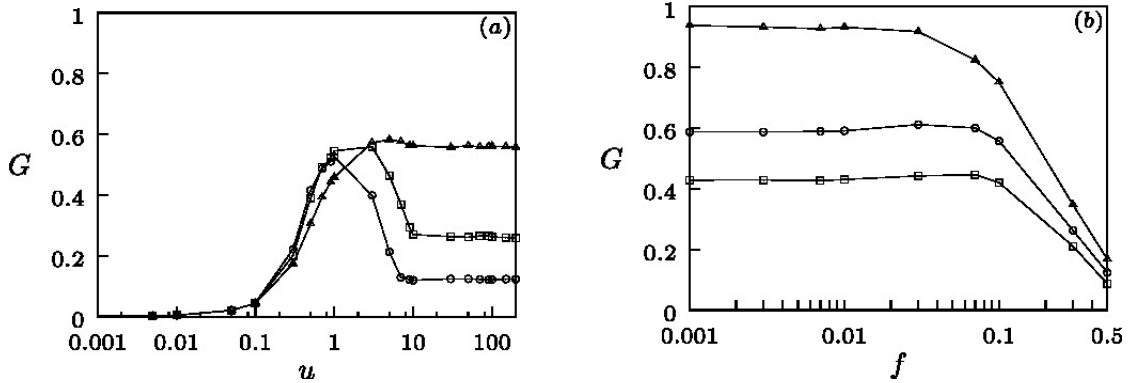


Figura 3.5: Coeficiente de Gini para $t = 10^8$ en función de u con $k = 4$ fijo para diferentes valores de f . Las curvas corresponden a $f = 0.5$ (círculos); $f = 0.3$ (cuadrados); y $f = 0.1$ (triángulos). (b) Coeficiente de Gini para $t = 10^8$ en función del parámetro f para diferentes valores de k y $u = 30$. Las curvas corresponden a $k = 2$ (cuadrados); $k = 4$ (círculos); y $k = N - 1$ (triángulos).

Para estudiar la influencia de la topología de la red subyacente en la distribución de riqueza, la Figura 3.6(a) muestra la gráfica de G en función de k , sobre una red regular con $p = 0$, para diferentes valores de u . Al incrementar el número de vecinos k , se contribuye al incremento de la desigualdad en la distribución de riqueza, al ver un aumento en G . Nótese que G tiende a un valor asintótico alto cuando $k \rightarrow (N - 1)$, lo cual corresponde a una red con acoplamiento global; es decir, los agentes pueden interactuar con cualquier otro agente del sistema. En este caso se pierde la noción de localidad espacial, y nuestro modelo se corresponde con el caso particular de Laguna *et al.* [56].

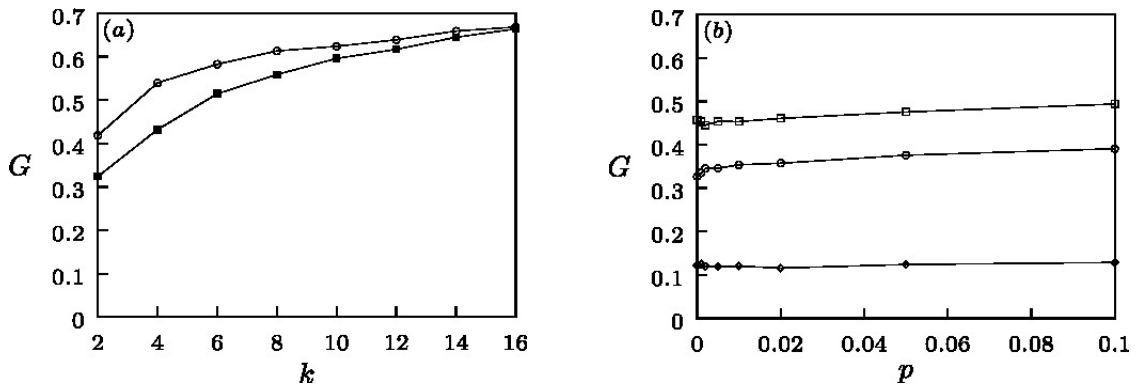


Figura 3.6: (a) Coeficiente de Gini para $t = 10^8$ en función de k en una red regular con $p = 0$, para $f = 0.1$, $u = 1$ (cuadrados) y $u = 10$ (círculos). (b) Coeficiente de Gini para $t = 10^8$ en función del parámetro de recableado p en una red con $k = 4$, para $u = 10$ y $f = 0.5$ (diamantes), $f = 0.3$ (círculos) y $f = 0.1$ (cuadrados).

Cabe notar que el índice de Gini (Coeficiente de Gini multiplicado por 100), en

ese límite, da valores más altos que los observados en datos reales de países, como se muestra en la Figura 3.7.

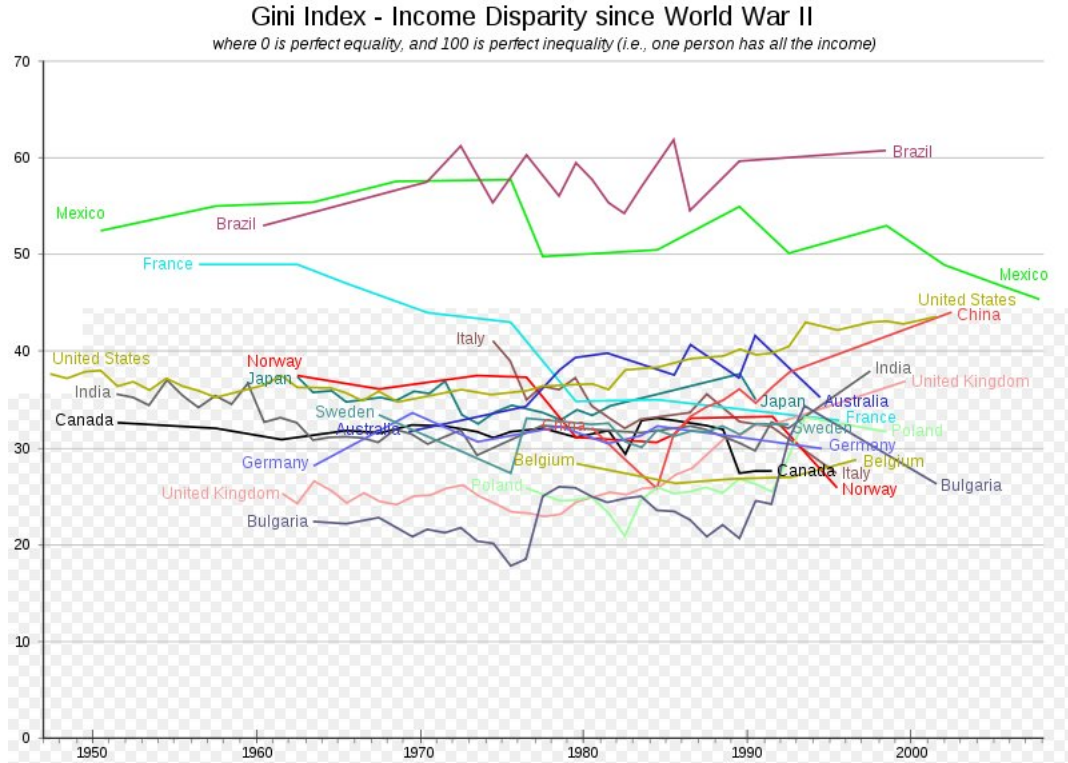


Figura 3.7: Datos del índice de Gini, para diversos países del mundo desde la Segunda Guerra Mundial hasta 2005 [75].

Por otro lado, nuestro modelo con inclusión de localidad en las interacciones económicas permite obtener valores del Coeficiente de Gini más realistas.

Sabemos que el incremento del rango en las interacciones espaciales, representado por el valor de k , implica tanto un incremento del coeficiente de agrupamiento como una disminución de la longitud característica de la red. Para verificar cuál de estas dos propiedades topológicas de la red tiene un efecto más relevante en el coeficiente de Gini, mostramos en la Figura 3.6(b) a G en función de la probabilidad de recableado p , para diferentes valores del parámetro f . Note que cuando p aumenta, G apenas cambia, en comparación con la variación que experimenta G cuando k aumenta, Figura 3.6(a). La longitud característica en la red decrece en ambos casos; sin embargo, el coeficiente de agrupamiento no aumenta en el rango de valores de p que se muestran en la Figura 3.6(b) [21]. Por lo tanto, el incremento que se observa en el coeficiente de Gini en la Figura 3.6(a) se puede atribuir al incremento del coeficiente de agrupamiento de la red cuando k aumenta. En otras palabras, el tamaño de la vecindad (k) tiene una influencia más relevante para la ocurrencia de una distribución equitativa de riqueza que la presencia de conexiones de largo alcance (p) en un sistema sujeto a un proceso

de intercambio económico estratificado.

También hemos estudiado las propiedades de la distribución de probabilidad de riqueza para diversos valores de parámetros [29]. La Figura 3.8 muestra la distribución de riqueza en el estado asintótico del sistema, para distintos valores de parámetros.

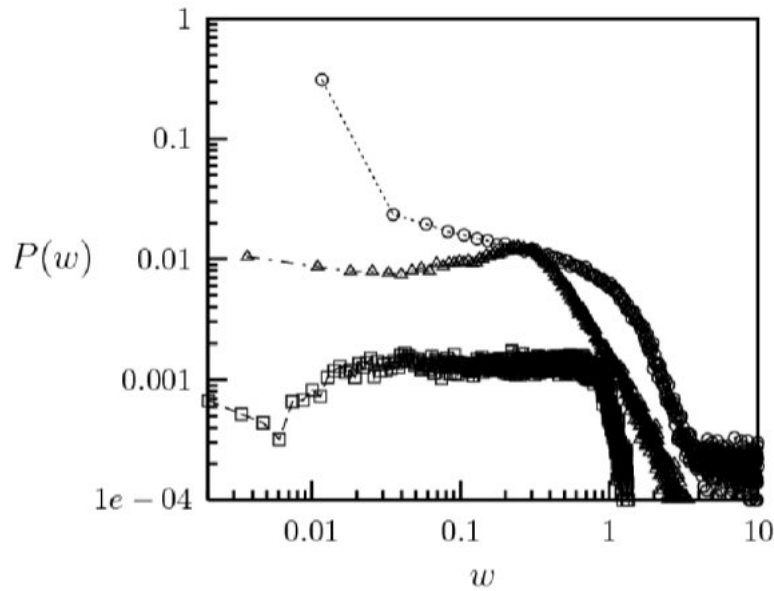


Figura 3.8: Distribución de riqueza en el estado asintótico para diferentes valores de parámetros, con $k = 4$. $u = 0.005$, $f = 0.1$ (cuadrados); $u = 10$, $f = 0.1$ (círculos); $u = 100$, $f = 0.5$ (triángulos).

Para valores de u y f pequeños (cuadrados), la distribución de riqueza $P(w)$ se mantiene casi uniforme como consecuencia de la poca actividad presente en el sistema. Al aumentar los valores de estos parámetros, $P(w)$ se muestra menos uniforme (círculos). En las simulaciones se observa que unos pocos agentes adquieren la mayor cantidad de riqueza en el sistema, mientras que un número considerable de agentes quedan con riqueza casi nula. Para valores grandes de parámetros (triángulos), $P(w)$ adquiere una forma más uniforme, como se puede notar también en la Figura 3.5(a).

Para otros valores de parámetros, se puede observar que $P(w)$ cambia abruptamente de forma, como se muestra en la Figura 3.9. La Figura 3.9 indica que los elementos con menor riqueza en el sistema (valores de w pequeños) tienen una distribución casi uniforme. Sin embargo, los agentes con mayor riqueza tienen aproximadamente la misma riqueza, lo que se muestra con una distribución tipo gaussiana, con una dispersión pequeña. Esto sucede porque los agentes que se hacen más ricos absorben la riqueza de su vecindad. Debido a que las interacciones son locales, no hay intercambio entre estos agentes, por lo que mantienen prácticamente la misma riqueza en el tiempo. Esta distribución de probabilidad para los agentes con mayor riqueza, cambia al aumentar el número de vecinos conectados o el alcance de interacción k , como se observa en la

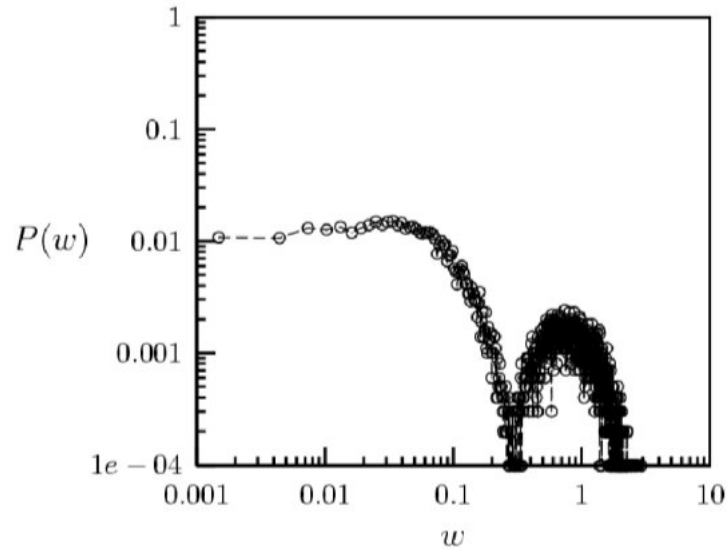


Figura 3.9: *Distribuciones de riqueza del sistema para $k = 4$, $u = 0.3$, $f = 0.5$.*

Figura 3.10. Para los valores de parámetros de la Figura 3.10 se obtiene un valor de $G \approx 0.7$.

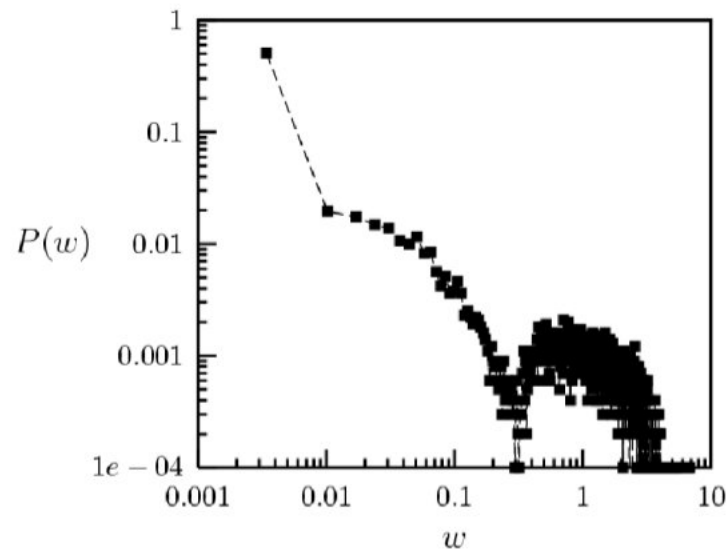


Figura 3.10: *Distribuciones de riqueza del sistema para $k = 16$, $u = 0.3$, $f = 0.1$.*

Note que existe un mínimo en $P(w)$ para el valor $w \approx u$ que representa la separación de la distribución de riqueza en dos grupos, que podemos denominar agentes ricos y agentes pobres. Al aumentar k , pueden existir conexiones entre los agentes más ricos del sistema, por lo que éstos pueden intercambiar riqueza. Esto conduce a que la distribución de riqueza en este rango de w se realice de manera no equitativa, lo que se

evidencia por la formación de una distribución de ley de potencia para valores grandes de w .

3.2. Competencia entre interacciones locales y globales.

En el modelo que presentamos en la sección anterior [28, 29], la noción de estrato económico se implementa mediante la comparación de las riquezas de los agentes con respecto al umbral u : si el valor absoluto de la diferencia de riquezas es menor que el umbral, entonces los agentes pertenecen al mismo estrato económico y pueden realizar interacciones entre ellos. En esta sección proponemos una definición alternativa del umbral, basado en la diferencia de riquezas relativa entre agentes. Con esta nueva definición de u hemos investigado los efectos de las interacciones locales y globales en el comportamiento colectivo del sistema [30].

En la Figura 3.11 se muestran las dos estructuras topológicas de las redes subyacentes que estudiamos en esta sección.

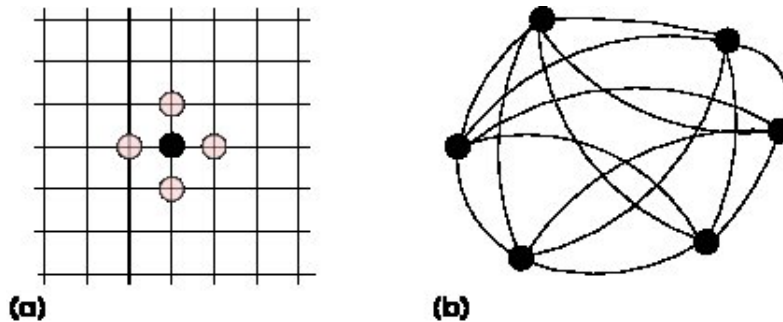


Figura 3.11: (a) Red bidimensional con interacciones locales, $k = 4$. (b) Red con interacciones globales.

La dinámica de interacción de los agentes en el modelo, siguen las mismas reglas que las presentadas en la sección anterior. Sin embargo, utilizaremos la siguiente definición de estrato: los agentes i y j pertenecen al mismo estrato si satisfacen la siguiente condición

$$\left| \frac{w_i(t) - w_j(t)}{w_i(t) + w_j(t)} \right| < u.$$

Esta normalización de u define el estrato en términos de riqueza relativa y no de diferencias de riquezas absolutas.

Para la simulación de los dos casos hemos empleado $N = 1000$. El tiempo de simulación es de $T = 10^7$ iteraciones. Los resultados que se muestran a continuación

representan el estado asintótico del sistema; es decir, cuando se ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, caracterizado por la estabilidad de los valores de los parámetros de orden.

La Figura 3.12 muestra a G en el espacio de parámetros (u, f) , para una red con interacciones locales y una red con interacciones globales.

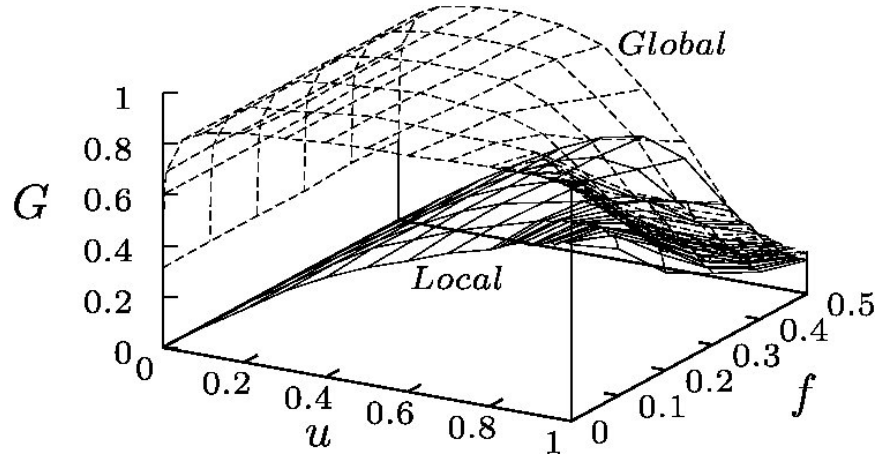


Figura 3.12: Coeficiente de Gini en el espacio de parámetros (u, f) para las redes con interacción local y global.

Se observa que tanto para el caso local como el caso global, cuando $u < 0.4$ G aumenta independientemente del valor de f . Para el caso local, G aumenta de una manera gradual y constante; mientras que para el caso global, para valores pequeños de u , G aumenta con bastante rapidez hasta alcanzar un valor constante para $u < 0.4$. En el caso global, los valores de $G \rightarrow 1$, mientras que para el caso local, los valores de G son mucho menores que 1. Para $u > 0.4$, el parámetro f comienza a tener un efecto importante en ambos sistemas. A pesar de que el valor de G es diferente para los casos global y local, para valores altos de u y f , el comportamiento de G presenta similitudes en ambos sistemas, presentando una disminución considerable de G en este rango de parámetros.

En la Figura 3.13 se muestra la actividad A del sistema en el espacio de parámetros (u, f) , para la red de interacción local y la red de interacción global.

Para ambos casos, global y local, A tiene el mismo comportamiento, como se muestra en la Figura 3.13. Además, se puede ver que la actividad económica A aumenta en forma considerable en el estado asintótico de ambos sistemas para valores altos de u y f .

En conclusión, la inclusión de una red de conectividad o localización espacial para las interacciones de los agentes económicos, permite el uso de conceptos asociados a los sistemas dinámicos espaciotemporales, en modelos económicos. Hemos considerado un modelo de intercambio económico estratificado definido sobre una red y hemos mostrado que se forman diferentes patrones espaciotemporales al variar los parámetros del

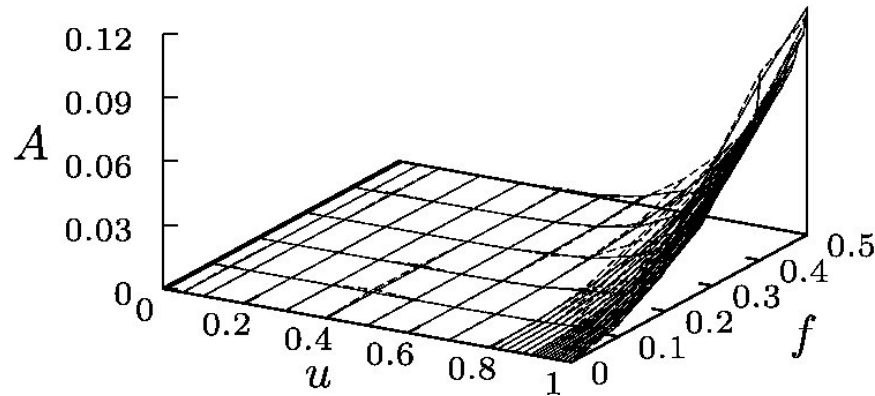


Figura 3.13: Actividad económica del sistema en el espacio de parámetros (u, f) para las redes con interacción local y global.

sistema. Hemos caracterizado estos patrones como estados laminares, intermitentes y turbulentos, en analogía con los sistemas dinámicos espaciotemporales. Hemos caracterizado la transición del estado laminar al estado turbulento mediante la actividad del sistema, una cantidad estadística que mide la riqueza promedio intercambiada, por unidad de tiempo, en el estado asintótico de sistema. La actividad depende principalmente de la dinámica, representada por los parámetros u y f . Por otro lado, el coeficiente de Gini, que caracteriza la desigualdad en la distribución de riqueza, depende mayormente de la topología de la red, descrita por los parámetros k y p . Luego, niveles elevados de intercambio económico (actividad alta), se encuentran asociados con valores pequeños del coeficiente de Gini, esto es, con distribuciones de riqueza más equitativas en el sistema.

La topología de la red subyacente no influye de manera significativa en la actividad A del sistema. En contraste, el coeficiente de Gini G se incrementa cuando el rango de interacciones, representado por k , aumenta. Hemos mostrado que la propiedad topológica que influye de manera significativa en el cambio de G es el coeficiente de agrupamiento y no la longitud característica de la red. La Figura 3.6 sugiere que una distribución más equitativa de riqueza en una economía estratificada puede favorecerse mediante la reducción del tamaño de la vecindad de los agentes interactuantes.

Dear Dr. Ito, my teacher says that your paper is wrong.

CARLOS JAIMES, TESISISTA CAÓTICO (2004).

4

Sistemas Dinámicos Coevolutivos

La mayoría de los estudios recientes sobre redes gravitan alrededor de dos preguntas, las cuales corresponden a dos líneas de investigación diferentes: ¿cómo varían las propiedades topológicas de una red que cambia en el tiempo? y, ¿cómo depende el funcionamiento de la red de sus propiedades topológicas?

La primera línea de investigación se refiere a la *dinámica de las redes*, donde la topología de la red se considera como un sistema dinámico que cambia en el tiempo de acuerdo a determinadas reglas, a menudo locales. La investigación que se realiza en esta área ha revelado que ciertas reglas de evolución conducen a estructuras topológicas, con propiedades específicas. Los ejemplos más notables incluyen la formación de redes de pequeño mundo [21], y las redes libres de escala [22].

La segunda línea de investigación se enfoca en la *dinámica sobre las redes*, donde cada nodo en la red representa un sistema dinámico. Cada uno de los nodos se encuentra acoplado, según la topología de la red, con otros nodos. En este caso, la topología de la red permanece estática, mientras que las variables de estado de los nodos cambian en el tiempo. Por ejemplo, los modelos de redes de mapas acoplados [76, 77] pertenecen a esta categoría. Bajo esta perspectiva, se han estudiado procesos importantes tales como la sincronización de sistemas dinámicos [78] y problemas de formación de opinión y de transmisión de enfermedades [79–83]. Estos estudios han dejado claro el hecho de que ciertas propiedades topológicas de la red tienen un gran impacto en la dinámica del sistema. Por ejemplo, se ha podido demostrar que si se vacuna a una fracción de nodos en una red con topología libre de escala, no se puede detener una epidemia [80, 81].

Hasta hace unos años, estas dos líneas de investigación eran abordadas de manera independiente. Un modelo dado se encargaba de describir la dinámica *de* una cierta red, o de describir la dinámica *sobre* una determinada red. Recientemente, la investigación de sistemas complejos ha puesto en evidencia que muchos sistemas del mundo real pueden ser considerados como redes de elementos interactivos donde tanto los estados de los elementos y sus conexiones cambian en el tiempo. En este caso, las conexiones

entre un par de elementos en el sistema pueden cambiar su intensidad, o aparecer y desaparecer, mientras el sistema evoluciona en diferentes escalas de tiempo. Estas modificaciones en la topología de la red ocurren como un efecto de retroalimentación: la topología determina la evolución de los estados de los nodos, lo que a su vez determina la modificación de la topología; es decir, la red se vuelve *adaptativa* [24,26,32,117,131,132]. Esta retroalimentación puede resultar en una interacción mutua no trivial entre una topología que cambia en el tiempo y la dinámica de los nodos. Los sistemas que exhiben tal comportamiento se han denominado sistemas dinámicos *coevolutivos* o *adaptativos*. El esquema de la Figura 4.1, muestra las interacciones que se llevan a cabo en un sistema coevolutivo.

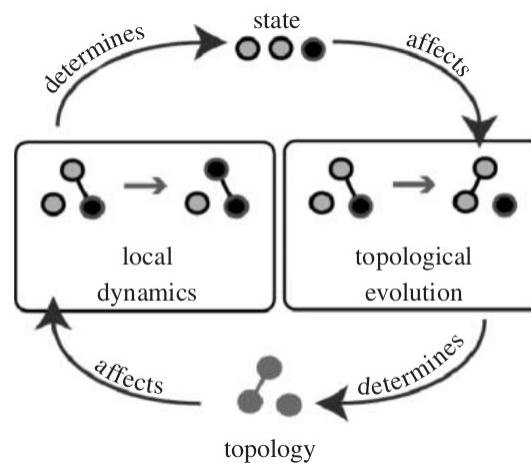


Figura 4.1: En un sistema coevolutivo, la evolución de la topología depende de la dinámica de los nodos. Por lo tanto, se crea una retroalimentación que genera un intercambio de información en el sistema.

A manera de ilustración, consideremos una red de carreteras. La topología de la red, que es el patrón de carreteras, influye sobre la dinámica de los estados de los nodos; es decir, el flujo y la densidad del tráfico entre ciudades. Pero, si los embotellamientos se hacen frecuentes sobre una cierta vía, es probable que se construyan nuevas carreteras para disminuir la carga sobre la vía congestionada. De esta manera, existe una retroalimentación entre el estado de los nodos y la topología de la red.

El fenómeno de coevolución se observa también en las redes sociales. Las opiniones de los individuos cambian debido a las interacciones con sus vecinos; a su vez la escogencia de vecinos depende de las opiniones de los individuos.

En la actualidad, sistemas coevolutivos son foco de la investigación en diversas disciplinas científicas. Aunque los estudios realizados hasta la fecha sólo se pueden considerar como los primeros pasos para la construcción de una teoría de sistemas coevolutivos, ya se puede evidenciar en ellos diversos aspectos generales de estos sistemas. A pesar de la diversidad de aspectos que se abordan, los resultados que se reportan muestran que ciertos fenómenos dinámicos aparecen con frecuencia en las redes coevolutivas; tales como

la formación de topologías complejas, emergencia espontánea de estructuras espaciales y transiciones fuera del equilibrio, entre otros.

4.1. Modelo de redes dinámicas adaptativas.

En esta sección, revisaremos uno de los primeros modelos con dinámica coevolutiva, introducido por Ito y Kaneko [31]. Se trata de un sistema de elementos dinámicos con interacciones adaptativas, el cual es conceptualmente simple y presenta características generales, y además exhibe interesantes comportamientos colectivos.

Ito y Kaneko consideran un sistema de mapas caóticos acoplados, donde la intensidad de los acoplamientos depende de los estados de los mapas. El sistema se describe por medio de las siguientes ecuaciones:

$$x_{n+1}^i = f \left((1 - c)x_n^i + c \sum_{j=1}^N w_n^{ij} x_n^j \right), \quad 4.1$$

$$w_{n+1}^{ij} = \frac{1 + \delta g(x_n^i, x_n^j)}{\sum_{k=1}^N 1 + \delta g(x_n^i, x_n^k) w_n^{ik}} w_n^{ij}, \quad 4.2$$

$$g(x, y) = 1 - 2|x - y|, \quad 4.3$$

donde x_n^i representa la variable de estado del elemento o mapa i ($i = 1, \dots, N$) en el tiempo discreto $n \in \mathbb{Z}$ y N es el número de elementos o tamaño del sistema. El parámetro c en la ecuación (4.1) indica en qué medida un elemento i depende de los demás elementos del sistema. El acoplamiento entre los elementos en un tiempo n está descrito por la matriz w_n . El elemento w_n^{ij} de la matriz de acoplamiento indica la magnitud de la conexión del elemento j con el elemento i en el tiempo n . Cabe decir que la matriz w_n tiene todos los elementos de su diagonal igual a 0, ya que los elementos no se acoplan consigo mismos. La función f es el mapa que determina la dinámica local de los elementos. Ito y Kaneko utilizan el mapa logístico $f(x) = ax(1 - x)$, el cual presenta propiedades universales bien conocidas y constituye un paradigma en la investigación de los sistemas caóticos. La ecuación (4.3) determina la dinámica de las interacciones. La función g , en las ecuaciones (4.3) y (4.4), expresa la regla según la cual evolucionan las conexiones; en este caso g reproduce en buena medida la regla neurofisiológica de Hebb [85]. El parámetro δ representa la plasticidad de las conexiones. Ito y Kaneko asumen que las conexiones tienen un límite en su crecimiento; por esa razón introducen el divisor en la ecuación (4.3), de tal manera que la suma de las conexiones que entran en un elemento (una fila de la matriz de conectividad) sea la unidad; es decir, las magnitudes de las conexiones están normalizadas.

En este sistema se pueden observar las distintas fases (excepto una; la fase parcialmente ordenada) correspondientes a mapas globalmente acoplados [86]. La Figura 4.2 muestra el espacio de fase del sistema en función de los parámetros a y c , para un valor de $\delta = 0.1$.

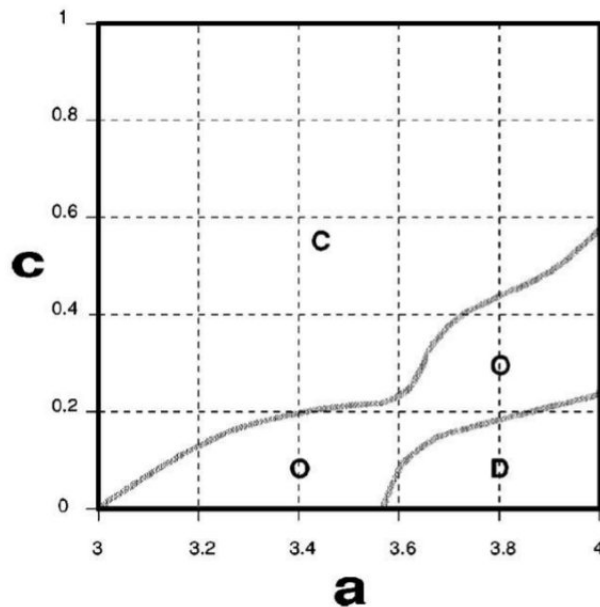


Figura 4.2: *Espacio de fase del sistema de Ito y Kaneko en función de los parámetros a y c . **C** indica la fase sincronizada. **O** es la fase ordenada o de clusters. La región de parámetros marcada con **D** es donde el sistema se encuentra desincronizado [31]*

Fase Sincronizada.

En la Figura 4.2 se puede observar una región marcada con “**C**” que indica la fase sincronizada del sistema. Para esta fase, la matriz de conectividad tiene una forma semejante a la que se muestra en la Figura 4.3. En esta representación el tamaño de los cuadrados es proporcional al valor del elemento w_n^{ij} de la matriz de acoplamiento. Cuando el cuadrado tiene el tamaño de la celda, esto indica que la conexión tiene valor 1. Se puede observar que la matriz de conectividad es bastante homogénea y llega a un estado asintótico.

Fase Ordenada.

En cierto rango de parámetro se observa una fase ordenada en la cual se forman clusters (subconjuntos de elementos sincronizados entre sí) que se identifican en la Figura 4.2 con la letra “**O**”. Las siguientes figuras muestran la matriz de conectividad para dos valores de parámetros distintos en la fase de clusters. En la primera matriz (Figura 4.4(a)) se observa la formación de dos clusters, y en la segunda (Figura 4.4(b)) la formación de 25 clusters, que es el número total de elementos dividido entre dos. Cabe destacar que las conexiones para estos estados del sistema tienden a congelarse.

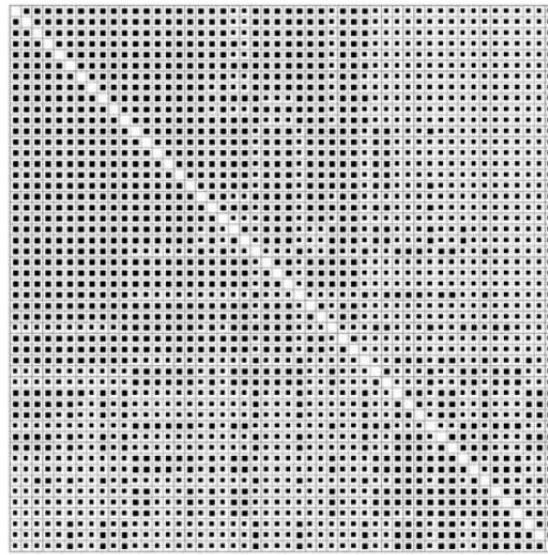


Figura 4.3: Ejemplo de matriz de conectividad que se forma en la fase ordenada denotada por “O” en la Figura 4.2. El área de los cuadrados dibujados en las celdas de la matriz es proporcional al valor w_n^{ij} de la celda [31]. $N = 50$, $a = 3.6$, $c = 0.3$, $\delta = 0.1$.

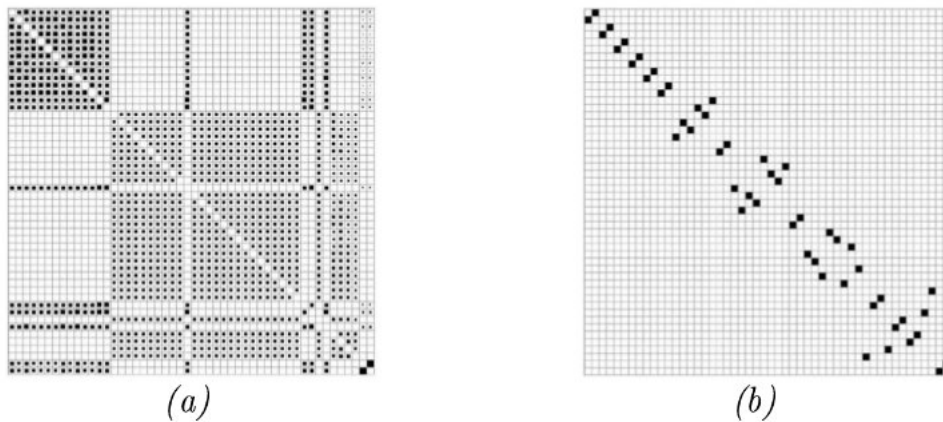


Figura 4.4: Matrices de conectividad para la fase ordenada o de la formación de clusters “O” (dominios dinámicos sincronizados). (a) Muestra la formación de dos clusters ($a = 3.6$, $c = 0.2$, $\delta = 0.1$). (b) Muestra dominios de dos elementos ($a = 3.97$, $c = 0.3$, $\delta = 0.1$).

Fase Desincronizada.

Para la fase “D”, en la Figura 4.2, se tiene en cambio matrices de conectividad dependientes del tiempo, como las que se muestran en la Figura 4.5 para un tiempo dado.

La primera de éstas (a), muestra una matriz de conectividad que indica la formación de clusters en pares, existiendo un cluster con mas de dos elementos. Este grupo de

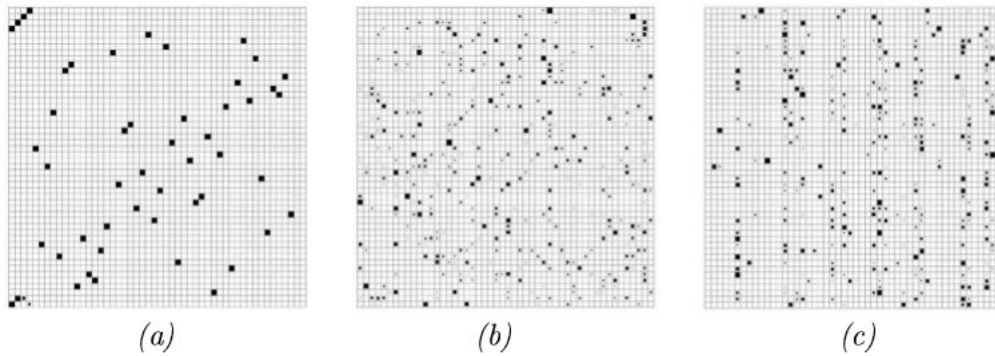


Figura 4.5: *Matrices de conectividad en la fase desincronizada del sistema, $N = 50$, $\delta = 0.1$. (a) Muestra clusters en pares, $a = 3.97$, $c = 0.2$. (b) Formación de estructura cuasi-simétrica, $a = 3.97$, $c = 0.15$. (c) Estructura de conectividad en la que unos elementos tienen, notablemente, más conexiones hacia afuera que otros, $a = 3.97$, $c = 0.125$ [31].*

elementos cambia con el tiempo.

La segunda matriz (b), muestra cierto grado de simetría, pero estas conexiones entre pares ya son más débiles y, por la conservación de pesos en las conexiones, los clusters se hacen más grandes. Surgen también conexiones que no son simétricas.

En la tercera matriz de conectividad (c), se ven patrones verticales que indican que hay elementos más conectados hacia los demás que otros. Es importante notar que patrones horizontales similares a los verticales observados en la Figura 4.5(c) no se podrían formar porque la suma de las celdas de una fila siempre deben estar normalizadas a 1.

Hacemos la observación de que la estructura de clusters observadas por Ito y Kaneko, tales como la Figura 4.4(a), corresponde a la matriz de adyacencia de una red con estructura modular o de comunidades. Esta observación nos ha motivado a investigar la relación entre la emergencia de estructuras modulares en redes y dinámica coevolutiva. Exploraremos esta idea en el Capítulo 6.

4.2. Transición de fase en la coevolución de redes y opiniones.

En esta sección revisamos un modelo reciente sobre coevolución de redes y opiniones en dinámica social, propuesto por Holme y Newman [32]. La simplicidad conceptual de este modelo ha inspirado una gran cantidad de investigaciones posteriores.

Se ha observado que muchas redes sociales reales tienden a dividirse en grupos o comunidades de individuos similares. Una pregunta obvia es si los individuos se hacen similares debido a que están conectados [38, 87–91], o si se agrupan debido a que son similares [92]. Ambas situaciones han sido estudiadas mediante modelos físicos. La

primera, usando modelos de formación de opinión [38, 89, 93], y la segunda empleando modelos basados en homofilia [94–96]. Sin embargo, el sentido común nos indica que las diferencias entre estos dos escenarios no está del todo bien definida. Al contrario, el mundo real se autoorganiza por una combinación de los dos, a saber, la red cambia en respuesta a las opiniones, y las opiniones cambian en respuesta a la red.

Consideremos una red con N nodos, los cuales representan individuos, unidos por M enlaces, que representan las relaciones entre los individuos. Se asume que cada individuo posee una de G posibles opiniones acerca de algún tópico de interés. La opinión del agente i se denota por g_i . Asumimos que el número de opiniones posibles G escala en proporción al número de agentes, y se parametriza esta proporcionalidad por $\gamma = N/G$. Debido a la dinámica disipativa del procesos de cambio de opinión a ser definido, algunas opiniones pueden extinguirse mientras el sistema evoluciona; por lo tanto, el número de distintas opiniones en el estado asintótico podría ser menor que G .

La red inicial es aleatoria, y las opiniones son asignadas de manera aleatoria entre los nodos del sistema. La dinámica del sistema se lleva a cabo iterando el siguiente algoritmo:

1. Escoger de manera aleatorio un nodo i , tal que $k_i > 0$. Con probabilidad ϕ , seleccionar de manera aleatoria un agente j , tal que $j \in \nu_i$, donde ν_i es el conjunto de vecinos de i . Seleccione un agente $m \notin \nu_i$, tal que $g_m = g_i$. Retirar el enlace entre los agentes i y j , y establecer el enlace entre los agentes m y i .
2. De lo contrario, con probabilidad $1 - \phi$ escoger de manera aleatoria un agente $j \in \nu_i$, tal que $g_i \neq g_j$, y haga $g_i = g_j$.

El paso 1 describe el proceso de recableado que permite la adquisición de nuevas conexiones, mientras que el paso 2 muestra el proceso de cambio de estado de los nodos; en este caso los estados se hacen similares o iguales como consecuencia de las conexiones.

Note que, tanto el número de enlaces M y el número de total de opiniones posibles G , son constantes. Por lo tanto, el modelo posee tres parámetros: el grado promedio de la red $\bar{k} = 2M/N$, el número promedio de agentes con una opinión dada $\gamma = N/G$, y el parámetro ϕ . En este caso, los dos primeros parámetros se fijan, mientras que ϕ varía.

La Figura 4.6 ilustra el modelo de Holme y Newman.

El comportamiento cualitativo del sistema es obvio. Ya que ambos pasos en la dinámica de interacción tienden a disminuir el número de pares conectados con diferentes opiniones, el estado asintótico del sistema consistirá en componentes o subgrafos separados, desconectados sí, con todos los nodos en una componente compartiendo la misma opinión. Luego, el sistema se segrega en un conjunto de grupos, tales que ningún nodo tiene vecinos con los cuales no comparta opinión. A este estado se le llama estado de *consenso*. Además, una vez que se alcanza el consenso, todas las acciones en el sistema involucran un arreglo aleatorio de los enlaces dentro de los subgrafos y, por lo

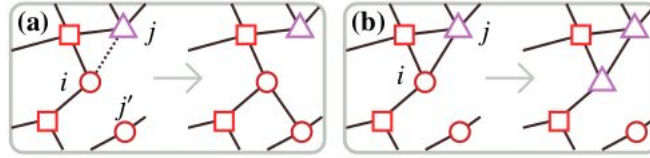


Figura 4.6: Ilustración del modelo de Holme-Newman. Las diferentes formas en los nodos representan sus estados. En cada paso de tiempo, el sistema se actualiza de acuerdo al proceso que se ilustra en (a) con probabilidad ϕ o en el panel (b) con probabilidad $1 - \phi$. En (a) se selecciona aleatoriamente un nodo i , y una de sus conexiones (en este caso el enlace (i, j)) es recableada a uno nuevo nodo j' con las misma opinión de i . En (b) el nodo i adopta la opinión de uno de sus vecinos, en este caso del nodo j [32].

tanto, en el límite de tiempos muy largos, los subgrafos o componentes se convierten en redes aleatorias.

El interés principal de este modelo está en el número y los tamaños de los grupos que se forman cuando el sistema se acerca al consenso. Consideremos la distribución $P(s)$ de los tamaños s de los grupos en el consenso. En el límite $\phi \rightarrow 1$, sólo se llevan a cabo actualizaciones de reconexión, y por lo tanto, el estado de consenso consiste en subgrafos formados por agentes que no cambiaron sus opiniones. Ya que las opiniones se asignan inicialmente de manera aleatoria, los tamaños de estos subgrafos siguen una distribución multinomial o una distribución de Poisson con media γ en el límite de N grande. Por otro lado, en el límite $\phi \rightarrow 0$, sólo se llevan a cabo cambios de estado, y por lo tanto, el estado de consenso se alcanza, manteniendo el número de subgrafos que había inicialmente en el sistema, que corresponde a las componentes de un grafo aleatorio. Ya que nos encontramos en la región donde $\bar{k} > 1$ en la que existe una componente del orden del tamaño del sistema, en el consenso se encontrará un subgrafo gigante, y pequeños subgrafos que siguen una distribución exponencial. Por lo tanto, al variar ϕ , podemos tener una transición desde un estado de consenso, con pequeños subgrafos cuyo tamaño medio es γ , hacia un estado de consenso en el cual existe un subgrafo grande, cuyo tamaño es del orden del tamaño del sistema.

Este comportamiento es característico de un sistema que presenta una transición de fase continua, lo cual nos lleva a suponer que el modelo presenta una transición de fase al disminuir ϕ . En otras palabras, existe una transición entre un régimen donde la población mantiene una amplia variedad de puntos de vista acerca de un tópico particular, y otro en el que la mayoría de individuos cree exactamente lo mismo.

La Figura 4.7 muestra la gráfica de $P(s)$ para $\bar{k} = 4$ y $\gamma = 10$. La Figura 4.7 muestra que existe un cambio cualitativo al ir del régimen con pequeños grupos al régimen con un grupo gigante.

Para valores intermedios de ϕ , alrededor de 0.458, se encuentra una distribución en los tamaños de los subgrafos que tiene la forma de una ley de potencia, $P(s) \sim s^{-\alpha}$, lo cual es una característica típica de criticalidad. El exponente α de la ley de potencia

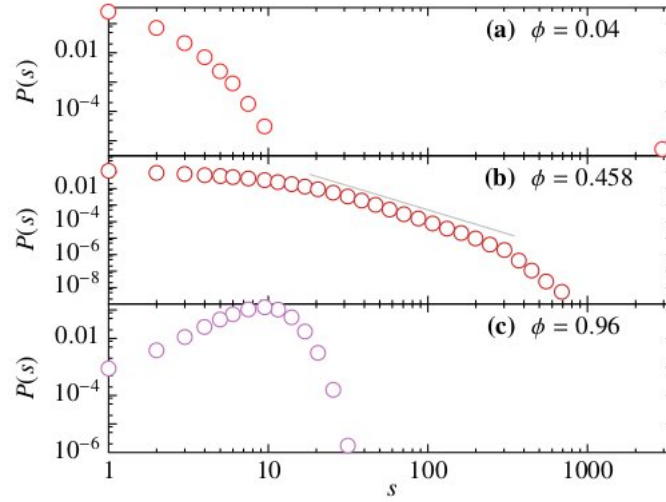


Figura 4.7: Histograma de los tamaños de los grupos en el estado de consenso para valores de ϕ menores que el valor crítico (a), en el valor crítico (b), y mayores que el valor crítico (c). Los valores de los otros parámetros son $N = 3200$, $M = 6400$ (con $\hat{k} = 4$), y $\gamma = 10$. La distribución en el panel (b) parece seguir una ley de potencia para una parte de su rango, con exponente 3.5 ± 0.3 , como lo indica la línea gris. Los datos numéricos son un promedio de 10^4 realizaciones para cada valor de ϕ [32].

tiene un valor de 3.5 ± 0.3 .

Para caracterizar el punto crítico de la transición, se realiza un análisis de tamaño finito en la región crítica del parámetro ϕ . Para realizar este análisis, se debe escoger un parámetro de orden para el modelo. Se escoge el tamaño del grupo más grande en el sistema, dividido entre N , que se denota por S . Los argumentos anteriores sugieren que esta cantidad debe ser del tamaño $O(N^{-1})$ para valores de ϕ por encima del valor donde ocurre la transición (cero en el límite termodinámico) y $O(1)$ por debajo. Se asume una relación de escala de la forma

$$S = N^{-\alpha} F(N^b(\phi - \phi_c)), \quad 4.4$$

donde ϕ_c es el valor crítico de ϕ (que posiblemente sea función de \bar{k} y γ), F es una función universal de escala (acotada cuando su argumento tiende a $\pm\infty$), y a y b son exponentes críticos. Para estimar el valor de ϕ_c , se grafica $N^a S$ en función de ϕ y se ajusta el valor de a tal que los resultados de las simulaciones, para diferentes N , pero \bar{k} y γ fijos, se crucen en el mismo punto, que será el punto crítico. La Figura 4.8(a) muestra esta gráfica, para $\bar{k} = 4$ y $\gamma = 10$. Con $a = 0.61 \pm 0.05$ se obtiene un punto de cruce único para $\phi_c = 0.458 \pm 0.008$, que concuerda con la estimación realizada para ϕ_c en la Figura 4.7.

Usando estos valores para ϕ_c y a , podemos determinar el exponente b al graficar $N^a S$ en función de $N^b(\phi - \phi_c)$. Ya que $F(x)$ es una función universal, para escoger de manera correcta el valor de b , se debe encontrar un colapso de los datos en la región

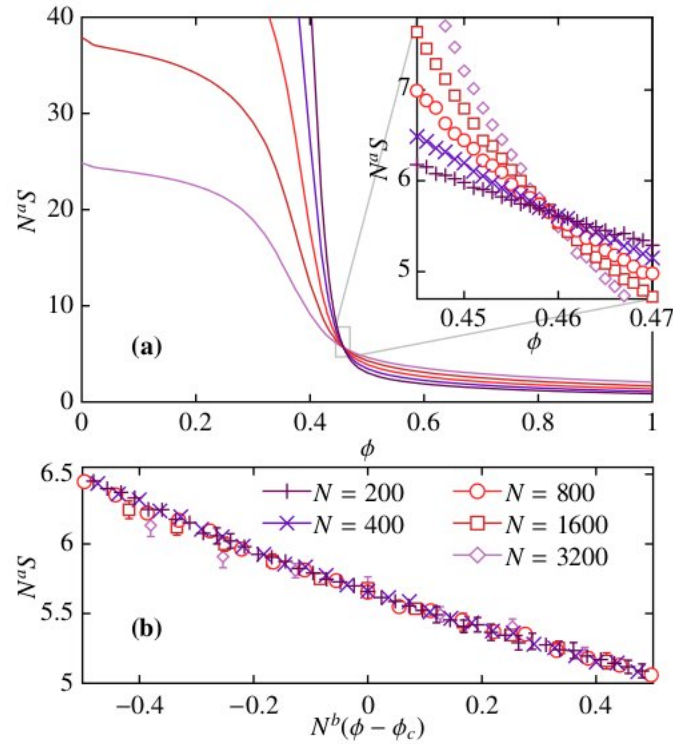


Figura 4.8: Análisis de tamaño finito para $\bar{k} = 4$ y $\gamma = 10$. (a) Gráfica del punto de cruce usado para determinar el valor del punto crítico ϕ_c y el exponente a . Se halló $\phi_c = 0.458 \pm 0.008$ y $a = 0.61 \pm 0.05$. La figura insertada muestra un acercamiento de la región cercana al punto crítico. (b) Colapso usado para determinar el exponente b el cual tiene un valor de $b = 0.7 \pm 0.1$. Los datos son un promedio de 10^4 realizaciones para cada valor de ϕ . Se muestran las barras de error cuando son más grandes que los puntos [32].

crítica. La Figura 4.8(b) muestra que los datos colapsan para $b = 0.7 \pm 0.1$.

Holme y Newman llevaron a cabo un análisis de tamaño finito similares para otros valores de \bar{k} y γ . Como se espera, se observa que el valor de ϕ_c de la transición varía, como se muestra en la Figura 4.9. Sin embargo, para estos valores de \bar{k} y γ , los valores de los exponentes críticos son consistentes con $a = 0.61$ y $b = 0.7$.

A pesar de las concordancias cualitativas entre la presente transición de fase y la transición de percolación, los valores que se encontraron para a y b muestra que estas dos transiciones pertenecen a diferentes clases de universalidad: los exponentes correspondientes a una transición de percolación de un grafo aleatorio son $a = b = \frac{1}{3}$, los cuales son incompatibles con los valores encontrados por Holme y Newman.

En resumen, Holme y Newman propusieron un modelo simple para la formación simultánea de opiniones y redes sociales, en una situación en que ambos procesos se adaptan el uno al otro. Este modelo contrasta con modelos anteriores de formación de opinión donde la estructura social se había mantenido estática y las opiniones son

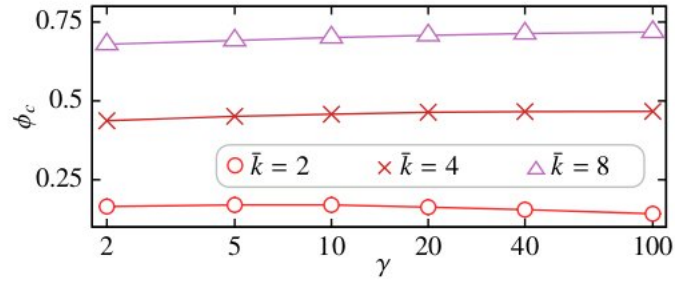


Figura 4.9: Valores de ϕ_c en funciones de γ para varios valores de \bar{k} obtenidos por un análisis de tamaño finito para $N = 200, 400, 800$ y 1600 . Todos los puntos son un promedio de 10^4 realizaciones [32].

el resultado de la estructura ya existente [90, 93, 98–100]. Este es un modelo dinámico fuera del equilibrio que llega al consenso en tiempo finito en una red finita. El resultado más relevante del modelo de Holme y Newman es el hallazgo de una transición de fragmentación en la estructura de la red, que se puede analizar como una transición de fase.

Hacemos notar que el modelo de Holme y Newman constituye la base conceptual para el desarrollo de un modelo generalizado de coevolución que proponemos en el Capítulo 6.

Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier pregunta; de dudar de cualquier afirmación; de corregir cualquier error.

JULIUS ROBERT OPPENHEIMER (1904-1967)

5

Modelos de sistemas coevolutivos

En el presente Capítulo presentamos dos modelos de sistemas sujetos a dinámicas coevolutivas. El primero se refiere a un modelo de influencia social con una dinámica de formación de opiniones y sujeta a campos globales. El segundo sistema corresponde un modelo de propagación de epidemias, del tipo susceptible-infectado-recuperado (*SIR*) definido sobre una red coevolutiva.

5.1. Un modelo coevolutivo de formación de opinión con campos globales.

Un problema abierto en sistemas de partículas interactivas fuera del equilibrio, es la descripción de los comportamientos colectivos producidos por las interacciones globales. Una interacción global consiste en una influencia o un campo que afecta a todas las partículas del sistema. El origen de la interacción global puede ser externa, tal como un forzamiento, o puede ser endógeno, tal como un acoplamiento con el campo medio del sistema. También pueden existir campos globales externos con retroalimentación del sistema, lo cual se ha denominado acoplamiento ambiental [101].

El comportamiento colectivo de los sistemas coevolutivos sujetos a campos globales ha sido poco estudiado. En esta sección, consideramos campos interactivos que pueden tener origen externo (forzamiento externo), o que provengan de una contribución de un conjunto de elementos del sistema (dinámica autónoma), tal como una función global de acoplamiento. Nuestro estudio permite comparar los efectos de estos dos tipos de campos globales sobre las propiedades colectivas del sistemas coevolutivos. En el contexto de los sistemas sociales, un campo global puede modelar la influencia de medios de comunicación masivos [102–104]. Un campo global externo puede ser considerado como una propaganda externa actuando sobre el sistema [103]. Del mismo modo, un campo global autónomo representa la influencia de la moda o de las características culturales

más abundantes en un sistema social [102].

Consideremos una red aleatoria consistente en N nodos o agentes, con grado promedio \bar{k} ; es decir, \bar{k} es el número promedio de vecinos que tiene cada nodo. Sea ν_i el conjunto de vecinos del nodo i , el cual posee k_i elementos. Denotamos la variable de estado del nodo i como g_i . Por simplicidad, suponemos que g_i puede tomar solamente G posibles valores discretos. $g_i \in \{0, 1, \dots, G - 1\}$. En lo que sigue, fijamos los valores de $G = 100$, $N = 1000$ y $\bar{k} = 4$.

Introducimos un campo global F cuyo estado se denota por g_F , el cual puede interactuar con cualquier nodo i del sistema. Formalmente, la acción del campo sobre un agente i puede considerarse similar a la de un vecino adicional del agente i . Entonces, el sistema con dinámica coevolutiva, sujeto a un campo global, corresponde a un sistema cuyos elementos poseen tanto interacciones locales como globales.

Consideraremos dos tipos de campos globales F :

- Un *campo externo*, cuyo valor g_F se selecciona del conjunto $\{0, 1, \dots, G - 1\}$ aleatoriamente al comienzo de la simulación. Este valor no cambia en el tiempo posterior. En este caso, el campo global, corresponde a un forzamiento externo uniforme y constante sobre el sistema. Un campo externo constante puede ser interpretado como un estado específico (tal como una propaganda o una opinión) que se trata de imponer desde fuera sobre todos los elementos del sistema.
- Un *campo autónomo*, cuyo valor g_F corresponde al valor más abundante entre los estados que exhiben todos los nodos el sistema. Si el valor más abundante de las variables de estado no es único, se escoge una de las posibilidades, de manera aleatoria, con igual probabilidad. El valor g_F corresponde a la moda estadística de un conjunto de variables. Este tipo de campo es una función de interacción global autónoma, pues proviene de los estados de todos los elementos del sistema. El campo autónomo es espacialmente uniforme y puede cambiar en el tiempo. Este campo suministra la misma información global a cada elemento en cada instante, pero su valor puede cambiar mientras el sistema evoluciona. En el contexto de modelos culturales y de formación de opinión [102], este campo puede representar la influencia de un medio de comunicación masiva compartida de manera idéntica por todos los agentes, y la cual contiene la opinión predominante presente en la sociedad, tal como una tendencia o moda global.

Para la dinámica de los nodos, escogemos una regla de imitación simple, similar a la del modelo del votante, la cual ha sido utilizada en varios contextos [32, 43, 105–107]. La intensidad del campo global se representa mediante el parámetro $B \in [0, 1]$, el cual mide la probabilidad de interacción de cualquier agente con el campo global. Si la interacción de un agente con el campo global ocurre dentro de esta probabilidad, el agente considera al campo como un vecino adicional.

Como condición inicial, distribuimos de manera aleatoria y uniforme los posibles G estados entre los N nodos de la red aleatoria caracterizada con \bar{k} . Entonces, dado un campo global F , ya sea externo o autónomo, la dinámica del sistema se define mediante siguiente algoritmo iterativo:

1. Escoger aleatoriamente un agente i tal que $k_i > 0$.
2. Con probabilidad P_r , seleccione de manera aleatoria un agente $j \in \eta_i$ y otro agente $l \notin \eta_i$ tal que $g_i = g_l$; quite el enlace (i, j) y coloque el enlace (i, l) .
3. Con probabilidad $(1 - P_r)B$, fije $g_i = g_F$.
4. Con probabilidad $(1 - P_r)(1 - B)$, escoja de manera aleatoria un agente $m \in \eta_i$ y fije $g_i = g_m$.
5. Actualice el valor de g_F al del campo, si se requiere (campo autónomo).

El paso 2 describe el proceso de recableado que permite la adquisición de nuevas conexiones, el paso 3 describe la interacción con el campo. El paso 4 indica el proceso de cambio de estado de los nodos, debido a las interacciones con sus vecinos; en este caso los estados se hacen similares o iguales como consecuencia de las conexiones. Hemos verificado que el comportamiento colectivo del sistema es estadísticamente invariante si los pasos 2 y 3 del algoritmo son intercambiados.

Antes de considerar los efectos de un campo global sobre el sistema, recordaremos el modelo original de Holme y Newman [32] en ausencia de campos, lo que equivale a tener un valor $B = 0$ en la intensidad de interacción con el campo global. La dinámica de imitación de los nodos tiende a incrementar el número de conexiones entre nodos con el mismo estado, mientras que el proceso de recableado favorece la fragmentación de la red. Por lo tanto, la evolución temporal del sistema eventualmente conduce a la formación de un conjunto de componentes separados o subgrafos, desconectados entre sí, donde todos los miembros de cada subgrafo comparten un mismo estado. A tales subgrafos los denominamos *dominios*.

El comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado por el tamaño promedio normalizado del dominio más grande en el sistema, el cual denotamos como S_{max} , una cantidad que actúa como parámetro de orden del sistema. La Figura 5.1 muestra la gráfica de S_{max} como función de P_r , para diferentes valores de la intensidad del campo B .

En ausencia de campos ($B = 0$) S_{max} exhibe una transición de fase en un valor crítico $P_r^* = 0.458$, de un régimen caracterizado por la existencia de un dominio cuyo tamaño es del orden del tamaño del sistema, donde $S_{max} \rightarrow 1$, a un estado de fragmentación de la red, el cual consiste en la presencia de dominios pequeños, donde $S_{max} \rightarrow 0$ [32].

Cuando se aplica un campo global externo o autónomo, la Figura 5.1 muestra que la transición a la fragmentación persiste en los dos casos. Sin embargo, el valor crítico

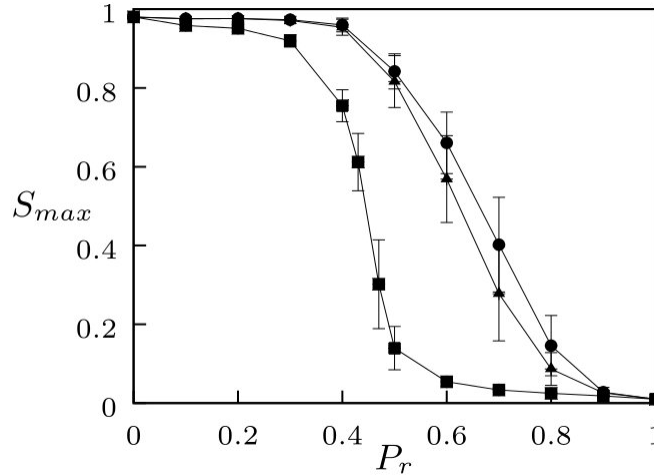


Figura 5.1: S_{max} en función de P_r para un sistema sujeto a un campo global para valores de B fijos. Las curvas corresponden a $B = 0$ (cuadrados), campo externo con $B = 0.003$ (círculos); campo autónomo con $B = 0.03$ (triángulos). Los parámetros del sistema son $G = 100$, $N = 1000$, y $\hat{k} = 4$. Las barras de error indican la desviación estándar obtenidas para 100 realizaciones para cada valor de P_r .

de P_r para el cual se lleva a cabo la transición aumenta con B para ambos tipos de campos. En la fase de un dominio grande, $S_m \rightarrow 1$, los elementos comparten el estado g_F del campo global. El valor crítico de P_r asociado al campo global externo es mayor que el valor correspondiente a un campo global autónomo. Cuando $B \rightarrow 1$, la transición hacia la fragmentación ocurre en $P_r = 1$ para ambos campos. Luego, la presencia de un campo global, sea externo o autónomo, actúa como inhibidor de la fragmentación de la red.

Para investigar el efecto cohesivo en la red inducida por campos globales, en la Figura 5.2 se muestra a S_{max} como función de la intensidad del campo B , para los dos tipos de campos considerados, con un valor fijo $P_r = 0.6 > P_r^*$. Para este valor de la probabilidad de reconexión, el sistema alcanza un estado de fragmentación que consiste en muchos dominios pequeños cuando $B = 0$. Entonces, tomamos este estado fragmentado de la red como condición inicial para cada valor de B en la Figura 5.2.

Para valores de $B \rightarrow 0$, el sistema consiste en dominios pequeños, caracterizado por $S_{max} \rightarrow 0$, como se espera. Sin embargo, cuando la intensidad B aumenta por encima de un valor crítico, tanto un campo global externo como un campo autónomo inducen una recombinación en la red: los dominios pequeños con estados diferentes se juntan para formar un dominio grande cuyos elementos comparten el estado del campo g_F .

La Figura 5.3 muestra el diagrama de fases del sistema en el plano (B, P_r) , para los dos tipos de campos globales. En cada caso existe una frontera crítica que separa la fase fragmentada, $S_{max} \rightarrow 0$ (por debajo de la curva correspondiente), de la fase conexa $S_{max} \rightarrow 1$ (por encima de la curva correspondiente).

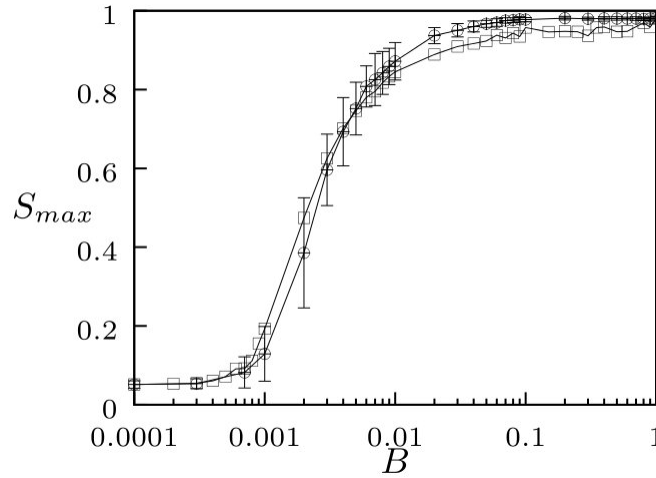


Figura 5.2: S_{max} en función de B con $P_r = 0.6$ fijo. Las curvas corresponden a el campo autónomo (círculos); y un campo externo (cuadrados). Los otros parámetros del sistema $G = 100$, $N = 1000$ y $\bar{k} = 4$. Las barras de error indican la desviación estándar obtenidas como el promedio de 100 realizaciones para cada valor de B .

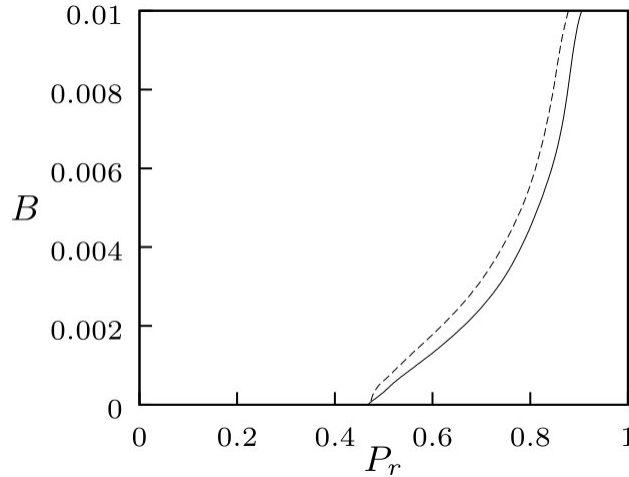


Figura 5.3: Fronteras críticas en el espacio de parámetros (B, P_r) para un sistema sujeto a un campo externo (línea sólida) y campo autónomo (línea segmentada). La fase fragmentada ocurre por debajo de la curva correspondiente.

Como podemos observar, el comportamiento del sistema coevolutivo es similar bajo la influencia de los dos tipos de campo global. Este resultado muestra que bajo ciertas condiciones, el origen, externo o interno de una interacción global, es irrelevante; a nivel local los elementos no distinguen la naturaleza del campo, aun en sistemas coevolutivos. Recientemente, la equivalencia de campos externos y autónomos en el comportamiento sincronizado de sistemas dinámicos caóticos ha sido establecida [108]. Nuestros resultados sugieren que esta equivalencia puede ser muy general.

Un campo global siempre impone su estado sobre los elementos del sistema, para valores de intensidad B por encima de un cierto valor crítico, llevando al sistema a un estado homogéneo. Sin embargo, el recableado de la red, representado por el parámetro P_r , puede prevenir la homogenización del sistema, pero a costa de la fragmentación de la red.

5.2. Modelo de epidemias en redes coevolutivas.

Las enfermedades infecciosas son un gran problema de dimensiones globales en la salud pública, debido a que provocan alrededor de 13 millones de muertes cada año. Distintos modelos matemáticos que describen la dinámica de las enfermedades infecciosas han sido propuestos. La finalidad de los modelos aplicados a la epidemiología es proporcionar información útil para tomar decisiones, establecer medidas operativas en el control de una enfermedad infecciosa [109, 110].

Una pregunta fundamental en el estudio de las epidemias es si la enfermedad desaparecerá. Esto va a depender de las tasas de transmisión y recuperación de la enfermedad. La tasa de transmisión dependerá de muchos factores, entre ellos la infectividad y la conectividad de la población. Uno de los modelos más utilizados para el estudio de epidemias es el susceptible-infeccioso-recuperado (*SIR*), que se utiliza en enfermedades infecciosas en las que se adquiere inmunidad permanente después de padecer la infección [109, 110].

Entre los modelos estocásticos hay una gran variedad, incluyendo el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas, autómatas celulares, agentes y redes. Los modelos con redes están siendo utilizados cada vez más, debido a que permiten simular de forma más real la estructura de la población y su evolución en relación a la transmisión de enfermedades. Los modelos con redes o grafos están compuestos por nodos o vértices conectados por arcos que pueden representar relaciones sociales, económicas u otras. La evolución de la red ocurre de diversas formas [111, 112]. La mayoría de los estudios de la dinámica de enfermedades se ha hecho utilizando redes estáticas. En esta sección presentamos un modelo de propagación de epidemias tipo *SIR* en una red coevolutiva, que hemos propuesto recientemente [33].

Por otra parte, nuevos estudios están comenzando a utilizar las redes dinámicas coevolutivas o adaptativas, donde la estructura de la red cambia y esto afecta la dinámica de la epidemia. Estas redes son más complejas de analizar, pero pueden ser más reales, y parece lógico asumir que individuos sanos evitarán tener contactos con individuos infectados. De esta forma la relación entre dos individuos se verá afectada. Este cambio en las conexiones entre individuos puede tener un efecto sobre la evolución de la epidemia [24, 113].

Investigamos cómo se interrelacionan la topología de la red con la propagación de la enfermedad. En particular, dada una probabilidad de contagio entre individuos, β ,

asumimos una probabilidad $(1 - \beta)$ para eliminar un enlace entre nodos (individuos). Adicionalmente, estudiamos como el grado de conectividad media \bar{k} de la red afecta la evolución de la epidemia o enfermedad. Estudios similares, donde la estructura de la topología va cambiando han sido realizados [114]. La población es representada como una colección de individuos, llamados nodos y los nodos están relacionados por un enlace, los cuales representan relaciones entre individuos con potencial de transmitir la enfermedad si alguno está infectado [80].

Un agente n puede tener tres estados posibles, susceptible= s , infectado= i y recuperado= r . Solamente existe interacción entre dos nodos si uno se encuentra en un estado i , y el otro está en un estado s , y viceversa. Esta interacción es la única que permite la propagación de la enfermedad en el sistema. Sea ν_n el conjunto de vecinos del nodo n . Definimos β como la probabilidad de transmisión de la infección de un agente a otro; mientras que denotamos por γ la probabilidad de recuperación espontánea de un agente.

Consideremos inicialmente una red aleatoria con N nodos y grado promedio \bar{k} , con un solo nodo infectado en el sistema. La dinámica del sistema se define mediante el siguiente algoritmo iterativo:

1. Se escoge un agente n de manera aleatoria.
2. Si el nodo n está en un estado infectado (i), entonces con probabilidad γ n pasa al estado recuperado (r). Con probabilidad $(1 - \gamma)$ se selecciona aleatoriamente uno de sus vecinos $m \in \nu_n$. Si m está en estado susceptible (s), entonces m pasa al estado infectado (i) con probabilidad β ; y con probabilidad $(1 - \beta)$, n se desconecta de m para evitar el contagio y se reconecta con otro $l \notin \nu_n$ escogido aleatoriamente.
3. Si el nodo n está en un estado susceptible (s), entonces se selecciona aleatoriamente uno de sus vecinos $m \in \nu_n$. Si m está infectado (i), entonces con probabilidad β , n pasa al estado infectado; y con probabilidad $(1 - \beta)$ n se desconecta de m para evitar el contagio y se reconecta con otro $l \notin \nu_n$ escogido aleatoriamente.

Consideramos un paso de tiempo como N iteraciones de este algoritmo. Este algoritmo se repite sucesivamente hasta que el número total de nodos en estado infectado sea igual a cero, lo cual define el estado asintótico del sistema. Esta es la condición para terminar la simulación, ya que el sistema llega a un estado estacionario. Nótese que la red mantiene constante el número de nodos y el número de conexiones totales.

Con la finalidad de analizar cómo la dinámica y la topología de la red afectan la evolución de las enfermedades tipo *SIR*, fijamos el parámetro de recuperación en un valor $\gamma = 0.02$, el cual corresponde a la tasa de recuperación observada para varias enfermedades tipo *SIR*, que depende de la escala temporal con la que se trabaje (días, semanas, años, etc.) [109, 115]. Utilizamos distintos valores para los parámetros de transmisión β .

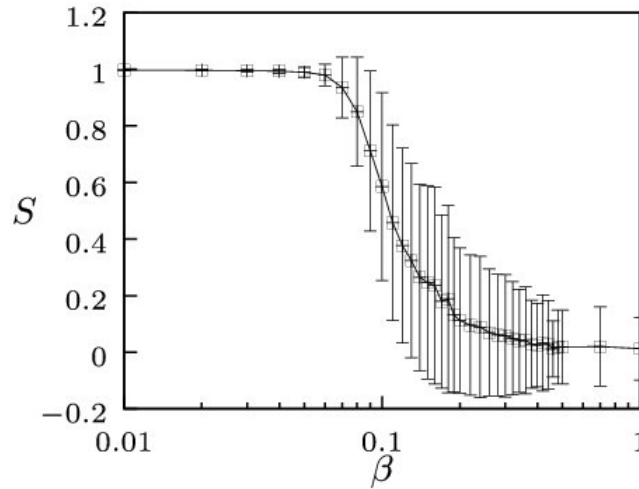


Figura 5.4: S en función de β en el estado asintótico. $N = 500$, $\bar{k} = 8$, $\gamma = 0.02$. Todos los datos se calculan como un promedio de 500 realizaciones de condiciones iniciales.

Debido a la naturaleza estocástica del algoritmo de simulación, los resultados se presentan utilizando promedios de las variables sobre varias realizaciones de condiciones iniciales.

En las simulaciones mostradas se utilizan $N = 500$ nodos, con $\bar{k} = 4, 8, 16, 24$, y se calculan los promedios utilizando al menos 100 realizaciones de cada configuración.

Definimos S como la fracción promedio de agentes que se encuentran en el estado susceptible en el sistema. La primera simulación, la hacemos variando la tasa de transmisión β . En la Figura 5.4 se puede observar que la fracción de agentes susceptibles S en el estado asintótico cae a cero a medida que la tasa de transmisión de la enfermedad β se hace más grande. Este resultado es el esperado, sin embargo es importante resaltar que a partir del valor $\beta = 0.06$ es cuando la proporción de individuos susceptibles o sanos deja de ser uno (100% de la población).

En la Figura 5.5 se presentan los tiempos necesarios para llegar al estado asintótico del sistema, denotado por T_L . De forma general se puede afirmar que a mayor tasa de transmisión β , mayor será el tiempo necesario para llegar al estado donde no hay nodos infectados. Este resultado puede resultar contraintuitivo, y es opuesto a lo que sucedería en una red estática [116] y de aquí su importancia para el estudio de la propagación de enfermedades en el mundo real. Una manera de explicar este fenómeno es pensar que al tener un valor β pequeño, la probabilidad de reconexión ($1 - \beta$) es grande, y de esta forma la red se protege contra la enfermedad. En esta situación, no todos los nodos llegan a padecer la enfermedad, y ésta desaparece más rápidamente. Para valores grandes de β , la enfermedad llega a más individuos y permanece más tiempo en el sistema; en este caso la probabilidad de reconexión ($1 - \beta$) para protegerse es muy baja.

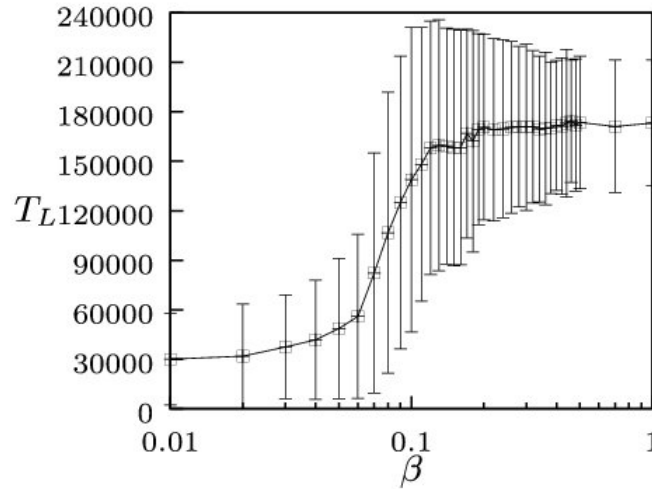


Figura 5.5: T_L en función de β . $\bar{k} = 8$, $\nu = 0.02$. Todos los datos se calculan como un promedio de 500 simulaciones de Monte Carlo.

En la Figura 5.6 se muestra la fracción promedio de nodos infectados I como función del tiempo, para distintos valores de \bar{k} . Se puede observar que la cantidad I alcanza un valor máximo para cada \bar{k} en su evolución temporal. El valor del tiempo para el cual ocurre este máximo disminuye a medida a medida que aumenta el grado \bar{k} de la red. Este resultado indica que a mayor conectividad de la red, la propagación de la enfermedad, reflejada en la fracción promedio de infectados I , ocurre mas rápidamente y con mayor intensidad.

La Figura 5.7 muestra la fracción promedio de agentes susceptibles S en función de β , para distintos valores de \bar{k} . Se puede observar que cuando \bar{k} aumenta, la proporción de nodos susceptibles en el estado asintótico disminuye, para un β dado.

En la Figura 5.8 muestra la gráfica del tiempo asintótico T_L en función de β para distintos \bar{k} . Como puede observarse, el tiempo de simulación para un β fijo es mayor para las redes de mayor grado de conectividad \bar{k} . Esto puede explicarse debido a que, cuando la red tiene poca conectividad, la enfermedad no llega a todos los individuos y por lo tanto se extingue más rápidamente. Luego, una red con poco grado de conectividad tiene un potencial mayor de extinguir más rápidamente una epidemia tipo SIR .

En conclusión, en esta sección hemos presentado un modelo clásico epidemiológico susceptible-infeccioso-recuperado (SIR) utilizando las redes coevolutivas.

Hemos observado que, a mayor tasa de transmisión de la enfermedad β , mayor será el tiempo necesario para llegar al estado asintótico donde no hay nodos infectados. Este fenómeno se debe al proceso de recableado que ocurre en la red: al tener una tasa de transmisión β baja, la probabilidad de reconexión $(1 - \beta)$ es grande y de esta forma la red se protege contra la enfermedad. En esta situación, no todos los nodos llegan a

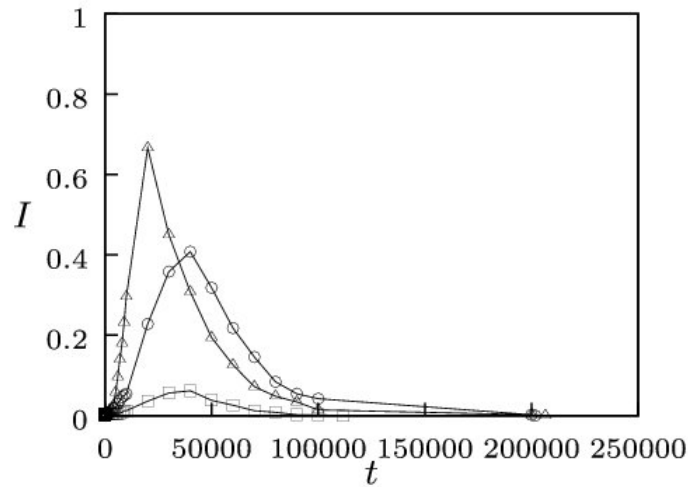


Figura 5.6: I en función del tiempo para distintos valores de \bar{k} . $\bar{k} = 4$ (cuadrados), $\bar{k} = 8$ (círculos), $\bar{k} = 16$ (triángulos).

contraer la enfermedad, y ésta desaparece más rápidamente. Para valores grandes de β , la epidemia alcanza a más individuos y permanece más tiempo en el sistema; en este caso la probabilidad de reconexión ($1 - \beta$) para protegerse es muy baja, y la red sucumbe ante la enfermedad.

Los modelos con dinámica coevolutiva, como el que hemos presentado, pueden ser importantes para optimizar la utilización de recursos y evitar la propagación de virus en la población.

En particular, deseamos mencionar algunas consecuencias desde el punto de vista práctico que sugieren los resultados mostrados. En primer lugar, debemos resaltar que poblaciones donde sus individuos se encuentran altamente conectados, por ejemplo, poblaciones hacinadas, son más vulnerables a la propagación de epidemias. En segundo lugar, nuestros resultados muestran la importancia de las reconexiones, por ejemplo, movilidad, en la prevención de la propagación de las epidemias.

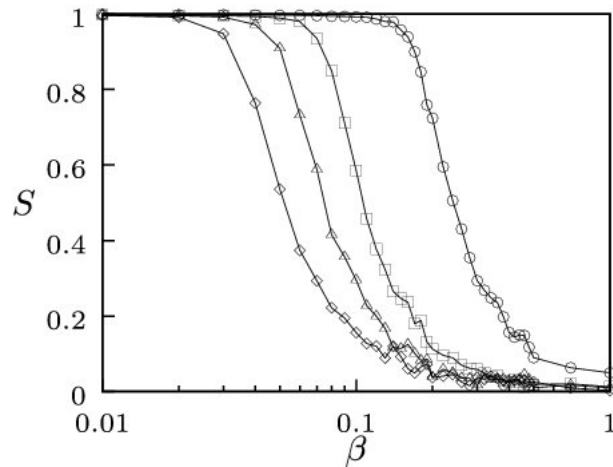


Figura 5.7: S en función de β para distintos valores de \bar{k} . $\bar{k} = 4$ (círculos), $\bar{k} = 8$ (cuadrados), $\bar{k} = 16$ (triángulos), $\bar{k} = 24$ (rombos).

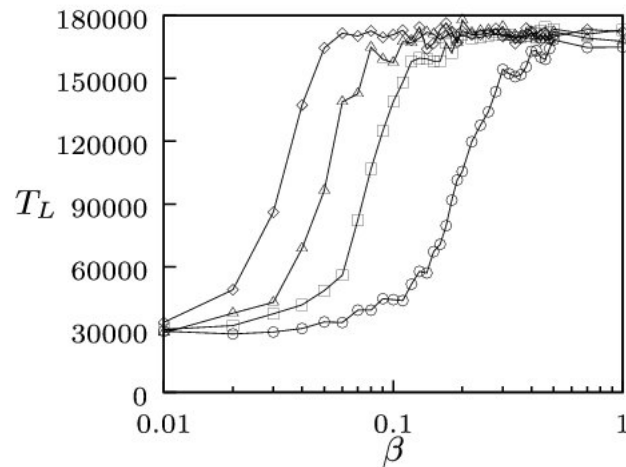


Figura 5.8: T_L en función de β para distintos valores de \bar{k} . $\bar{k} = 4$ (círculos), $\bar{k} = 8$ (cuadrados), $\bar{k} = 16$ (triángulos) y $\bar{k} = 24$ (rombos).

Los científicos me han dicho que los hombres y las mujeres están hechos de átomos. Sin embargo, un pajarito me ha dicho que están hechos de historia.

EDUARDO GALEANO, LOS HIJOS DE LOS DÍAS
(2011).



Un modelo general para sistemas dinámicos coevolutivos

Muchos sistemas complejos observados en la naturaleza pueden ser descritos como redes dinámicas de elementos interactuantes o nodos, donde las conexiones y los estados de los elementos evolucionan simultáneamente [24, 27, 117–119]. Los enlaces que representan las interacciones entre nodos pueden cambiar su intensidad, aparecer o desaparecer, mientras el sistema evoluciona en distintas escalas temporales. En muchos casos, estas modificaciones en la topología de la red se llevan a cabo como un efecto de retroalimentación a la dinámica de los estados de los nodos: la red cambia en respuesta de la evolución de esos estados, que a su vez determinan la manera en que se modifica la red. Los sistemas que presentan este acoplamiento entre la topología y los estados de los nodos han sido denominados sistemas dinámicos coevolutivos o redes adaptativas [24, 27, 117], así como mencionamos en el Capítulo 4.

La dinámica coevolutiva ha sido estudiada en el contexto de sistemas dinámicos espaciotemporales, tales como redes neuronales [25, 120], redes de mapas acoplados [121, 122], redes de elementos móviles [123] sincronización en redes [124], así como también en teoría de juegos [27, 117, 125], dinámica de espines [126], propagación de epidemias [33, 113, 127–129], y modelos de dinámica social y de formación de opinión [32, 130–135].

En muchos sistemas donde se implementa este tipo de dinámica, se puede observar una transición entre dos regímenes: una fase en la que la mayoría de los nodos se encuentran en el mismo estado, formando una red conectada de tamaño similar al del sistema, y otra fase donde la red se encuentra fragmentada en pequeños componentes desconectados, cada uno constituido por nodos en un mismo estado [136]. Esta transición de fragmentación está relacionada con la diferencia en las escalas temporales de los procesos que gobiernan las dos dinámicas: el estado de los nodos y la red de interacciones [132]. En esos modelos estudiados hasta ahora, las escalas temporales de los

procesos de interacción entre los nodos y los cambios en sus conexiones se encuentran acoplados, y son controlados por un solo parámetro en el sistema.

El fenómeno de coevolución introduce una pregunta fundamental en las redes dinámicas: ¿la dinámica de los nodos controla la topología de la red, o la topología de la red controla la dinámica de los estados de los nodos?. En este Capítulo proponemos un marco general para abordar esta pregunta, que hemos publicado recientemente [34]. Consideramos que el proceso por el cual los nodos cambian su vecindad, llamado recableado, y el proceso por el cual un nodo cambia su estado, poseen sus propias dinámicas. Además, asumimos que estos dos procesos pueden ser independientes el uno del otro. Como consecuencia de esta suposición, el comportamiento colectivo de un sistema coevolutivo puede ser estudiado en el espacio de parámetros representados por las escalas temporales de ambos procesos. Una dinámica de coevolución particular puede ser descrita mediante la formulación de una condición de acoplamiento específica entre los dos procesos que compiten en la red. Mostraremos que el comportamiento colectivo y la existencia de una transición de fragmentación en la red para diversos modelos de coevolución dados, puede ser predicha en general a partir del diagrama de fase del sistema en este espacio de parámetros.

Concentrémonos en los mecanismos para el proceso de recableado del fenómeno de coevolución. Por simplicidad, consideramos que el número de conexiones en la red se conserva. Entonces, asumimos que cualquier proceso de recableado consiste en dos acciones básicas: desconexión y reconexión entre nodos. Ambas acciones de desconexión y conexión son frecuentes en las relaciones sociales, sistemas biológicos y dinámica económica [24, 32, 119, 134].

6.1. Proceso de recableado

En general, cualquiera de las dos acciones del proceso de recableado, desconexión y reconexión, se basa en algún mecanismo de comparación de los estados de los nodos. Definimos el parámetro $d \in [0, 1]$, que mide la tendencia a efectuar la desconexión de dos nodos con estados idénticos; es decir, d representa la probabilidad de que dos nodos con estados idénticos se desconecten, y $1 - d$ es la probabilidad de que dos nodos con estados diferentes se desconecten. De igual manera, definimos el parámetro $r \in [0, 1]$, que describe la probabilidad de que dos nodos con estados idénticos se conecten, y por lo tanto $1 - r$ es la probabilidad de que dos nodos con estados diferentes se conecten entre sí. La acción de desconexión puede interpretarse como una especie de repulsión o exclusión entre nodos; en el contexto social corresponde a *fobia*. Por otro lado, la acción de conexión puede representar una atracción o afinidad entre nodos; lo cual en el contexto social se denomina *filia*. Un proceso de recableado se puede caracterizar con la etiqueta dr , donde d indica la probabilidad de desconexión entre nodos que tienen el mismo estado, y r asigna la probabilidad de reconexión entre nodos que poseen el mismo estado. Luego, podemos construir el plano (d, r) , donde cualquier proceso de recableado

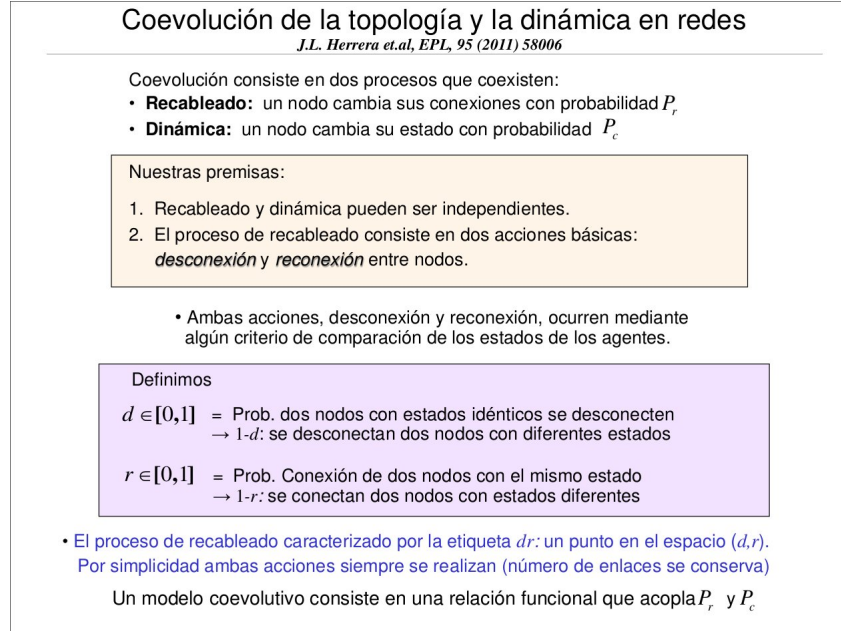


Figura 6.1: Esquema conceptual de nuestro modelo generalizado para coevolución de topología y dinámica en redes.

entre nodos, sujeta a las acciones de desconexión-reconexión, puede ser representado como un punto en este plano. La Figura 6.1 presenta el esquema conceptual de nuestro modelo para la coevolución de topología y dinámica en redes.

Como ejemplos ilustrativos, primero consideraremos una expresión discreta del plano (d, r) de la manera siguiente. Asumimos que las acciones del proceso recableado, desconexión o reconexión, pueden realizarse siguiendo tres mecanismos distintos: similitud S (interacción entre nodos que comparten el mismo estado), aleatoriedad R (interacción entre nodos sin importar sus estados), y disimilitud D (interacción entre nodos que tienen estados distintos). Entonces, ambos parámetros r y d solamente pueden tomar los valores $0(D)$, $0.5(R)$, y $1(S)$. De esta manera, resultan nueve posibles procesos de recableado, basados en las combinaciones de estas acciones y de sus mecanismos, como se muestra la Figura 6.2.

Por ejemplo, $dr = RS$ identifica un proceso de recableado donde el nodo i se desconecta de un nodo j escogido aleatoriamente, y luego se reconecta a un nodo m cuyo estado sea igual al del nodo i . Bajo este esquema, podemos clasificar muchos de los procesos de recableado previamente utilizados en la literatura. Por ejemplo, un proceso RS corresponde al usado en la referencia [32]; un proceso DS se utilizó en la referencia [130]; mientras que los procesos de recableado utilizados en [131–133] se pueden identificar como tipo DR . Note que solamente el proceso de recableado RR es completamente independiente de los estados de los nodos.

Reconnection (r)	S	DS	RS	SS
	R	DR	RR	SR
	D	DD	RD	SD
		D	R	S
		Disconnection (d)		

Figura 6.2: *Procesos discretos de recableado en el espacio de las acciones desconexión-reconexión (d, r). Cada acción pueden llevarse a cabo mediante tres mecanismos: similitud (S), aleatoriedad (R) y diferencia (D). Las etiquetas de dos letras mayúscula describen el proceso de recableado dr resultante. Los procesos que muestran la transición de fragmentación en nuestro modelo están resaltados en gris.*

6.2. Coevolución generalizada

En nuestro esquema general un sistema coevolutivo puede ser analizado de la siguiente manera. Asumimos que la dinámica del sistema puede ser descrito por la coexistencia de un proceso de recableado dr que se lleva a cabo con probabilidad P_r , y un proceso de cambio de estado de los nodos, que ocurre con probabilidad P_c . Debemos recalcar que dr describe cómo ocurre el proceso de recableado, y P_r indica la velocidad a la cual ocurre ese proceso. Asumimos que las probabilidades P_r y P_c pueden ser independientes entre sí. Por lo tanto, la dinámica de sistemas coevolutivos está representada por cuatro parámetros, d, r, P_r, P_c . El comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado en el espacio de estos parámetros. Luego, un modelo coevolutivo específico asociado a un proceso de recableado dr , consiste en una relación funcional entre las probabilidades P_r y P_c que corresponde a una curva en el plano (P_r, P_c) .

Como una aplicación de este esquema, consideremos una red aleatoria de N nodos que posee un grado promedio \bar{k} ; es decir, \bar{k} es el número promedio de vecinos de un nodo. Sea ν_i el conjunto de vecinos del nodo i , el cual posee k_i elementos. Asumimos que la topología de la red está sujeta a un proceso de recableado dr . Por simplicidad, para la dinámica de los nodos hemos escogido una regla de imitación directa, similar a la del modelo del votante, la cual ha sido utilizada en varios contextos [32, 43, 105–107]. El estado de un nodo i se denota por g_i , donde g_i puede tomar cualquiera de G posibles opciones. Los estados g_i se asignan inicialmente de manera aleatoria con una distribución uniforme. Luego, el número promedio de nodos en cada estado en la red inicial es $\gamma = N/G$.

La dinámica de coevolución en este sistema se define mediante los siguientes pasos iterativos:

1. Escoger de manera aleatoria un nodo i tal que $k_i > 0$.
2. Con probabilidad P_r , aplicar el proceso de recableado dr : romper la conexión existente entre el elemento i y uno de sus vecinos $j \in \nu_i$ que satisfaga el mecanismo de desconexión d , y establecer una nueva conexión entre el elemento i y un nodo $l \notin \nu_i$ que satisfaga el mecanismo de reconexión r .
3. Escoger de manera aleatoria un nodo $m \in \nu_i$ tal que $g_i \neq g_m$. Con probabilidad P_c , hacer $g_i = g_m$.

El paso 2 describe el proceso de recableado que permite la adquisición de nuevas conexiones, mientras que el paso 3 muestra el proceso de cambio de estado; en este caso los estados se hacen similares como resultado de las conexiones. Hemos verificado que el comportamiento colectivo del sistema es estadísticamente invariante si los pasos 2 y 3 del algoritmo son intercambiados.

El tamaño de la red N , el grado promedio \bar{k} , y el número de opciones G permanecen constantes durante la evolución del sistema. Luego, dado un proceso de recableado dr , los parámetros de nuestro modelo son la probabilidad de recableado P_r , y la probabilidad de cambio de estado de un nodo P_c .

La dinámica de imitación que se ha escogido para los nodos hace que el número de pares de nodos conectados con estados iguales aumente, mientras que algunos procesos de recableado pueden favorecer la fragmentación de la red. Por lo tanto, la evolución temporal del sistema eventualmente podría conducir a la formación de un conjunto de componentes independientes, o subgrafos, donde todos los miembros de un subgrafo comparten el mismo estado. A estos subgrafos los denominamos *dominios*.

Para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema empleamos, como parámetro de orden, el tamaño promedio normalizado del dominio más grande del sistema, S_m . La Figura 6.3 muestra S_m en función de la probabilidad P_r para los procesos discretos de recableado de la Figura 6.2, sobre una red con $\bar{k} = 4$, para un valor fijo de P_c .

Observamos que la mayoría de los procesos de recableado en la Figura 6.2 conducen a estados colectivos caracterizados por valores de $S_m \rightarrow 1$ que corresponden a dominios cuyos tamaños son comparables con el tamaño del sistema. Sin embargo, los procesos de recableado DS y RS exhiben una transición de fragmentación para un valor crítico de P_r , de un régimen gobernado por un dominio grande, a un estado que consiste en pequeños dominios donde $S_m \rightarrow 0$. Los procesos de recableado dr con $r = S$ pueden sostener un régimen estable que consiste en pequeños dominios (SS mantiene estadísticamente invariante la estructura de la red inicial). El punto crítico P_r^* de la transición de fragmentación de dominios se estima, en cada caso, en el valor de P_r para el cual ocurre

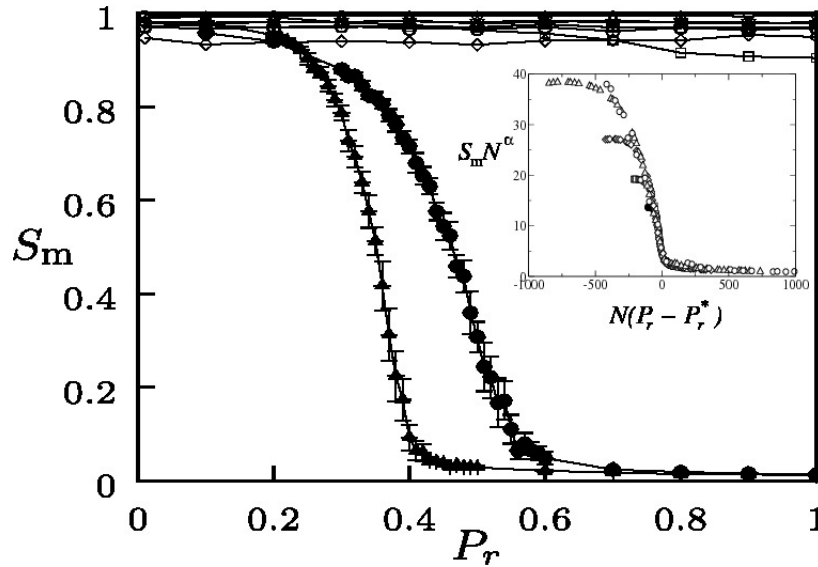


Figura 6.3: S_m en función de P_r para los 9 procesos de recableado mostrados en la Figura 6.2, para $P_c = 0.60$ y $G = 320$. Los parámetros de la red son $N = 3200$ y $\bar{k} = 4$. Sólo los procesos de recableado DS (triángulos) y RS (círculos rellenos) exhiben una transición de fragmentación. Las barras de error indican las desviaciones estándar obtenidas sobre 100 realizaciones de condiciones iniciales para cada valor de P_r . En la imagen insertada: Análisis de escalamiento de tamaño finito; las curvas colapsan con el exponente $\alpha = 0.5$, para el proceso de recableado RS con $P_c = 0.60$. Tamaños de sistema N son 3200 (círculos), 1800 (triángulos), 800 (diamantes), 400 (cuadrados), 200 (círculos rellenos).

la fluctuación máxima del parámetro de orden S_m . En la figura insertada de la Figura 6.3 se muestra el análisis de tamaño finito para el proceso de recableado RS sobre una red con $\bar{k} = 4$, donde graficamos $N^\alpha S_m$ versus $N(P_r - P_r^*)$, con $P_r^* = 0.541 \pm 0.007$, y para varios tamaños del sistema. Encontramos un colapso de los datos en la región crítica cuando $\alpha = 0.50 \pm 0.05$. Un análisis de escala similar para el proceso de recableado DS en la Figura 6.3 arroja los valores $P_r^* = 0.380 \pm 0.007$ y $\alpha = 0.20 \pm 0.05$. Luego, existe una función universal de escala F tal que $S_m = N^{-\alpha} F(N(P_r - P_r^*))$ asociada a cada proceso RS y DS .

Para un proceso de recableado dado, el comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado en términos de la cantidad S_m en el espacio de parámetros (P_r, P_c) . Las Figuras 6.4(a) y 6.4(b) muestran los diagramas de fase que aparecen en el plano (P_r, P_c) cuando se emplean los procesos de recableado RS y DS , respectivamente, en redes con distintos valores de \bar{k} . En ambos casos, para cada valor de \bar{k} , aparecen dos fases que dependen de los parámetros P_c y P_r : una fase contiene solamente pequeños dominios y esta caracterizada $S_m \rightarrow 0$; la otra fase se distingue por la formación de un dominio grande, lo cual se caracteriza con valores de S_m grandes. Estas dos regiones están separadas por una curva crítica (P_c^*, P_r^*) .

La Figura 6.4 expresa el diagrama de fase general de un sistema coevolutivo sujeto

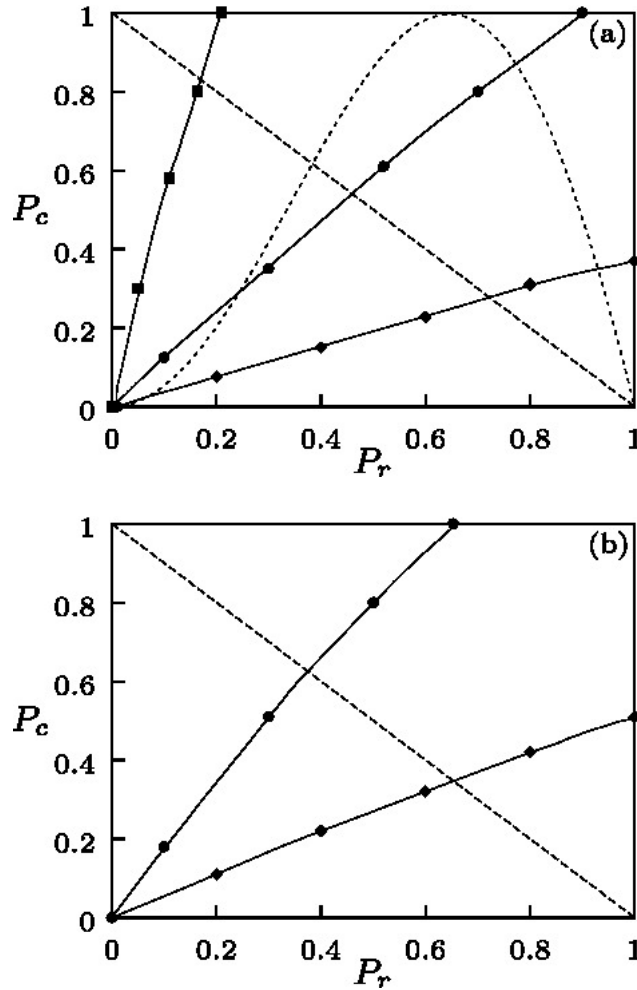


Figura 6.4: Fronteras críticas en el espacio de parámetros (P_r, P_c) para la transición de fragmentación asociada a dos procesos de recableado en una red con $N = 3200$. Cada curva indica la frontera correspondiente que separa las regiones donde existe un dominio gigante (encima de la curva) y un estado formado por muchos pequeños dominios (abajo de la curva). (a) Proceso de recableado RS, $G = 320$ y $\bar{k} = 2$ (curva con cuadrados); $\bar{k} = 4$ (curva con círculos); $\bar{k} = 8$ (curva con diamantes). La curva segmentada es la relación $P_c = 1 - P_r$, y la línea punteada es la relación $P_c = 1.72P_r \sin(\pi P_r)$. (b) Proceso de recableado DS con $G = 2$ en una red con $\bar{k} = 4$ (curva con círculos); $\bar{k} = 8$ (curva con diamantes). Todos los puntos son un promedio de 100 realizaciones de condiciones iniciales.

a una dinámica de los nodos dada y un proceso de recableado dado. En este diagrama se pueden presentar diversos modelos de coevolución al formular relaciones de acoplamiento específicos entre la probabilidad de recableado y la probabilidad de cambio de estado de un nodo. En general, tal acoplamiento puede ser expresado como una relación funcional $P_c = f(P_r)$ que describe una curva en el espacio de parámetros de la Figura 6.4. Por ejemplo, considere la relación $P_c = 1 - P_r$ en el diagrama de fases de la Figura 6.4(a). Esta relación corresponde al modelo coevolutivo propuesto por Holme

y Newman [32], que usa el proceso de recableado del tipo RS , un modelo que ahora aparece como un caso particular en nuestra formulación general. En ese caso, la transición de fragmentación, de un dominio gigante a muchos dominios pequeños en una red caracterizada por un valor de \bar{k} ocurrirá cuando esta línea recta intersecte la curva crítica correspondiente en la Figura 6.4(a). Estas intersecciones ocurren en los valores $P_r^* = 0.171$ para $\bar{k} = 2$, $P_r^* = 0.458$ para $\bar{k} = 4$, y $P_r^* = 0.722$ para $\bar{k} = 8$, los cuales concuerdan con los valores críticos reportados y obtenidos por un método diferente en [32]. Similarmente, si se utiliza el proceso de recableado DS y la relación funcional $P_c = 1 - P_r$, obtenemos el modelo del votante de dos estados, introducido en [130], como un caso particular de nuestro esquema generalizado. La intersección de la línea $P_c = 1 - P_r$ con la frontera crítica que corresponde a $\bar{k} = 4$ en el diagrama de fase en Figura 6.4(b) indica el valor crítico $P_r^* = 0.375$. Este valor concuerda con el calculado utilizando un procedimiento distinto en [130]. Adicionalmente, para una red con $\bar{k} = 8$, nuestro esquema predice un valor crítico para este modelo de $P_r^* = 0.653$.

El diagrama de fase en la Figura 6.4 también predice los valores críticos (P_r^*, P_c^*) para las transiciones de fragmentación de la red en modelos de coevolución más complicados. Por ejemplo, considere la relación no lineal $P_c = aP_r \sin(\pi P_r)$ en el espacio de parámetros de la Figura 6.4(a). Para $a = 1.72$, esta función cruza la frontera crítica asociada con $\bar{k} = 4$ en la Figura 6.4(a) dos veces, cuando $P_r^* = 0.25$, que corresponde a una recombinación de la red, y para $P_r^* = 0.77$, donde ocurre una transición de fragmentación. En el rango de parámetros $P_r \in (0.25, 0.77)$, la función se encuentra dentro de la región del diagrama de fase correspondiente a un dominio grande. Luego, en un modelo de coevolución descrito por esta función en una red caracterizada con $\bar{k} = 4$, debería existir un dominio grande en este rango de parámetros. Para $\bar{k} = 2$, sólo existiría una fase fragmentada para esta función de coevolución.

La Figura 6.5 muestra S_m en función de P_r para los dos modelos de coevolución presentados en la Figura 6.4 para una red con $\bar{k} = 4$. Para el modelo en ref. [32], la transición de fragmentación se lleva a cabo para un valor P_r^* predicho en la Figura 6.4. Similarmente, para el modelo no lineal hemos confirmado la existencia de una fase de un dominio grande confinado en la región $P_r \in (0.25, 0.77)$.

También, hemos investigado el comportamiento del sistema en el espacio de parámetros (d, r) que describe procesos de recableado general, manteniendo fijos los demás parámetros del sistema. Como en los casos anteriores, comenzamos con una red aleatoria y una distribución aleatoria uniforme de los estados g_i . Como ejemplo, asumimos una dinámica tal que $P_r = 1$ (siempre se aplica el proceso de recableado) y $P_c = 1$ (los nodos siempre copian el estado de un vecino). El algoritmo de dinámica coevolutiva definido anteriormente se puede emplear variando los parámetros d y r .

La Figura 6.6(a) muestra el tamaño normalizado de la componente más grande de la red S , sin importar los estados de los nodos, en función de r , para $d = 0.2$. La cantidad S revela una transición de fragmentación en la red en el valor de $r = 0.938$. También hemos calculado, para tiempos largos, el tamaño promedio normalizado del subconjunto

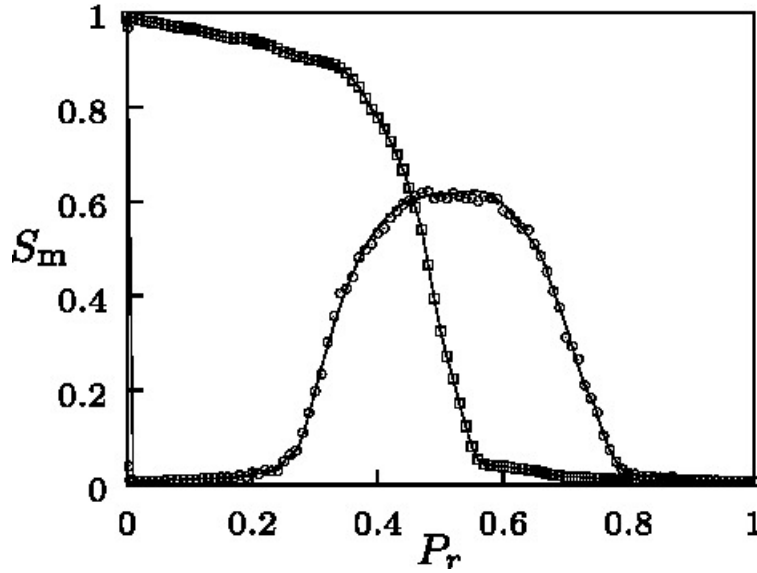


Figura 6.5: S_m como función de P_r para diferentes curvas de coevolución, sujetas a un proceso de recableado RS en la Figura 6.4(a), en una red con $\bar{k} = 4$. $P_c = 1 - P_r$ (cuadrados); $P_c = 1.72P_r \sin(\pi P_r)$ (círculos). Se realizaron 100 realizaciones para cada valor de P_r .

de nodos conectados que comparten un mismo estado, sobre el componente más grande de la red, denotado por S_g . La Figura 6.6(a) muestra $S - S_g$ vs. r . Observamos que $S - S_g = 0$ para $r < 0.56$, lo que significa que todos los nodos en el componente más grande comparten, en promedio, el mismo estado. Puesto que $S \rightarrow 1$ para $r < 0.56$, existe un dominio grande, cuyo tamaño es comparable con el tamaño del sistema. Para $r > 0.938$, tenemos $S - S_g \rightarrow 0$ y $S \rightarrow 0$, que corresponde con la aparición de múltiples dominios pequeños en el sistema. En el rango $0.56 < r < 0.96$, observamos que $S - S_g > 0$, lo que indica que no todos los nodos en la componente más grande de la red comparten el mismo estado. Puesto que $S \rightarrow 1$ en este rango de r , el sistema aquí consiste en una componente conectada cuyo tamaño es del orden del tamaño del sistema. Luego, en el rango $0.56 < r < 0.938$ encontramos una situación donde subconjuntos con diferentes estados coexisten sobre una red conectada grande. Con el fin de dilucidar la naturaleza de este comportamiento, mostramos en la figura insertada de la Figura 6.6(a), un gráfico semilogarítmico del tiempo promedio τ para el cual se alcanza un dominio grande en el sistema ($S = S_g = 1$), en función del tamaño del sistema N , para diferentes valores de r . Encontramos que τ escala exponencialmente con N de la forma $\tau \sim e^{\alpha N}$. Luego, la fase consistente en un dominio grande no puede formarse en un sistema de tamaño infinito. Para un sistema de tamaño finito, la componente grande de la red donde coexisten varios estados debe decaer eventualmente hasta convertirse en un dominio grande (un solo estado). Hemos obtenido numéricamente los exponentes $\alpha = 0.064$ para $r = 0.2$, en la región de un dominio grande, y $\alpha = 0.167$ para $r = 0.8$ en la región de una componente grande con coexistencia de estados, de la Figura 6.6(a). Esto significa que el tiempo promedio de decaimiento τ para la componente grande con coexistencia de varios estado es, en varios ordenes de magnitud, más grande que el tiempo correspondiente a la fase de

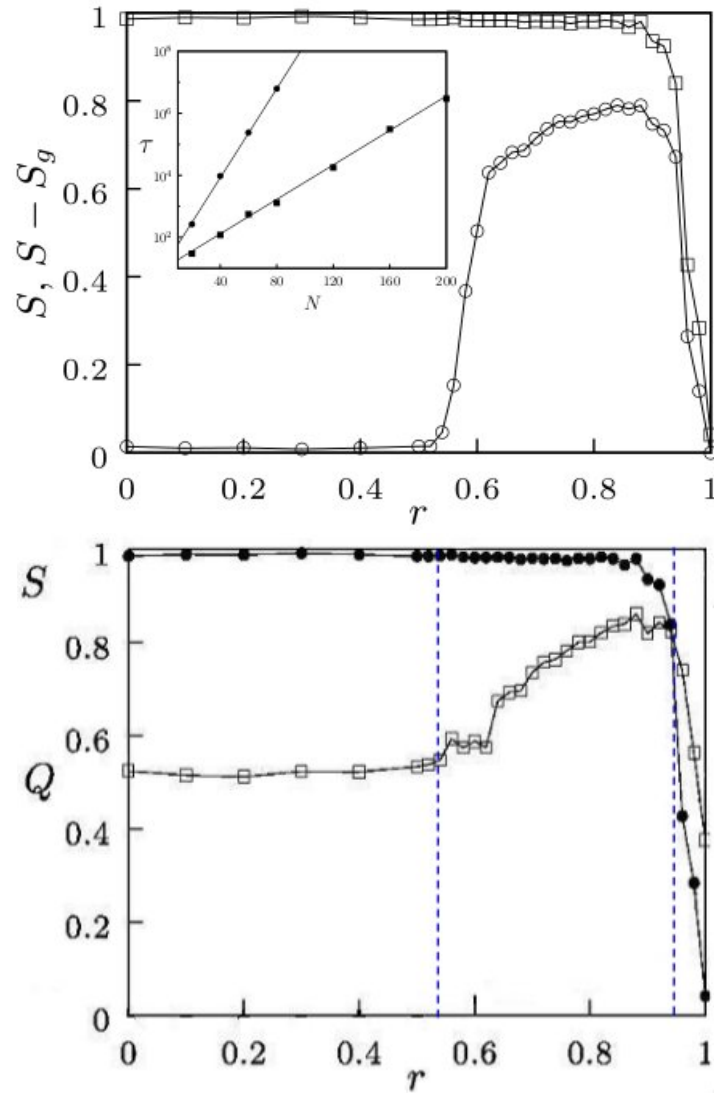


Figura 6.6: (a) S (cuadrados) y $S - S_g$ (círculos) en función de r , para el proceso de recableado con $d = 0.2$, $P_r = 1$, $P_c = 1$, $G = 20$, $N = 200$, y $\bar{k} = 4$. Para cada valor de r , se realizaron 10 realizaciones de condiciones iniciales. En la figura insertada: gráfica semilogarítmica de τ vs. N para $r = 0.2$ (cuadrados rellenos) y $r = 0.8$ (círculos rellenos), para $d = 0.2$ fijo. Cada paso de tiempo corresponde a N iteraciones de la dinámica. (b) S (círculos) y Q (cuadrados) en función de r . La modularidad Q es el promedio obtenido sobre 10 realizaciones de condiciones iniciales. Todas las cantidades están calculadas en $t = 10^6$.

un domino grande. Para $N = 200$, nuestros resultados implican tiempos de convergencia del orden de $\tau \approx 10^6$ para $r = 0.2$ y $\tau \approx 10^{14}$ para $r = 0.8$. Al incrementar N , el tiempo de decaimiento de la componente grande con coexistencia de varios estado no se puede observar en la práctica. Luego, nuestros resultados para valores continuos de los parámetros r y d del proceso de recableado sugieren un mecanismo para la coexistencia de subconjuntos de nodos con diferentes estados en una red grande conectada.

Este resultado es relevante, puesto que como vimos en el Capítulo 2, muchas redes reales contienen comunidades conectadas formando una red grande. Con el fin de investigar las propiedades topológicas de la red subyacente en este régimen de coexistencia de varios estados sobre una componente grande, calculamos la función de modularidad Q de la red, según el algoritmo de Girvan y Newman [42],

$$Q(c) = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j). \quad 6.1$$

Recordemos que una red posee una estructura modular o de comunidades, si está formada por subconjuntos donde los nodos de un subconjunto están altamente conectados entre sí, mientras que un número mucho menor de enlaces conectan a subconjuntos diferentes. En nuestro caso, los diversos dominios son los subconjuntos diferentes que coexisten sobre la componente más grande de la red.

La Figura 6.6(b) muestra la cantidad Q promediada sobre varias realizaciones de condiciones iniciales, en función de r , con $d = 0.2$ fijo. Para $r < 0.56$, la modularidad Q se mantiene aproximadamente constante en un valor de $Q \approx 0.51$, que es característico de una red aleatoria [137]. En la región $0.56 < r < 0.96$, la modularidad Q aumenta, indicando la presencia de estructuras modulares en la componente más grande de la red. Para $r = 0.95$, la red se fragmenta ($S \rightarrow 0$) y la modularidad cae a cero. En la Figura 6.7 se muestra una visualización de las redes resultantes en los tres rangos mencionados del parámetro r .

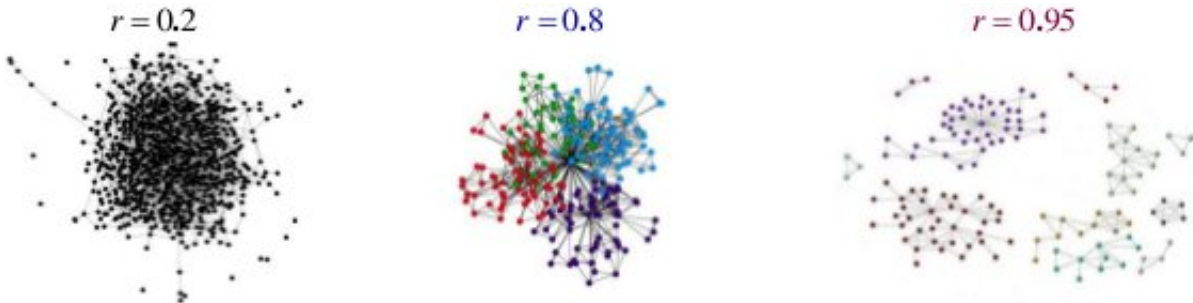


Figura 6.7: Visualización de las redes resultantes en diferentes regiones de parámetros de la Figura 6.6. Izquierda: Red aleatoria en estado homogéneo, $r = 0.2$. Centro: Red de comunidades, $r = 0.8$. Derecha: Red fragmentada, $r = 0.95$. Parámetros fijos $d = 0.2$, $N = 80$, $t = 10^3$.

Es importante resaltar que la estructura de comunidades es un estado transitorio del sistema para ciertos valores de parámetros, según indica el tiempo de convergencia τ en la figura insertada en la Figura 6.6(a). Sin embargo, el tiempo de permanencia de este estado transitorio aumenta exponencialmente al aumentar el tamaño del sistema N , lo que se denomina en la literatura un *supertransiente*. Por lo tanto, en redes reales que son de tamaño N muy grande, la estructura de comunidades en la práctica es un estado observable cuasiestable. Por otro lado, nuestros resultados pueden explicar

la observación empírica sociológica de que comunidades grandes en una sociedad (por ejemplo grupos de inmigrantes) subsisten por más tiempo que comunidades pequeñas [9].

Luego, nuestro modelo de coevolución generalizada proporciona un mecanismo para la formación y persistencia de estructuras modulares, como las observadas en redes reales.

La Figura 6.8 muestra la red inicial y la red de comunidades emergente para los valores de parámetro $N = 80$, $r = 0.8$, $d = 0.2$, $t = 10^3$.

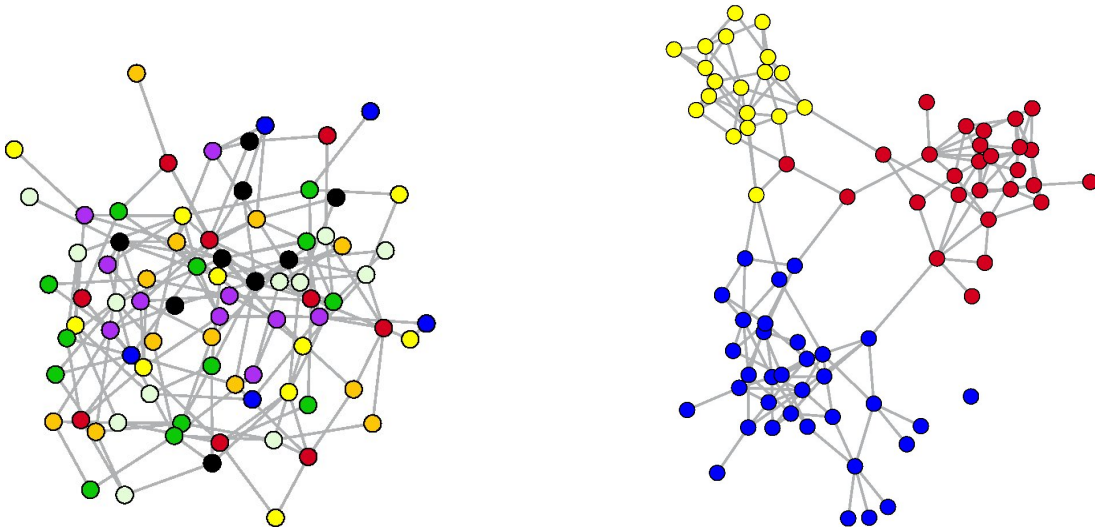


Figura 6.8: Visualización de la red inicial (izquierda) para $N = 80$, y la red modular (derecha) para los parámetros $r = 0.8$, $d = 0.2$, $N = 80$, $t = 10^3$. Los colores representan los estados de los nodos.

Para valores dados de P_r y P_c , que describen una dinámica de coevolución, el comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado en el espacio de parámetros de las acciones de desconexión y reconexión (d, r), usando las cantidades calculadas en la Figura 6.6(a). La Figura 6.9 muestra el diagrama de fase obtenido en el plano (d, r) para los valores $P_r = 1$ y $P_c = 1$.

Tres tipos de comportamientos ocurren en el sistema al variar los parámetros r y d . Dos de estos comportamientos corresponden a las fases que ya se encontraron en la Figura 6.4: una fase con un dominio grande, y una fase fragmentada con muchos dominios pequeños. Estas dos fases están separadas por una región en el plano (d, r) donde emerge un comportamiento supertransiente, caracterizado por la coexistencia de muchos estados y la formación de comunidades sobre una componente de red grande. La Figura 6.9 revela que los procesos de recableado RS ($d = 0.5, r = 1$) y DS ($d = 0, r = 1$) conducen a una fase fragmentada cuando $P_r = 1$ y $P_c = 1$, en completo acuerdo con los resultados encontrados en la Figura 6.4.

La Figura 6.10 muestra el diagrama de fases en el plano (d, r) para valores $P_r = 1$,

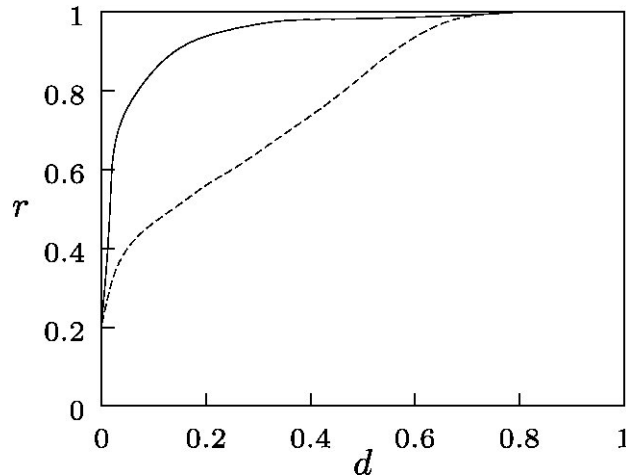


Figura 6.9: Diagrama de fase en el espacio de parámetros (d, r) , para $P_r = 1$, $P_c = 1$. $G = 20$, $N = 200$, y $\bar{k} = 4$ fijos. La fase fragmentada ocurre por encima de la línea continua; la fase con un dominio grande ocurre por debajo de la línea segmentada; la región donde emerge la coexistencia de estados en una componente grande, esta limitada por estas dos líneas. Todas las simulaciones son un promedio de 10 realizaciones de condiciones iniciales.

$P_c = 0$ fijos. En este caso los nodos nunca cambian sus estados y la evolución del sistema ocurre solamente debido al proceso de recableado, el cual está basado en la comparación de estados de los nodos. También observamos tres fases en la estructura de la red: conexas con coexistencia de múltiples estados, modular y fragmentada. En particular, la región del diagrama de fases en la que se forma una estructura modular es más amplia cuando $P_c = 0$ que cuando $P_c = 1$. Luego, la emergencia de estructuras de comunidades es un efecto inducido por la forma del proceso de recableado, descrito por los valores de d y r .

Para $r \rightarrow 1$, las reconexiones siempre se llevan a cabo entre nodos en estados similares; los nodos G/N nodos que existen en promedio en un estado en la red inicial tienden a reunirse y a separarse de nodos en estados diferentes. Esto conduce a la formación de dominios pequeños, de tamaño promedio G/N , y a la fragmentación de la red. Esto corresponde aproximadamente a la región de fragmentación en los diagramas de fase en el plano (d, r) . En general, para $r < d$, tanto la probabilidad de desconexión entre nodos en estados iguales (d), como la probabilidad de reconexión entre nodos en estados distintos ($1 - r$), son altas. Por lo tanto, es posible mantener conectados en una red grande nodos en estados diferentes. Este es el caso si $P_c = 0$, donde el tamaño de los dominios en la red conexas es igual a N/G . Por otro lado, si $P_c = 1$, entonces la dinámica de imitación entre los nodos eventualmente conduce esta red conexas a un estado homogéneo, que corresponde a un dominio de tamaño comparable al del sistema. Este proceso describe lo que ocurre en la región de un dominio grande en el plano (d, r) en la Figura 6.9, con $P_c = 1$. Luego, el proceso de cambio de estado de los nodos representado por la probabilidad P_c controla el tamaño de los dominios en la fase conexas de la red.

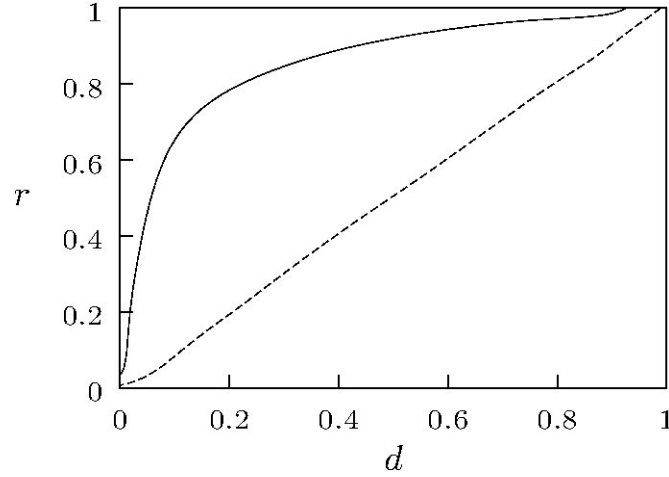


Figura 6.10: Diagrama de fase en el espacio de parámetros (d, r) , en ausencia de dinámica de los nodos ($P_r = 1$, $P_c = 0$). Las regiones donde ocurren la fase II (fragmentada) y las configuraciones Ia y Ib de la fase conectada, se encuentran indicadas. Todos los resultados son un promedio de diez realizaciones.

Para $r > d$, $r \neq 1$, la probabilidad de reconexión entre nodos en estados iguales (r) y la probabilidad de desconexión entre nodos distintos ($1 - d$) son ambas relativamente altas, lo que promueve la reunión de nodos en estados similares. Sin embargo, existe una pequeña probabilidad ($1 - r$) de reconexión entre nodos en estados diferentes. Esto se puede interpretar como un cierto grado de tolerancia a la diversidad introducida por el proceso de recableado. Esto permite que los grupos de nodos que se forman en estados diferentes, puedan tener un pequeño número de conexiones entre ellos. Esto corresponde a una estructura típica de comunidades.

De esta manera, nuestro modelo general de coevolución proporciona un mecanismo para la formación de comunidades tales como las observadas en redes reales.

En conclusión, en el presente Capítulo hemos presentado un marco general para el estudio del fenómeno de coevolución en redes dinámicas. La coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos, el cambio de estado de los nodos, y el recableado de enlaces entre los nodos, los cuales pueden ocurrir con probabilidades independientes P_c y P_r , respectivamente. Estas probabilidades caracterizan las velocidades o escalas de tiempo de cada proceso. Hemos analizado el proceso de recableado en términos de las acciones de desconexión y reconexión entre nodos, ambas basadas en un mecanismo de comparación de los estados de los nodos.

Para un proceso de recableado dado, el comportamiento colectivo del sistema puede ser representado en el espacio de parámetros (P_r, P_c, d, r) . Para una dinámica de cambio de estado de los nodos similar a la del modelo del votante, hemos encontrado que sólo las reconexiones entre nodos con estados similares ($r \rightarrow 1$) pueden conducir a la fragmentación de la red. Hemos calculado las fronteras críticas en el espacio de parámetros (P_r, P_c) , para diferentes valores de \bar{k} . El tamaño de la región para la fase

fragmentada en el espacio (P_r, P_c) disminuye al incrementar el valor de \bar{k} . Esto sugiere que es más probable observar el fenómeno de fragmentación en redes donde $\bar{k} \ll N$. Hemos mostrado que diferentes modelos coevolutivos corresponden a diferentes curvas $P_c = f(P_r)$ en el plano (P_r, P_c) . La ocurrencia de una transición de fragmentación de la red, así como de transiciones de recombinación, pueden ser predichas utilizando nuestro esquema.

También hemos caracterizado las propiedades colectivas del sistema en el espacio de las acciones para los procesos de recableado (d, r) , para valores de P_r y P_c dados, que definen la dinámica coevolutiva. En una región de este espacio, hemos descubierto un régimen donde pueden coexistir subconjuntos de nodos con diferentes estados, por tiempos muy largos, en una red conectada. Hemos demostrado que estos estados corresponden a una topología de la red del tipo de comunidades.

Hemos demostrado que las estructuras de comunidades son un estado supertransiente de la red, cuya permanencia aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. Esto explica la formación y persistencia de comunidades en redes reales, donde el tamaño del sistema es generalmente muy grande.

Hemos limitado nuestro modelo a la situación donde el número de conexiones en las redes coevolutivas se conserva. Esta condición está expresada en el paso 2 de nuestro algoritmo, donde la aplicación de las acciones de desconexión y reconexión se realizan con probabilidad 1. Esta condición puede ser generalizada si se consideran diferentes probabilidades para cada una de esas acciones. Luego, nuestro marco general proporciona un escenario para el estudio de redes coevolutivas que no conservan el número de enlaces totales.

We know that going to the Moon was a simple task indeed, compared with some others we have set for ourselves, such as creating a humane society or a peaceful world.

HERBERT SIMON (1996)

7

Conclusiones

Muchos sistemas naturales y artificiales se pueden describir como redes complejas de elementos dinámicos interconectados. En esta Disertación hemos estudiado varios aspectos de la relación entre la topología de conectividad de una red y la dinámica de los elementos que yacen en ella. El desarrollo del proceso investigativo nos ha conducido a la formulación de un modelo general de sistemas coevolutivos, donde tanto las variables de estado de los elementos y las conexiones entre ellos, se influyen mutuamente y cambian en el tiempo. Este tipo de sistemas se observa en contextos diversos, como sistemas biológicos, sistemas fisiológicos, sistemas dinámicos, redes de intercambio económico, redes sociales, redes de neuronas, Internet, redes de comunicación y transporte, etc.

Como una aplicación de los conceptos relacionados con redes complejas, hemos caracterizado las propiedades topológicas y hemos construido los grafos de redes reales locales, provenientes de nuestro entorno en la Universidad de Los Andes. Hemos encontrado que la red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes posee características de una red de pequeño mundo, con una longitud característica muy pequeña, $l = 1.95$. Este resultado nos motiva a estudiar varios otros aspectos en esta red en el futuro; como por ejemplo la propagación de información o de epidemias entre los estudiantes. Por otro lado, nuestra capacidad de análisis de redes de estudiantes ha generado mucho interés entre profesores por su potencial para caracterizar la eficiencia de sistemas educativos, y la posibilidad de comparar diferentes instituciones y facultades.

También hemos caracterizado las propiedades topológicas y hemos visualizado el grafo correspondiente a la red de colaboraciones científicas del Grupo de Caos y Sistemas Complejos, del Centro de Física Fundamental, de la Universidad de Los Andes. Los datos fueron obtenidos de la página web de este grupo. Esta red posee estructura modular, lo que se evidencia por un valor de $Q = 0.510$, mayor que el correspondiente a una red aleatoria. Esta estructura se encuentra sustentada por tres *hubs*, que son los profesores Mario Cosenza, Kay Tucci y Antonio Parravano. Es notable que los nodos

Tucci y Parravano funcionan como agentes conectores entre diferentes comunidades. El nodo Tucci conecta la comunidad de Ingeniería con la comunidad caótica, mientras que el nodo Parravano conecta la comunidad de Astrofísicos con los caóticos. Nuestro análisis muestra cómo la estructura modular o de comunidades emerge en una red cuando existe cierto grado de tolerancia o amplitud de criterios, que en este caso se manifiesta en la interdisciplinariedad característica de este grupo de investigación. Como trabajo futuro, nos proponemos comparar las estructuras topológicas de diferentes grupos de investigación en la Universidad de Los Andes y en otras instituciones.

Con el fin de investigar el rol de la topología en el comportamiento colectivo de un sistema, hemos estudiado la influencia de una red en un modelo de interacción económica. La inclusión de una red de conectividad o localización espacial para las interacciones de los agentes económicos, permite el uso de conceptos asociados a los sistemas dinámicos espaciotemporales, en modelos económicos. Hemos mostrado que se forman diferentes patrones espaciotemporales al variar los parámetros del sistema, y hemos caracterizado estos patrones como estados laminares, intermitentes y turbulentos, en analogía con los patrones que emergen en sistemas dinámicos espaciotemporales. Hemos caracterizado la transición del estado laminar al estado turbulento mediante la actividad del sistema, una cantidad estadística que mide la riqueza promedio intercambiada, por unidad de tiempo, en el estado asintótico de sistema. Por otro lado, el coeficiente de Gini, que caracteriza la desigualdad en la distribución de riqueza, depende mayormente de la topología de la red. Nuestros resultados indican que, niveles elevados de intercambio económico (actividad alta), se encuentran asociados con valores pequeños del coeficiente de Gini; esto es, con distribuciones de riqueza más equitativas en el sistema.

La topología de la red subyacente no influye de manera significativa en la actividad del sistema. En contraste, el coeficiente de Gini se incrementa cuando el rango de interacciones aumenta. Hemos mostrado que la propiedad topológica que influye de manera significativa en el cambio del coeficiente de Gini, es el coeficiente de agrupamiento y no la longitud característica de la red. Nuestros resultados sugieren que la reducción del tamaño de la vecindad de los agentes interactuantes puede favorecer una distribución más equitativa de riqueza en una economía estratificada.

Como primeros pasos en nuestro estudio de sistemas coevolutivos, hemos extendido dos modelos previamente propuestos para hacerlos coevolutivos: un modelo para la formación de opinión sujeto a campos globales, y un modelo para la propagación de epidemias tipo *SIR*.

En el primer caso, pudimos mostrar que el comportamiento del sistema coevolutivo es similar bajo la influencia de un campo global externo o de un campo global autónomo. Este resultado muestra que bajo ciertas condiciones, el origen, externo o interno de una interacción global, es irrelevante; a nivel local los elementos no distinguen la naturaleza del campo, aun en sistemas coevolutivos. Recientemente, la equivalencia de campos externos y autónomos en el comportamiento sincronizado de sistemas dinámicos caóticos ha sido establecida [108]. Nuestros resultados sugieren que esta equivalencia

puede ser muy general.

Un campo global siempre impone su estado sobre los elementos del sistema, para valores de intensidad del campo por encima de un cierto valor crítico, llevando al sistema a un estado homogéneo. Sin embargo, la dinámica coevolutiva, introducida por el proceso de recableado de la red, puede prevenir la homogenización del sistema, a expensas de la fragmentación de la red.

En el caso del modelo epidemiológico susceptible-infeccioso-recuperado (*SIR*) con dinámica coevolutiva, hemos observado que, a mayor tasa de transmisión de la enfermedad, mayor es el tiempo necesario para llegar al estado asintótico donde no hay nodos infectados. Este fenómeno se debe al proceso de recableado que ocurre en la red: al tener una tasa de transmisión baja, la probabilidad de reconexión es grande y, de esta forma, la red se protege contra la enfermedad. En esta situación, no todos los nodos llegan a infectarse, y la epidemia desaparece más rápidamente. Para valores grandes de la tasa de transmisión, la epidemia alcanza a más individuos y permanece más tiempo en el sistema; en este caso la probabilidad de reconexión es muy baja, y toda la red contrae la enfermedad.

Modelos de propagación de epidemias con dinámica coevolutiva pueden ser importantes para optimizar la utilización de recursos y evitar la propagación de virus en la población. Nuestros resultados sugieren algunas consecuencias desde el punto de vista práctico. En primer lugar, debemos resaltar que poblaciones donde sus individuos se encuentran altamente conectados, por ejemplo, poblaciones hacinadas, son más vulnerables a la propagación de epidemias. En segundo lugar, nuestros resultados muestran la importancia de las reconexiones, por ejemplo, movilidad, en la prevención de la propagación de las epidemias.

Diversas extensiones de este modelo pueden estudiarse en el futuro, como por ejemplo, la consideración de probabilidades de infección y de reconexión independientes. También se pueden estudiar, con dinámica coevolutiva otros modelos de propagación de enfermedades que hasta ahora sólo se han considerado en redes fijas.

La contribución central de esta Tesis consiste en la construcción de un marco general para el estudio del fenómeno de coevolución en redes dinámicas. La coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos, el cambio de estado de los nodos, y el recableado de enlaces entre los nodos, los cuales pueden ocurrir con probabilidades independientes P_c y P_r , respectivamente. Estas probabilidades caracterizan las velocidades o escalas de tiempo de cada proceso. Hemos analizado el proceso de recableado en términos de las acciones de desconexión y reconexión entre nodos, ambas basadas en un mecanismo de comparación de los estados de los nodos.

Para un proceso de recableado dado, el comportamiento colectivo del sistema puede ser representado en el espacio de parámetros (P_r, P_c, d, r) . Para una dinámica simple de cambio de estado de los nodos, similar a la del modelo del votante, hemos encontrado que sólo las reconexiones entre nodos con estados similares pueden conducir a la frag-

mentación de la red. Hemos calculado las fronteras críticas en el espacio de parámetros (P_r, P_c) , para diferentes valores del grado promedio de la red inicial, \bar{k} . El tamaño de la región para la fase fragmentada en el espacio (P_r, P_c) disminuye al incrementar el valor de \bar{k} . Esto sugiere que es más probable observar el fenómeno de fragmentación en redes donde $\bar{k} \ll N$. Hemos mostrado que diferentes modelos coevolutivos pueden ser formulados mediante relaciones funcionales $P_c = f(P_r)$, que corresponden a diferentes curvas en el plano (P_r, P_c) . La ocurrencia de una transición de fragmentación de la red, así como de transiciones de recombinación, pueden ser predichas utilizando nuestro esquema.

Hemos caracterizado las propiedades colectivas del sistema en el espacio de las acciones para los procesos de recableado (d, r) . En una región de este espacio, hemos descubierto un régimen donde pueden coexistir subconjuntos de nodos con diferentes estados, por tiempos muy largos, en una red conectada. Hemos demostrado que estas configuraciones corresponden a una topología de la red del tipo de comunidades. Las estructuras de comunidades son un estado supertransiente de la red, cuya persistencia en el tiempo aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. Esto explica la formación y permanencia de comunidades en redes reales, donde el tamaño del sistema es generalmente muy grande.

Hemos limitado nuestro modelo a la situación donde el número de conexiones en las redes coevolutivas se conserva. Esta condición está expresada en el paso 2 de nuestro algoritmo, donde la aplicación de las acciones de desconexión y reconexión se realizan con probabilidad 1. Esta condición puede ser generalizada si se consideran diferentes probabilidades para cada una de esas acciones. Luego, nuestro marco general proporciona un escenario para el estudio de redes coevolutivas que no conservan el número de enlaces totales.

Otras extensiones de interés que seguramente serán investigadas en el futuro, incluyen la caracterización de las propiedades topológicas de la red en el plano continuo (d, r) , las consecuencias de reglas preferenciales de conexión, la consideración de intensidades variables de conexiones y la influencia de la dinámica de los nodos en las propiedades colectivas de sistemas coevolutivos.

Referencias bibliográficas

- [1] arxiv.org/nlin
- [2] arxiv.org/physics.soc
- [3] K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer (2000).
- [4] R. Badii, A. Politi, *Complexity*, Cambridge University Press (1997).
- [5] A. Mikhailov, V. Calenbuhr, *From Swarms to Societies: Models of Complex Behavior*, Springer (2002).
- [6] H. Schuster, *Complex Adaptive Systems*, Scator-Verlag (2002).
- [7] N. Boccarra, *Modeling Complex Systems*, Cambridge University Press (2004).
- [8] R. K. Pan, K. Kaski, J. Saramäki, S. Sinha, arxiv:1206.0108v1 (2012).
- [9] Philip Ball, *Critical Mass: how one thing leads to another*, Farrar, Straus and Giroux, New York, 2004.
- [10] M.E.J. Newman, A.L. Barabási, D.J. Watts, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [11] A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespigniani, Cambridge University Press (2008).
- [12] L. Euler, *Commentarii Academiae Petropolitanae* **8**, 128 (1736).
- [13] J. Scott, SAGE Publications (2000).
- [14] S. Wasserman and K. Faust, Cambridge University Press, 1 ed., 11, (1994).
- [15] R. Albert and A.L. Barabási *Reviews of Modern Physics* **74**, 1-54, 2002.
- [16] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D. U. Hwuang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
- [17] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of networks*. Oxford, UK: Oxford University Press (2003).
- [18] M.E.J. Newman *SIAM Review* **45**, p. 167, 2003.
- [19] R. Pastor-Satorras, A. Vespigniani, Cambridge University Press, New York (2004).
- [20] P. Erdős and A. Rényi, *Publ. Math. (Debrecen)* **6** pp. 290-297, 1959.

- [21] D.J. Watts, S.H. Strogatz, *Nature* **393** (1998) 440.
- [22] A.L. Barabási, R. Albert, *Science* **286** (1999) 509.
- [23] S. Fortunato, *Phys. Reports*, **486**, 75 (2010).
- [24] T. Gross, B. Blasius, *J. R. Soc. Interface*, **5** (2008) 259.
- [25] J. Ito, K. Kaneko, *Neural Networks*, **13** (2000) 275.
- [26] G. C. M. A. Ehrhardt, M. Marsili, and F. Vega-Redondo, *Phys. Rev. E* **74**, 036106-11 (2006).
- [27] M.G. Zimmermann, V.G. Eguíluz, M. San Miguel, *Phys. Rev. E*. **96** (2004) 065102.
- [28] J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, *Physica A* **390**, 1453 (2011).
- [29] J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, *Revista Científica UNET*, **21**(1), 36-42, (2009).
- [30] J. L. Herrera, M. Escalona-Morán, R. Parra, C. Parra, M. G. Cosenza, *Revista Ciencia e Ingeniería. Edición Especial: “Jornada de Modelado y Simulación, 95-100* (2011).
- [31] J. Ito y K. Kaneko, *Phys.Rev. E* **67**, 046226 (2003).
- [32] P. Holme, M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E*, **74** (2006) 056108.
- [33] J. L. Herrera, Gilberto González-Parra, *Revista de la Facultad de Ingeniería – UCV* (2012) (Aceptado para su publicación).
- [34] J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, J. C. González-Avella, *European Physics Letters* **95**, 58006 (2011).
- [35] A.L. Barabási, *Linked: The New Science of Networks*, Perseus Publishing Co., 2002.
- [36] V. M. Eguíluz, M.G. Zimmermann, C.J. Cela-Conde, and M. San Miguel *American Journal of Sociology* **110** (2005).
- [37] C. Castellano, V. Loreto, A. Barrat, F. Cecconi and D. Parisi, *Phys. Rev. E*, **71**, 066107 (2005).
- [38] V. Sood and S. Redner *Phys. Rev. Lett.* **94**, 178701 (2005).
- [39] K. Suchecki, V.M. Eguíluz and M. San Miguel, *Phys. Rev. E* **72**, 036132 (2005).
- [40] P. Flory *Journal of American Chemical Society* **63**, pp. 3083-3090 (1941).
- [41] A. Rapoport *Bulletin of Mathematical Biophysics* **19**, pp. 257-277 (1957).

- [42] M. Girvan and M.E.J. Newman *Proc Natl Acad Sci USA*, **99**, pp. 7821-7826 (2002).
- [43] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 591 (2009).
- [44] D.J. Watts, *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, Norton, New York (2003).
- [45] M. Faloutsos, R. Pankaj and K.C. Sevcik, “Multicasting in directed graphs”, in *18th Biennial Symposium on Communication*, pp. 2-5 (1996).
- [46] N. Schwartz, R. Cohen, D. Ben-Avraham, A.L. Barabási and S. Havlin, *Phys. Rev. E* **66**(1), 015104 (2002).
- [47] M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E* **64**, 016132 (2001).
- [48] M.A. Serrano, M. Boguña and A. Vespignani *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **106**, 6483 (2009).
- [49] P. Holland and S. Leinhardt *Comparative Group Studies* **2**, pp. 107-124 (1971).
- [50] M.E.J. Newman and M Girvan *Phys. Rev. E* **69**, p. 026113 (2004).
- [51] S. Milgram, *Psychology Today* **1**, p. 60 (1967).
- [52] D.J. Watts, Princeton University Press, Princeton, NJ (USA) (1999).
- [53] J. Leckovec and E. Horvitz WWW '08 Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web Pages 915-924 ACM New York, NY, USA (2008).
- [54] L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander, S. Vigna, arxiv.org/abs/1111.4570.
- [55] K. I. Goh, M. E. Cusick, D. Valle, B. Childs, M. Vidal, A.-L. Barabási *PNAS* **104** 21, 8685 (2007).
- [56] M.F. Laguna, S. Risau Gusman, J.R. Iglesias, J. Vega, *Physica A* **342**, 186 (2004).
- [57] D. Grusky, 3rd ed., Westview Press, (2007).
- [58] T.C. Belding, 2004, [arXiv:nlin/0405048v3](https://arxiv.org/abs/nlin/0405048v3)
- [59] S. Lehmann, A.D. Jackson, B. Lautrup, *Europhys. Lett.* **69**, 2207 (2005).
- [60] A. Vazquez, *Phys. Rev. E* **77** 066106 (2008).
- [61] T.V. Martins, T. Araujo, M.A. Santos, M.St. Aubyn, *Physica A* **338**, 2207 (2009).
- [62] A.C.R. Martin, *Phys. Rev. E* **78** 036104 (2008).
- [63] N. Masuda, N. Konn, *J. Theoret. Biol.* **243**, 64 (2006).

- [64] H. Inaoka, H. Takayasu, T. Shimizu, T. Ninomiya, K. Taniguchi, *Physica A* **339**, 621 (2004).
- [65] V.M. Yakovenko, in R.A. Meyers (Ed.), *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer (2009).
- [66] A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, S.S. Manna, *Physica A* **335**, 155 (2004).
- [67] F. Slanina, *Phys. Rev. E* **69** 46102 (2004).
- [68] J.R. Iglesias, S. Gonçalves, S. Pianegonda, J.L. Vega, G. Abramson, *Physica A* **327**, 12 (2003).
- [69] D. Garlaschelli, M.I. Loffredo. *J. Phys. A* **41**, 22 (2008).
- [70] M. Ausloos, A. Pekalski, *Physica A* **373**, 560 (2007).
- [71] A. Chakraborti, B.K. Chakrabarti, *Eur. Phys. J. B* **17**, 167 (2000).
- [72] J.R. Iglesias, S. Gonçalves, G. Abramson, J.L. Vega, *Physica A* **342**, 186 (2004).
- [73] P. Manneville, *Instabilities, Chaos and Turbulence*, 2nd ed., Imperial College Press, London (2010).
- [74] M. Rodríguez-Achach, R. Huerta-Quintanilla, *Physica A* **361**, 309 (2006).
- [75] <http://en.wikipedia.org/wiki/GiniCoefficient> (2012).
- [76] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1427 (1983).
- [77] R. Kapral, *Phys. Rev. A* **31**, 3868 (1985).
- [78] M. Barahona and L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 054101 (2002).
- [79] M. Kuperman and G. Abramson, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2909 (2001).
- [80] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3200 (2001).
- [81] R. M. May and A. L. Lloyd, *Phys. Rev. E* **64**, 066112 (2001).
- [82] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
- [83] M. Boguña, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 028701 (2003).
- [84] V. M. Tsodyks and H. Markram, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **94** (1997).
- [85] D. O. Hebb, *The Organization of Behavior*, Wiley, New York (1949).
- [86] K. Kaneko, *Physica D*, **41**, 137 (1990).

- [87] C. Castellano, D. Vilone, A. Vespignani, *Europhys. Lett.*, **63** (2003).
- [88] G. Deffuant, F. Amblard, G. Weisbuch, T. Faure, *JASSS*, 5:1 (2002).
- [89] T. M. Liggett, Springer, New York (1985).
- [90] C. Castellano, M. Marsili, A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000).
- [91] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, *Int. J. Mod. Phys. C*, **11** (2000).
- [92] J. M. McPherson, L. Smith-Lovin, J. Cook, *Ann. Rev. Sociol.*, **27** (2001).
- [93] W. B. Arthur, D. A. Lane, *Structural Change and Economics Dynamics*, **4** (1993).
- [94] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras, A. Díaz-Guilera, A. Arenas, *Phys. Rev. E* **70** (2004).
- [95] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E*, **67** 026126 (2003).
- [96] B. Söderberg, *Phys. Rev. E* **66** 066121 (2002).
- [97] K. Medvedyeva, P. Holme, P. Minnhagen, and B. J. Kim, *Phys. Rev. E* **67**, 036118, (2003).
- [98] S. Bikhchandani, D. Hirshleifer, and I. Welch, *Journal of Political Economy*, **100**, 1992.
- [99] A. Grönlund and P. Holme, *Advances in Complex Systems*, **8**, 2005.
- [100] D. J. Watts, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **99**, 2002.
- [101] V. Resmi, G. Ambika, R. E. Amritkar, *Phys. Rev. E* **81**, 04216 (2010).
- [102] J. C. González-Avella, V. M. Eguíluz, M. G. Cosenza, K. Klemm, J. L. Herrera, and M. San Miguel, *Physical Review E* **73**, 046119 [U+0351] (2006 [U+0352]).
- [103] J.C. González-Avella, M. G. Cosenza, K. Tucci. *Phys. Rev. E (Rapid Communications)*, **71**, 065102(R) (2005).
- [104] J.C. González-Avella, M. G. Cosenza, V. M. Eguíluz, M. San Miguel *New Journal of Physics*, **12**, 013010, (2010).
- [105] P. Clifford, A. Sudbury, *Biometrika*, **60**, 581 (1973).
- [106] R. Holley, T.M. Liggett, *Ann. Probab.*, **4**, 195 (1975).
- [107] L. Frachebourg, P.L. Krapivsky, *Phys. Rev. E*, **53** (1996) R3009.
- [108] M. G. Cosenza, O. Alvarez-Llamoza, G. Paredes, *Journal of Physics Conference Series* 246, 012009 (2010).
- [109] H. W. Hethcote, *SIAM REVIEW* **42** 599-653 (2005).

- [110] J. D. Murray, Springer, Berlin (2002).
- [111] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **66**(1) 016128 (2002).
- [112] M. J. Keeling, K. T. D. Eames, J. R. Soc. Interface **2**(4) 295-307 (2005).
- [113] T. Gross, C. Dommar D’Lima, B. Blasius, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 208701.
- [114] V. Marceau, P. A. Noel, L. Hebert-Dufresne, A. Allard, L. J. Dube, Phys. Rev. E **82**(3) 036116 (2010).
- [115] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, Springer-Verlag, (2001).
- [116] H. C. Tuckwell and R. J. Williams, Mathematical Biosciences, **208** 1 (2007).
- [117] M.G. Zimmermann, V.G. Eguíluz, M. San Miguel y A. Spadaro, Adv. Complex Syst., **3** (2000) 283.
- [118] S. Bornholdt, T. Rohlf, Phys. Rev. Lett., **84** (2000) 6114.
- [119] T. Gross, H. Sayana (Editors), Adaptive Networks: Theory, Models and Applications (Springer-Verlag, Heidelberg) 2009.
- [120] C. Meisel, T. Gross, Phys. Rev. E **80**, 061917 (2009).
- [121] J. Ito, K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 028701.
- [122] P. Gong, C. Van Leeuwen, Europhys. Lett., **67** (2004) 328.
- [123] T. Shibata, K. Kaneko, Physica D, **181** (2003) 197.
- [124] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou, Phys. Rep., **469** (2008) 93.
- [125] J. Gao, Z. Li, T. Wu, L. Wang, EPL, **93** (2011) 48003.
- [126] S. Mandrá, S. Fortunato, C. Castellano, Phys. Rev. E, **80** (2009) 056105.
- [127] S. Risau-Guzman, D.H. Zanette, J. Theor. Biol. **257** (2009) 52.
- [128] F. Vazquez, D.H. Zanette, Physica D, **239** (2010) 1922.
- [129] I.B. Schwartz, L.B. Shaw, Physics, **3** (2010) 17.
- [130] F. Vazquez, V.M. Eguíluz, M. San Miguel, Phys. Rev. Lett., **100** (2008) 108702.
- [131] D. Centola, J.C. González-Avella, V.M. Eguíluz, M. San Miguel, J. Conf. Resolut., **51** (2007) 905.
- [132] F. Vazquez, J.C. González-Avella, V.M. Eguíluz, M. San Miguel, Phys. Rev. E **76** (2007) 46120.

- [133] B. Kozma, A. Barrat, Phys. Rev. E, **77** (2008) 016102.
- [134] D. Kimura, Y. Hayakawa, Phys. Rev. E, **78** (2008) 016103.
- [135] M. Medo, Y.-C. Zhang, T. Zhou, EPL, **88** (2009) 38005.
- [136] G.A. Böhme, T. Gross, Phys. Rev. E, **83** (2011) 035101(R).
- [137] R. Guimera, M. Salas-Pardo, L. A. Nunes Amaral, Phys. Rev. E **70** 025101 (2004).

*Estamos tan en la frontera que si damos un paso más,
caemos al abismo.*

JUAN CARLOS GONZÁLES-AVELLA, TESISISTA CAÓTICO
(2006).

Publicaciones

Los principales resultados de esta tesis han sido presentados en varios artículos científicos. A continuación los trabajos que han sido publicados y los que han sido enviados para arbitraje. Se han colocado en orden cronológico.

- *Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada con interacciones locales*, J.L. Herrera, M. G. Cosenza K. Tucci, Revista Científica UNET 21, **8** (2009).
- *Stratified economic exchange on networks*, J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, Physica A **390**, 1453 (2011).
- *General coevolution of topology and dynamics in networks*, J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, J. C. González-Avella, EPL **95**, 58006 (2011).
- *Influencia de las interacciones locales versus globales en un modelo de intercambio económico estratificado*, J. L. Herrera, M. Escalona-Morán, R. Parra, C. Parra, M. G. Cosenza, Aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería, Universidad de Los Andes (2011).
- *Modelado de enfermedades contagiosas mediante una clase de redes sociales dinámicas*, J. L. Herrera, Gilberto González-Parra, Aceptado en la Revista de Ciencia de la UCV
- *Dynamical graphs for the SI epidemiological model*, J.L. Herrera, Gilberto González-Parra. Enviado a Revista Brasileira de Ensino de Física.
- *Emergence of communities in coevolutionary networks*, J. C. González-Avella, J. L. Herrera, K. Tucci. M. G. Cosenza. Preprint (2012).